

DARIUSZ SPAŁEK

*MOMENTY SIŁ
W ŚRODOWISKACH PRZEWODZĄCYCH I MAGNETYCZNYCH
PRZETWORNIKÓW ELEKTROMECHANICZNYCH*

SPIS TREŚCI

Ważniejsze oznaczenia	7
1. Wstęp	11
1.1. Cel i zakres pracy	11
1.2. Tezy pracy	13
1.3. Opis fizyczny i matematyczny zjawisk	14
2. Równania Maxwella pola elektromagnetycznego	19
2.1. Wprowadzenie	19
2.2. Pierwsza para równań Maxwella	19
2.3. Druga para równań Maxwella	20
3. Pole elektromagnetyczne w ośrodku materialnym	21
4. Opis sił działających w polu elektromagnetycznym	25
4.1. Gęstość sił w polu elektromagnetycznym	26
4.2. Tensory energii pola elektromagnetycznego	30
4.2.1. Tensory energii pola elektromagnetycznego	30
4.2.2. Różnicowy tensor energii pola elektromagnetycznego	32
4.3. Tensory energii pola elektromagnetycznego - zestawienie	34
4.4. Postacie zależności określających gęstości sił	36
4.5. Konfrontacja literaturowa	41
5. Analiza momentów sił w przetwornikach elektromechanicznych	45
5.1. Składowe momentu maszyny elektrycznej	45
5.1.1. Moment permeancyjny maszyny elektrycznej	46
5.1.2. Skokowa zmiana reluktywności magnetycznej	49
5.2. Moment całkowity maszyny elektrycznej	53
5.3. Przykład analitycznego obliczenia momentów maszyny	54
5.4. Moment permeancyjny i reluktancyjny	63

5.5. Numeryczna analiza momentów sił maszyny synchronicznej z biegunami wydatnymi	67
5.6. Numeryczna analiza momentów sił cylindrycznej maszyny synchronicznej	75
6. Analiza sił w przetwornikach elektromechanicznych	84
7. Różnicowy tensor energii pola elektromagnetycznego	90
7.1. Obliczanie momentu elektromagnetycznego metodą prądów magnetyzacji	91
7.2. Dwuwymiarowa analiza pola elektromagnetycznego maszyny elektrycznej o litym anizotropowym wirniku	95
7.3. Obliczanie momentu elektromagnetycznego w środowiskach anizotropowych magnetycznie	113
8. Maszyna indukcyjna o niesymetrycznym i ekscentrycznie wirującym wirniku	119
8.1. Obliczanie momentu elektromagnetycznego maszyny o niesymetrycznym wirniku	122
8.2. Siły promieniowe - źródło hałasu magnetycznego	139
9. Podsumowanie	144
Dodatek 1. Tożsamość pomocnicza	147
Dodatek 2. Gęstości sił - równania pomocnicze	148
Dodatek 3. Operacje we współrzędnych cylindrycznych	152
Dodatek 4. Całki pomocnicze	155
Literatura	157
Streszczenie	166

CONTENTS

Meanings	7
1. Introduction	11
1.1. The aim and theme	11
1.2. The thesis	13
1.3. Physical and mathematical phenomena description	14
2. Maxwell's equation of electromagnetic field	19
2.1. Introduction	19
2.2. The first pair of Maxwell's equations	19
2.3. The second pair of Maxwell's equations	20
3. The electromagnetic field in material region	21
4. Electromagnetic forces description	25
4.1. Electromagnetic force density	26
4.2. Energy tensors of electromagnetic field	30
4.2.1. Crossed energy tensor of electromagnetic field	30
4.2.2. Residual energy tensor of electromagnetic field	32
4.3. Energy tensors of electromagnetic field - survey	34
4.4. The forms of relations for force densities	36
4.5. Literature confrontation	41
5. Electromechanical energy converter torque analysis	45
5.1. Electrical machine torque components	45
5.1.1. Electrical machine permeantive torque	46
5.1.2. Discontinuous change of magnetic reluctivity	49
5.2. Electrical machine total torque	53
5.3. Analytical example for torque calculation	54
5.4. Permeantive and reluctative torque	63

5.5. Numerical analysis for salient-pole synchronous machine torques	67
5.6. Numerical analysis for synchronous cylindrical machine torques	75
6. Forces analysis of electromechanical converter	84
7. Residual energy tensor of electromagnetic field	90
7.1. Electromagnetic torque calculation with the help of magnetising current method	91
7.2. Two-dimensional analysis of electromagnetic for electric machine with solid anisotropic rotor	95
7.3. Electromagnetic torque calculation for magnetically anisotropic region	113
8. Induction machine with asymmetric and eccentrically rotating rotor	119
8.1. Electromagnetic torque calculation for machine with asymmetric rotor	122
8.2. Radial forces - the source of magnetic noises	139
9. Summary	144
Appendix 1. Additional equation	147
Appendix 2. Force densities - additional equations	148
Appendix 3. Operations for cylindrical co-ordinate system	152
Appendix 4. Auxiliary integrals	155
References	157
Abstract	166

WAŻNIEJSZE OZNACZENIA

Indeksy

Sumacyjne wskaźniki (małe litery łacińskie): $i, j, k, l, \dots \in \{1, 2, 3\}$,

odpowiadają współrzędnym x, y, z , (w układzie współrzędnych prostokątnych)

r, α, z (w układzie współrzędnych walcowych),

wskaźniki czasoprzestrzenne: i, j, k, \dots podlegają konwencji sumacyjnej Einsteina.

wskaźniki: u, v, w, \dots opisują składowe przestrzenne podlegające konwencji sumacyjnej.

Wskaźniki: x, y, z, r, α, z - nie podlegają konwencji sumacyjnej Einsteina.

Wskaźniki n oraz t oznaczają odpowiednio składową normalną i styczną wektora.

Niewykonywanie sumowania zaznacza się ujmując wskaźnik w znak modułu, np.: $\mathfrak{I}_{|i|}$.

Indeksy „r” oraz „s” odnoszą się do wirnika lub stojana maszyny;

indeks „r” oznacza także wielkości względne - np. względną przenikalność magnetyczną.

Wskaźniki będące dużymi łacińskimi literami odnoszą się bezpośrednio do symbolu podstawowego, który indeksują, nie stanowiąc wskaźnika sumacyjnego, np.

\vec{S}_1 - wektor Poyntinga indukcji pól elektrycznego i magnetycznego.

Indeks dolny „v” oznacza gęstość objętościową wielkości indeksowanej.

Indeks dolny „e” odnosi się wyłącznie do oznaczenia elektromagnetycznego momentu całkowitego bądź jego składowych.

Składowe pola magnetycznego pisane grubym drukiem oznaczają wartości zespolone.

Pochodną cząstkową po czasie $\frac{\partial X}{\partial t}$ znaczy się również za pomocą kropki: \dot{X} .

Stale uniwersalne

ϵ_0 - przenikalność dielektryczna próżni,

μ_0 - przenikalność magnetyczna próżni,

ν_0 - reluktywność magnetyczna próżni: $\nu_0 = 1/\mu_0$,

c - prędkość światła w próżni.

Wielkości skalarne i tensorowe

$l(z)$ - funkcja skoku jednostkowego Heviside'a,

a - grubość warstwy przewodzącej wirnika maszyny elektrycznej,

$e_v = \frac{1}{2} \vec{B}\vec{H} + \frac{1}{2} \vec{D}\vec{E}$ - dwuliniowa forma energii pola elektromagnetycznego,

$\Delta e_v = \frac{1}{2} \vec{B}\vec{I} - \frac{1}{2} \vec{P}\vec{E}$ - dwuliniowa, różnicowa forma energii pola elektromagnetycznego,

f_s - częstotliwość zasilania stojana maszyny,

F_{Fe} - siła środowiskowa, permeancyjna,

$g(\alpha)$ - grubość szczeliny powietrznej maszyny elektrycznej,

$I_p(z)$ - funkcja Bessela zmodyfikowana (Dodatek D3),

$K_p(z)$ - funkcja Bessela zmodyfikowana (Dodatek D3),

l - długość obliczeniowa maszyny elektrycznej,

$L = L_u L_v L_w$ - iloczyn współczynników Lamego w danym układzie współrzędnych,

L_u, L_v, L_w - współczynniki Lamego dla danego układu współrzędnych,

p - liczba par biegunów maszyny,

p_μ - ciśnienie magnetyczne,

$r_o(\alpha), r(\alpha)$ - funkcja opisująca kształt powierzchni wirnika maszyny elektrycznej,

Q_e - straty mocy Joule'a,

T_e - moment sił całkowity, użyteczny,

$T_{e,Cu}$ - moment sił Lorentza, moment Lorentza (indeks 'Cu' odnosi się do sił bądź momentów działających na środowiska przewodzące),

$T_{e,Fe}$ - moment permeancyjny, moment środowiskowy (indeks 'Fe' odnosi się do sił bądź momentów działających na środowiska magnetyczne),

$T_{e,R}$ - moment reluktancyjny,

T_μ - moment od prądów magnetyzacji,

V - potencjał pola elektrycznego,

W_c - koenergia układu,

γ - przewodność elektryczna,

$\delta(z - z_o)$ - symbol delty Diraca,

δ_{uw} - delta Kroneckera,

$\varepsilon_{uw}, \nu_{uw}$ - współczynniki materiałowe,

φ - współrzędna kątowa, kąt,

ϑ - kąt obrotu wirnika maszyny,

$\lambda(\alpha, \vartheta)$ - przewodność magnetyczna szczeliny powietrznej
 ρ - gęstość objętościowa ładunku elektrycznego (rozdz.2, 3) lub gęstość masy (rozdz.8),
 σ_α, σ_r - naprężenia działające w kierunku stycznym i promieniowym,
 σ_{uv} - tensor naprężeń Maxwella,
 $\Delta\sigma_{uv}$ - różnicowy tensor naprężeń pola elektromagnetycznego,
 \mathfrak{T}_{ik} - tensor Minkowskiego,
 $\Delta\mathfrak{T}_{ik}$ - różnicowy tensor pola elektromagnetycznego,
 $\Theta_s(\alpha), \Theta_r(\alpha, \vartheta)$ - przepływ uzwojeń stojana i wirnika maszyny,
 $\omega_s = 2\pi f_s$ - pulsacja prądu stojana.

Wielkości wektorowe

wektory jednostkowe w układzie współrzędnych prostokątnych: $\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z$,
 walcowych: $\vec{i}_r, \vec{i}_\alpha, \vec{i}_z, \vec{i}_r \times \vec{i}_\alpha = \vec{i}_z$,
 \vec{A} - potencjał wektorowy pola magnetycznego,
 \vec{E}, \vec{D} - natężenie oraz indukcja pola elektrycznego,
 \vec{f} - gęstość sił całkowitych, użytecznych,
 \vec{f}_L - gęstość sił Lorentza,
 \vec{H}, \vec{B} - natężenie i indukcja pola magnetycznego,
 \vec{I} - wektor magnetyzacji pola magnetycznego,
 $\vec{j}, \Delta\vec{j}$ - gęstości prądów wymuszonego (wraz z prądami przewodzenia) i cząstek ośrodka,
 \vec{N} - gęstość sił środowiskowych, składnik niejednorodnościowy,
 \vec{P} - polaryzacja pola elektrycznego,
 \vec{v} - prędkość punktu materialnego (cząstki).

Stosowanym w pracy układem jednostek jest układ SI.

1. WSTĘP

1.1. CEL I ZAKRES PRACY

Praca dotyczy zagadnień analizy sił i momentów sił, a w szczególności ich fizykalnie interpretowalnych składników w przetwornikach elektromechanicznych, jakimi są wirujące maszyny elektryczne oraz elektromagnesy.

Punktem wyjścia są równania Maxwella pola elektromagnetycznego. Praca, omawiając metodę określenia gęstości sił, składników sił i momentów sił, bazuje na fundamentalnych zależnościach określających gęstość siły Lorentza i sił całkowitych. W pracy zaprezentowano analizę sił, momentów sił oraz ich składników ze szczególnym naciskiem na ich fizykalną interpretację. Rozróżnienia składników sił i momentów sił dokonuje się w zależności od tego, czy wynikają one z przepływu prądów wymuszonych i przewodzenia, czy też z faktu umieszczenia ośrodka materialnego w polu elektromagnetycznym.

Pokazano celowość stosowania zaproponowanego rozkładu sił w odniesieniu do przetworników elektromechanicznych. Do analiz szczegółowych w kolejnych rozdziałach wybrano:

- modelową maszynę prądu przemiennego,
- maszynę synchroniczną z wydatnymi biegunami,
- maszynę synchroniczną cylindryczną,
- elektromagnes,
- maszynę indukcyjną z przewodzącym i magnetycznie anizotropowym wirnikiem oraz
- maszynę indukcyjną o niesymetrycznym i ekscentrycznym wirniku.

Wyróżnione składniki sił bądź momentu sił pozwalają ocenić, jaki wpływ wywarły na powstającą siłę (moment elektromagnetyczny) kształty geometryczne, parametry środowiskowe oraz płynące prądy w układzie danego przetwornika elektromechanicznego.

Na gruncie zaproponowanego rozkładu całkowitego momentu sił zapostulowano odmienny niż tradycyjny podział momentu elektromagnetycznego maszyny synchronicznej z wydatnymi biegunami. W miejsce podziału momentu elektromagnetycznego na moment synchroniczny i reluktancyjny wprowadza się podział na moment sił Lorentza i moment środowiskowy (permeancyjny). Pokazano, iż moment elektromagnetyczny wywołany siłami działającymi na środowisko magnetyczne, jakim jest ferromagnetyczny wirnik maszyny - moment środowiskowy - nie jest w ogólności równy momentowi reluktancyjnemu. Moment reluktancyjny nie posiada również interpretacji fizykalnej o charakterze ogólnym. W przeciwieństwie do momentu środowiskowego nie opisuje on całościowo wkładu, jaki dają siły działające na odpowiednio ukształtowany wirnik do momentu globalnego. Zdefiniowany moment środowiskowy może być wykorzystywany do oceny stanu naprężeń

w izolacji maszyny synchronicznej o biegunach utajonych bądź wydających. Moment środowiskowy może być również wykorzystywany do opisu niepożądanego składnika momentu globalnego w maszynie indukcyjnej o ekscentrycznym lub niesymetrycznym wirniku. Wykorzystując pojęcie momentu środowiskowego można podać efektywny numerycznie algorytm obliczania strat od prądów wirowych w litym niesymetrycznym wirniku maszyny.

W pracy zaproponowano również modyfikację metody prądów magnetyzacji. Modyfikacja polega na wykorzystaniu zdefiniowanego różnicowego tensora energii w analizie momentów sił. Zaproponowana metodyka wyznaczania momentu sił nie wymaga zadawania powierzchniowych prądów magnetyzacji na brzegu rozważanego obszaru.

Analizę sił i momentów sił w przetwornikach elektromagnetycznych prowadzono stosując analityczne i numeryczne techniki obliczeniowe. Zagadnienia analizy sił stycznych i radialnych w wirujących przetwornikach elektromagnetycznych są ciągle aktualne i szczególnie ważne, jeżeli rozpatruje się gęstość objętościową tychże sił, np. dla potrzeb oceny poziomu drgań bądź naprężeń. Podanie ogólnych zależności opisujących gęstości sił jest przydatne przy obliczaniu sił lokalnych, momentów sił oraz naprężeń. W tej klasie zagadnień poszukiwanie rozwiązań oraz zależności analitycznych powinno stanowić podstawę dla dalszych analiz numerycznych.

Autor, wychodząc z założenia, że przeprowadzone rozumowania przypominają metodykę opisu wielkości polowych, przegląd literatury przedstawił w podrozdziale 4.5. W podrozdziale 4.5 przedstawione zostało bardziej szczegółowe odniesienie do przykładów analiz w literaturze krajowej i światowej z jednoczesnym wskazaniem na najistotniejsze podobieństwa i różnice metod. Metodyka opisu sił i momentów sił - uzupełniona o prowadzone rozważania - prowadzi w konsekwencji do prezentowanych wniosków. Praca, z uwagi na założony zakres, nie uwzględnia szeregu zjawisk, które przy modelowaniu i opisie pewnych szczegółowych zagadnień mogą się okazać niepomijalne. Nie uwzględnia się rozkładu temperatury i jej wpływu na parametry materiałowe, złożonego charakteru ruchu, histerezy magnetycznej, zjawiska magnetostrykcji, dyspersji częstotliwościowej i innych.

1.2. TEZY PRACY

Praca obejmuje swoim zakresem kilka zagadnień, które dotyczą analiz sił i momentów sił w przetwornikach elektromechanicznych.

Główne tezy pracy można sformułować następująco:

1. W przetwornikach elektromechanicznych o dominującym polu magnetycznym (w sensie gęstości objętościowej energii pola) wydzielono składnik środowiskowy sił. Gęstość sił działających na środowisko magnetyczne jest opisana przez tzw. składnik niejednorodnościowy gęstości sił \vec{N} . Moment sił wynikający z działania sił na ośrodek magnetyczny określa się mianem momentu permeancyjnego bądź środowiskowego. Moment permeancyjny może być wykorzystywany do analizy naprężeń w izolacji uzwojeń maszyny synchronicznej o biegunach utajonych i wydalnych. Moment permeancyjny umożliwia podanie algorytmu pozwalającego na efektywne wyznaczanie niepożądanego momentu sił w maszynie indukcyjnej o ekscentrycznym wirniku.
2. Można zdefiniować niesymetryczny różnicowy pseudotensor $\Delta\sigma_{uw}$ postaci:

$$\Delta\sigma_{uw} = -I_u B_w + E_u P_w + \delta_{uw} \frac{1}{2} (\vec{B}\vec{I} - \vec{E}\vec{P}),$$

który występuje w poniższej zależności opisującej składnik niejednorodnościowy:

$$\vec{N} = \Delta\vec{f} + \vec{i}_u \operatorname{div}_{|u|} (\Delta\vec{\sigma}_u) - \Delta\vec{k}.$$

Dowód powyższej formuły został przeprowadzony w oparciu o:

- równania Maxwella pola elektromagnetycznego,
- zależność określającą gęstość siły Lorentza:

$$\vec{f}_L = \rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}.$$

Gęstość sił środowiskowych wyraża się poprzez dywergencję różnicowego pseudotensora energii oraz składnik $\Delta\vec{f}$ opisujący działanie pola elektromagnetycznego na ładunki i prądy środowiska (ładunki polaryzacji i prądy magnetyzacji). Za pomocą różnicowego pseudotensora energii pola elektromagnetycznego można dokonać modyfikacji metody analizy sił w oparciu o prądy magnetyzacji.

3. Istnieje możliwość przedstawienia całkowitego momentu sił działających w obszarze anizotropowym poprzez całkę funkcji pola po brzegu rozważanego obszaru. Tezę

powyższą udowodniono dla obszaru anizotropowego o symetrycznej macierzy reluktywności. Zwrócono uwagę na fakt, iż w przypadku anizotropii opisanej niesymetryczną macierzą reluktywności właściwość ta nie musi być spełniona.

1.3. OPIS FIZYKALNY I MATEMATYCZNY ZJAWISK

a) Współrzędne opisujące fizyczne zjawiska zachodzące w polu elektromagnetycznym podlegają transformacji Lorentza [E.1, I.1, L.2]. Współrzędne punktu czasoprzestrzeni zgodnie ze szczególną teorią względności podlegają regułom transformacji Lorentza [E.1, I.1, L.2]:

$$x' = b(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = b\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \quad (1.1)$$

gdzie:

$$b = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \text{ - odwrotność współczynnika dylatacji czasu [L.2].}$$

Z punktu widzenia szczególnej teorii względności wszystkie układy inercjalne są równoważne [E.1] i wybór taki jest dowolny. Z uwagi na prowadzoną w dalszych rozdziałach analizę pola elektromagnetycznego przetworników elektromechanicznych wyróżnia się układ współrzędnych spoczywający względem części przetwornika elektromechanicznego stanowiącej konstrukcyjny fundament przetwornika. Najczęściej jest on związany ze stojanem silnika lub jarzmem transformatora. Zakłada się, iż efekty relatywistyczne determinowane przez wartość v/c są pomijalne:

$$\frac{v}{c} \ll 1. \quad (1.2)$$

b) Pole grawitacyjne Ziemi w rozważanych przetwornikach elektromechanicznych nie wpływa na zakrzywienie czasoprzestrzeni [E.1, L.2]. Pole sił bezwładności będąc równoważne stacjonarnemu polu sił grawitacji [L.2, s.288] również nie wpływa na zakrzywienie czasoprzestrzeni, jako że rozważane prędkości obrotowe Ω_m są nieznaczne w sensie warunkowania efektów ogólnej teorii względności:

$$\frac{\Omega_m R}{c} \ll 1, \quad (1.3)$$

gdzie R jest promieniem najbardziej oddalonego od osi obrotu wirującego elementu przetwornika elektromechanicznego.

c) Efekty związane z siłami opisywanymi poprzez pęd pola elektromagnetycznego [J.1, L.4] są pomijalne w rozpatrywanych przetwornikach elektromechanicznych. Przykładowo, gęstość sił opisywana tym składnikiem oszacowana zostanie dla sinusoidalnych wzajemnie prostopadłych pól: magnetycznego o amplitudzie indukcji $B=1$ T i elektrycznego

o amplitudzie natężenia $E = 2000 \text{ V/m}$. Niech częstotliwość zmian obu pól wynosi 50 Hz . Amplituda rozważanego przyczynku do bilansu gęstości sił wynosi:

$$\frac{2\pi f}{c^2} v_0 E B \approx 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}^3}.$$

Łatwo zauważyć, iż obszar 10 m^3 przestrzeni pola elektromagnetycznego, w której panują wyżej opisane pola, da siłę o wartości około $1 \mu\text{N}$. Powyższe oszacowanie pozwala pomijać w dalszych rozważaniach pochodne czasowe wektora Poyntinga oraz zjawisko pędu pola elektromagnetycznego.

d) Przyjmuje się, iż rozkład temperatury i rozptył strumieni cieplnych w przetworniku elektromagnetycznym nie wpływa na parametry materiałowe oraz wymiary geometryczne elementów konstrukcyjnych przetwornika elektromechanicznego.

e) Przepływ prądu poprzez części przewodzące powoduje drgania magneto-termosprężyste [aZ.5]. Amplituda tych drgań zależy od częstotliwości prądu oraz od parametrów geometrycznych i materiałowych części przewodzącej, która może być w przybliżeniu traktowana jako płyta bądź układ płyt przewodzących. Decydujący wpływ na charakter tych drgań wywierają - oprócz wymiarów i kształtu płyty - wartości modułu Younga oraz współczynnik Poissona [H.2]. Magnetotermosprężysty stan płyty, przy założeniu przepływu sinusoidalnie zmiennego prądu w czasie, opisuje układ równań różniczkowych cząstkowych szóstego rzędu [aZ.5]. Analiza tego układu pokazuje, iż fale magnetotermosprężyste o wszystkich długościach są tłumione. Dalsza szczegółowa analiza pokazuje, iż możliwe są przypadki pęknięcia płyt przy pewnych parametrach płyty. W niniejszej pracy nie uwzględnia się drgań magnetotermosprężystych w przetworniku elektromechanicznym.

f) W pracy zakłada się, iż długości fal sprężystych są znacznie większe od wymiarów geometrycznych przetwornika elektromechanicznego. Prędkość rozchodzenia się fal sprężystych zależy od parametrów materiałowych elementów przetwornika elektromechanicznego, takich jak moduł sprężystości podłużnej Younga E , współczynnik Poissona ν , gęstość objętościowa d [L.3, s.117]. Dla typowych wartości materiałów wykorzystywanych w budowie przetworników elektromechanicznych: $E = (1 \div 2) \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, $d = (5 \div 8) \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\nu = (0.25 \div 0.3)$ prędkości rozchodzenia się fal sprężystych wynoszą: $\sim (1000 \div 2000) \text{ m/s}$. Oznacza to, iż przy częstotliwości 100 Hz (podwojona częstotliwość zasilania dla szerokiej klasy przetworników elektromechanicznych) długości fal mogą być oszacowane poprzez wartości:

$$\sim (10 \div 20) \text{ m}. \quad (1.4)$$

Oszacowanie (1.4) pozwala przyjąć, iż dla potrzeb dalszych rozważań zjawiska sprężystości mogą zostać pominięte. Dla większych częstotliwości długości fal sprężystych są odwrotnie proporcjonalnie mniejsze i porównywalne z wymiarami przetwornika elektromechanicznego. Drgania o takich częstotliwościach mogą odgrywać istotną rolę przy powstawaniu hałasu

magnetycznego [K.7]. Uproszczoną ocenę poziomu hałasu magnetycznego powodowanego siłami promieniowymi przedstawiono w podrozdziale 8.2.

Problematyka analizy drgań sprężystych w przetwornika elektromechanicznych w ogólności stanowi złożoną grupę zagadnień. Na przykład, w maszynach elektrycznych wirujących zasilanych poprzez układy przekształtnikowe - gdzie pojawiają się harmoniczne wyższych rzędów - mogą się uwidaczniać efekty rezonansowe. Przykładowo, dla maszyny synchronicznej mocy 315 kVA częstotliwość drgań skrętnych wynosi około 77 Hz, a drgań swobodnych około 170 Hz [aB.9]. W przypadku możliwości pojawiania się drgań o częstotliwościach zbliżonych do częstotliwości rezonansowych należy dokonać zmiany układu zasilającego bądź konstrukcji przetwornika.

Wielkości fizyczne opisujące pole elektromagnetyczne, takie jak składowe wektorów pola elektrycznego, magnetycznego i szeregu innych, są przedstawiane w literaturze często w notacji tensorowej [B.5, aB.5, E.1, I.1, K.1, K.4, L.2]. Taka forma opisu ma na celu zapewnienie zwięzłości notacji oraz niezmienniczości równań. W niniejszej pracy - z uwagi na prowadzenie analiz numerycznych - stosowana jest notacja wektorowa w ortogonalnych układach współrzędnych dla równań pola elektromagnetycznego.

Twierdzeniem wykorzystywanym dla celów obliczania sił i momentów sił jest twierdzenie Gaussa. W celu sformułowania twierdzenia Gaussa [I.1, K.3, L.6] należy określić właściwości rozważanego obszaru oraz jego brzegu.

Rozważmy regularny k -wymiarowy płat powierzchniowy Ω_i położony na zbiorze, który jest opisany poprzez wzajemnie jednoznaczne przekształcenie klasy C^1 :

$$\mathcal{R}^k \supset D \ni (t_1, t_2, \dots, t_k) \rightarrow \mathbf{x}(t_1, t_2, \dots, t_k) \in \mathcal{R}^n, \quad (1.5)$$

takie iż dla wszystkich parametrów $(t_1, t_2, \dots, t_k) \in D$ macierz pochodnych:

$$\left[\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial t_j} \right] \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, k \leq n,$$

jest rzędu k .

Regularny płat powierzchniowy jest zorientowany, gdy przy pewnej wybranej parametryzacji dopuszcza się tylko takie jego parametryzacje klasy C^1 :

$$\tau_i = \tau(t_1, t_2, \dots, t_k) \quad i = 1, \dots, k,$$

dla których wyznacznik macierzy:

$$\left[\frac{\partial \tau_i}{\partial t_j} \right] \quad i = 1, \dots, k \quad j = 1, \dots, k,$$

jest dodatni.

Przyjmuje się, iż dla każdego wewnętrznego punktu płata powierzchniowego można wyróżnić wektor normalny skierowany na zewnątrz obszaru.

Jeżeli jest dany k-wymiarowy obszar Ω składający się ze skończonej liczby regularnych podobszarów, których brzegi są utworzone ze skończonej liczby (k-1)-wymiarowych regularnych płatów powierzchniowych, a ich orientacja indukuje orientację całego brzegu $\partial\Omega$, to dla formy różniczkowej F klasy C^1 zachodzi:

$$\int_{\partial\Omega} F = \int_{\Omega} dF. \quad (1.6)$$

Przez formę różniczkową zewnętrzną p-tego stopnia F (różniczka zewnętrzna stopnia p-tego) rozumie się wyrażenie:

$$F = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p} a_{i_1, i_2, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}, \quad (1.7a)$$

gdzie:

i_1, i_2, \dots, i_p - oznacza permutację liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, p\}$,

a_{i_1, i_2, \dots, i_p} - współczynnik formy różniczkowej,

symbol \wedge oznacza iloczyn zewnętrzny; przestawienie dwóch różniczek w iloczynie zmienia jego znak.

Różniczką dF formy (1.7a) p-tego stopnia klasy C^p nazywa się formę różniczkową stopnia (p+1)-szego postaci:

$$dF = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} a_{i_1, i_2, \dots, i_p} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} a_{i_1, i_2, \dots, i_p} dx_n \right) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}. \quad (1.7b)$$

Z twierdzenia powyższego wynika twierdzenie Gaussa, które w układzie współrzędnych krzywoliniowych ortogonalnych ma postać [I.1, K.1]:

$$\oint_{\partial\Omega} B_n df_n = \iiint_{\Omega} \text{div}(\vec{B}) d\Omega, \quad (1.8a)$$

lub

$$\int_{\partial\Omega} B_n df_n = \int_{\Omega} \text{div}(\vec{B}) d\Omega, \quad (1.8b)$$

gdzie Ω - oznacza obszar, a $\partial\Omega$ jego brzeg.

Dla potrzeb dalszych analiz należy zwrócić uwagę, iż założenia twierdzenia Gaussa są spełnione, o ile podobszar i jego brzeg czynią zadość wyżej opisanym wymaganiom, a składowe potencjału pola magnetycznego są klasy C^2 w obszarze i na jego brzegu.

2. RÓWNANIA MAXWELLA POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO

W rozdziale drugim przedstawiono notację równań Maxwella pola elektromagnetycznego, wykorzystywaną w dalszych rozdziałach pracy.

2.1. WPROWADZENIE

Pole elektromagnetyczne opisane jest poprzez równania Maxwella. Przyjęcie związków środowiskowych oraz zadanie warunków brzegowych pozwalają na określenie rozkładu pola elektromagnetycznego w rozważanym obszarze [I.1, J.1, J.3, K.4, S.4]. W niniejszej pracy wykorzystano analityczne oraz numeryczne metody prowadzące do wyznaczenia rozkładu pola elektromagnetycznego. Z grupy metod analitycznych wybrano metodę rozdzielania zmiennych, a z grupy metod numerycznych metodę elementów skończonych. Dla potrzeb analizy sił oraz momentów sił w przetwornikach elektromechanicznych równania Maxwella będą zapisywane w ortogonalnych układach współrzędnych: kartezjańskim oraz walcowym.

2.2. PIERWSZA PARA RÓWNAŃ MAXWELLA

Na naładowaną cząstkę w polu elektromagnetycznym działa siła [L.2, S.3] o wartości:

$$\vec{F} = -q\dot{\vec{A}} - q \text{grad } V + q[\vec{v} \times \text{rot } \vec{A}], \quad (2.1)$$

gdzie:

V, \vec{A} - potencjał skalarny pola elektrycznego oraz wektorowy pola magnetycznego,
 q - ładunek poruszający się z prędkością \vec{v} w polu elektromagnetycznym.

Wektory natężenia pola elektrycznego oraz indukcji pola magnetycznego - jako wektory określające wartość działającej siły w polu elektromagnetycznym zgodnie z (2.1) - są równe odpowiednio:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \Big|_{\vec{v}=0} \quad \wedge \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (2.2)$$

Pierwsza z powyższych zależności określa natężenie pola elektrycznego jako wektor opisujący składową siły nie zależną jawnie od prędkości cząstki. Druga z zależności definiuje

indukcję pola magnetycznego poprzez potencjał magnetyczny. Ta składowa siły zależy jawnie od prędkości cząstki w polu elektromagnetycznym.

Zależności (2.1), (2.2) implikują związki:

$$\vec{E} = -\text{grad } V - \dot{\vec{A}} \quad \wedge \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (2.3)$$

Potencjał skalarny i magnetyczny potencjał wektorowy występujące w zależnościach (2.3) są wielkościami, które nie są określone jednoznacznie. Rozkład pola wektorów \vec{E} , \vec{B} pozostaje zachowany dla pewnej klasy potencjałów V, \vec{A} . Mianowicie, potencjały pola elektromagnetycznego podlegające transformacji cechowania nie prowadzą do zmiany rozkładu wektorów pola \vec{E}, \vec{B} . Rozkład potencjałów pola elektromagnetycznego staje się jednoznaczny, jeżeli żąda się spełnienia dodatkowego warunku, np. warunku Lorentza [L.2, S.4].

Gęstość objętościowa siły działającej na ładunek elektryczny (ruchomy bądź nieruchomy), rozłożony w sposób ciągły w polu elektromagnetycznym (2.1), może być zatem przedstawiona w postaci:

$$\vec{f}_0 = \rho_0 \vec{E} + \vec{j}_0 \times \vec{B}, \quad (2.4)$$

gdzie:

ρ_0 - gęstość objętościowa ogółu ładunków w polu elektromagnetycznym,

\vec{j}_0 - gęstość ogółu prądów w polu elektromagnetycznym.

Związki definicyjne (2.3) implikują bezpośrednio pierwszą parę równań Maxwella w formie [I.1, J.2, S.4]:

$$\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad \wedge \quad \text{div } \vec{B} = 0. \quad (2.5)$$

2.3. DRUGA PARA RÓWNAŃ MAXWELLA

Analiza całki działania ładunku punktowego w polu elektromagnetycznym [L.2, S.4] pozwala formalnie wprowadzić drugą parę równań Maxwella dla próżni w postaci:

$$\text{div}(\epsilon_0 \vec{E}) = \rho_0 \quad \wedge \quad \text{rot}(\nu_0 \vec{B}) = \vec{j}_0 + \epsilon_0 \dot{\vec{E}}, \quad (2.6)$$

gdzie: ν_0 - reluktywność magnetyczna próżni,

ϵ_0 - przenikalność dielektryczna próżni $\epsilon_0 = \nu_0 c^{-2}$.

Postać równań Maxwella w środowiskach materialnych określają zależności podane w następnym rozdziale.

3. POLE ELEKTROMAGNETYCZNE W OŚRODKU MATERIALNYM

W rozdziale 3. przedstawiono przyjęte założenia odnośnie do właściwości ośrodków materialnych. Omówiono związki materiałowe opisujące właściwości środowisk materialnych rozważanych w pracy.

Pole elektromagnetyczne w próżni jest opisywane przez wektory natężenia pola elektrycznego i indukcji pola magnetycznego. Pierwsza para równań Maxwella ma postać:

$$\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad \wedge \quad \text{div } \vec{B} = 0, \quad (3.1)$$

Druga para równań Maxwella dla próżni ma postać następującą:

$$\text{div}(\epsilon_0 \vec{E}) = \rho_0 \quad \wedge \quad \text{rot}(\nu_0 \vec{B}) = \vec{j}_0 + \epsilon_0 \dot{\vec{E}}. \quad (3.2)$$

Traktując ośrodek materialny [I.1. J.2] jako układ ładunków spoczywających bądź ruchomych, znajdujących się w próżni, można przedstawić ogół ładunków i prądów jako sumę:

- ładunków, prądów wymuszonych (łącznie z prądami przewodzenia),
- ładunków, prądów związanych z ładunkami elementarnymi cząstek danego ośrodka materialnego:

$$\vec{j}_0 = \vec{j} + \Delta \vec{j} \quad \wedge \quad \rho_0 = \rho + \Delta \rho, \quad (3.3)$$

gdzie:

ρ, \vec{j} - gęstość ładunków i prądów wymuszonych (wraz z prądami przewodzenia),

$\Delta \rho, \Delta \vec{j}$ - gęstość ładunków i prądów środowiska materialnego.

Gęstości prądów oraz ładunków cząstek ośrodka materialnego można powiązać z wektorem polaryzacji i magnetyzacji [I.1, J.1, J.2] następująco:

$$\text{rot } \vec{I} + \dot{\vec{P}} = \Delta \vec{j} \quad \wedge \quad \text{div } \vec{P} = -\Delta \rho, \quad (3.4)$$

gdzie oznaczono:

\vec{P}, \vec{I} - wektory polaryzacji i magnetyzacji ośrodka; opisują one wpływ środowiska materialnego, np. stan polaryzacji bądź namagnesowania materii, histerezę dielektry-

czą bądź magnetyczną; oba wektory są funkcjami wektorów pola elektromagnetycznego,

$\vec{\Delta j}$ - gęstość prądu warunkowana prądami polaryzacji \vec{P} i magnetyzacji $\text{rot}(\vec{I})$ ośrodka,
 $\Delta\rho$ - gęstość objętościowa ładunku polaryzacji ośrodka.

Gęstości prądów i ładunków są określane dla obszaru zawierającego fizycznie dostatecznie dużą liczbę cząstek ośrodka. Gęstości objętościowe (różniczkowe) w niniejszej pracy należy utożsamiać zatem z dostatecznie dużymi objętościami materii środowiska. Takie przedstawienie prądów i ładunków w polu elektromagnetycznym jest określane mianem makroskopowego opisu ładunków i prądów elementarnych środowiska ciągłego [J.1, J.2, T.1], a jest ono podstawą przejścia od równań Maxwella w próżni do równań Maxwella w środowisku materialnym.

Zależności (3.4) zostaną wykorzystane do wprowadzenia tożsamości pomocniczych, które będą wykorzystywane przy opisie składowych gęstości sił działających w polu elektromagnetycznym.

Drugą parę równań Maxwella można zatem zapisać w postaci, w której wyróżnione są składniki ładunku oraz prądu:

$$\text{rot}(\mathbf{v}_0 \vec{B}) = \vec{j} + \Delta \vec{j} + \epsilon_0 \dot{\vec{E}} \quad \wedge \quad \text{div}(\epsilon_0 \vec{E}) = \rho + \Delta \rho, \quad (3.5a)$$

a stąd po wykorzystaniu (3.3), (3.4) uzyskuje się:

$$\text{rot}(\mathbf{v}_0 \vec{B} - \vec{I}) = \vec{j} + \epsilon_0 \dot{\vec{E}} + \dot{\vec{P}} \quad \wedge \quad \text{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho. \quad (3.5b)$$

Wprowadzając wektory indukcji pola elektrycznego i natężenia pola magnetycznego można zapisać drugą parę równań Maxwella w środowiskach materialnych w postaci:

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad \wedge \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}, \quad (3.6a)$$

gdzie:

\vec{D}, \vec{H} - oznaczają odpowiednio wektor indukcji pola elektrycznego i natężenia pola magnetycznego:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \wedge \quad \vec{H} = \mathbf{v}_0 \vec{B} - \vec{I}, \quad (3.6b)$$

ρ - gęstość objętościowa ładunku elektrycznego,

\vec{j} - gęstość prądów w obszarze pola elektromagnetycznego.

Składowe wektorów pola (3.6b) można powiązać ze składowymi wektorów występującymi w (3.1) poprzez związki materiałowe postaci:

$$\mathbf{D}_u = \epsilon_{uw} \mathbf{E}_w \quad \wedge \quad \mathbf{H}_u = \mathbf{v}_{uw} \mathbf{B}_w. \quad (3.7)$$

Związki materiałowe w postaci (3.7) formalnie wiążą odpowiednie indukcje oraz natężenia pól dla środowisk w ogólności anizotropowych. W przypadku poruszającego się

ośrodka pomija się efekty relatywistyczne prowadzące do formalnego sprzężenia składowych pól elektrycznego i magnetycznego [J.1]. Powiązanie obu pól ujawnia się również w ciekłych kryształach. Sprzężenie składowych pola elektrycznego ze składowymi pola magnetycznego opisuje tzw. podatność magnetoelektryczna [G.1, s.19]. W pewnych magnetykach ujawnia się zależność polaryzacji elektrycznej od namagnesowania [G.1, s.117]. Zjawiska te nie są w pracy uwzględniane.

Współczynniki materiałowe ϵ_{uw} oraz v_{uw} (lub współczynniki β_{uw} oraz μ_{uw} będące elementami odpowiednich macierzy odwrotnych) mogą zależeć od szeregu parametrów:

1. wartości wektorów pola elektromagnetycznego,
2. współrzędnych przestrzennych bądź czasu,
3. stanu odkształcenia ośrodka,
4. gęstości ośrodka,
5. temperatury,
6. stanu odkształcenia ośrodka na skutek zjawisk elektrostrykcji lub magnetostrykcji, oraz innych, np. częstotliwości, ciśnienia.

Zależność współczynników materiałowych od wektorów pola oznacza nieliniowość środowiska i w pracy uwzględniona jest w podrozdziale 5.6 oraz rozdziale 6.

Zmienność przenikalności magnetycznej od współrzędnej kątowej prowadząca do powstawania momentu permeancyjnego jest przedmiotem analiz w rozdziałach 4, 5, 7, 8.

Zależność współczynników materiałowych od czynników 3.-5. można opisać następująco [L.4]:

$$\Delta\epsilon_{uw} = a_{uw}^{vz} u_{vz} + \left. \frac{\partial\epsilon_{uw}}{\partial d} \right|_T \Delta d + \left. \frac{\partial\epsilon_{uw}}{\partial T} \right|_d \Delta T, \quad (3.8)$$

oraz

$$\Delta v_{uw} = b_{uw}^{vz} u_{vz} + \left. \frac{\partial v_{uw}}{\partial T} \right|_T \Delta T + \left. \frac{\partial v_{uw}}{\partial T} \right|_d \Delta T, \quad (3.9)$$

gdzie:

a_{uw}^{vz} , b_{uw}^{vz} - współczynniki odkształcenia, niesymetryczne względem par wskaźników przestrzennych u-w oraz v-z; liczba niezależnych niezerowych współczynników odkształceń zależy od tzw. klasy krystalograficznej [L.4],

u_{vz} - tensor odkształceń,

d - gęstość ośrodka,

T - temperatura bezwzględna ośrodka.

Zjawisko magnetostrykcji oraz elektrostrykcji można formalnie uwzględniać uzupełniając zależności (3.8) oraz (3.9) o dodatkowy składnik opisujący te zjawiska. Uwzględnieniu zjawiska magnetostrykcji w maszynach elektrycznych wirujących poświęcona jest praca [aW.1]. Efekty wpływu zmian gęstości materiału na wartość sił uwzględniono

w [R.3, s.138]. Charakter tych zjawisk jest silnie uzależniony od rodzaju środowiska (struktura bezpostaciowa, krystaliczna).

Zjawiskom ferrohydrodynamicznym i siłom działającym w takich układach poświęcona jest praca [R.4]. Ferrohydrodynamika zajmuje się mechaniką ruchu cieczy magnetycznych, które są spowodowane silnymi polami polaryzacji magnetycznej. Ciecze magnetyczne tworzą media, w których pojawiają się dobrze wyróżnione cząstki. W niniejszej pracy efekty ferrohydrodynamiczne nie są uwzględniane.

W niniejszej pracy zakłada się, iż współczynniki materiałowe ε_{uw} , ν_{uw} są symetryczne ze względu na oba wskaźniki przestrzenne. Symetria współczynników materiałowych jest zachowana w ośrodkach o strukturze krystalicznej, gdzie dają się wyróżnić trzy osie główne współczynników materiałowych. Matematycznie oznacza to, iż współczynniki materiałowe tworzą macierz symetryczną. Również w strukturach wielowarstwowych, gdzie anizotropia globalna jest wynikiem zmienności własności środowiska w kolejnych warstwach, zastępcze współczynniki materiałowe tworzą macierze symetryczne [aZ.6]. Znane są jednak przypadki, kiedy właściwość symetrii wymienionych współczynników materiałowych nie jest spełniona, np. w ośrodkach żyromagnetycznych [S.2]. W tych środowiskach zjawisko precesji Larmora jest przyczyną niesymetrii reluktywności magnetycznych. Niesymetria macierzy przenikalności pojawia się w pewnych magnetykach [B.3, G.1]. Również w silnie zjonizowanych gazach przenikalności dielektryczne oraz przewodności elektryczne tworzą również macierze niesymetryczne.

4. OPIS SIŁ DZIAŁAJĄCYCH W POLU ELEKTROMAGNETYCZNYM

W rozdziale czwartym przedstawiono definicje tensorów energii pola elektromagnetycznego oraz zależności, które umożliwiają określanie gęstości sił działających w polu elektromagnetycznym. Zależności te są podstawą dla dalszych analiz. Zaproponowano wydzielenie składnika gęstości sił działającego na środowisko oraz składnika działającego na płynące prądy. Postulowany rozdział sił jest przedmiotem szczegółowych rozważań w następnych rozdziałach.

Jedną z powszechnie wykorzystywanych metod wyznaczania sił oraz momentów sił działających w polu elektromagnetycznym jest metoda bazująca na wykorzystaniu rezultatów obliczeń polowych (numerycznych) oraz pojęcia tensora energii (energii-pędu) pola elektromagnetycznego. W niniejszym rozdziale przedstawiono podstawowe właściwości i zależności opisujące tensor energii pola elektromagnetycznego.

Składowe przestrzenne tensora energii tworzą tzw. tensor naprężeń Maxwella. Za pomocą składowych tego tensora można określić, w szeregu przypadkach (przy ograniczonych szybkościach zmian czasowych pól, braku zależności parametrów środowiskowych od temperatury i gęstości), siły oraz momenty sił działające w układzie. Wartości składowych tensora energii są wyrażone poprzez składowe wektora natężenia pola elektrycznego i indukcji pola magnetycznego. Tensor energii pola elektromagnetycznego określa całkowitą siłę działającą w rozważanym obszarze pola. Tensor ten, oprócz tensora energii kinetycznej materii, stanowi składnik bilansu energii w polu elektromagnetycznym [L.2].

Rozdział całkowitej siły na składniki staje się przydatny, jeżeli - z pewnych względów - korzystnie jest wydzielić składnik całkowitej siły działający na:

- * ładunki i prądy wymuszone (oraz prądy przewodzenia),
- * ośrodek materialny.

Celem określenia wyróżnionych składników sił należy podać pewne zależności pozwalające na ich praktyczne obliczanie. Wyróżnienie obu składników może się okazać pożądane dla potrzeb teorii maszyn elektrycznych. Znajomość wartości obu składników momentu sił jest pomocna przy projektowaniu maszyny elektrycznej i opisie pracy maszyny elektrycznej. Wyróżnione momenty sił pozwalają na ocenę stanu pracy maszyny, np. przy nasyceniu obwodu magnetycznego maszyny synchronicznej (rozdział 5) oraz ujawnianiu się ekscentryczności ruchu wirnika maszyny (rozdział 8).

4.1. GĘSTOŚĆ SIŁ W POLU ELEKTROMAGNETYCZNYM

Postać funkcji koenergii (minus potencjału Lagrange'a) układu elektromechanicznego jest podstawą wyprowadzenia zależności na całkowity moment sił elektromagnetycznych w przetwornikach elektromechanicznych [aC.2, D.2, T.1]. Koenergia jest różnicą pomiędzy pracą wykonaną nad układem a energią pola elektromagnetycznego zmagazynowaną w układzie [aJ.1, aK.7, aŁ.1]. Znajomość funkcji koenergii układu elektromechanicznego pozwala na obliczanie wartości sił działających. W przypadku, gdy pęd pola elektromagnetycznego jest pomijalny, koenergia dla układu elektromechanicznego przyjmuje postać:

$$W_c = \int_V (\vec{j} \vec{A} - \rho V) dV - W_p, \quad (4.1a)$$

i umożliwia wyznaczenie gęstości całkowitych sił (sił użytkowych).

W zależności (4.1a) oznaczono:

$$W_p = \int_V \left(\int_0^B \vec{H} d\vec{B} + \int_0^D \vec{E} d\vec{D} - e_v \right) dV, \quad (4.1b)$$

przy czym e_v jest dwuliniową formą energetyczną pola elektromagnetycznego:

$$e_v = \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B} + \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D}, \quad (4.1c)$$

W równaniu (4.1b) całki liniowe oznaczają całki względem składowych indukcji pola magnetycznego oraz składowych indukcji pola elektrycznego od stanu, w którym są one zerowe, do danego stanu obu pól.

Postać składnika polowego (niezwiązanego z ładunkami i prądami układu) wynika z bilansu gęstości mocy w polu elektromagnetycznym:

$$\text{div}(\vec{S}) + \vec{j} \vec{E} + \vec{H} \dot{\vec{B}} + \vec{E} \dot{\vec{D}} = 0. \quad (4.1d)$$

Dwa ostatnie składniki lewej strony zależności (4.1d) opisują gęstość mocy, która ujawnia się w postaci mocy mechanicznej przetwornika, oraz mocy prowadzącej do magazynowania energii w polu elektromagnetycznym.

Przyjęcie funkcji koenergii - pełniącej rolę potencjału Lagrange'a - w postaci (4.1a,b) ogranicza analizę zjawisk do klasy problemów, w których nie występuje zjawisko histerezy magnetycznej, sprzężenie pola elektromagnetycznego z polem temperatury i polem naprężeń mechanicznych.

Korzystając ze związków materiałowych (3.7), można zapisać koenergię układu (4.1a,b) w następującej postaci:

$$W_c = \int_{\Omega} \left(L \vec{j} \vec{A} - L \rho V - \int_0^B L v_{uw} B_w dB_u - \int_0^D L \beta_{uw} D_w dD_u + L e_v \right) d\Omega. \quad (4.2)$$

W zależności (4.2) całkę po objętości zastąpiono całką po obszarze oraz przyjęto regułę sumowania względem wskaźników powtarzających się dwukrotnie, zgodnie z konwencją sumacyjną Einsteina.

Postać funkcji koenergii (4.2) może być również zapostulowana jako podstawowa dla danej grupy zjawisk.

Pochodna cząstkowa gęstości koenergii względem parametru q (np. kąta położenia wirnika) [S.3] wyznacza składową siły uogólnionej (np. w przypadku gdy współrzędna uogólniona jest kątem, to odpowiadającą siłę uogólnioną stanowi moment sił). Obliczając pochodne funkcji [L.6] przy założeniu niezależności ładunków i prądów od parametru q otrzymuje się:

$$\frac{\partial W_c}{\partial q} = \int_{\Omega} \left(j_u s_u \frac{\partial L_u A_u}{\partial q} - L \rho \frac{\partial V}{\partial q} - L H_u \frac{\partial B_u}{\partial q} - L E_u \frac{\partial D_u}{\partial q} + L \frac{\partial e_v}{\partial q} \right) d\Omega, \quad (4.3)$$

przy czym wykorzystano poniższą zależność dotyczącą prądów elementarnych w krzywoliniowym układzie współrzędnych:

$$j_u \frac{L}{L_{|u|}} dx_v dx_w = j_u s_{|u|} dx_v dx_w. \quad (4.4a)$$

Niech więzy mechaniczne dopuszczają ruch układu o jednym stopniu swobody, który opisuje parametr-współrzędna q . Nadto, niech parametr q będzie powiązany z jedną ze współrzędnych x_{u0} spoczywającego odpowiednio dobranego układu zależnością:

$$x_u = x_{u0} + q = x_{u0} + q_u. \quad (4.4b)$$

Wykorzystując symetrię współczynników środowiskowych $v_{uw} = v_{wu}$ oraz $\varepsilon_{uw} = \varepsilon_{wu}$ (lub równoważnie $\mu_{uw} = \mu_{wu}$ oraz $\beta_{uw} = \beta_{wu}$) oraz zależności środowiskowe (3.7), można powyższą całkę zapisać w postaci:

$$\frac{\partial W_c}{\partial q_u} = \int_{\Omega} \left(j_v s_{|v|} \frac{\partial (L_{|v|} A_v)}{\partial x_u} - L \rho \frac{\partial V}{\partial x_u} + L L_{|u|} N_u \right) d\Omega. \quad (4.5)$$

Wprowadzony w równaniu (4.5) symbol N_u oznacza składową gęstości objętościowej siły działającej w polu elektromagnetycznym związanej z niejednorodnością obszaru (granica dwóch ośrodków, obszar ulegający nasyceniu, niejednorodność strukturalna). W układzie współrzędnych ortogonalnych ma ona postać (dodatek D2):

$$\vec{N} = \frac{1}{2} B_u B_w \text{grad}(v_{uw}) - \frac{1}{2} E_u E_w \text{grad}(\varepsilon_{uw}). \quad (4.6a)$$

Składnik ten można określić mianem niejednorodnościowego bądź gęstością objętościową sił środowiskowych. Jego składowe określają ilościowo wpływ niejednorodności ośrodka (powodowanej niejednorodnością struktury środowiska bądź lokalnymi jej zmianami zachodzącymi pod wpływem pola, np. zjawisko nasycenia). Należy zwrócić uwagę, iż gdyby występowało sprzężenie pól magnetycznego i elektrycznego przez środowisko materialne

(np. wskutek ruchu ośrodka), to we wzorze (4.6a) pojawiłyby się również iloczyny mieszane składowych pola elektrycznego i pola magnetycznego.

W przypadku gdy ośrodek jest izotropowy pod względem właściwości elektrycznych i magnetycznych, to:

$$\vec{N} = \frac{1}{2} \vec{B}^2 \text{ grad}(\nu) - \frac{1}{2} \vec{E}^2 \text{ grad}(\epsilon). \quad (4.6b)$$

Wykorzystując równość (D1.6) (dodatek D1) można zależność (4.5) zapisać następująco:

$$\frac{\partial W_c}{\partial q_u} = \int_V \left(L_{|u|} f_{Lu} + L_{|u|} N_u + \text{div}(L_{|u|} A_u \vec{j}) + \frac{\partial}{\partial t} (L_{|u|} A_u \rho) \right) dV. \quad (4.7)$$

gdzie gęstość sił Lorentza oznaczono jako:

$$\vec{f}_L = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}. \quad (4.8)$$

Zakładając iż:

- prądy nie wpływają ani nie wypływają przez żaden z punktów powierzchni ograniczającej rozważany obszar,
- w obszarze przetwornika nie ma ładunków swobodnych,

można stwierdzić, iż całka objętościowa trzeciego i czwartego składnika pod całką w zależności (4.7) zanika.

Należy zwrócić uwagę, iż czwarty składnik występujący pod całką (4.7) zanika dla zagadnień elektrostatycznych. Składnik trzeci i czwarty zanika również po przyjęciu składowej potencjału wektorowego A_u równej zero (co wolno uczynić cechując odpowiednio oba potencjały [I.1, L.2]). Takie postępowanie jest możliwe, ponieważ koenergia układu (4.1a) nie jest jednoznacznie zdefiniowana z uwagi na występujące potencjały pola.

Równanie (4.7) przyjmuje zatem postać:

$$\frac{\partial W_c}{\partial q_u} = \int_V L_{|u|} (f_{Lu} + N_u) dV. \quad (4.9a)$$

Korzystając z tożsamości (D2.10b) otrzymuje się z kolei zależność:

$$\frac{\partial W_c}{\partial q_u} = \int_V \left(-L_{|u|} \text{div}_{|u|} (\vec{\sigma}_u) + L_{|u|} k_u \right) dV, \quad (4.9b)$$

w której pominięto składnik będący pochodną czasową iloczynu indukcji pól elektrycznego i magnetycznego (rozdział 3).

Wyrażenie pod znakiem całki może być traktowane jako składowa f_u gęstości objętościowej sił użytecznych przetwornika elektromechanicznego:

$$f_u = -\text{div}_{|u|} (\vec{\sigma}_u) + k_u. \quad (4.9c)$$

W zapisie wektorowym, w rozważanym ortogonalnym układzie współrzędnych, zależność (4.9c) przyjmuje postać:

$$\vec{f} = -\vec{i}_u \operatorname{div}_{|u|}(\vec{\sigma}_u) + \vec{k}, \quad (4.9d)$$

bądź zgodnie z (D2.10b)

$$\vec{f} = \vec{f}_L + \vec{N}. \quad (4.9e)$$

Gęstość objętościową sił globalnych można przedstawiać w postaci sumy gęstości sił Lorentza oraz środowiskowej, która opisana jest poprzez składnik niejednorodnościowy (4.6a). Składnik niejednorodnościowy może być zatem interpretowany jako gęstość sił dająca wkład do sił oraz momentów sił użytkowych w związku ze zmianami parametrów środowiskowych w polu elektromagnetycznym.

Wyrażenie (4.9d) pozwala efektywnie wyznaczać siły bądź momenty sił poprzez całkowanie po brzegu obszaru. Jeżeli współczynnik Lamego jest równy jedności, to całkowitą siłę można wyznaczyć poprzez całkowanie po brzegu obszaru (rozdział 6). Natomiast, gdy współczynnik Lamego stanowi ramię działających sił (rozdział 5, 7, 8), to moment sił wyznacza się poprzez całkowanie po brzegu obszaru i to niezależnie od tego, czy środowisko jest izotropowe, czy też jest anizotropowe (podrozdział 7.3). Na przykład, w układzie przetwornika elektromechanicznego o symetrii cylindrycznej, przy założeniu występowania przepływu prądu tylko w kierunku osi z i braku ładunków swobodnych ($\rho=0$), pochodna koenergii po kącie stanowi moment działających sił. Wtedy zależność (4.9a) prowadzi do relacji:

$$T_e = \int_V \mathbf{r} (f_{L\alpha} + N_\alpha) dV, \quad (4.10)$$

gdzie symbol momentu sił uzupełniono indeksem 'e', aby podkreślić, iż jest to moment sił powstający przy udziale pola elektromagnetycznego.

Wyrażenie ujęte w nawiasie równania (4.10) stanowi składową styczną (indeks α) gęstości sił działających w polu elektromagnetycznym:

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} + \vec{N} = \vec{f}_L + \vec{N}. \quad (4.11)$$

Należy również nadmienić w tym miejscu, iż zależności (4.9d), (4.11) nie opisują zjawisk warunkujących powstawanie momentu elektromagnetycznego, takich jak magnetostrykcja, histereza magnetyczna, magnesy trwałe. Szeroki opis zjawisk magnetostrykcji przedstawiono w pracy [aW.4]. Natomiast próbę matematycznego opisu dwóch ostatnich zjawisk zaprezentowano w [aS.15, aS.22].

4.2. TENSORY ENERGII POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO

W celu analizy składników sił bądź momentów sił powstających w przetworniku elektromechanicznym zostaną rozważone dwa pseudotensory energii pola elektromagnetycznego (w ogólności niesymetryczne):

- Minkowskiego \mathfrak{T}_{ik} (podrozdział 4.2.1),
- różnicowy $\Delta\mathfrak{T}_{ik}$ (podrozdział 4.2.2).

Jakkolwiek wielkości te są często definiowane w układzie współrzędnych prostokątnych i transformowane do innych układów zgodnie z zasadami transformowania tensorów [G.2], to w niniejszej pracy ich właściwości transformacji nie są rozważane. W pracy za istotne uznano tylko, iż są to wielkości dwuwskaznikowe wyrażające się poprzez iloczyny składowych wektorów w wybranych ortogonalnych układach współrzędnych. Stąd ich odmienna nazwa „pseudotensory” stosowana zamiennie z nazwą „tensory”. Właściwości transformacyjne pseudotensorów nie są przedmiotem dalszych analiz. Należy zwrócić uwagę, że definicja pseudotensora (Dodatek 2) pokrywa się w ogólności z definicją literaturową tensora w układzie współrzędnych kartezjańskich [G.2].

4.2.1. Tensor energii pola elektromagnetycznego

Tensor energii pola elektromagnetycznego (w ogólności niesymetryczny) jest definiowany w układzie współrzędnych kartezjańskich jako:

$$\mathfrak{T}_{ik} = \begin{pmatrix} e_v & aS_x & aS_y & aS_z \\ cS_{Ix} & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ cS_{Iy} & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ cS_{Iz} & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad (4.12a)$$

gdzie:

dwuliniowa forma gęstości energii pola elektrycznego i magnetycznego (funkcja stanu; w ośrodkach liniowych stanowi ona gęstość energii pola elektromagnetycznego):

$$e_v = \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H} + \frac{1}{2} \vec{D} \vec{E}, \quad (4.12b)$$

wektor Poyntinga:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}, \quad (4.12c)$$

iloczyn wektorowy indukcji pól elektrycznego i magnetycznego:

$$\vec{S}_1 = \vec{D} \times \vec{B}, \quad (4.12d)$$

składowe tensora naprężeń Maxwella ($u, w \in \{x, y, z\}$):

$$\sigma_{uw} = -E_u D_w - H_u B_w + \delta_{uw} e_v, \quad (4.12e)$$

WŁAŚCIWOŚCI:

1. Tensor naprężeń Maxwella σ_{uw} jest symetryczny, gdy:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \text{oraz} \quad \vec{H} = \nu \vec{B},$$

co jest spełnione w środowiskach izotropowych.

2. Tensor energii pola elektromagnetycznego, przy dominującym polu magnetycznym w sensie gęstości energii, zanika w obszarze idealnego ferromagnetyka $\vec{H} = 0$:

$$\mathfrak{T}_{ik} = 0.$$

3. Obliczenie zdefiniowanej (dodatek D2) dywergencji pseudotensora w krzywoliniowym układzie współrzędnych ortogonalnych pozwala określić jego właściwości i uzasadnić celowość wprowadzonej definicji (4.12a). Zgodnie z wyprowadzeniem, przedstawionym w dodatku D2, zachodzi:

$$-\vec{i}_u \operatorname{div}_{|u|}(\vec{\sigma}_u) + \vec{k} = \vec{f}_L + \vec{N} + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{D} \times \vec{B}). \quad (4.13a)$$

Tożsamość (4.13a) okazuje się korzystna dla potrzeb analizy sił i momentów sił w polu elektromagnetycznym z uwagi na możliwość zaniedbania pochodnej czasowej oraz zanikanie składowych wektora \vec{k} w układzie współrzędnych prostokątnych i cylindrycznych (dla $u=\alpha, z$) układzie współrzędnych:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D} \times \vec{B})_u - \vec{k}_u = 0. \quad (4.13b)$$

Zależnością (4.13a) może zatem opisywać np. gęstość sił stycznych następująco:

$$f_\alpha = f_{L\alpha} + N_\alpha = -\vec{i}_\alpha \operatorname{div}_{|\alpha|}(\vec{\sigma}_\alpha). \quad (4.13c)$$

4.2.2. Różnicowy tensor energii pola elektromagnetycznego

Niech różnicowy tensor energii pola elektromagnetycznego (niesymetryczny w ogólności) w kartezjańskim układzie współrzędnych zostanie zdefiniowany następująco:

$$\Delta\mathfrak{T}_{ik} = \begin{pmatrix} \Delta e_v & a\Delta S_x & a\Delta S_y & a\Delta S_z \\ c\Delta Q_x & \Delta\sigma_{xx} & \Delta\sigma_{xy} & \Delta\sigma_{xz} \\ c\Delta Q_y & \Delta\sigma_{yx} & \Delta\sigma_{yy} & \Delta\sigma_{yz} \\ c\Delta Q_z & \Delta\sigma_{zx} & \Delta\sigma_{zy} & \Delta\sigma_{zz} \end{pmatrix}, \quad (4.14a)$$

gdzie oznaczono:

dwuliniową, różnicową formę gęstości energii pola elektromagnetycznego (funkcja stanu):

$$\Delta e_v = \frac{1}{2} \vec{B} \vec{I} - \frac{1}{2} \vec{P} \vec{E}, \quad (4.14b)$$

różnicowy wektor pola elektromagnetycznego:

$$\Delta \vec{S} = \vec{E} \times \vec{I}, \quad (4.14c)$$

dualny różnicowy wektor pola elektromagnetycznego:

$$\Delta \vec{Q} = -\vec{P} \times \vec{B}, \quad (4.14d)$$

oraz tensor:

$$\Delta\sigma_{uw} = -I_u B_w + E_u P_w + \delta_{uw} \left(\frac{1}{2} \vec{B} \vec{I} - \frac{1}{2} \vec{P} \vec{E} \right), \quad (4.14e)$$

który można określić mianem różnicowego tensora naprężeń Maxwella ($u, w \in \{x, y, z\}$).

WŁAŚCIWOŚCI:

1. Różnicowy tensor naprężeń Maxwella $\Delta\sigma_{uw}$ jest symetryczny, gdy:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \text{oraz} \quad \vec{H} = \nu \vec{B},$$

co jest spełnione w obszarach izotropowych.

2. Różnicowy tensor energii pola elektromagnetycznego zanika w próżni:

$$\Delta\mathfrak{T}_{ik} = 0.$$

Z bardzo dobrym przybliżeniem równość ta jest spełniona w powietrzu.

3. Analogiczne obliczenia, do tych jakie przeprowadzono w odniesieniu do pseudotensora energii Minkowskiego, prowadzą do nadania sensu fizycznego zdefiniowanemu różnicowemu pseudotensorowi energii pola elektromagnetycznego. Zgodnie z wyprowadzeniem przedstawionym w dodatku D2 zachodzi:

$$\Delta \vec{f} = \vec{N} - \vec{i}_u \operatorname{div}_{|u|} (\Delta \vec{\sigma}_u) + \Delta \vec{k} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{P} \times \vec{B}). \quad (4.15a)$$

Uwagi przedstawione odnośnie do wzoru (4.13a) stosują się również do powyższego wzoru. Mianowicie, jeżeli

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{P} \times \vec{B})_u + \Delta \vec{k}_u = 0, \quad (4.15b)$$

to gęstość sił środowiskowych (od ładunków polaryzacji i prądów magnetyzacji):

$$\Delta \vec{f} = \Delta \rho \vec{E} + \Delta \vec{j} \times \vec{B} \quad (4.15c)$$

może być przedstawiona jako:

$$\Delta f_\alpha = N_\alpha - \text{div}_{|\alpha|}(\Delta \vec{\sigma}_\alpha). \quad (4.15d)$$

Równość (4.13c) i analogiczne, np. dla składowej „z”, nadają sens fizyczny zdefiniowanemu różnicowemu pseudotensorowi energii pola elektromagnetycznego. Gęstości sił (4.15c) wynikające z założeń metody ładunków polaryzacji i prądów magnetyzacji mogą być równoważnie opisane poprzez składnik niejednorodnościowy i zdefiniowaną dywergencję pseudotensora różnicowego. Siły te są rezultatem oddziaływania pola na ładunki środowiska (makroskopowy opis pola elektromagnetycznego w ośrodku materialnym [J.2, L.4]). Zdefiniowany różnicowy pseudotensor energii pola elektromagnetycznego może być wykorzystywany w analizie gęstości sił, sił oraz momentów sił powstających w polu elektromagnetycznym. Wykorzystanie tego pseudotensora zostanie przedstawione w rozdziale 7.

Zależność (4.15d) pozwala wydzielić z ogółu sił składnik sił działający na materię znajdującą się w polu elektromagnetycznym (np. ferromagnetyczny wirnik maszyny elektrycznej). Jest on uwarunkowany właściwościami środowiskowymi oraz geometrycznym ukształtowaniem ośrodka materialnego. Siły te można określać mianem środowiskowych. W przetworniku elektromechanicznym o dominującym polu magnetycznym (rozdział 5, 6, 7, 8) siły środowiskowe będą nazwane również siłami permeancyjnymi. Analogiczne nazewnictwo zastosowane zostało w odniesieniu do momentów tych sił. Za nazwą taką przemawia postać zależności (4.6a). Gęstość sił środowiskowych wyraża się bowiem poprzez gradient reluktywności magnetycznej, która decyduje o permeancji elementarnej rurki rozciągającej się wokół linii pola magnetycznego ($\Lambda \sim v$).

4.3. TENSORY ENERGII POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO – ZESTAWIENIE

Niesymetryczne tensory energii σ_{uw} , $\Delta \sigma_{uw}$ pozwalają na określanie gęstości sił (momentów sił) całkowitych i działających na ośrodek materialny - przy założeniu pomijalności zjawiska pędu pola elektromagnetycznego i zjawisk strykcyjnych. Gęstości sił pozwalają obliczać siły wypadkowe poprzez całkowanie po obszarze.

Pseudotensor:

1. Minkowskiego opisuje gęstość sił użytkowych działających w polu elektromagnetycznym, które są powodowane siłami Lorentza i składnikiem niejednorodnościowym:

$$\sigma_{uw} = -H_u B_w - E_u D_w + \delta_{uw} \frac{1}{2} (\vec{H}\vec{B} + \vec{E}\vec{D}) \quad \Rightarrow$$

$$\vec{f} = -\vec{i}_u \operatorname{div}_{|u|} (\vec{\sigma}_u) + \vec{k} = \vec{f}_L + \vec{N}. \quad (4.16)$$

2. Różnicowy opisuje wraz ze składnikiem od prądów środowiska (prądy magnetyzacji i polaryzacji) gęstość sił działających na dany obszar materii w polu elektromagnetycznym, które dają wkład do całkowitych sił użytkowych przetwornika elektromagnetycznego. Składnik ten prowadzi do *siły środowiskowej (momentu środowiskowego)*. W przypadku gdy w przetworniku elektromechanicznym dominujące jest pole magnetyczne, siła lub moment sił określane są mianem permeancyjnych.

$$\Delta\sigma_{uw} = -I_u B_w + E_u P_w + \delta_{uw} \frac{1}{2} (\vec{B}\vec{I} - \vec{E}\vec{P}) \quad \Rightarrow$$

$$\vec{N} = \Delta\vec{f} + \vec{i}_u \operatorname{div}_{|u|} (\Delta\vec{\sigma}_u) - \Delta\vec{k}. \quad (4.17)$$

Definicje i podstawowe zależności, w których występują pseudotensory energii pola elektromagnetycznego, zostały ujęte w tabeli 4.1.

Tabela 4.1

Zestawienie definicji tensorów energii pola elektromagnetycznego i ważniejszych równań

PSEUDOTENSOR	RÓWNANIE	RÓWNANIE OPISUJE GĘSTOŚĆ
Maxwella $\sigma_{uw} = -H_u B_w - E_u D_w + \delta_{uw} \frac{1}{2} (\vec{H}\vec{B} + \vec{E}\vec{D})$	(4.16)	ogółu sił działających w polu elektromagnetycznym
różnicowy $\Delta\sigma_{uw} = -I_u B_w + E_u P_w + \delta_{uw} \frac{1}{2} (\vec{B}\vec{I} - \vec{E}\vec{P})$	(4.17)	sił działających na ośrodek materialny

UWAGI:

1. Postacie wzorów (4.16) oraz (4.17) mimo swojej złożonej struktury zapisu są proste w zastosowaniu oraz przydatne przy określaniu sił bądź momentów sił, jak i ich składników dla przetworników elektromechanicznych, takich jak maszyna wirująca (rozdział 5, 7, 8) i elektromagnes (rozdział 6). Moment sił od prądów (moment sił Lorentza) oraz moment permeancyjny (środowiskowy) pozwalają na ocenę naprężeń w izolacji uzwojeń (rozdział 5). Moment permeancyjny stanowi niepożądany moment sił pojawiający się w maszynie indukcyjnej o niesymetrycznym wirniku (rozdział 8).
2. Wyrażenia (4.11), (4.16) i (4.17) są ogólnymi wyrażeniami, które pozwalają obliczać siły i momenty sił działające w polu elektromagnetycznym. Mogą być one stosowane przy prowadzeniu obliczeń metodami numerycznymi bądź analitycznymi. Wyrażenie będące dywergencją pseudotensora pola - po zastosowaniu twierdzenia Gaussa - pozwala na sprowadzenie całki objętościowej do odpowiedniej całki powierzchniowej. W szczególności umożliwia obliczanie momentu sił powstającego w obszarze anizotropowym za pomocą całki powierzchniowej tensora energii (rozdział 7).
3. Formuły określające gęstości sił prowadzą do *wskazania na punkty obszaru pola elektromagnetycznego, w których działają siły* - pozwalając wyznaczać lokalne siły użytkowe. W szczególności zależności określające gęstości objętościowe siły Lorentza i siły środowiskowej *pozwalają na wskazanie punktów, w których pojawiają się obie wyróżnione składowe siły całkowitej (użytkowej)*.
4. Suma obu pseudotensorów energii jest symetryczna:

$$\mathfrak{T}_{ik} + \Delta\mathfrak{T}_{ik} = \mathfrak{T}_{ki} + \Delta\mathfrak{T}_{ki}, \quad (4.18)$$

niezależnie od tego czy ośrodek jest izotropowy, czy też anizotropowy. Przedstawia ona - w układzie kartezjańskim - klasyczny, symetryczny tensor energii Maxwella pola elektromagnetycznego dla próżni [L.2, dodatek D2].

5. W przypadku izotropowego środowiska o reluktywności v_δ w polu magnetycznym wartości obu tensorów energii pola elektromagnetycznego - symetrycznych jednocześnie - spełniają proporcję:

$$\mathfrak{T}_{ik} : \Delta\mathfrak{T}_{ik} = v_\delta : (v_o - v_\delta).$$

6. Relacje (4.16), (4.17) są spełnione dla zdefiniowanych pseudotensorów energii pola elektromagnetycznego w ortogonalnych układach współrzędnych, ale również dla pseudotensorów będących sumą zdefiniowanego pseudotensora energii i dowolnego pseudotensora, którego dywergencja zanika tożsamościowo.

Pośród przedstawionych uwag największe praktyczne znaczenie dla potrzeb obliczeń sił i momentów elektromagnetycznych mają uwagi 1. oraz 2. – zostaną one wykorzystane

w dalszych rozdziałach niniejszej pracy. Natomiast uwaga 3. akcentuje, iż możliwe jest wskazywanie obszarów (np. części przetwornika elektromechanicznego), w których działają siły i ich składowe. Pozwala to na zaproponowanie zastosowania postulowanego podziału sił (momentów sił) na dwie składowe oraz pełniejszą interpretację fizyczną wyróżnionych dwóch składowych.

4.4. POSTACIE ZALEŻNOŚCI OKREŚLAJĄCYCH GĘSTOŚCI SIŁ

Zależności (4.16) oraz (4.17) pozwalają na określenie sił oraz momentów sił poprzez całkowanie po rozważanym obszarze odpowiednich gęstości objętościowych. Szczególnie korzystne - z uwagi na przeprowadzanie numerycznych obliczeń polowych - jest występowanie w nich składnika będącego dywergencją tensora energii pola elektromagnetycznego. Całkowanie po objętości dywergencji tensora energii - zgodnie z twierdzeniem Gaussa [L.6, K.1, K.5] - sprowadza się do całkowania tegoż tensora wyłącznie po brzegu obszaru. Jest to niezmiernie korzystne z punktu widzenia realizacji procesu obliczeń numerycznych (idea ta jest również podstawą wprowadzenia metody elementów brzegowych (BEM) stosowanej do analizy pól elektromagnetycznych, temperatury itp.). Tak, więc dogodna z punktu obliczeniowego byłaby możliwość wprowadzenia takiego tensora energii. Gdyby istniał pewien tensor, którego dywergencja określałaby w ogólności siłę środowiskową, to w kartezjańskim układzie współrzędnych powinna wtedy zachodzić równość:

$$N_u = - \frac{\partial \Lambda_{uw}}{\partial x_w}. \quad (W1)$$

Istnienie tensora Λ_{uw} o powyższych właściwościach dawałoby możliwość obliczania siły środowiskowej w pewnym obszarze poprzez całkowanie takiegoż tensora wyłącznie po brzegu rozpatrywanego obszaru.

Założmy, że istnieje pewien tensor energii pola elektromagnetycznego, który:

- spełnia równość (W1) oraz
- jest wyłącznie funkcją składowych tensora pola elektromagnetycznego oraz parametrów środowiskowych w danym punkcie pola elektromagnetycznego. (W2)

Można stwierdzić, że:

$$\text{Tensor o właściwościach (W1) oraz (W2) w ogólnym przypadku nie istnieje.} \quad (S1)$$

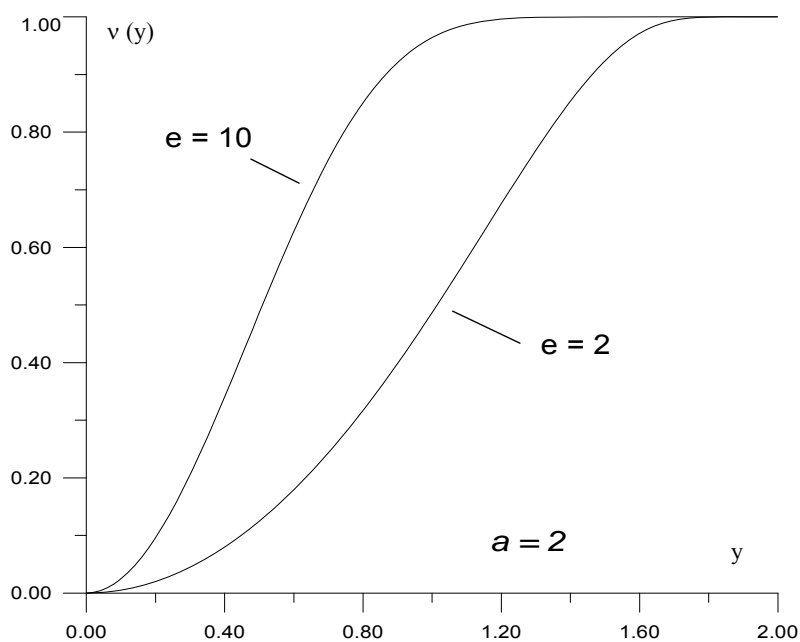
Gdyby stwierdzenie (S1) nie było prawdziwe, to należałoby poszukiwać pewnych wielkości postaci Λ_{uw} o właściwościach (W1) oraz (W2). Stąd, z formalnego punktu widzenia, należy uzasadnić stwierdzenie (S1). Powyższe stwierdzenie można udowodnić pokazując przypadek, dla którego wprowadzenie tensora o właściwościach (W1) i (W2) nie jest możliwe.

Rozważmy następujący przykład. Niech będzie dane jednowymiarowe pole magnetyczne w ośrodku magnetycznym o zmiennej reluktywności magnetycznej i zerowej przewodności elektrycznej. Pole magnetyczne jest wymuszone przez prądy zewnętrzne wolnozmiennie, tak

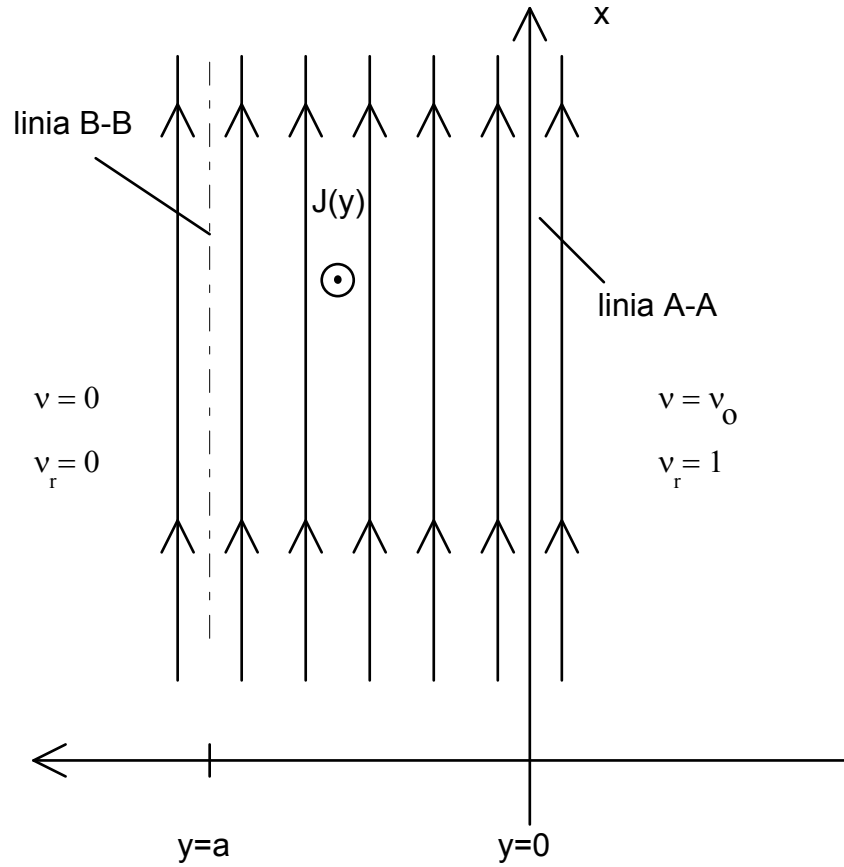
iż można pominąć prądy przesunięcia. Ośrodek charakteryzuje się brakiem polaryzacji dielektrycznej oraz pętli histerezy, jest liniowy, izotropowy, lecz niejednorodny. Reluktywność magnetyczna ośrodka niech będzie opisana zależnością:

$$v(y) = v_0 \cdot \begin{cases} 0 & \text{gdy } y \geq a \\ 1 - \exp\left(\frac{ey^2}{y^2 - a^2}\right) & \text{gdy } a > y > 0 \\ 1 & \text{gdy } y \leq 0 \end{cases} \quad (4.19a)$$

Tak zdefiniowana funkcja jest funkcją klasy C^∞ [M.1, M.4]. Stałe a (szerokość rozważanego obszaru pola magnetycznego) oraz e (parametr decydujący o charakterze przebiegu zmienności reluktywności w rozważanym obszarze niemający wpływu na wartości reluktywności na granicach obszaru i poza obszarem) są dodatnimi danymi liczbami - rys.4.1. W obszarze między przekrojami A-A oraz B-B jest zawarty w całości obszar o zmiennej reluktywności magnetycznej. Na granicy A-A reluktywność ośrodka wynosi v_0 (próżnia), zaś na granicy B-B jest równa zero (idealny ferromagnetyk) - rys.4.2.



Rys.4.1. Przebieg względnej reluktywności magnetycznej dla różnych wartości parametru e
Fig.4.1. Relative magnetic reluctivity for the different constants e



Rys.4.2. Pole magnetyczne w rozważanym niejednorodnym ośrodku
Fig.4.2. Magnetic field in the considered nonhomogeneous region

Niech oś OX będzie skierowana równoległe do linii indukcji pola magnetycznego. Załóżmy, iż wartość indukcji pola magnetycznego zmienia się w przedziale $[0, a]$ zgodnie z zależnością:

$$B_x(y) = b\sqrt{y+c^2}, \quad (4.19b)$$

gdzie b oraz c są danymi dodatnimi stałymi. Przebieg linii pola magnetycznego oraz układ osi układu współrzędnych przedstawia rysunek 4.2.

Rozważane pole magnetyczne jest wywołane przez prądy o gęstości określonej przez równanie Maxwella:

$$\text{rot } \vec{H} = \text{rot}[v(y)B_x(y)\vec{i}_x] = \vec{j},$$

stąd:

$$j_x = 0, \quad j_y = \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad j_z = -\frac{\partial H_x}{\partial y}.$$

Z uwagi na symetrię układu i zerowanie się pochodnych cząstkowych w kierunku osi OZ zachodzi:

$$j_x = 0, \quad j_y = 0, \quad j_z = -\frac{\partial\{v(y)\}}{\partial y} B_x(y) - v(y) \frac{\partial\{B_x(y)\}}{\partial y}. \quad (4.19c)$$

Siła środowiskowa działająca w kierunku osi OY na płasko-równoległy obszar ośrodka zawartego między płaszczyznami prostopadłymi do osi OY (wyznaczonymi przez przekroje A-A oraz B-B) wynosi zgodnie z (4.6b):

$$N_y = \int_0^a \frac{1}{2} B^2 \text{grad}[v(y)] S dy,$$

gdzie pole powierzchni prostopadłej do osi OY określającej rozważany obszar oznaczono przez S.

Dokonując całkowania przez części otrzymuje się:

$$N_y = \frac{1}{2} S B^2 v(y) \Big|_0^a - \frac{1}{2} S \int_0^a v(y) \frac{dB^2}{dy} dy,$$

i ostatecznie:

$$N_y = -\frac{1}{2} S b c - \frac{1}{2} S b^2 \int_0^a v(y) dy. \quad (4.19d)$$

Powyższa zależność pokazuje, iż wartość siły środowiskowej zależy od zmienności reluktywności magnetycznej wewnątrz rozpatrywanego obszaru. Reluktywność v zależy bowiem od parametru e mimo założonych niezmiennych wartości reluktywności na brzegu obszaru. Wartość całki w (4.19d) jest zależna więc od charakteru zmienności reluktywności w obszarze opisanej zależnością (4.19a). Oznacza to, iż nie można w rozważanym przypadku wyrazić składnika środowiskowego sił działających w polu elektromagnetycznym tylko poprzez wartości składowych tensora pola elektromagnetycznego i parametry środowiskowe na brzegu obszaru. Nie może zatem istnieć tensor energii spełniający warunki (W1) oraz (W2).

Przeprowadzone rozważania potwierdzają prawdziwość stwierdzenia (S1).

WNIOSEK:

Niemożliwe jest przedstawienie gęstości objętościowych sił środowiskowych w postaci dywergencji pewnego tensora o właściwościach (W1) i (W2).

UWAGI:

1. Przedstawienie składnika niejednorodnościowego w postaci dywergencji tensora spełniającego warunki (W1) oraz (W2) jest możliwe w przypadkach szczególnych, gdy:

- indukcja pola magnetycznego oraz natężenie pola elektrycznego są niezależne od współrzędnych przestrzennych,
- zanikają w obszarze ładunki, prądy zewnętrzne - zanika wtedy również składnik sił od prądów.

2. Spełnienie warunków typu (W1) i (W2) w przypadku ruchu z prędkością $u(t)$ układu o masie m zależnej od czasu jest również niemożliwe - co stanowi pewną analogię w dziedzinie czasu do rozpatrywanego problemu. Mianowicie, moc p dostarczana do poruszającego się punktu materialnego wynosi:

$$p = \vec{F}\vec{u} = \frac{d(m\vec{u})}{dt} \vec{u} = \frac{d(\frac{1}{2}mu^2)}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} u^2 = \frac{dE_k}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} u^2,$$

zachodzi zatem:

$$p = \frac{d}{dt} \left(E_k + \int_{t_0}^t \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} u^2 dt \right) = \frac{d}{dt} \left(E_k + \frac{1}{2} mu^2 \Big|_{t_0}^t - \int_{t_0}^t \frac{1}{2} m \frac{du^2}{dt} dt \right),$$

co oznacza, iż moc dostarczona do układu poruszającego się ruchem postępowym ze zmienną masą nie daje się w ogólnym przypadku przedstawić jako pochodna względem czasu pewnej funkcji będącej tylko funkcją chwili początkowej t_0 i końcowej t (np. przy liniowo zmiennym kwadracie prędkości $u^2(t)$ względem czasu trzeci składnik w wyrażeniu pod znakiem pochodnej zależy od chwilowych wartości masy ciała w chwilach czasowych od t_0 do t).

Analogicznie, dla stałej rezystancji R , przez którą przepływa zmienny prąd $i(t)$, nie można wprowadzić funkcji stanu $Z[i(t), R]$, która określałaby moc cieplną $i^2 R$. Mianowicie, dla funkcji $Z[.,.]$ musiałaby być spełniona zależność:

$$\int_{t_0}^t Ri^2(t)dt = Z[R, i(t)] - Z[R, i(t_0)].$$

Zależność powyższa prowadzi jednak do sprzeczności. Wartość całki przedstawia ilość wydzielanego ciepła i zależy od całej „historii” prądów w przedziale czasu (t_0, t) . Natomiast różnica funkcji stanu - występująca po prawej stronie powyższej zależności - zależy tylko od wartości prądów w chwilach t_0 oraz t .

4.5. KONFRONTACJA LITERATUROWA

Obliczenie sił, momentów Lorentza oraz środowiskowego działających w przetworniku elektromechanicznym jest istotne nie tylko ze względu na wgląd w strukturę i działanie przetwornika, ale również dla wzbogacenia procesu jego projektowania. Jest to istotne, jeżeli należy określić wpływ, jaki wywierają cechy konstrukcyjne przetwornika (warunki geometryczno-środowiskowe) oraz prądy, na wartości działających sił i momentów w poszczególnych częściach przetwornika. Analiza rozkładu sił i momentów pozwala na ocenę wartości pojawiających się naprężeń przenoszonych przez poszczególne elementy konstrukcyjne przetwornika. Rozważania teoretyczne, obliczenia numeryczne oraz badania eksperymentalne są podstawą oceny powstających sił i momentów.

- Teoretyczne aspekty analiz sił powstających przy udziale pola elektromagnetycznego są szczegółowo rozważane w pracach [aB.5, B.3, I.2, J.1, L.2, L.4, K.4, R.4, T.1]. Podstawowe równania określające gęstość działających sił są wyprowadzane w oparciu o analizę całki działania [J.1, L.2], bądź funkcji energetycznej [I.2, D.2, aW.3] dla wybranego skończonego obszaru pola elektromagnetycznego. Również na podstawie równania bilansu energii (mocy) wyprowadza się zależności, które opisują całkowite (użyteczne) siły bądź momenty sił w przetwornikach elektromechanicznych [K.6, M.5, P.1].

Na podstawie zależności całkowych - odnoszących się do skończonego obszaru pola elektromagnetycznego - wyprowadza się równania określające gęstość objętościową sił w polu elektromagnetycznym. Przyjęta postać całki działania, funkcji energetycznej (koenergii, potencjału Lagrange'a) dla układu implikuje zależność opisującą działające w układzie siły. Takie podejście może prowadzić do nieuwzględnienia sił o gęstości różnej od zera, lecz globalnie równoważących się w obszarze o skończonej objętości [L.2, T.1]. Sformułowana postać całki działania lub funkcji energetycznej ma zasadniczy wpływ na otrzymywaną postać zależności określającej gęstość objętościową działających sił w polu elektromagnetycznym. Im więcej zjawisk całka działania opisuje, tym ogólniejsza zależność jest otrzymywana przy jej wykorzystaniu [L.4, R.4]. Jest zatem istotne, jak dalece należy rozbudowywać taką całkę działania (funkcję energetyczną), aby uzyskać w pełni ogólne zależności, choćby tylko z punktu widzenia sił powstających wyłącznie przy udziale pola elektromagnetycznego. Przedstawione w pracy wyprowadzenie powołuje się na ogólnie przyjmowane zależności w literaturze wywodzące się z podejścia energetycznego [D.2, I.2]. Podejście energetyczne prowadzi do znanych równań podstawowych wykorzystywanych w dalszych rozdziałach niniejszej pracy.

Również na podstawie równania bilansu energii (mocy) otrzymuje się postać równania opisującego siły i momenty działające w przetworniku elektromechanicznym [K.6, P.1, M.5]. Zapis równania bilansu mocy otrzymuje się na podstawie równań pola elektromagnetycznego Maxwella [K.4, L.2, S.1, T.1] lub praw Kirchhoffa [K.6, P.1]. Analiza poszczególnych składników występujących w równaniu bilansu mocy prowadzi do zależności opisującej siły

bądź momenty działające w przetworniku elektromechanicznym. Taka analiza prowadzi jednak tylko do opisu sił całkowitych (użytecznych) powstających w przetworniku elektromechanicznym.

Istnieją jednak zjawiska np. efekt pędu pola elektromagnetycznego [L.4] oraz powstawanie sił przy współdziałaniu pól elektrycznego i magnetycznego [aB.3, aB.4, aN.1, aN.2], których analiza teoretyczna wymaga prowadzenia złożonych rozważań. O teoretycznych trudnościach analizy sił w polu elektromagnetycznym świadczy też dyskusja przedstawiona w [J.1, s.245]. Autor pracy [J.1] komentuje problem pojawiania się niesymetrycznego tensora energii pola elektromagnetycznego przy opisie gęstości sił. Autorzy pracy [I.1] proponują bezpośrednie wprowadzenie postaci działających sił. Mianowicie, zakłada się [I.1, s.104], iż całkowita gęstość sił działających w polu elektromagnetycznym wynikać powinna - bazując na makroskopowej teorii pola elektromagnetycznego - z postaci lorentzowskiej relacji na gęstość siły działającej na ogół ładunków i prądów.

W literaturze pojawiają się również próby modyfikacji postaci tensora naprężeń Maxwella [aV.1]. Prowadzą one do pewnych form postaci tensora Maxwella stosowanych dla analizy wybranych problemów i wymagają przyjęcia pewnych upraszczających założeń [aK.5].

- Numerycznym aspektem analiz sił i momentów sił poświęcony jest szereg prac [aC.1, aC.2, aH.1, aH.2, aH.3, aJ.1, aM.1, aM.2, aR.1, aR.2, aR.3, aR.4, aR.5, aS.1, aSt.1].

W analizie sił i momentów wykorzystywana jest szeroko metoda tensora Maxwella. Tensor Maxwella pozwala na wyznaczenie całkowitego (użytecznego) momentu sił przy obliczeniach numerycznych [aA.2, aK.5, aH.1, aH.3, aS.1, aSt.2, aT.1, aW.2, aW.3, aV.1] oraz analitycznych [aE.1]. Najczęściej stosowany jest symetryczny tensor Maxwella. Jest to konsekwencją faktu, iż rozważana część przetwornika elektromechanicznego (np. wirnik maszyny elektrycznej) jest umieszczona w próżni (powietrzu). Jeżeli ruchoma część przetwornika elektromechanicznego umieszczona jest w ośrodku magnetycznym anizotropowym, to tensor Maxwella jest niesymetryczny. Przykład analizy w takim przypadku został przedstawiony w rozdziale 7. Problem dokładności obliczeń sił oraz momentów stanowi często rozważany problem, który wiąże się nieodłącznie z prowadzeniem analiz numerycznych. Okazuje się, iż wartość obliczanego momentu sił zależy od zastosowanej metody obliczeniowej [aA.2, aC.1, aC.2, aH.1, aR.4]. W przypadku metody Maxwella wartość otrzymywanego rezultatu zależy od kształtu konturu, po którym odbywa się całkowanie [aM.3, aT.1]. Stosuje się różne algorytmy prowadzące do efektywnego zniwelowania tej wady metody Maxwella. Można prowadzić kontur całkowania przez wnętrze elementów szczeliny bądź definiować kontur w obszarze szczeliny powietrznej. Często również stosowana jest metoda Arkkio [aA.2]. Postuluje ona uśrednianie wartości tensora Maxwella. Do innego sposobu ominięcia tej wady metody Maxwella prowadzi algorytm bazujący na wykorzystaniu elementów Bersteina-Beziera [aH.1]. Algorytm ten realizuje interpolację obliczanych wartości potencjału magnetycznego przy wykorzystaniu elementów

powierzchniowych Bersteina-Beziera. Stosowane są również algorytmy łączące metody numeryczne i analityczne [aA.1, aL.1]. Prowadzą one do uzyskiwania wartości momentu elektromagnetycznego niezależnej od doboru powierzchni całkowania. Analityczny opis pola magnetycznego w szczelinie powietrznej prowadzi do niezależności otrzymywanego rezultatu od wybranego położenia i kształtu powierzchni całkowania [aE.1, aL.1, aS.14]. W pewnych przypadkach - dla przetworników elektromechanicznych o symetrycznym obwodzie magnetycznym i przepływie prądów - można podać analityczną postać rozwiązania równań pola oraz momentu elektromagnetycznego rozwijanego przez przetwornik elektromechaniczny [aE.1, aB.7a, aB.8, aP.1, aS.17]. Znajomość rozwiązania analitycznego może - w szczególnych przypadkach - pozwolić na ocenę otrzymywanych rezultatów obliczeń numerycznych [aR.3].

Metoda koenergii magnetycznej stosowana jest szeroko przy budowie algorytmów obliczeniowych momentu elektromagnetycznego [aC.1, aC.3, aS.1, aT.1, aY.1]. Metoda ta pozwala na określenie momentu elektromagnetycznego przetwornika elektromechanicznego poprzez różniczkowanie funkcji koenergii magnetycznej układu, przy stałych prądach [aS.1] bądź przy stałym potencjale wektorowym [aC.3]. W nielicznych pracach wykorzystywana jest również metoda koenergii magnetycznej w obliczeniach analitycznych momentu elektromagnetycznego przetwornika elektromechanicznego [aM.4].

Metoda wariacyjna polegająca na optymalizacji funkcjonału energetycznego jest podstawą dla tworzenia algorytmów obliczeń sił i momentów sił [aC.2, aR.3, aR.5]. Wymaga ona różniczkowania funkcjonału, przy zadaniu przesunięcia węzłów siatki dyskretyzującej dany obszar.

Dla potrzeb obliczania sił oraz momentów wykorzystuje się również metodę prądów magnetyzacji [aF.1, aT.2] oraz metodę ładunku magnetycznego [aG.2]. Metoda prądów magnetyzacji wymaga zadania stosownego warunku brzegowego na gęstość powierzchniową prądów magnetyzacji [aF.1]. Niedogodność tę można usunąć wykorzystując pojęcie różnicowego tensora energii pola elektromagnetycznego [aS.10, aS.26]. W niniejszej pracy zaprezentowano zmodyfikowany algorytm obliczania momentu elektromagnetycznego przy wykorzystaniu zdefiniowanego (rozdział 7) różnicowego tensora energii pola elektromagnetycznego.

Porównanie dokładności obliczeń wybranych metod stanowi ważny aspekt analiz sił i momentów sił. Poświęcone temu zagadnieniu prace porównują wyniki analiz numerycznych między sobą oraz w odniesieniu do wartości określonych analitycznie [aM.3, aR.4].

W literaturze [aD.2, aD.3, aH.3, aSt.1, aT.4] rozwiązywane są również zagadnienia dotyczące sił i momentów dla przetworników elektromechanicznych z uwzględnieniem ruchu jego części. Uwzględnienie ruchu części przetwornika elektromechanicznego prowadzi do pełniejszego poznania zjawisk zachodzących w nim.

Ze względów mechanicznych i ekologicznych ważne jest również przeprowadzenie analizy hałasu i drgań ujawniających się podczas pracy przetwornika elektromechanicznego

[K.7, aB.9, aW.4, aZ.5]. Analiza tych zagadnień jest ważna z uwagi na prawidłową pracę przetwornika oraz jego wpływ na otoczenie.

Często analiza pola magnetycznego - zmierzająca do wyznaczenia momentu sił - prowadzona jest na przekroju poprzecznym maszyny. Jeżeli ograniczyć się do układów o symetrii cylindrycznej, to dla dostatecznie długich maszyn (decyduje iloraz średnicy i długości) można poprzestawać na analizie dwuwymiarowej pola maszyny [aŁ.1]. W układach o symetrii sferycznej należy analizować pole magnetyczne trójwymiarowo [aK.4, aP.1].

- Jedną z bardziej obszernych pozycji traktujących o zagadnieniach sił zarówno pod względem teoretycznym, jak i eksperymentalnym w odniesieniu do przetworników elektro-mechanicznych, jakimi są wirujące maszyny elektryczne, jest pozycja [I.2]. Autor tej pracy dowodzi i sprawdza doświadczalnie wyprowadzone zależności na składniki siły całkowitej:

- sił Lorentza oraz
- od ukształtowanego ośrodka ferromagnetycznego.

W pracach [aB.3, aB.4, J.1, L.4] zwraca się uwagę na fakt, iż wyniki eksperymentów dotyczących wyznaczenia wartości sił pojawiających się jako efekt pędu pola elektromagnetycznego wymagają dalszych potwierdzeń.

W niniejszym rozdziale przedstawiono zależności wykorzystywane dla potrzeb analizy sił oraz momentów w środowiskach przewodzących i magnetycznych. Są one podstawą dla prowadzenia obliczeń numerycznych. Wyróżniono siły Lorentza oraz siły środowiskowe. Pokazano, iż siły działające na środowiska magnetyczne nie mogą być przedstawione w postaci dywergencji pewnego tensora. Dalsza analiza wyróżnionych składowych pozwala na zinterpretowanie i zastosowanie obu składników w teorii przetworników elektro-mechanicznych.

5. ANALIZA MOMENTÓW SIŁ W PRZETWORNIKACH ELEKTROMECHANICZNYCH

W rozdziale piątym przedstawiono przykłady analizy momentów sił w maszynie asynchronicznej oraz synchronicznej w oparciu o proponowany podział sił. Dokonano analitycznej, uproszczonej oceny wartości składowych momentu elektromagnetycznego dla maszyny prądu przemiennego. Wartości składowych momentu obliczono również numerycznie dla silnika synchronicznego o wydalnych biegunach (o liniowym obwodzie magnetycznym) oraz generatora synchronicznego (o nieliniowym obwodzie magnetycznym).

Wyprowadzone zależności na gęstości składowych sił (4.16), (4.17) stanowią związki odnoszące się do stanów nieustalonych i ustalonych, środowisk izotropowych i anizotropowych przetworników elektromechanicznych. Równania te zostaną przekształcone do postaci pozwalającej na ich stosowanie dla celów obliczeń sił i momentów sił powstających w przetwornikach elektromechanicznych, takich jak wirujące maszyny elektryczne oraz elektromagnesy.

W kolejnych podrozdziałach przedstawiono przykłady analizy momentów sił w maszynie synchronicznej o nierównomiernej szczelinie powietrznej. Określono moment wywołany siłami działającymi na prądy wirnika maszyny oraz moment związany z siłami działającymi na ferromagnetyczny wirnik o odpowiednio zaprojektowanej powierzchni zewnętrznej. Ten drugi - moment permeancyjny - okazuje się nie być tożsamy z momentem reluktancyjnym.

5.1. SKŁADOWE MOMENTU MASZyny ELEKTRYCZNEJ

Przedmiotem dalszych analiz będą siły i momenty sił działające w wybranych przetwornikach elektromechanicznych. Przedstawione oraz efektywnie wykorzystane zostaną zależności pozwalające wyznaczać:

- moment *permeancyjny* – moment *środowiskowy* $T_{e,Fe}$,
- moment *sił Lorentza* – moment *Lorentza* (moment od prądów) $T_{e,Cu}$,

oraz całkowity moment rozwijany przez przetwornik elektromechaniczny T_e . Całkowity moment elektromagnetyczny przetwornika elektromechanicznego jest sumą obu wyróżnionych momentów składowych. Składowe momentu elektromagnetycznego są

nazywane *momentami maszyny*. Wyróżnione momenty są powodowane działaniem sił odpowiednio środowiskowych bądź sił Lorentza. Zdefiniowane momenty zostaną porównane z tradycyjnie wyróżnianymi momentami *synchronicznym* oraz *reluktancyjnym* w maszynie synchronicznej o wydajnych biegunach.

Moment reluktancyjny maszyny może być zdefiniowany (dyskusja tej definicji zostanie przeprowadzona w podrozdziale 5.4) jako moment rozwijany przez maszynę na skutek wyprofilowania powierzchni zewnętrznej wirnika. W pracach [K.6, P.1, P.2] moment reluktancyjny wyznaczono dla maszyny synchronicznej o liniowym obwodzie magnetycznym, przy uwzględnieniu głównej harmonicznej przepływów. Moment reluktancyjny określono jako część całkowitego momentu elektromagnetycznego maszyny, powstającą przy braku wzbudzenia. Matematycznie prowadzi to poniższego zapisu:

$$T_{e,R} = T_e \Big|_{I_r=0}^{\text{df}}. \quad (5.1)$$

Podział sił na składową Lorentza i środowiskową (permeancyjną) prowadzi do rozdziału momentu całkowitego na moment Lorentza i moment permeancyjny. Przy takim podziale moment reluktancyjny - pojawiający się w maszynie niewzbudzonej $I_r=0$ - jest równy wprost momentowi permeancyjnemu:

$$T_{e,R} = T_{e,Cu} \Big|_{I_r=0} + T_{e,Fe} \Big|_{I_r=0} = T_{e,Fe} \Big|_{I_r=0},$$

gdzie warunek $I_r = 0$ oznacza symbolicznie, iż prądy nie płyną w wirniku maszyny.

Analiza wymienionych momentów sił w maszynie synchronicznej oraz ich fizykalna interpretacja są przedmiotem rozważań w niniejszym rozdziale.

5.1.1. Moment permeancyjny maszyny elektrycznej

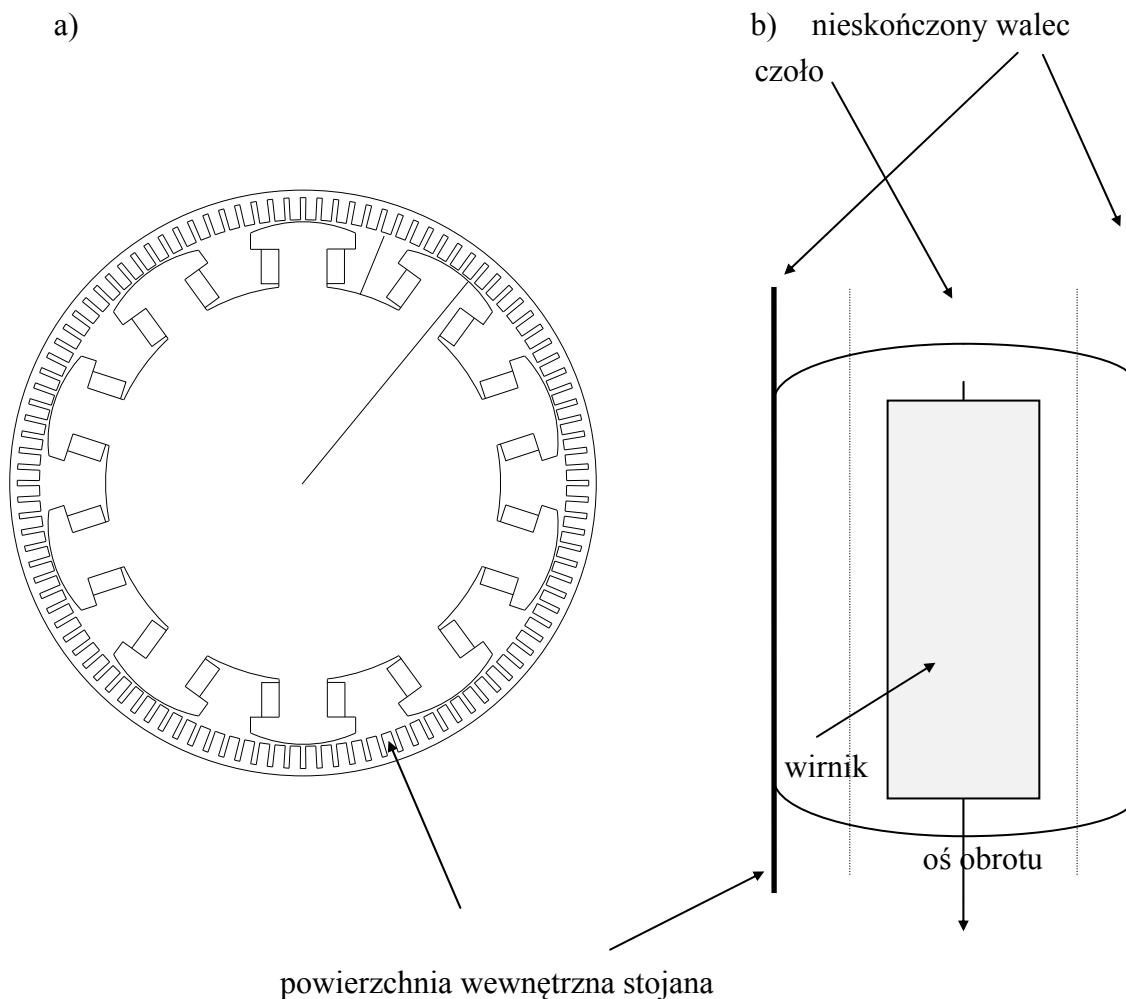
Rozważmy maszynę synchroniczną z wydajnymi biegunami jako przykład przetwornika elektromechanicznego o nierównomiernej szczelinie powietrznej. Moment permeancyjny maszyny względem osi obrotu OZ zostanie wyznaczony przy wykorzystaniu zależności (4.17). Przekrój poprzeczny maszyny synchronicznej przedstawiono na rys.5.1a.

W układzie współrzędnych cylindrycznych składowa styczna gęstość siły wynosi:

$$f_{Fe,\alpha} = N_\alpha. \quad (5.2a)$$

Moment środowiskowy maszyny elektrycznej (nie zawierającej elementów wykazujących właściwości histerezy), spowodowany siłami działającymi na ośrodek materialny, jakim jest ferromagnetyczny wirnik maszyny, ma wartość równą całce po objętości z gęstości składowej stycznej siły f_α , zatem:

$$T_{e,Fe} = \int_V r N_\alpha dV. \quad (5.2b)$$



Rys.5.1. a) Przekrój poprzeczny maszyny elektrycznej, b) przekrój osiowy
 Fig.5.1. a) The cross-section of the electric machine, b) the axial-cross

Przyjmuje się, że rozważany obszar V jest nieskończonym walcem (rys.5.1b) o pobocznicy umieszczonej w szczelinie powietrznej maszyny. W przypadku dwuwymiarowej analizy maszyny całkowanie względem zmiennej z sprowadza się do mnożenia przez długość maszyny l . W przypadku trójwymiarowej analizy pola magnetycznego całkę po dwóch nieskończonych półcylindrach obejmujących oba czoła maszyny (obszary poddane trójwymiarowej analizie) można zastąpić dwoma odpowiednimi całkami po obszarze czoł maszyny - rys.5.1b.

W dalszym ciągu zakłada się, iż pole magnetyczne jest dominujące wobec pola elektrycznego w sensie gęstości objętościowej energii, mianowicie:

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \ll \frac{1}{2} \nu_0 B^2.$$

W tym miejscu należy nadmienić, iż przez dominację pola magnetycznego należy rozumieć stan pracy przetwornika elektromechanicznego, w którym tensor energii i tensor naprężeń pola elektromagnetycznego wyrażają się tylko poprzez składowe indukcji

i natężenia pola magnetycznego. Należy zwrócić uwagę, iż istnieją przetworniki elektromechaniczne - wirujące mikromaszyny elektrostatyczne [aD.3, aW.1], w których wskutek dominacji pola elektrycznego tensor energii wyraża się tylko poprzez składowe indukcji i natężenia pola elektrycznego. W przypadku takich przetworników analiza sił i momentów sił przebiega analogicznie jak opisana w kolejnych rozdziałach analiza maszyn elektrycznych, w których dominuje pole magnetyczne.

W układzie współrzędnych cylindrycznych składowa N_α określona jest przez pochodną reluktywności magnetycznej po kącie α poniższą zależnością:

$$N_\alpha = \frac{1}{2} B_u \frac{\partial v_{uw}}{r \partial \alpha} B_w .$$

Relacja (5.2b) przyjmuje zatem następującą postać:

$$T_{e,Fe} = \int_V \frac{1}{2} B_u \frac{\partial v_{uw}}{\partial \alpha} B_w dV . \quad (5.2c)$$

Rozdzielenie rozważanego n-wymiarowego ($n=2,3$) obszaru maszyny na dwa rozłączne obszary wzajemnie się uzupełniające:

$$V = V_s \oplus V_c$$

pozwala na przedstawienie całki (5.2c) w postaci:

$$T_{e,Fe} = \int_{V_c} r N_\alpha dV + \int_{V_s} r N_\alpha dV . \quad (5.2d)$$

W zależności (5.2d) oznaczono przez V_c podobzdar (n-wymiarowy), w którym reluktywność magnetyczna ośrodka zmienia się w sposób ciągły, a przez V_s podobzdar otaczający powierzchnię S na której reluktywność magnetyczna ośrodka zmienia się w sposób nieciągły (podobzdar n-wymiarowy będący otoczeniem obszaru (n-1)-wymiarowego).

Pierwsza całka wynika z ujawnienia się wewnętrznej niejednorodności obszaru, czy to strukturalnej, czy też wywołanej lokalnym nasycaniem się ferromagnetyka. Druga całka jest związana z naprężeniami na granicy ośrodków, np. ferromagnetyk-powietrze. Rozbicie momentu permeancyjnego na dwie składowe ma charakter formalny. Dwie wyróżnione całki wynikają z dwóch przyczyn warunkujących powstanie momentu permeancyjnego. Należy nadmienić, iż obie przyczyny warunkując rozkład pola magnetycznego w przetworniku, wspólnie wpływają na wartości obu wydzielonych momentów.

Jeżeli ośrodek (ferromagnetyk) jest jednorodny strukturalnie oraz nie ulega nasyceniu, to moment permeancyjny wyraża się poprzez całkę:

$$T_{e,Fe} = \int_{V_s} r N_\alpha dV . \quad (5.2e)$$

Natomiast w ogólnym przypadku moment permeancyjny określa poniższa całka:

$$T_{e,Fe} = \int_V \frac{1}{2} B_u \frac{\partial v_{uw}}{\partial \alpha} B_w dV . \quad (5.2f)$$

- Przy n-wymiarowej ($n = 2$ lub $n = 3$) analizie maszyny elektrycznej, której obwód magnetyczny jest liniowy, celem obliczenia momentu permeancyjnego trzeba dokonać całkowania tylko po obszarze (n-1)-wymiarowego brzegu wirnika maszyny. Reluktywność magnetyczna ulega skokowej zmianie tylko na granicy ferromagnetyk-powietrze (5.2e) - podrozdział 5.3, 5.5.
- Przy n-wymiarowej analizie maszyny elektrycznej, której obwód magnetyczny ulega nasyceniu, należy celem obliczenia momentu permeancyjnego dokonać całkowania po obszarach: (n-1)-wymiarowym oraz n-wymiarowym. Reluktywność magnetyczna ulega skokowej zmianie na granicy ferromagnetyk-powietrze (obszar V_s) oraz ciągłej wewnątrz obszaru ferromagnetycznego wskutek nasycenia (obszar V_c) - podrozdział 5.6.

5.1.2. Skokowa zmiana reluktywności magnetycznej

Dokonamy przekształcenia drugiego składnika po prawej stronie zależności (5.2d):

$$\Delta T_{e,Fe} = \int_{V_s} r N_{\alpha} dV, \quad (5.2g)$$

gdzie przez $\Delta T_{e,Fe}$ oznaczono część momentu permeancyjnego powstającego w wyniku działania sił na granicy środowisk.

Rozważa się obszar V_s otaczający powierzchnię brzegu ferromagnetyk-powietrze. Rozkład reluktywności magnetycznej obszaru obejmującego ferromagnetyczny wirnik o względnej reluktywności v_r i szczelinę powietrzną ($v_{ro}=1$) z wykorzystaniem funkcji skoku jednostkowego Heaviside'a jest następujący:

$$v_r(r, \alpha, z) = v_r + (1 - v_r) \cdot \mathbf{1}\{\text{sgn} \cdot (r - r_o(\alpha))\}, \quad (5.2h)$$

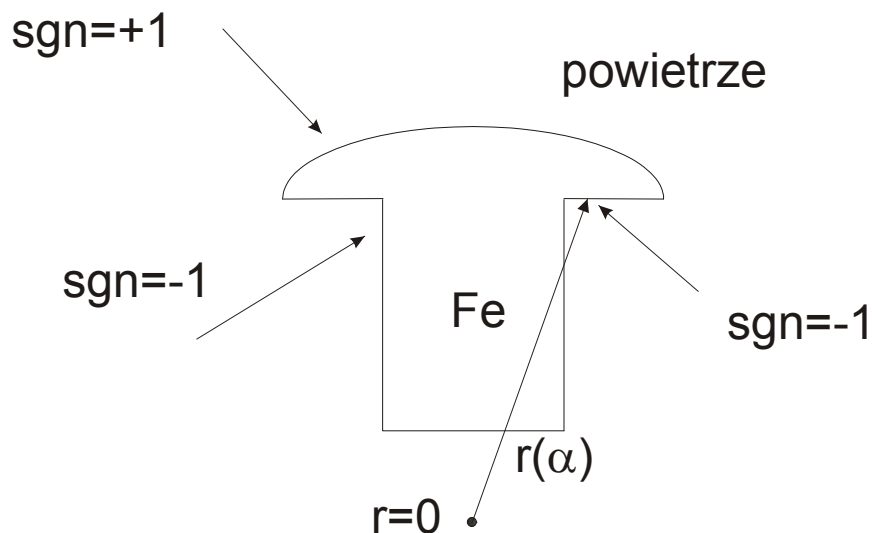
gdzie:

$r_o(\alpha)$ - funkcja opisująca (lokalnie) kształt brzegu wirnika maszyny elektrycznej,

$v_r(r, \alpha, z)$ - funkcja względnej reluktywności obszaru,

sgn - wartość funkcji znaku, która przyjmuje wartości: +1, -1 lub 0.

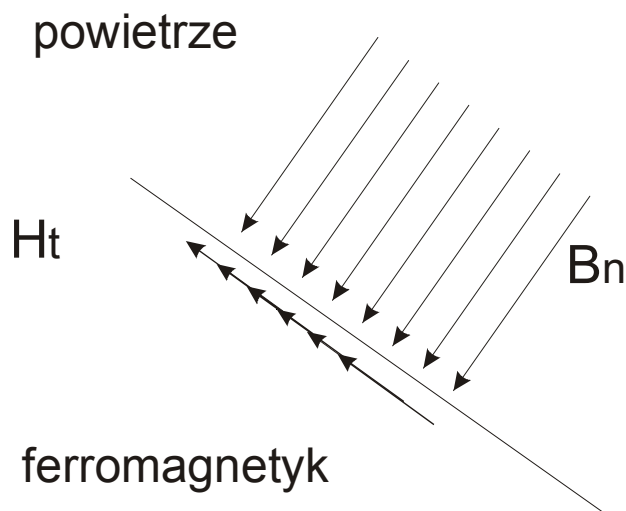
Celem uproszczenia zapisu nie wypisuje się argumentu funkcji sgn . Wartość dodatnią przyjmuje funkcja sgn , gdy promień r opisuje linię brzegową ferromagnetyk-powietrze $r_o(\alpha)$ patrząc ze środka układu współrzędnych (pozostałych $r = 0$). Wartość ujemną, gdy promień opisuje linię granicy środowisk powietrze-ferromagnetyk patrząc ze środka układu współrzędnych ($r = 0$). W pozostałych przypadkach funkcja przyjmuje wartość zero (rys.5.2).



Rys.5.2. Wartości funkcji sgn
Fig.5.2. The function sgn values

W maszynach elektrycznych, w których dominujące jest pole magnetyczne, składowe przestrzenne tensora pola elektromagnetycznego można wyrazić za pomocą iloczynów składowych indukcji pola magnetycznego dominujących nad iloczynami składowymi natężenia pola elektrycznego E_x , E_y , E_z , zatem:

$$\Delta T_{e,Fe} = \frac{1}{2} \int_{V_s} (B_u B_w \frac{\partial v_{uw}}{\partial \alpha}) dV. \quad (5.2i)$$



Rys.5.3. Składowe pola magnetycznego zachowujące się na granicy dwóch ośrodków
Fig.5.3. Magnetic field constant at the boundary of two regions

Dla maszyny elektrycznej o izotropowym wirniku można zapisać:

$$\Delta T_{e,Fe} = \int_{V_s} \frac{1}{2} (B_n^2 + \mu^2 H_t^2) \frac{\partial v}{\partial \alpha} dV, \quad (5.2k)$$

gdzie wprowadzono składową normalną i styczną odpowiednich wektorów pola magnetycznego względem powierzchni granicznej ferromagnetyk-powietrze. Na rys. 5.3 zobrazowano zachowujące się składowe: styczną natężenia pola magnetycznego i normalną indukcji pola magnetycznego na granicy dwóch środowisk.

Pochodna reluktywności magnetycznej (5.2h) po kącie wyraża się poprzez deltę Diraca [M.1], dla której zachodzi:

$$\int_0^\infty \delta\{r - r_o(\alpha)\} dr = \int_0^\infty \delta\{\dots\} dr = 1\{r - r_o(\alpha)\}. \quad (5.2l)$$

Całkowanie po objętości obszaru, w którym występuje skokowa zmiana reluktywności magnetycznej, można sprowadzić do całkowania po powierzchni S , na której reluktywność jest stała oraz do całkowania wzdłuż kierunku radialnego R [L.3, L.5, S.4]. Zależność (5.2k) przyjmuje postać:

$$\Delta T_{e,Fe} = -\frac{1}{2} \int_S \int_R (B_n^2 + \mu^2 H_t^2) \frac{\partial v}{\partial r} \frac{dr}{d\alpha} dr dS. \quad (5.2m)$$

Ponieważ na granicy ośrodków składowa normalna indukcji oraz składowa styczna natężenia pola magnetycznego nie ulegają zmianie (brak prądów powierzchniowych), to:

$$\Delta T_{e,Fe} = -\frac{1}{2} \int_S B_n^2 \int_R \Delta v \delta\{\dots\} \operatorname{sgn} \frac{dr}{d\alpha} dS dr - \frac{1}{2} \int_S H_t^2 \int_R \delta\{\dots\} \mu^2 \left(-\frac{1}{\mu^2}\right) \Delta \mu \operatorname{sgn} \frac{dr}{d\alpha} dS dr, \quad (5.2n)$$

gdzie przez Δv oznaczono zmianę reluktywności na granicy ferromagnetyk-powietrze. Zmiana ta jest liczona jako przyrost reluktywności od ferromagnetyka do obszaru powietrza ($\operatorname{sgn}=+1$) i wynosi: $\Delta v = v_o(1 - v_r)$.

Ostatecznie otrzymuje się zależność:

$$\Delta T_{e,Fe} = -\frac{1}{2} \int_S B_n^2 \Delta v \operatorname{sgn} \frac{dr_o}{d\alpha} dS + \frac{1}{2} \int_S H_t^2 \Delta \mu \operatorname{sgn} \frac{dr_o}{d\alpha} dS = -\frac{1}{2} \int_S \Delta v (B_n^2 + B_t^2 v_r) \operatorname{sgn} \frac{dr_o}{d\alpha} dS, \quad (5.3a)$$

w której składowe indukcji pola magnetycznego są wartościami na granicy ferromagnetyk-powietrze po stronie ferromagnetyka, bądź zależność:

$$\Delta T_{e,Fe} = -\frac{1}{2} \int_S \Delta v (B_{n,o}^2 + B_{t,o}^2 \frac{1}{v_r}) \operatorname{sgn} \frac{dr_o}{d\alpha} dS, \quad (5.3b)$$

w której składowe indukcji są wartościami na granicy ferromagnetyk-powietrze po stronie powietrza. Dla odróżnienia obu zależności wprowadzono indeks „o” dla składowych pola magnetycznego w powietrzu. Formułę (5.3a) lub (5.3b) stosujemy zależnie od tego, czy znane są wartości składowych pola na brzegu środowisk po stronie ferromagnetyka czy powietrza.

Moment permeancyjny można wyrazić również poprzez składowe wektorów pola magnetycznego, które zachowują swe wartości na granicy dwóch środowisk:

$$\Delta T_{e,Fe} = -\frac{1}{2} \int_S (\Delta v B_n^2 + \Delta \mu H_t^2) \operatorname{sgn} \frac{dr_o}{d\alpha} dS, \quad (5.4a)$$

gdzie:

B_n - składowa normalna indukcji pola magnetycznego,

H_t - składowa styczna natężenia pola magnetycznego.

Na przekroju prostopadłym do osi obrotu OZ wirnika maszyny granica środowisk ferromagnetyk-powietrze jest krzywą płaską Γ . Zatem na podstawie (5.3a) można zapisać:

$$\Delta T_{e,Fe} = -\frac{1}{2} \Delta v \int_S (B_n^2 + B_t^2 v_r) \frac{dr_o}{d\alpha} d\Gamma dz. \quad (5.4b)$$

Jeżeli na każdym przekroju poprzecznym maszyny wzdłuż osi OZ rozkład pola magnetycznego i współczynników środowiskowych jest jednakowy, to:

$$\Delta T_{e,Fe} = -\frac{1}{2} l \Delta v \int_{\Gamma} \tilde{B}^2 \frac{dr_o}{d\alpha} d\Gamma, \quad (5.4c)$$

gdzie:

l - długość obliczeniowa maszyny w kierunku osi OZ,

Γ - krzywa (płaska) opisującą kształt powierzchni wirnika maszyny,

$d\Gamma = \operatorname{sgn} \cdot r_o(\alpha) d\alpha$,

\tilde{B}^2 - kwadrat indukcji „brzegowego” pola magnetycznego wyrażony poprzez wartości składowych indukcji pola magnetycznego na granicy środowisk od strony ośrodka ferromagnetycznego:

$$\tilde{B}^2 = B_n^2 + B_t^2 v_r, \quad (5.4d)$$

lub poprzez wartości składowych indukcji po stronie powietrza:

$$\tilde{B}^2 = B_{n,o}^2 + B_{t,o}^2 \frac{1}{v_r}. \quad (5.4e)$$

Dla granicy idealny ferromagnetyk - próżnia prawe strony zależności (5.4d,e) są równe kwadratowi składowej normalnej indukcji pola magnetycznego.

Na podstawie matematycznej postaci zależności (5.4a,b,c) można wnioskować:

1. Część momentu permeancyjnego wynikająca z działania sił na granicy środowisk $\Delta T_{e,Fe}$ zanika wtedy i tylko wtedy, gdy kwadrat indukcji „brzegowego” pola magnetycznego \tilde{B}^2 oraz pochodna promienia opisującego kształt powierzchni wirnika po kącie $dr_o/d\alpha$ są wzajemnie ortogonalne na zorientowanym brzegu wirnika Γ .

Dla maszyny o liniowym i magnetycznie izotropowym wirniku $\Delta T_{e,Fe}$ jest równy momentowi permeancyjnemu.

- 2. Moment permeancyjny zanika, jeżeli izotropowy i liniowy magnetycznie wirnik maszyny jest cylindryczny (promień powierzchni zewnętrznej wirnika jest stały).*
- 3. W przypadku gdy prądy wirnika zanikają, to formuły (5.4a,b,c) określają moment reluktancyjny maszyny.*
- 4. Zależności (5.4a,b,c) uwidaczniają zależność momentu permeancyjnego od kształtu powierzchni wirnika maszyny.*
- 5. Formuły (5.4a,b,c) pozwalają wyznaczać moment permeancyjny maszyny o liniowym obwodzie magnetycznym poprzez całkowanie po obszarze (n-1)-wymiarowym, przy stosowaniu n-wymiarowej analizy pola maszyny elektrycznej (n=2 lub n=3).*

Moment maszyny wywołany działającymi siłami stycznymi na ukształtowany wirnik maszyny - moment permeancyjny - może być przedstawiony zgodnie z (5.2d) następująco:

$$\underline{T_{e,Fe} = -\frac{v_o}{2} \Delta v_r \int_S (B_n^2 + B_t^2 v_r) \frac{dr_o}{d\alpha} \operatorname{sgnd} S + \int_{V \setminus S} r N_\alpha dV.} \quad (5.4f)$$

Zależność (5.4f) wydziela w momencie permeancyjnym część uwarunkowaną:

- skokową zmianą reluktywności magnetycznej na granicy ferromagnetyk-powietrze oraz kształtem powierzchni wirnika maszyny (pochodna $dr_o/d\alpha$),
- ciągłą zmiennością reluktywności w obszarze spowodowaną nasycaniem się ferromagnetyka bądź strukturalną niejednorodnością obszaru wirnika maszyny.

5.2. MOMENT CAŁKOWITY MASZYN Y ELEKTRYCZNEJ

W ortogonalnym układzie współrzędnych cylindrycznych (r, α, z) składowa styczna gęstości siły f_α powstającej w przetworniku elektromechanicznym pozwala określić moment sił działających w płaszczyźnie prostopadłej do osi OZ. Zgodnie z przedstawionymi wyprowadzeniami można zapisać:

$$rf_\alpha = -\operatorname{div}(r\vec{\sigma}_\alpha).$$

Całkowity moment elektromagnetyczny rozwijany przez maszynę elektryczną wynosi zatem:

$$T_e = \int_V rf_\alpha dV = -\int_V \operatorname{div}(r\vec{\sigma}_\alpha) dV.$$

Twierdzenie Gaussa dla obszaru nieskończonego walca o osi pokrywającej się z osią obrotu wirnika maszyny OZ i zawierającego w całości wirnik maszyny (∂V - brzeg walca V

położony w szczelinie powietrznej maszyny) pozwala przekształcić całkę objętościową następująco:

$$T_e = - \int_{\partial V} r \vec{\sigma}_\alpha d\vec{S}_r . \quad (5.5a)$$

Zgodnie z (4.1d) oraz (4.1e) zachodzi zatem:

$$T_e = \int_{\partial V} r^2 H_\alpha B_r dz d\alpha . \quad (5.5b)$$

Z uwagi na dominację zjawisk magnetycznych w rozważanych przetwornikach elektromagnetycznych w zależnościach (5.5a,b) pominięto iloczyny składowych natężenia pola elektrycznego występujące w ogólnej zależności definiującej tensor naprężeń.

Zależności (5.5a,b) są podstawą do realizacji obliczeń metodami numerycznymi oraz analitycznymi całkowitego momentu elektromagnetycznego przetwornika elektro-mechanicznego.

5.3. PRZYKŁAD ANALITYCZNEGO OBLICZENIA MOMENTÓW MASZyny

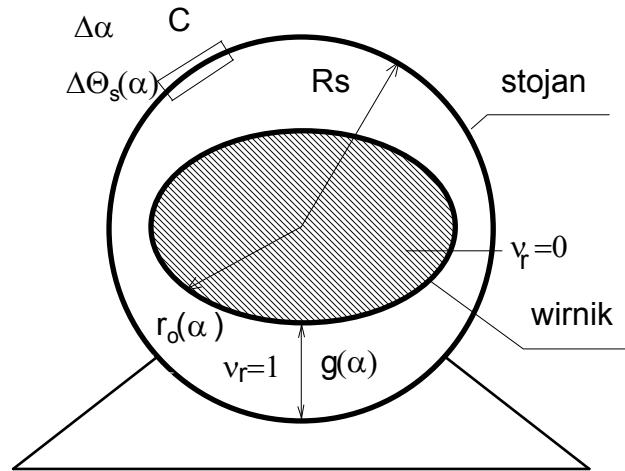
Celem przybliżenia metodyki określania wartości momentów, przeprowadzenia dyskusji oraz interpretacji fizycznej składowych momentu rozważono przykład prostej - modelowej maszyny elektrycznej. Pozwoli on na analityczne określenie, a w konsekwencji na przejrzyste zinterpretowanie momentów elektromagnetycznych przetwornika elektro-mechanicznego:

- Lorentza - $T_{e,Cu}$,
- permeancyjnego (środowiskowego) - $T_{e,Fe}$,
- reluktancyjnego - $T_{e,R}$.

Przeprowadzona analiza przybliżona ma na celu uwidocznienie i zinterpretowanie różnice pomiędzy wyszczególnionymi momentami bardziej wyraziście niż w przypadku analizy numerycznej pola maszyny (brak uzyskania zależności analitycznych czyni uzyskane rezultaty lokalnymi - odnoszącymi się do rozważanego stanu pracy). Jednak również zostanie przeprowadzone obliczenie momentów sił przy wykorzystaniu analizy numerycznej pola magnetycznego w maszynie elektrycznej (podrozdział 5.5).

Rozważmy modelową maszynę prądu przemiennego, bądź to synchroniczną o wydajnych biegunach, bądź asynchroniczną o zmiennej szerokości szczeliny. Założenie to oznacza, w przypadku maszyny synchronicznej, iż wirnik ma bieguny wydajne. Natomiast dla maszyny asynchronicznej to założenie oznacza, iż wirnik jest na przykład zdeformowany. Nierównomierność szczeliny maszyny asynchronicznej może być spowodowana dopuszczalną tolerancją obróbki ferromagnetyka stojana i wirnika lub ekscentrycznością

wirowania wirnika (por. rys. 8.1, 8.2). Przekrój poprzeczny takiej maszyny pokazano przykładowo na rys.5.4.



Rys.5.4. Modelowa maszyna prądu przemiennego
Fig.5.4. The simplified AC machine

Obwód magnetyczny jest w każdym punkcie izotropowy, a niejednorodność własności magnetycznych występuje tylko na granicy środowisk ferromagnetyk-szczelina powietrzna. Skokowa zmiana reluktywności magnetycznej na powierzchni wirnika maszyny warunkuje powstanie momentu środowiskowego. Przepływy uzwojeń maszyny odwzorowuje się za pomocą modelu łuski prądowej. W stanie ustalonym pracy maszyny, przy założeniu analizy monoharmonicznej, przepływy uzwojeń opisane są poniższymi zależnościami [K.4, K.5, P.1, P.4]:

$$\begin{aligned} \Theta_s(\alpha, \vartheta) &= \Theta_s(\alpha) = \Theta_s \cos(\beta_s), & \Theta_r(\alpha, \vartheta) &= \Theta_r \cos(\beta_r), \\ \beta_s &= \omega_s t - p\alpha + \gamma_s, & \beta_r &= \omega_r t - p(\alpha - \vartheta) + \gamma_r, \end{aligned} \quad (5.6a)$$

gdzie:

α - zmienna kątowa opisująca położenie rozważanego punktu na obwodzie maszyny,

p - liczba par biegunów maszyny,

ϑ - kąt obrotu wirnika maszyny,

$\omega_s = 2\pi f_s$ - pulsacja prądu stojana,

ω_r - pulsacja prądu w uzwojeniu wirnika:

$\omega_r = \omega_s - p\Omega \neq 0$ - dla maszyny asynchronicznej,

$\omega_r = \omega_s - p\Omega = 0$ - dla maszyny synchronicznej,

$\Omega = 2\pi n$ - prędkość mechaniczna wirnika maszyny, n - prędkość obrotowa wirnika,

γ_s - kąt elektryczny określający położenie amplitudy przepływu uzwojenia stojana w chwili $t=0$ na obwodzie maszyny, mianowicie: $p\alpha = \gamma_s$,

γ_r - kąt elektryczny określający położenie amplitudy przepływu uzwojenia wirnika w chwili $t=0$ na obwodzie maszyny, mianowicie: $p\alpha=\gamma_r$,

γ - kąt elektryczny określający położenie amplitudy przewodności magnetycznej szczeliny powietrznej na obwodzie przy kącie obrotu wirnika $\vartheta = 0 (t=0)$: $p\alpha=\gamma$.

Jednostkowa przewodność magnetyczna jest dana w postaci sumy dwóch pierwszych, parzystych harmonicznych przestrzennych szeregu Fouriera:

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_2 \cos 2\beta, \quad \beta = -p(\alpha - \vartheta) + \gamma, \quad (5.6b)$$

przy czym składowa stała dominuje nad amplitudą drugiej harmonicznej, tak iż kwadrat składowej normalnej indukcji na powierzchni wirnika jest równy w przybliżeniu kwadratowi składowej radialnej indukcji $B_n^2 \cong B_r^2$. Równość obu wielkości jest spełniona tym ściślej, im mniejszy jest udział składowej stycznej pola. Rozważony poniżej przykład odnosi się do maszyny elektrycznej, której wirnik ma przekrój poprzeczny zbliżony do kołowego, tak iż zachodzi $\lambda_2 \ll \lambda_0$. Jeżeli zachodzi $g(\alpha, \vartheta) \ll R_s$ (rys.5.4), to można przyjąć iż składowa radialna indukcji jest niezależna od współrzędnej promieniowej w obszarze szczeliny.

Należy zwrócić uwagę, iż założone przepływy w postaci (5.6a) stanowią przybliżenia przepływów uzwojeń oraz że są traktowane jako autonomiczne. W maszynie synchronicznej, gdzie oba przepływy są przepływami wymuszonymi, przybliżenia (5.6a), są spełnione stosunkowo dokładnie. W mniejszym stopniu można o takiej sytuacji mówić w przypadku maszyny asynchronicznej dwustronnie zasilanej. W wirniku maszyny asynchronicznej dwustronnie zasilanej przepływ wirnika jest powodowany poprzez dodatkowe źródło zasilające wirnik i indukowane w nim prądy. Natomiast dla maszyny indukcyjnej (jednostronnie zasilanej) nie można przyjmować, iż oba przepływy uzwojeń są opisane zależnościami (5.6a), w sytuacji gdy $\lambda_2 \neq 0$. Nadto wtedy relacja (5.6b) nie uwzględnia harmonicznych żłobkowych. *Dlatego też wyciągnięte wnioski z poniższych analiz i rozważań dotyczą wyłącznie maszyny synchronicznej.*

Indukcja pola magnetycznego w kierunku radialnym B_r (zwrot dodatni składowych radialnych odpowiada zwrotowi promienia wodzącego, a przepływ naliczany jest od osi neutralnej magnetycznie $B_r=0$), przy założeniu ortogonalności funkcji rozkładu przewodności magnetycznej $\lambda(\alpha, \vartheta)$ i przepływu sumarycznego uzwojeń $\Theta(\alpha, \vartheta)$:

$$\int_0^{2\pi} \lambda(\alpha, \vartheta) \Theta(\alpha, \vartheta) d\alpha = 0, \quad (5.6c)$$

oraz nieskończonej przenikalności magnetycznej wirnika oraz stojana, wynosi:

$$B_r(\alpha, \vartheta) = -\Theta \cdot (\lambda_0 + \lambda_2 \cos(2\beta)),$$

lub równoważnie:

$$B_r(\alpha, \vartheta) = -\frac{\Theta}{v_0 g(\alpha, \vartheta)}. \quad (5.6d)$$

Indukcja pola magnetycznego w kierunku stycznym B_α może być wyznaczona na podstawie prawa Ampere dla konturu C (rys.5.4.) dodatkowo przedstawionego na rys.5.5:

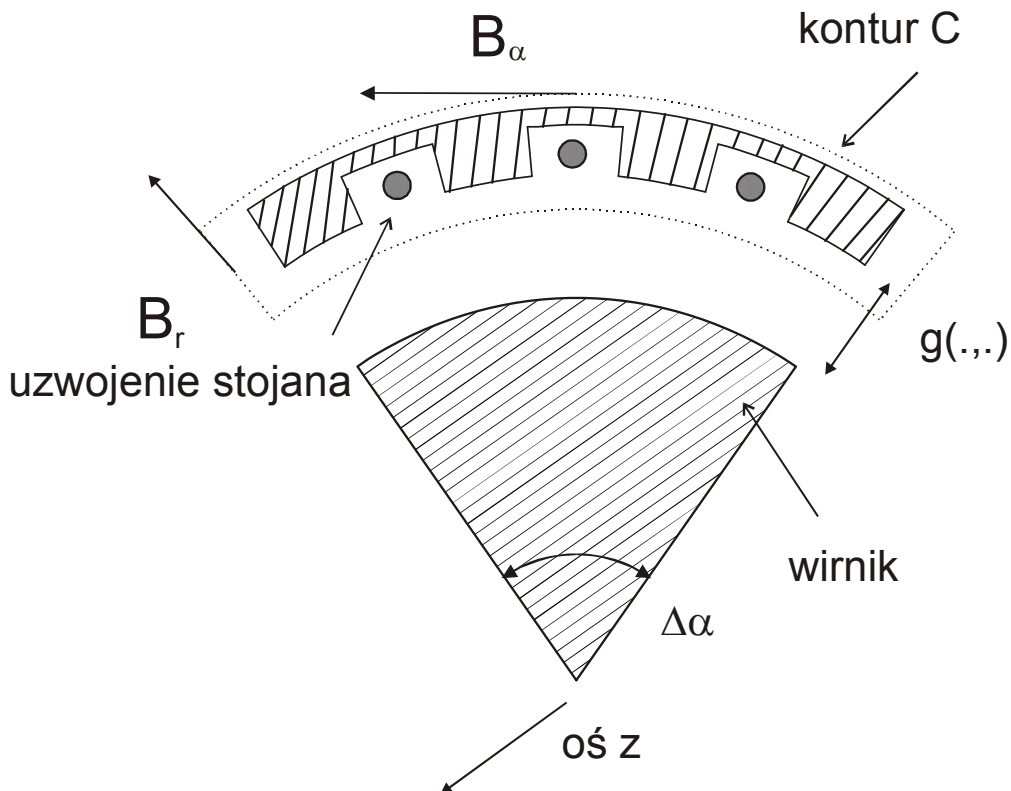
$$\begin{aligned}\Delta\Theta_s &= v_o v_r B_\alpha(\hat{\alpha}) R_s \Delta\alpha - v_o B_r(\alpha + \Delta\alpha) \Delta g - v_o B_\alpha(\tilde{\alpha}) R_s \Delta\alpha + v_o B_r(\alpha) \Delta g = \\ &= -v_o \Delta B_r \Delta g + v_o B_\alpha(\tilde{\alpha}) R_s \Delta\alpha,\end{aligned}$$

Δg oznacza promieniową szerokość konturu C, zaś $\tilde{\alpha}, \hat{\alpha}$ są pewnymi kątami z przedziału $(\alpha, \alpha + \Delta\alpha)$. Przechodząc do granicy $\Delta\alpha \rightarrow 0$, uzyskujemy zależność różniczkową, wynikającą również z prawa Ampere, w postaci różniczkowej:

$$B_\alpha(\alpha, \vartheta) = -\frac{1}{v_o R_s} \frac{\partial \Theta_s}{\partial \alpha}, \quad (5.6e)$$

gdzie:

- R_s - promień wewnętrznej powierzchni stojana,
- $g(\alpha, \vartheta)$ - lokalna szerokość szczeliny powietrznej,
- Θ_s - przepływ uzwojeń stojana,
- Θ_r - przepływ uzwojeń wirnika,
- Θ - przepływ sumaryczny: $\Theta = \Theta_s + \Theta_r$.



Rys.5.5. Określenie składowej stycznej B_α pola magnetycznego w szczelinie powietrznej
Fig.5.5. Tangential component B_α in the air-gap - the evaluation

A) Obliczenie momentu permeancyjnego i reluktancyjnego maszyny

Moment permeancyjny zgodnie z (5.4c) ($v_r=0$, $H_t=0$, $\text{sgn}=+1$) wynosi:

$$T_{e,Fe} = -\frac{1}{4} v_o l \int_0^{2\pi} \tilde{B}^2 \frac{dr_o^2}{d\alpha} d\alpha.$$

Promień opisujący powierzchnię wirnika maszyny wynosi:

$$r_o(\alpha, \vartheta) = R_s - g(\alpha, \vartheta).$$

Stąd otrzymuje się:

$$r_o^2(\alpha, \vartheta) = R_s^2 - 2R_s g(\alpha, \vartheta) + g^2(\alpha, \vartheta) \cong R_s^2 - 2R_s / \{v_o \lambda(\alpha, \vartheta)\}.$$

Pominięcie g^2 wobec R_s^2 w ostatniej zależności pociąga za sobą jednocześnie pominięcie kwadratu indukcji pola stycznego B_α^2 wobec kwadratu indukcji pola radialnego B_r^2 , zatem zgodnie z (5.4d) zachodzi:

$$\tilde{B}^2 = B_n^2 + v_r B_t^2 = B_n^2 \cong B_r^2.$$

Następnie:

$$T_{e,Fe} = -\frac{1}{4} l \int_0^{2\pi} \Theta^2 \lambda^2 2R_s \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} \frac{1}{\lambda^2} d\alpha,$$

stąd:

$$T_{e,Fe} = -\frac{1}{\pi} \Lambda_2 \int_0^{2\pi} \Theta^2 \cos 2\bar{\beta} d\alpha,$$

gdzie oznaczono:

$$\Lambda_2 = \pi R_s l p \lambda_2 > 0, \quad 2\bar{\beta} = 2\beta - \frac{\pi}{2}.$$

Podstawiając do powyższej zależności kwadrat przepływu maszyny i wykonując zaznaczone całkowanie uzyskuje się:

$$T_{e,Fe} = -\frac{1}{2} \Lambda_2 \Theta_s^2 \cos(2\beta_s - 2\bar{\beta}) - \Lambda_2 \Theta_s \Theta_r \cos(\beta_s + \beta_r - 2\bar{\beta}).$$

Wprowadzając kąt mocy (kąt między przepływami - różny od kąta energetycznego) jako:

$$\delta = \beta_s - \beta_r = \omega_s t - \omega_r t - p\vartheta + \gamma_s - \gamma_r,$$

($\Delta\gamma = \gamma_r - \gamma_s$) jest:

$$\underline{T_{e,Fe} = \Delta\Lambda \cdot \Theta_s^2 \sin(2\delta + 2\omega_r t + 2\Delta\gamma) + 2\Delta\Lambda \cdot \Theta_s \Theta_r \sin(\delta + 2\omega_r t + 2\Delta\gamma)}, \quad (5.7)$$

przy czym:

$$\Delta\Lambda = \frac{1}{2} \Lambda_2 = \Lambda_d - \Lambda_o = \Lambda_o - \Lambda_q \text{ jest różnicą permeancji w osiach w odniesieniu do permeancji średniej: } \Lambda_o = \frac{1}{2}(\Lambda_d + \Lambda_q),$$

$\Lambda_d = \pi R_s \ln(\lambda_o + \lambda_2 / 2) = \Lambda_o + \Delta\Lambda$ - permeancja w osi "d" maszyny,

$\Lambda_q = \pi R_s \ln(\lambda_o - \lambda_2 / 2) = \Lambda_o - \Delta\Lambda$ - permeancja w osi "q" maszyny.

Moment reluktancyjny - zgodnie z definicją (5.1) - jest momentem, jaki rozwija maszyna przy braku przepływu prądów w uzwojeniach wirnika (symbolicznie $I_r=0$). Jest on zarazem momentem permeancyjnym maszyny, ponieważ moment Lorentza zanika:

$$T_{e,R} = T_e \Big|_{I_r=0} = T_{e,Fe} \Big|_{I_r=0},$$

stąd:

$$T_{e,R} = \Delta\Lambda \cdot \Theta_s^2 \sin(2\delta + 2\omega_r t + 2\Delta\gamma). \quad (5.8)$$

- Jeżeli wirnik maszyny synchronicznej jest cylindryczny: $\Delta\Lambda = 0$, to moment permeancyjny (oraz reluktancyjny) w maszynie nie powstaje.
- Jeżeli wirnik maszyny synchronicznej nie jest cylindryczny: $\Delta\Lambda \neq 0$, to moment permeancyjny przy danych prądach wirnika nie jest równy momentowi reluktancyjnemu:

$$T_{e,Fe} \neq T_{e,R}$$

i jest większy od reluktancyjnego, gdy $\Delta\Lambda > 0$:

$$T_{e,Fe} > T_{e,R}$$

B) Obliczenie momentu Lorentza

Moment Lorentza (działający na obszary przewodzące prąd – rys.5.6) wynosi:

$$T_{e,Cu} = \int_V r_o(\alpha) j_{r,z} B_r dV. \quad (5.9a)$$

Gęstość prądów wirnika wyraża się poprzez przepływ uzwojeń wirnika Θ_r następująco:

$$j_{r,z} = \frac{1}{h} \frac{\partial \Theta_r}{\partial \alpha},$$

gdzie:

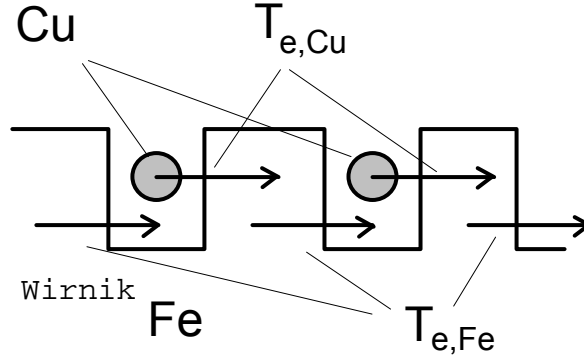
$h = h(\alpha)$ - lokalna grubość uzwojenia wirnika,

$dV = lh(\alpha)db$ - różniczka objętości,

db - różniczka długości łuku $db = r_o(\alpha)d\alpha$,

zatem:

$$T_{e,Cu} = - \int_V r_o(\alpha) \lambda(\alpha, \vartheta) \frac{\Theta(\alpha, \vartheta)}{h(\alpha)} \frac{d\Theta_r}{db} dV.$$



Rys.5.6. Składowe momentu elektromagnetycznego
Fig.5.6. The components of the electromagnetic torque

Z powyższej relacji wynika równość:

$$T_{e,Cu} = -pI R_s \int_0^{2\pi} \left\{ \lambda(\alpha, \vartheta) - \frac{\mu_0}{R_s} \right\} \Theta_r \sin(\beta_r) \Theta(\alpha, \vartheta) d\alpha,$$

gdyż: $r_o(\alpha)\lambda(\alpha, \vartheta) = R_s \lambda(\alpha, \vartheta) - \mu_0$.

Następnie pomijając iloraz μ_0 / R_s jako znacznie mniejszy od przewodności $\lambda(\alpha, \vartheta)$ - zgodnie z uwagą dotyczącą zakresu stosowalności wzoru (5.6a) - otrzymuje się:

$$T_{e,Cu} = -pI R_s \int_0^{2\pi} \lambda(\alpha, \vartheta) \Theta_r \sin(\beta_r) \Theta(\alpha, \vartheta) d\alpha,$$

stąd:

$$T_{e,Cu} = -pI R_s \int_0^{2\pi} \{ \lambda_o + \lambda_2 \cos(\beta) \} \{ \Theta_r \sin(\beta_r) \} \{ \Theta_s \cos(\beta_s) + \Theta_r \cos(\beta_r) \} d\alpha,$$

i ostatecznie po scałkowaniu:

$$T_{e,Cu} = \Lambda_o \Theta_s \Theta_r \sin(\delta) - \Delta \Lambda \Theta_s \Theta_r \sin(\delta + 2\omega_r t + 2\Delta\gamma) \quad (5.9b)$$

(pominięto wyrażenie nie będące funkcją kąta mocy: $-\Delta \Lambda \Theta_r^2 \sin(2\omega_r t + 2\Delta\gamma)$ zerowe dla maszyny synchronicznej, a dla maszyny asynchronicznej posiadające zerową wartość średnią).

Dla maszyny synchronicznej ($\omega_r = 0, \Delta\gamma = 0, \pi$) moment Lorentza wynosi zatem:

$$\underline{T_{e,Cu} = \Lambda_q \Theta_s \Theta_r \sin(\delta)}. \quad (5.9c)$$

Celem potwierdzenia poprawności rezultatów obliczeń przeprowadzonych w podpunktach **A)** oraz **B)** dokonuje się obliczenia momentu całkowitego. Moment ten jest równy sumie momentu permeancyjnego oraz momentu Lorentza.

C) Obliczenie momentu całkowitego

Na podstawie wzoru (5.5b) można zapisać:

$$T_e = v_o l R_s^2 \int_0^{2\pi} B_\alpha B_r d\alpha = l R_s^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\Theta_s}{d\alpha} \frac{\lambda \Theta}{R_s} d\alpha \rightarrow$$

$$T_e = p R_s l \int_0^{2\pi} \{ \Theta_s \cos \beta_s + \Theta_r \cos \beta_r \} \{ \lambda_o + \lambda_2 \cos(2\beta) \} \{ \Theta_s \sin \beta_s \} d\alpha ,$$

a po wykonaniu całkowania (iloczynu funkcji trygonometrycznych, dla których sumy algebraiczne argumentów nie zależą od $p\alpha$, dają niezerowe całki):

$$T_e = \underbrace{\Lambda_o \Theta_s \Theta_r \sin(\delta) - \Delta \Lambda \Theta_s \Theta_r \sin(\delta + 2\omega_r t + 2\Delta\gamma)}_{T_{e,Cu}} +$$

$$+ \underbrace{2\Delta \Lambda \Theta_s \Theta_r \sin(\delta + 2\omega_r t + 2\Delta\gamma) + \Delta \Lambda \Theta_s^2 \sin(2\delta + 2\omega_r t + 2\Delta\gamma)}_{T_{e,Fe}} \quad (5.10a)$$

gdzie moment reluktancyjny:

$$T_{e,R} = \Delta \Lambda \cdot \Theta_s^2 \sin(2\delta + 2\omega_r t + 2\Delta\gamma) . \quad (5.10b)$$

W zależności (5.10a) wyróżniono momenty składowe Lorentza i permeancyjny klamrami stosownie do obliczeń przeprowadzonych w podpunktach **A)** oraz **B)**.

Dla maszyny synchronicznej ($\omega_r = 0, \Delta\gamma = 0, \pi$) moment reluktancyjny:

$$\underline{T_{e,R} = T_{e,Fe} \Big|_{Ir=0} = \Delta \Lambda \cdot \Theta_s^2 \sin(2\delta) ,} \quad (5.10c)$$

a całkowity:

$$\underline{T_e = \Lambda_d \cdot \Theta_s \Theta_r \sin(\delta) + \Delta \Lambda \cdot \Theta_s^2 \sin(2\delta) ,} \quad (5.10d)$$

zgodnie z teorią synchronicznej maszyny prądu przemiennego [K.5, P.1, P.2].

Zależność (5.10a) potwierdza zupełność rozkładu całkowitego momentu maszyny z nierównomierną szczeliną na moment permeancyjny $T_{e,Fe}$ (5.7) oraz moment Lorentza $T_{e,Cu}$ (5.9c). Momenty Lorentza i permeancyjny wzajemnie się uzupełniają tworząc moment całkowity.

D) Obliczenie momentu maszyny na podstawie funkcji koenergii magnetycznej układu

Celem potwierdzenia poprawności zależności (5.10d) moment całkowity maszyny zostanie ponownie obliczony, tym razem na podstawie funkcji koenergii. Pochodna

cząstkowa koenergii magnetycznej względem współrzędnej przestrzennej przy ustalonych prądach przetwornika elektromechanicznego stanowi całkowity moment elektromagnetyczny. Zakłada się zależność indukcji pola magnetycznego od jednej współrzędnej przestrzennej oraz brak zjawisk histerezowych. Koenergia magnetyczna W_c liniowego układu skończonej liczby uzwojeń jest energią magnetyczną układu uzwojeń stojana i wirnika zawartą w obszarze V [M.5, S.2]:

$$W_c = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{v} \vec{B}^2 dV. \quad (5.11a)$$

Pomijając kwadrat składowej stycznej indukcji pola magnetycznego wobec kwadratu składowej radialnej oraz uwzględniając, iż przewodność magnetyczna szczeliny wynosi (podpunkt A):

$$\lambda(\alpha, \vartheta) = \lambda_o + \lambda_2 \cos 2\beta = \frac{1}{v_o g(\alpha, \vartheta)}, \quad (5.11b)$$

gdzie:

$g(\alpha, \vartheta) = g$ - lokalna grubość szczeliny powietrznej,

$\beta = -p(\alpha - \vartheta) + \gamma$,

otrzymuje się:

$$W_c = \frac{1}{2} v_o \int_V \vec{B}^2 dV = \frac{1}{2} v_o l R_s \int_0^{2\pi} g \vec{B}^2 d\alpha = \frac{1}{2} l R_s \int_0^{2\pi} \lambda^{-1} B_r^2 d\alpha.$$

Na podstawie (5.6d) można zapisać:

$$W_c = \frac{1}{2} l R_s \int_0^{2\pi} \{\lambda_o + \lambda_2 \cos(2\beta)\} \{\Theta_s \cos(\beta_s) + \Theta_r \cos(\beta_r)\}^2 d\alpha.$$

Obliczenie powyższej całki prowadzi do relacji:

$$W_c = \frac{1}{p} \Lambda_o \left\{ \frac{1}{2} \Theta_s^2 + \Theta_s \Theta_r \cos(\delta) + \frac{1}{2} \Theta_r^2 \right\} + \frac{1}{p} \Lambda_2 \left\{ \frac{1}{2} \Theta_s^2 \cos(2\delta + 2\omega_r t + 2\Delta\gamma) + \Theta_s \Theta_r \cos(\delta + 2\omega_r t + 2\Delta\gamma) + \frac{1}{2} \Theta_r^2 \cos(2\omega_r t + 2\Delta\gamma) \right\}.$$

Z uwagi na definicję kąta mocy:

$$\delta = \beta_s - \beta_r = \omega_s t - \omega_r t - p\vartheta + \gamma_s - \gamma_r,$$

można zapisać:

$$\frac{\partial W_c}{\partial \vartheta} = -p \frac{\partial W_c}{\partial \delta}. \quad (5.11c)$$

Pochodna cząstkowa funkcji koenergii względem kąta obrotu wirnika (wielkości θ_s , θ_r , ω_s , ω_r , γ_s , γ_r pozostają ustalone) określa moment całkowity działający na wirnik maszyny:

$$\frac{\partial W_c}{\partial \vartheta} = \Lambda_o \Theta_s \Theta_r \sin(\delta) + \frac{1}{2} \Lambda_2 \Theta_s \Theta_r \sin(\delta + 2\omega_r t + 2\Delta\gamma) + \frac{1}{2} \Lambda_2 \Theta_s^2 \sin(2\delta + 2\omega_r t + 2\Delta\gamma). \quad (5.11d)$$

Zależność powyższa jest zgodna z uprzednio uzyskaną na innej drodze zależnością (5.10a).

5.4. MOMENT PERMEANCYJNY I RELUKTANCYJNY

Całkowity moment elektromagnetyczny rozwijany przez maszynę synchroniczną można rozłożyć dwojako:

$$\text{I)} \quad T_e = \underbrace{\Lambda_q \Theta_s \Theta_r \sin \delta}_{T_{e, Cu}} + \underbrace{2\Delta\Lambda \Theta_s \Theta_r \sin(\delta) + \overbrace{\Delta\Lambda \Theta_s^2 \sin(2\delta)}^{T_{e, R}}}_{T_{e, Fe}}, \quad (5.12a)$$

bądź:

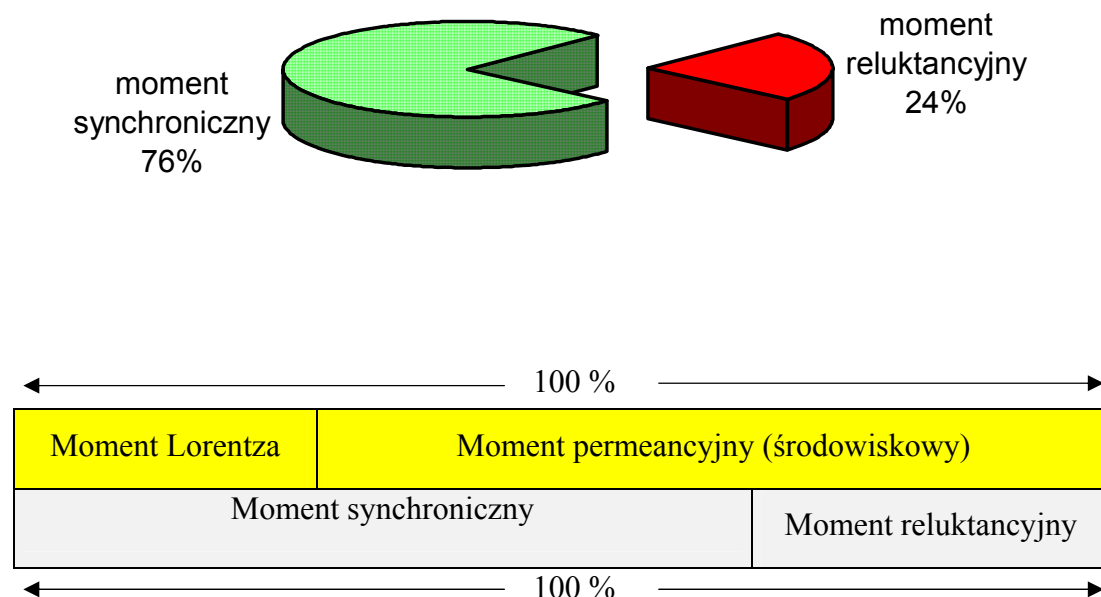
$$\text{II)} \quad T_e = \underbrace{(\Lambda_q + 2\Delta\Lambda) \Theta_s \Theta_r \sin \delta}_{T_{e, Synchron}} + \underbrace{\Delta\Lambda \Theta_s^2 \sin(2\delta)}_{T_{e, R}}. \quad (5.12b)$$

Porównując oba powyższe rozkłady momentu elektromagnetycznego maszyny synchronicznej można stwierdzić, iż rozkład:

- **I)** - wyodrębnia składniki posiadające prostą interpretację fizyczną: moment Lorentza oraz permeancyjny (środowiskowy). Moment permeancyjny jest wynikiem działania sił stycznych na wirnik maszyny (wirnik stanowi ośrodek materialny - ferromagnetyk o odpowiednio ukształtowanej powierzchni zewnętrznej). Moment Lorentza (moment sił Lorentza) jest wynikiem działania sił na prądy płynące w wirniku maszyny.
- **II)** - tradycyjnie przyjmowany opiera się na wyodrębnieniu składników zależnych od różnych funkcji trygonometrycznych kąta mocy. Jeden ze składników - moment reluktancyjny nie zależy od napięcia wzbudzenia. W przypadku poliharmonicznej analizy maszyny nie daje przejrzystego opisu składników momentu, a w przypadku uwidaczniania się zjawisk nasycenia w ogóle nie jest możliwe jego w pełni poprawne zinterpretowanie i odniesienie do różnych stanów pracy (por. poniższe uwagi).

Przykładowo, dla maszyny synchronicznej o danych znamionowych: $S_n = 150 \text{ MVA}$, $U_n = 13.6 \text{ kV}$, $I_n = 6276 \text{ A}$, $f_n = 50 \text{ Hz}$, $X_{dr} = 1.86$, $X_{qr} = 0.98$, $\cos \varphi_n = 0.9$, $2p = 10$ obliczono (analiza monoharmoniczna) momenty w procentach momentu całkowitego dla znamionowego stanu pracy:

<i>Rozkład I)</i>	<u>Moment Lorentza</u> 27%	<u>Moment permeancyjny</u> 73%
<i>Rozkład II)</i>	<u>Moment synchroniczny</u> 76%	<u>Moment reluktancyjny</u> 24%



Rys.5.7. Rozkład momentu całkowitego maszyny synchronicznej – graficzna prezentacja
 Fig.5.7. Synchronous machine total torque decomposition – chart presentation

Rozkład całkowitego momentu elektromagnetycznego na moment środowiskowy (permeancyjny) oraz moment Lorentza pokazuje, iż rola wyprofilowanego wirnika maszyny synchronicznej - jeżeli chodzi o wartość wytwarzanego momentu elektromagnetycznego - jest dużo większa, niż wynikałoby to z wartości momentu reluktancyjnego. Przepływ wirnika (pole magnetyczne pochodzące od wirnika) warunkuje, wraz z polem od uzwojeń stojana, wartość momentu działającego na ferromagnetyczny wirnik. Wartość momentu działającego na ferromagnetyczny wirnik okazuje się być większa niż wartość momentu reluktancyjnego. Moment reluktancyjny nie stanowi zatem wielkości, która opisuje całościowo działanie sił na wyprofilowany magnetyczny wirnik.

Moment reluktancyjny wyznaczany w [K.5, P.1, P.2, aD.4] - jak się okazuje w kontekście zaproponowanego rozdziału - nie jest definiowany w sposób wystarczająco ścisły i ogólny. Mianowicie, moment reluktancyjny rozumiany jest jako część całkowitego momentu elektromagnetycznego maszyny, który powstaje w synchronicznej maszynie niewzbudzonej (moment synchroniczny zanika). Warunkowany jest on różnicą właściwości magnetycznych maszyny w dwóch osiach. Taki sposób definiowania momentu reluktancyjnego nie ma charakteru ogólnego i nie pozwala na poprawne stosowanie tego typu definicji w różnych stanach pracy maszyny.

Na przykład, dla maszyny o nasycającym się obwodzie magnetycznym ujawnia się zależność reaktancji w osi wzdłużnej i poprzecznej maszyny od prądów uzwojeń maszyny. Nasuwa się zatem naturalne pytanie: jakie parametry nasyconej czy też nienasyconej maszyny uwzględniać - choćby nawet przy monoharmonicznej analizie - celem określenia momentu reluktancyjnego i jaki miałby on wtedy sens? Uwzględnienie parametrów w stanie nasycenia

(odpowiednio skorygowanych w stosunku do parametrów w stanie nienasyconym) przeczy określeniu momentu reluktancyjnego jako momentu maszyny powstającego bez udziału prądów wirnika maszyny. Tak zdefiniowany moment reluktancyjny zależy od parametrów będących funkcją w ogólności niezerowych prądów wirnika. Nieuwzględnienie zaś zmiany parametrów powoduje uzależnienie momentu reluktancyjnego od parametrów, które nie odnoszą się do aktualnego stanu pracy maszyny. Definiowanie momentu reluktancyjnego jako części momentu elektromagnetycznego maszyny (5.12a) przy zerowych prądach wirnika:

$$T_{e,R}^{df} = T_e|_{I_r=0} \quad (5.13a)$$

jest poprawne i celowe zatem tylko dla maszyn o stałych parametrach (nienasycających się w ogóle lub silnie nasyconych). Taką definicję - mimo iż nieścisłą - można jednak uważać za mającą pewien sens z uwagi na techniczną (przybliżoną) konieczność oceny wpływu ukształtowania wirnika na własności eksploatacyjne maszyny synchronicznej z wydатыmi biegunami.

Autorzy [P.1, P.2, aD.4] - mówiąc o momencie reluktancyjnym - zaznaczają również, iż *jest to moment wywołany wydątną biegunowością maszyny - asymetrią magnetyczną wirnika maszyny*. Stwierdzenie takie - choć nie bezpośrednio - sugeruje, że wydątna biegunowość jest jedyną przyczyną wytworzenia tylko momentu reluktancyjnego. Nie jest komentowany bowiem w ogóle wpływ wydątny biegunowości na wartości drugiego składnika całkowitego momentu - momentu synchronicznego. Wydątna biegunowość, rozumiana jako rezultat odpowiedniego zaprojektowania powierzchni wirnika, prowadzi do powstawania momentu permeancyjnego, który jest większy lub równy momentowi reluktancyjnemu. Dla maszyn synchronicznych o wydątnych biegunach $X_q/X_d \approx 0.6 \div 0.8$, przy nieznacznym nasyceniu obwodu magnetycznego, stosunek momentu reluktancyjnego do permeancyjnego waha się w granicach:

$$\frac{T_{e,R}}{T_{e,Fe}} = 0.4 \div 0.6. \quad (5.13b)$$

Zdefiniowany moment permeancyjny można wykorzystać przy projektowaniu maszyny synchronicznej z wydątnymi biegunami. Wartość momentu permeancyjnego może być podstawą do określenia naprężeń panujących w warstwach izolacji uzwojeń wzbudzenia maszyny synchronicznej z wydątnymi biegunami.

Niech moment permeancyjny, działający na jeden ferromagnetyczny pieńek bieguna wirnika maszyny synchronicznej o 2p biegunach, wynosi $t_{e,Fe}$. Momenty sił działające na prądy po obu stronach bieguna oznacza się odpowiednio jako $t_{e,Cu1}$ oraz $t_{e,Cu2}$ (na rys.5.8 momenty sił symbolicznie zaznaczono w postaci strzałek). Całkowity moment maszyny synchronicznej przy tak wprowadzonych oznaczeniach wynosi:

$$T_e = 2p(t_{e,Fe} + t_{e,Cu1} + t_{e,Cu2}),$$

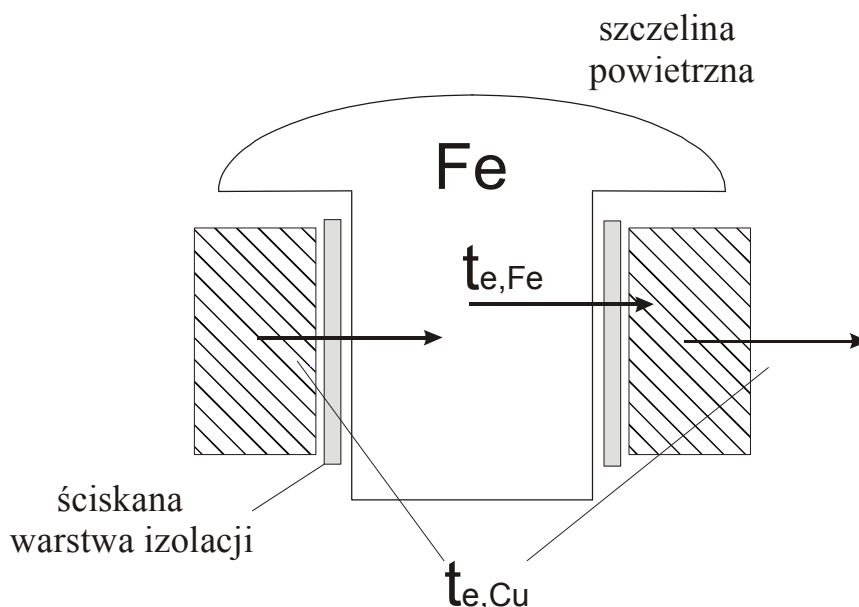
gdzie: $t_{e,Fe} = \frac{T_{e,Fe}}{2p}$ - moment permeancyjny działający na jeden biegun,

$t_{e,Cu1(2)} = \frac{T_{e,Cu1(2)}}{2p}$ - moment Lorentza działający po odpowiedniej stronie bieguna.

Ściskana warstwa izolacji uzwojenia wzbudzenia przenosi na wał maszyny moment sił określony poprzez wartość momentu Lorentza $t_{e,Cu} = t_{e,Cu1} + t_{e,Cu2}$. Moment ten może być wyrażony poprzez moment permeancyjny następująco:

$$t_{e,Cu} = \frac{1}{2p} (T_e - T_{e,Fe}). \quad (5.13c)$$

Należy podkreślić, iż oba występujące momenty sił w zależności (5.13c) są obliczane jako stosowne całki powierzchniowe.



Rys.5.8. Składowe momentu elektromagnetycznego dla przykładowej maszyny synchronicznej
Fig.5.8. The components of the electromagnetic torque for exemplary synchronous machine

Dla hydrogeneratora ADV- 556 analizowanego numerycznie w znamionowym stanie pracy (podrozdział 5.4) otrzymano: $t_{e,Cu} = 0.07555 \text{ MNm}$ ($2p = 10$), $t_{e,Fe} = 0.1555 \text{ MNm}$. Moment sił przenoszony przez ściskaną warstwę izolacji wynosi:

$$t_{e,Cu} \approx 76 \text{ kNm}.$$

Średnie naprężenie ściskające σ_s rozważaną warstwę izolacji (przy założeniu iż cała powierzchnia skrajnej warstwy izolacji podlega ściskaniu) wynosi:

$$\sigma_s = \frac{T_e - T_{e,Fe}}{2plhR_{av}}, \quad (5.13d)$$

gdzie:

R_{av} - średni promień cewki uzwojenia wzbudzenia,

h - wysokość cewki,

l - długość maszyny.

Dla rozważanego hydrogeneratora: $R_{av} = 1.815$ m, $h = 0.215$ m, $l = 1.621$ m, zatem średnie naprężenie ściskające wynosi:

$$\sigma_s \approx 119.5 \text{ kPa.}$$

Wartość ta w odniesieniu do granicy sprężystości dla izolacji polwinitowej [H.2] wynosi:

$$\frac{119.5 \text{ kPa}}{5 \text{ MPa}} \approx 0.024 = 2.4 \%,$$

nie stanowiąc bezpośredniego zagrożenia naruszenia granicy sprężystości izolacji.

Moment permeancyjny (środowiskowy) może być wykorzystywany przy sprawdzaniu kryteriów wytrzymałościowych izolacji wirnika maszyny synchronicznej, celem oceny stanu naprężeń w izolacji. Moment środowiskowy może zostać włączony do całokształtu zagadnień rozważanych przy projektowaniu maszyn synchronicznych [D.1] oraz prowadzeniu obliczeń elektromagnetycznych maszyn [T.5].

5.5. NUMERYCZNA ANALIZA MOMENTÓW SIŁ MASZINY SYNCHRONICZNEJ Z BIEGUNAMI WYDATNYMI

Numeryczna analiza pola elektromagnetycznego pozwala - poprzez określenie wartości wektorów pola magnetycznego w założonej, wystarczająco dużej liczbie punktów obszaru - na obliczenie momentu permeancyjnego, Lorentza oraz całkowitego momentu elektromagnetycznego. Zależnościami wykorzystywanymi dla potrzeb obliczeń numerycznych są zależności (4.16) i (4.17), a w konsekwencji (5.4c) i (5.5b).

Pole magnetyczne analizuje się w niniejszej pracy metodą elementów skończonych. Analizowano pole magnetyczne w znamionowym stanie pracy hydrogeneratora oraz po jego odwzbudzeniu. Do opisu pola magnetycznego zastosowano potencjał wektorowy pola magnetycznego. Zadany warunkiem brzegowym na zewnętrznej powierzchni stojana i wewnętrznej powierzchni wirnika był zerowy warunek brzegowy Dirichleta (rys.5.10). Na promieniowych granicach podziałki biegunowej zadano warunek symetrii (periodyczności) potencjału magnetycznego. Liczba elementów wynosiła około 7000. Analizę pola magnetycznego - z uwagi na naturalną symetrię maszyny wirującej - przeprowadza się

w układzie współrzędnych cylindrycznych, w którym indukcja pola magnetycznego ma składowe (B_r, B_α). Obliczanie składowych normalnych i stycznych (B_n, B_t) indukcji pola na podstawie składowych indukcji w układzie współrzędnych cylindrycznych jest dokonane jest na podstawie zależności:

$$(r, \alpha) \rightarrow (n, t): \begin{cases} B_n = B_r \cos \varepsilon - B_\alpha \sin \varepsilon \\ B_t = B_r \sin \varepsilon + B_\alpha \cos \varepsilon \end{cases}, \quad (5.14a)$$

oraz na odwrot:

$$(n, t) \rightarrow (r, \alpha): \begin{cases} B_r = B_n \cos \varepsilon + B_t \sin \varepsilon \\ B_\alpha = -B_n \sin \varepsilon + B_t \cos \varepsilon \end{cases}, \quad (5.14b)$$

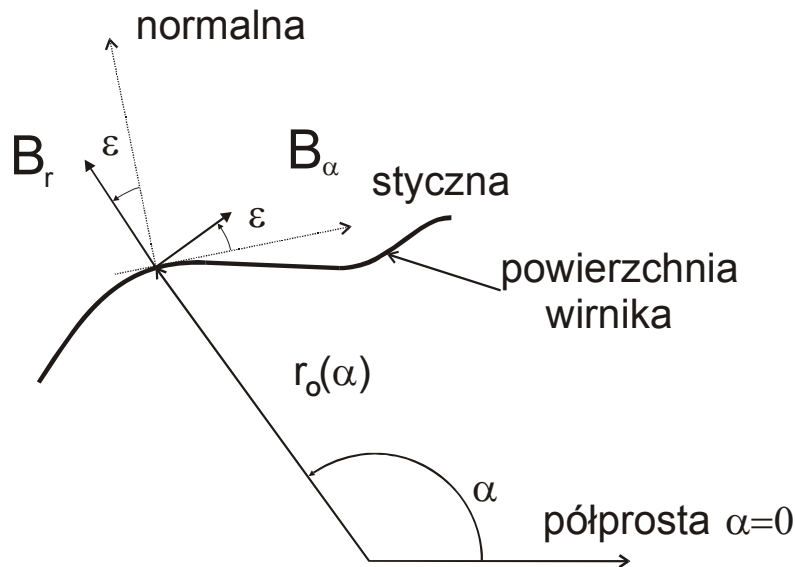
gdzie:

ε - kąt nachylenia stycznej w danym punkcie linii brzegowej przekroju powierzchni wirnika do osi $\alpha=0$ przyjętego układu współrzędnych (rys.5.9):

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{dr_o}{r_o d\alpha}. \quad (5.14c)$$

Dokonano obliczenia wartości momentów: permeancyjnego $T_{e,Fe}$, reluktancyjnego $T_{e,R}$, Lorentza $T_{e,Cu}$ i całkowitego T_e dla produkowanej seryjnie maszyny synchronicznej, jaką jest hydrogenerator ADV-566 o następujących danych znamionowych: $S_n = 150$ MVA, $P_n = 135$ MW, $U_n = 13.8$ kV, $I_n = 6276$ A, $X_{dr} = 1.86$, $X_{qr} = 0.98$, $\cos \varphi = 0.9$, $2p = 10$, $T_{en} = 2.15$ MNm, $f_n = 50$ Hz, $n_n = 600$ obr/min, $I_{wn} = 1328$ A, $I_{wo} = 643$ A, $g = 0.02$ m, $l = 1.621$ m.

Przekrój hydrogeneratora pokazano na rysunkach 5.1a, 5.10 oraz 5.11. Podziałka biegunowa stojana wynosi 18, poskok uzwojenia stojana odpowiada 15 podziałkom żłobkowym, liczba żłobków na biegun na fazę stojana wynosi 6, zaś liczba gałęzi równoległych wynosi 5. Liczba zwojów na biegunie wirnika 39.5, uzwojenie wzbudzenia nie ma gałęzi równoległych. Średnica zewnętrzna stojana wynosi 5660 mm, średnica wewnętrzna stojana wynosi 4280 mm. Promień jarzma wirnika 882 mm, a powierzchni bieguna 1703 mm.



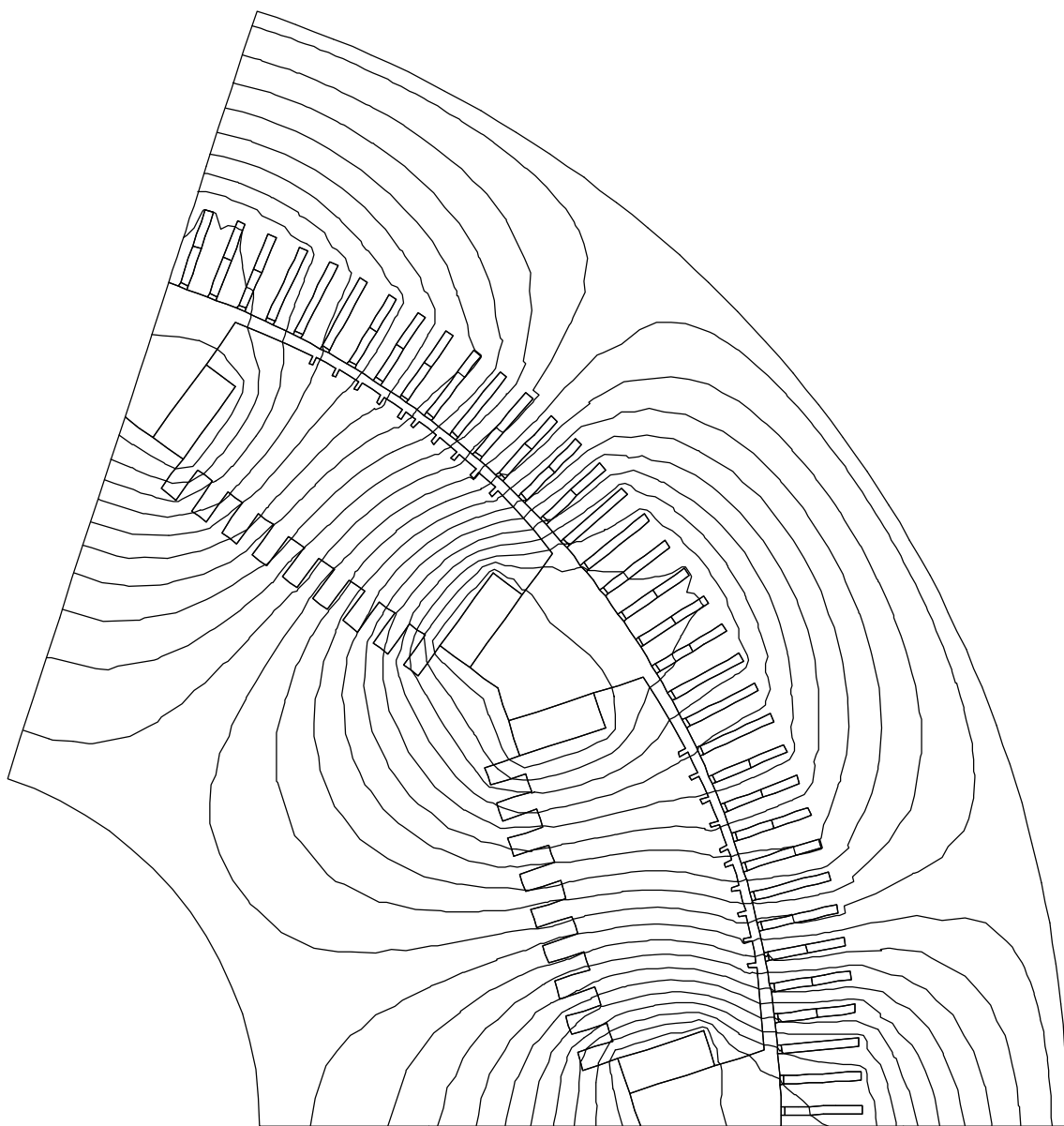
Rys.5.9. Składowa styczna oraz normalna wektora indukcji pola magnetycznego
Fig.5.9. Tangential and normal magnetic flux density components

Moment permeancyjny dla wzbudzonej znamionowo oraz odwzbudzonej maszyny przy znamionowym prądzie stojana został określony za pomocą:

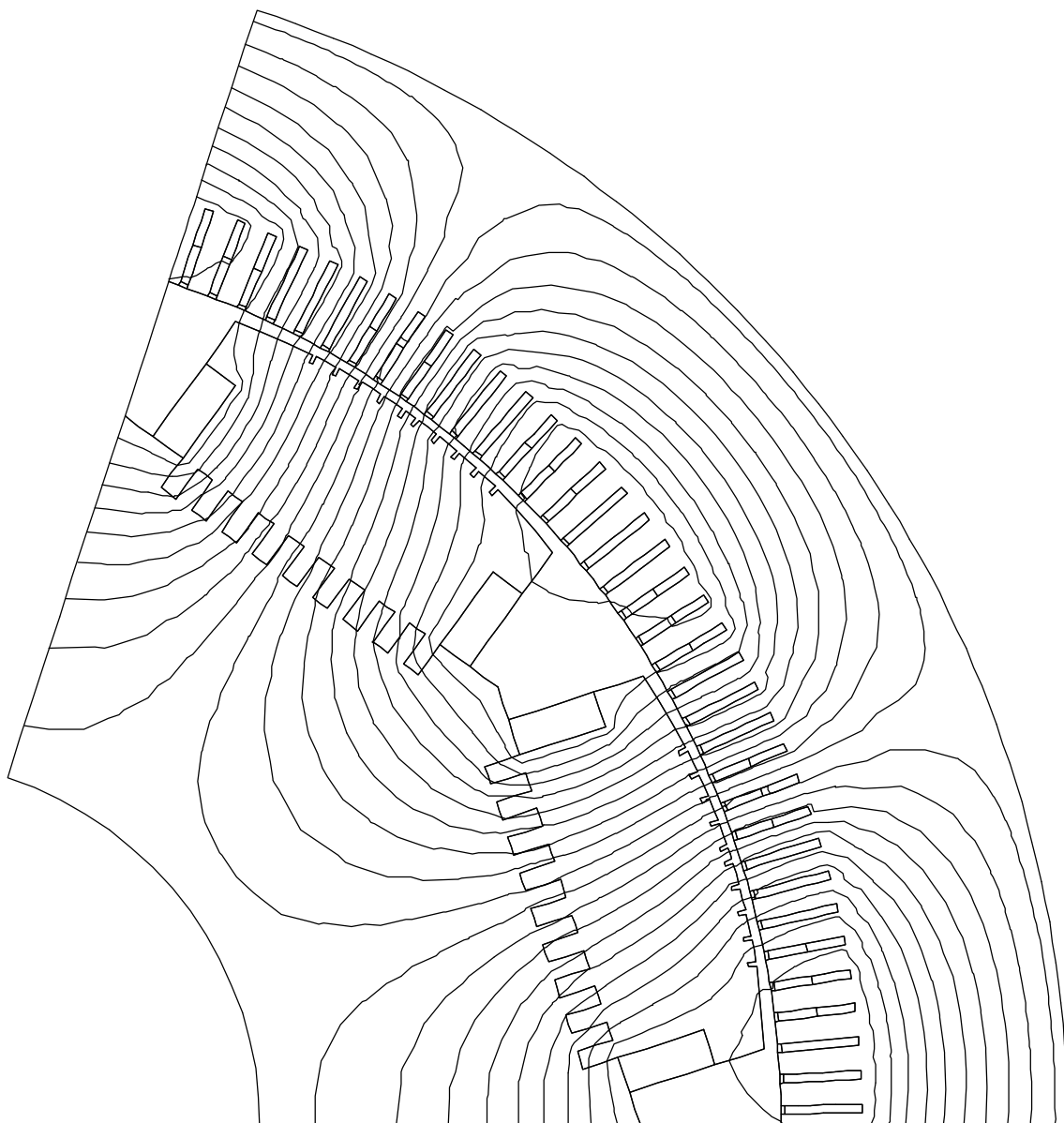
- symetrycznego tensora naprężeń Maxwella,
- składnika niejednorodnościowego.

Celem zapewnienia możliwości odniesienia obliczonej wartości momentu reluktancyjnego maszyny niewzbudzonej do momentu w znamionowym stanie pracy założono liniowość obwodu magnetycznego hydrogeneratora.

Rozkład pola magnetycznego określono przy wykorzystaniu programu FEMAG [FEMAG – opis programu]. Linie przedstawione na rysunkach 5.10 oraz 5.11 są izoliniami - krzywymi stałego potencjału magnetycznego ($\Delta A = 0.12 \cdot 10^{-3}$ Vs/mm). Składową promieniową i styczną indukcji pola magnetycznego odczytano w 1400 punktach w szczelinie pod jedną parą biegunów oraz w 1729 punktach na obwodzie biegunów wirnika (rys.5.12, 5.13). Numeryczną implementację wykorzystywanych równań (5.4c) oraz (5.5b) przedstawiono na rys.5.12 (maszyna niewzbudzona) oraz rys.5.13 (maszyna wzbudzona). Do bezpośrednich obliczeń wartości momentów wykorzystano napisane programy pozwalające na prosty zapis realizowanych obliczeń. Rysunki 5.12-5.14 przedstawiają fragmenty kodu programów napisanych przy wykorzystaniu programu Mathcad.



Rys.5.10. Przekrój poprzeczny hydrogeneratora i rozkład pola przy wzbudzeniu znamionowym
Fig.5.10. Cross-section of salient-pole synchronous generator and the magnetic field distribution for excited machine



Rys.5.11. Przekrój poprzeczny hydrogeneratora i rozkład pola magnetycznego przy braku wzbudzenia
Fig.5.11. Cross-section of salient-pole synchronous generator and the magnetic field distribution for non-excited machine

**OBLICZENIE MOMENTÓW MASZyny SYNCHRONICZNEJ O WYDATNYCH
BIEGUNACH PRZY BRAKU WZBUDZENIA**

Parametry generatora: $l_o := 1.621$ $p := 5$ $v_{Fe} := 0.005$

Obliczenie momentu permeancyjnego poprzez składnik niejednorodnościowy:

$$B_{r_i} := \frac{Br_i + Br_{i-1}}{2} \cdot \cos(\varepsilon_i) - \frac{B\alpha_i + B\alpha_{i-1}}{2} \cdot \sin(\varepsilon_i) \quad \varepsilon_i := \operatorname{atan}\left(\frac{r_i - r_{i-1}}{f_i - f_{i-1}} \cdot \frac{1}{r_{i-1}}\right)$$

$$B_{t_i} := \frac{Br_i + Br_{i-1}}{2} \cdot \sin(\varepsilon_i) + \frac{B\alpha_i + B\alpha_{i-1}}{2} \cdot \cos(\varepsilon_i) \quad s := -1$$

$$Te_{Fe} := \left[\sum_{i=2}^{1728} \frac{(r_i)^2 - (r_{i-1})^2}{4} \cdot \left[(B_{r_i})^2 + (B_{t_i})^2 \cdot v_{Fe} \right] \right] \cdot l_o \cdot p \cdot v_o \cdot s \cdot (1 - v_{Fe})$$

$$Te_{Fe} = 4.771 \times 10^5 \text{ Nm}$$

Obliczenie momentu permeancyjnego (reluktancyjnego) za pomocą tensora naprężeń Maxwella

Przeliczenie składowych pola magnetycznego

$$Br\delta_i := B_{r_i} \cdot \cos(\varepsilon_i) + v_{Fe} \cdot B_{t_i} \cdot \sin(\varepsilon_i) \quad B\alpha\delta_i := -B_{r_i} \cdot \sin(\varepsilon_i) + v_{Fe} \cdot B_{t_i} \cdot \cos(\varepsilon_i)$$

$$Te_{Fe2} := \sum_{i=2}^{1728} \left[\frac{1}{2} \cdot \left[(Br\delta_i)^2 - (B\alpha\delta_i)^2 \right] \cdot (r_i - r_{i-1}) \cdot \left(\frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right) \right] \cdot v_o \cdot l_o \cdot p$$

$$Te_{Fe1} := \sum_{i=2}^{1728} \left[Br\delta_i \cdot B\alpha\delta_i \cdot (f_i - f_{i-1}) \cdot \left(\frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right)^2 \right] \cdot v_o \cdot l_o \cdot p \quad Te_{Fe2} = -2.647 \times 10^5 \text{ Nm}$$

$$Te_{Fe1} = 7.344 \times 10^5 \text{ Nm}$$

$$Te_{Feo} := Te_{Fe1} + Te_{Fe2} \quad Te_{Feo} = 4.698 \times 10^5 \text{ Nm}$$

Zgodność obliczeń:

$$\frac{Te_{Feo}}{Te_{Fe}} \cdot 100 = 98.45 \quad \%$$

Rys.5.12. Obliczenie momentu reluktancyjnego generatora ADV-566

Fig.5.12. Reluctantive torque of ADV-566 generator - the calculation

**OBLICZENIE MOMENTÓW MASZyny SYNCHRONICZNEJ Z WYDATNYMI
BIEGUNAMI PRZY WZBUDZENIU ZNAMIONOWYM**

Parametry generatora: $l_o := 1.621$ $p := 5$ $v_{Fe} := 0.005$

Obliczenie momentu permeancyjnego poprzez składnik niejednorodnościowy:

$$B_{r_i} := \frac{Br_i + Br_{i-1}}{2} \cdot \cos(\varepsilon_i) - \frac{B\alpha_i + B\alpha_{i-1}}{2} \cdot \sin(\varepsilon_i) \quad \varepsilon_i := \operatorname{atan}\left(\frac{r_i - r_{i-1}}{f_i - f_{i-1}} \cdot \frac{1}{r_{i-1}}\right)$$

$$B_{t_i} := \frac{Br_i + Br_{i-1}}{2} \cdot \sin(\varepsilon_i) + \frac{B\alpha_i + B\alpha_{i-1}}{2} \cdot \cos(\varepsilon_i) \quad s := -1$$

$$Te_{Fe} := \left[\sum_{i=2}^{1728} \frac{(r_i)^2 - (r_{i-1})^2}{4} \cdot \left[(B_{r_i})^2 + (B_{t_i})^2 \cdot v_{Fe} \right] \right] \cdot l_o \cdot p \cdot v_o \cdot (1 - v_{Fe})$$

TeFe = 1.555×10^6 Nm

Obliczenie momentu permeancyjnego (reluktancyjnego) za pomocą tensora naprężeń Maxwella

$$Br\delta_i := B_{r_i} \cdot \cos(\varepsilon_i) + v_{Fe} \cdot B_{t_i} \cdot \sin(\varepsilon_i) \quad B\alpha\delta_i := -B_{r_i} \cdot \sin(\varepsilon_i) + v_{Fe} \cdot B_{t_i} \cdot \cos(\varepsilon_i)$$

$$Te_{Fe1} := \sum_{i=2}^{1728} \left[Br\delta_i \cdot B\alpha\delta_i \cdot (f_i - f_{i-1}) \cdot \left(\frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right)^2 \right] \cdot v_o \cdot s \cdot l_o \cdot p \quad \text{TeFe1} = 1.079 \times 10^6 \text{ Nm}$$

$$Te_{Fe2} := \sum_{i=2}^{1728} \left[\frac{1}{2} \cdot \left[(Br\delta_i)^2 - (B\alpha\delta_i)^2 \right] \cdot (r_i - r_{i-1}) \cdot \left(\frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right) \right] \cdot v_o \cdot s \cdot l_o \cdot p$$

TeFe2 = 4.468×10^5 Nm

TeFeo := TeFe1 + TeFe2

TeFeo = 1.525×10^6 Nm

Zgodność obliczeń: **$\frac{Te_{Feo}}{Te_{Fe}} \cdot 100 = 98.068$ %**

$$Te := \sum_{i=2}^{1400} \left[\frac{Br_i + Br_{i-1}}{2} \cdot \frac{B\alpha_i + B\alpha_{i-1}}{2} \cdot (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \cdot \left(\frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right)^2 \right] \cdot v_o \cdot s \cdot l_o \cdot p$$

Udział momentu permeancyjnego: **$\frac{Te_{Fe}}{Te} \cdot 100 = 67.167$ %** **Te = 2.316×10^6 Nm**

Rys.5.13. Obliczenie momentu permeancyjnego i całkowitego generatora ADV-566

Fig.5.13. Total and permeantive torque of ADV-566 generator - the calculation

Moment permeancyjny maszyny w znamionowym stanie pracy ($\delta = 32^\circ$) wynosi:

$$T_{e,Fe} = 1.555 \text{ MNm}$$

co stanowi 67.2 % momentu całkowitego T_e .

Moment Lorentza jest różnicą pomiędzy momentem całkowitym a momentem permeancyjnym maszyny elektrycznej. Różnica ta wynosi:

$$T_{e,Cu} = T_e - T_{e,Fe} = 2.316 \text{ MNm} - 1.555 \text{ MNm} = 0.761 \text{ MNm}$$

co stanowi 32.8 % momentu całkowitego T_e .

Dla sprawdzenia poprawności realizowanych obliczeń dodatkowo wyznaczono moment Lorentza, całkując po obszarze cewek uzwojenia wzbudzenia gęstość sił Lorentza. Moment Lorentza hydrogeneratora wynosi:

$$T_{e,Cu} = 0.756 \text{ MNm}$$

co stanowi 32.6 % momentu całkowitego T_e .

Otrzymana wartość jest zgodna z wartością tegoż momentu wyznaczoną jako różnica momentów: $T_e - T_{e,Fe}$ (rys. 5.14).

**OBLICZENIE MOMENTU LORENTZA DLA HYDROGENERATORA PRZY
ZACHOWANYM POŁOŻENIU WIRNIKA ORAZ ZNAMIONOWYM WZBUDZENIU
MASZINY NA PODSTAWIE GĘSTOŚCI SIŁY LORENTZA**

Parametry generatora: $l_o := 1.621$ $p := 5$ $v_{Fe} := 0.005$ $I_w := 1328 \cdot 39.5$

Momenty Lorentza działające po dwóch stronach bieguna (wybrano po trzy serie danych dla obu przekrojów):

$$TeCu1 := 2 \cdot \frac{I_w}{3} \cdot p \cdot l_o \cdot \left[\left(\sum_{i=33}^{68} B1r_i \cdot \frac{r1_i \cdot 1}{36} \right) + \left(\sum_{i=105}^{140} B1r_i \cdot \frac{r1_i \cdot 1}{36} \right) + \sum_{i=141}^{188} \left(B1r_i \cdot \frac{r1_i \cdot 1}{48} \right) \right]$$

$$TeCu2 := -2 \cdot \frac{I_w}{3} \cdot p \cdot l_o \cdot \left[\left(\sum_{k=41}^{88} B2r_k \cdot \frac{r2_k \cdot 1}{48} \right) + \left(\sum_{k=113}^{164} B2r_k \cdot \frac{r2_k \cdot 1}{52} \right) + \left(\sum_{k=165}^{216} B2r_k \cdot \frac{r2_k \cdot 1}{52} \right) \right]$$

$TeCu := TeCu1 + TeCu2$

Moment całkowity:	Moment permeancyjny:	Moment Lorentza:
$Te := 2.316 \cdot 10^6 \text{ Nm}$	$TeFe := 1.555 \cdot 10^6 \text{ Nm}$	$TeCu = 7.555 \times 10^5 \text{ Nm}$
Zgodność rezultatów:		
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $\frac{TeFe + TeCu}{Te} \cdot 100 = 99.76 \%$ </div>		<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $\frac{TeCu}{Te} \cdot 100 = 32.62 \%$ </div>

Rys.5.14. Obliczenie momentu Lorentza

Fig.5.14. Lorentz's torque - the calculation

Moment reluktancyjny przy ustalonym położeniu wirnika maszyny względem stojana (kąt mocy $\delta = 32^\circ$) przy braku wzbudzenia hydrogeneratora wynosi:

$$T_{e,R} = 0.4771 \text{ MNm},$$

stanowiąc 20.6 % wartości całkowitego momentu elektromagnetycznego T_e .

Wyniki obliczeń potwierdzają poprawność obliczenia momentu permeancyjnego i momentu Lorentza. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, iż moment permeancyjny i Lorentza współdziałają tworząc całkowity moment elektromagnetyczny. Obliczenia numeryczne potwierdzają fakt, iż we wzbudzonej maszynie synchronicznej z biegunami wydawnymi moment permeancyjny jest większy od momentu reluktancyjnego. Analogiczne rezultaty otrzymano w podrozdziale 5.4 na drodze rozważań analitycznych.

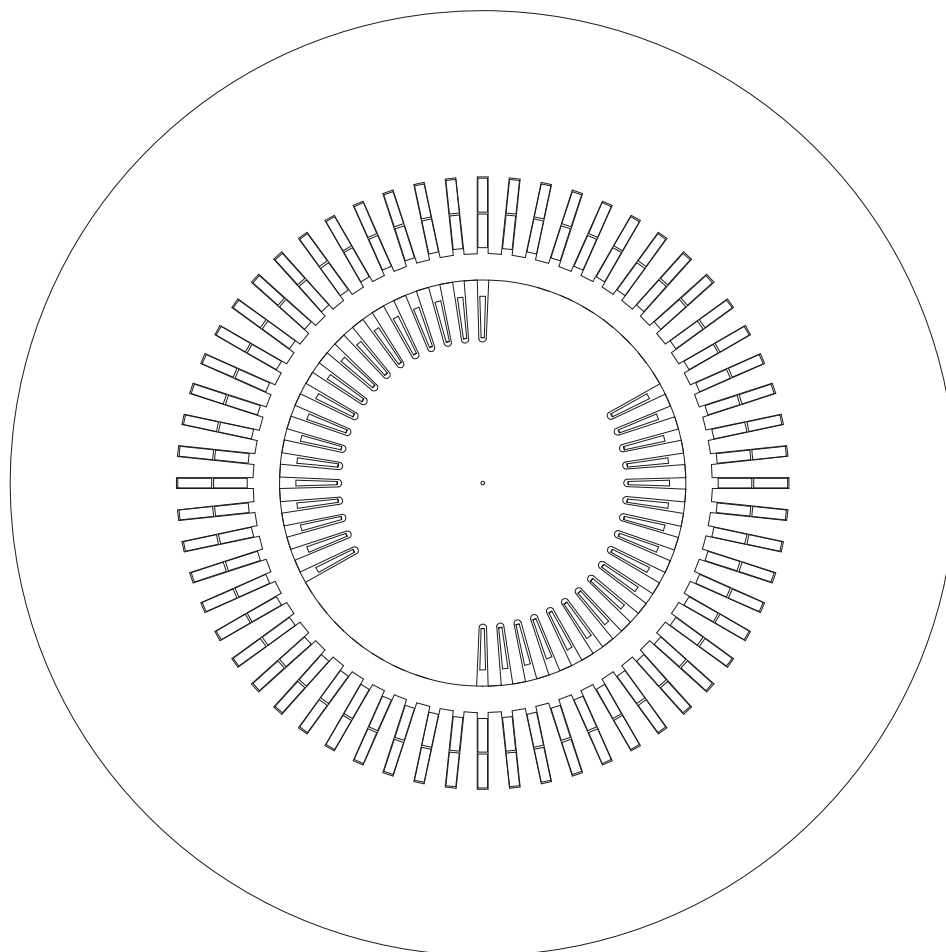
Podsumowując wyniki obliczeń można stwierdzić:

1. W maszynie synchronicznej z wydawnymi biegunami o nienasyconym obwodzie magnetycznym obliczenie momentów sił na podstawie składnika niejednorodnościowego wymaga całkowania po $(n-1)$ -wymiarowym obszarze (podobnie jak przy całkowaniu tensora naprężeń Maxwella). Określenie momentu permeancyjnego pozwala na wyznaczanie momentu Lorentza $T_{e,Cu}$ jako różnicy momentu całkowitego i permeancyjnego. Fakt ten pozwala na porównanie wartości momentu Lorentza $T_{e,Cu}$ określonego poprzez różnicę $T_e - T_{e,Fe}$, z wartością otrzymywaną w wyniku całkowania gęstości sił Lorentza.
2. Moment *reluktancyjny* maszyny wzbudzonej o nienasyconym obwodzie magnetycznym *jest mniejszy od momentu permeancyjnego*, który wywołany jest działaniem sił na ferromagnetyczny wirnik maszyny.

5.6. NUMERYCZNA ANALIZA MOMENTÓW SIŁ CYLINDRYCZNEJ MASZyny SYNCHRONICZNEJ

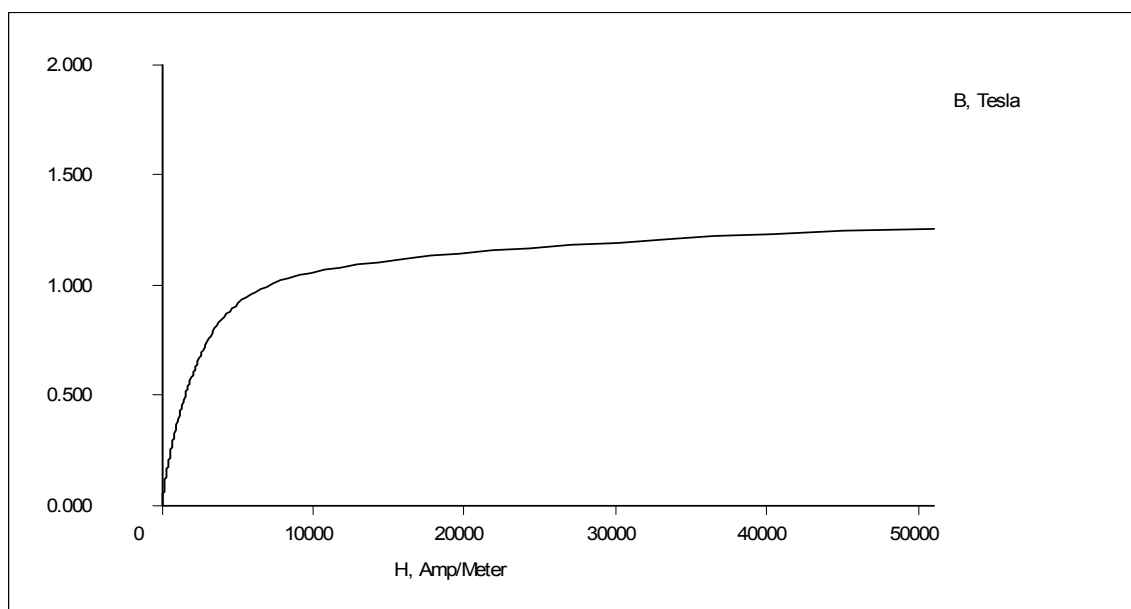
Analiza składowych momentu elektromagnetycznego przetwornika elektro-mechanicznego, jakim jest maszyna synchroniczna o biegunach wydawnych, pokazuje, iż moment Lorentza nie jest pomijalny (podrozdział 5.5). Wynika to ze struktury budowy maszyny, w której wyprofilowany wirnik silnie kształtuje rozkład pola magnetycznego. W przypadku liniowości obwodu magnetycznego określanie składowych momentu jest efektywne numerycznie przy wykorzystywaniu pojęcia momentu permeancyjnego. Moment permeancyjny wyznaczany jest numerycznie mniejszym nakładem obliczeń niż moment Lorentza. Fakt ten może być wykorzystany podczas obliczania składowych momentu całkowitego. Natomiast, przy uwzględnieniu nieliniowości obwodu magnetycznego, nakłady obliczeniowe dla momentu Lorentza i momentu środowiskowego są porównywalne.

Przykładowo, zostanie poddany analizie generator synchroniczny typu TWW 200 - 2a, jaki wykorzystywany jest w krajowym systemie energetycznym. Przekrój poprzeczny generatora przedstawiono na rys.5.15. Turbogenerator synchroniczny charakteryzuje się następującymi danymi znamionowymi: $S_n = 270$ MVA, $P_n = 235$ MW, $U_n = 15.75$ kV, $I_n = 8625$ A, $X_{dr} = 2.48$, $X_{qr} = 2.48$, $\cos\varphi = 0.85$, $2p = 2$, $T_{en} = 745$ kNm, $f_n = 50$ Hz, $n_n = 3000$ obr/min, $I_{wn} = 2540$ A, $I_{wo} = 766$ A, $I_{wz} = 1900$ A, $g = 70$ mm, $l = 4.2$ m. Liczba żłobków stojana wynosi 60, poskok uzwojenia stojana odpowiada 25 podziałkom żłobkowym. Liczba gałęzi równoległych wynosi 2, a liczba zwojów szeregowych w uzwojeniu fazowym wynosi 10. Średnice zewnętrzna i wewnętrzna ferromagnetyka stojana są równe odpowiednio: 2500 mm oraz 1215 mm. Średnica zewnętrzna wirnika wynosi 1075 mm. Liczba żłobków wirnika wynosi 36 przy 52 podziałkach żłobkowych obwodu wirnika. Liczba gałęzi równoległych wynosi 1. Obwody magnetyczne stojana i wirnika ulegają nasyceniu - rysunki 5.16 oraz 5.17. Gęstości nominalne prądów stojana i wirnika wynoszą w zaokrągleniu odpowiednio: 5 MA/m^2 oraz 8 MA/m^2 .

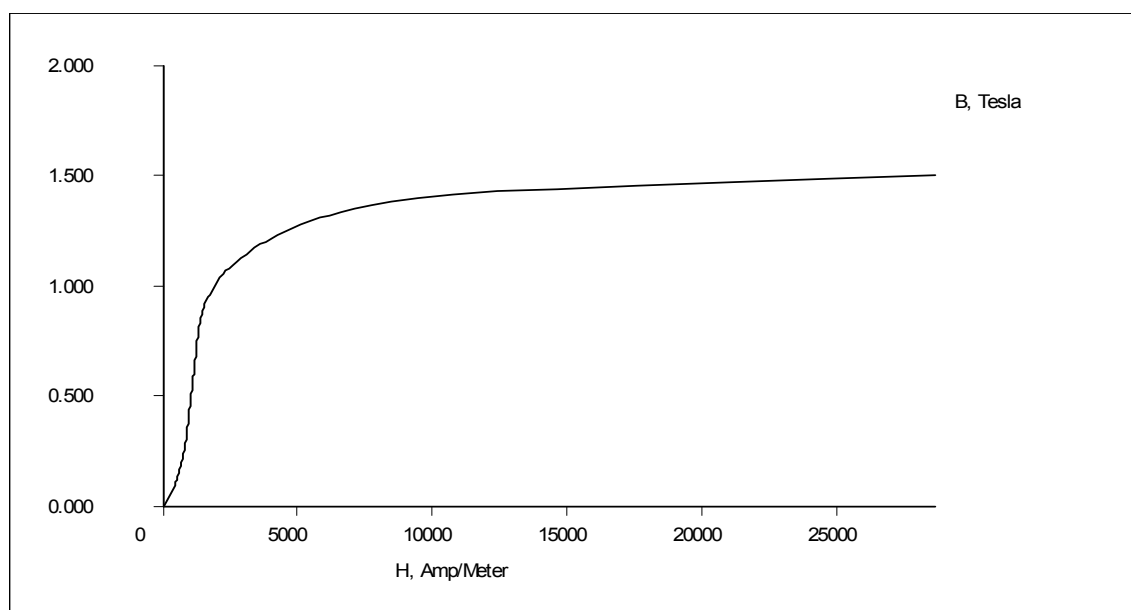


Rys.5.15. Przekrój poprzeczny turbogeneratora synchronicznego o biegunach utajonych
Fig.5.15. Cross-section of cylindrical synchronous turbogenerator

Obliczeń momentu i jego składowych w turbogeneratorze dokonano dla stanu wzbudzenia znamionowego oraz w stanach jego przewzbudzenia. Dopuszczalne jest forsowanie prądu wzbudzenia do krotności $k = 2$ w okresie 20 sekund. Natomiast w stanach zwarciovych dochodzi do chwilowego kilkukrotnego, zagrażającego wzrostu prądów wirnika oraz stojana [K.5, L.1, aS.29, aS.31].

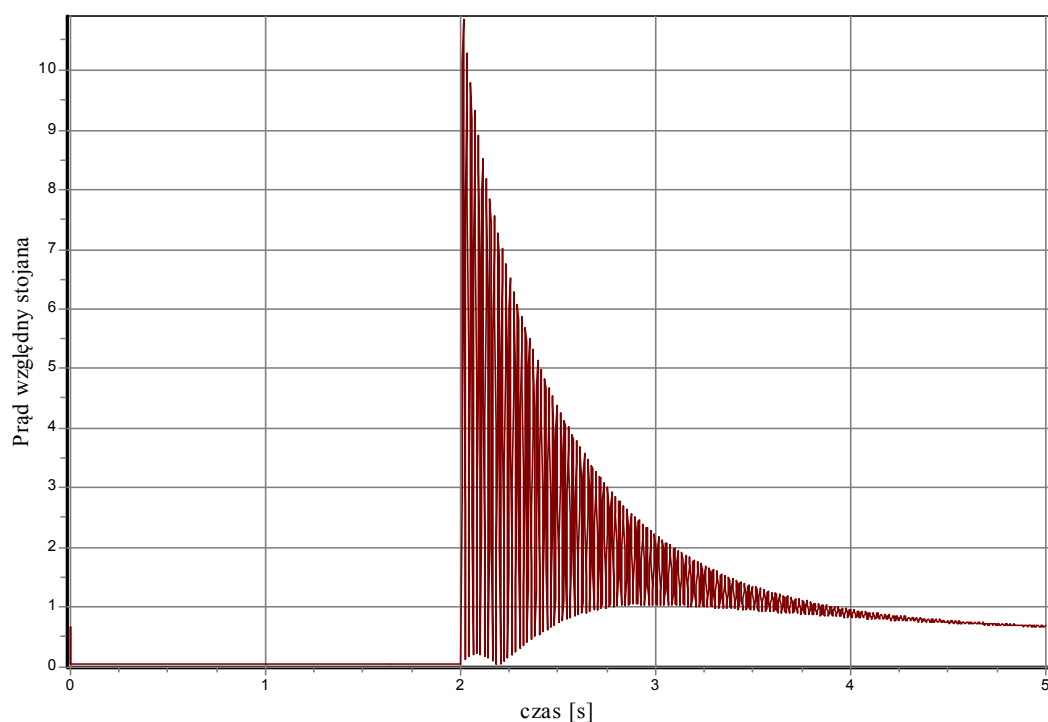


Rys.5.16. Charakterystyka ferromagnetyka stojana generatora synchronicznego
Fig.5.16. B-H curve for stator synchronous generator

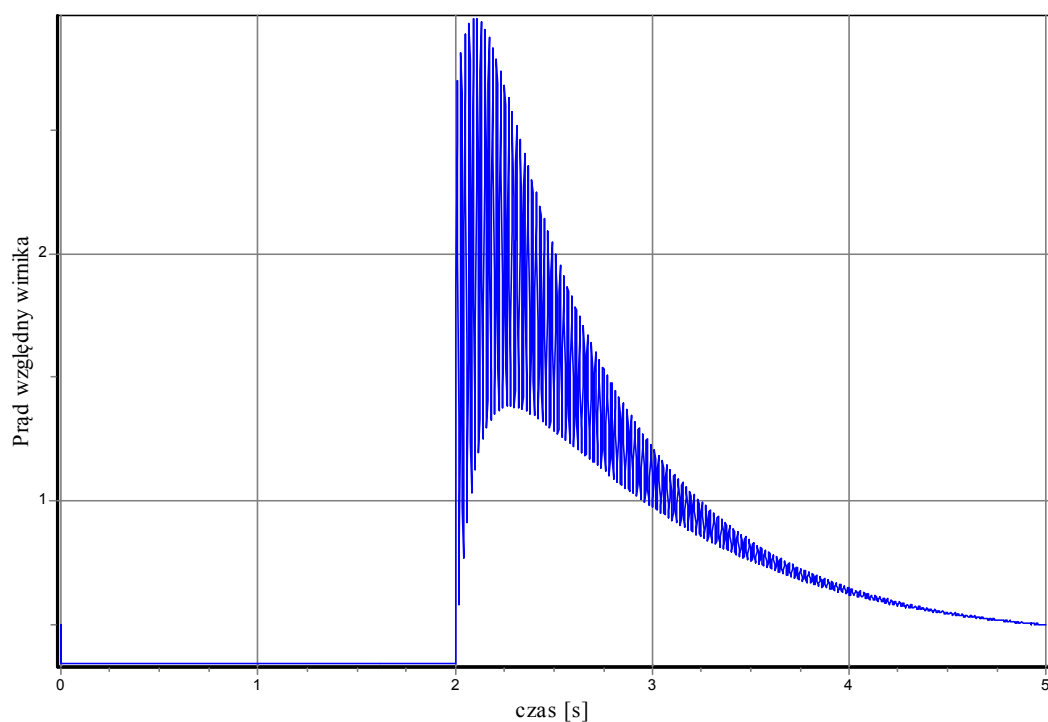


Rys.5.17. Charakterystyka ferromagnetyka wirnika generatora synchronicznego
Fig.5.17. B-H curve for rotor synchronous generator

Przykładowo, wzrost prądów w stanie zwarcia generatora określono wykorzystując program napisany w języku Delphi. Otrzymane wyniki przedstawiono na rys. 5.18 i rys. 5.19.



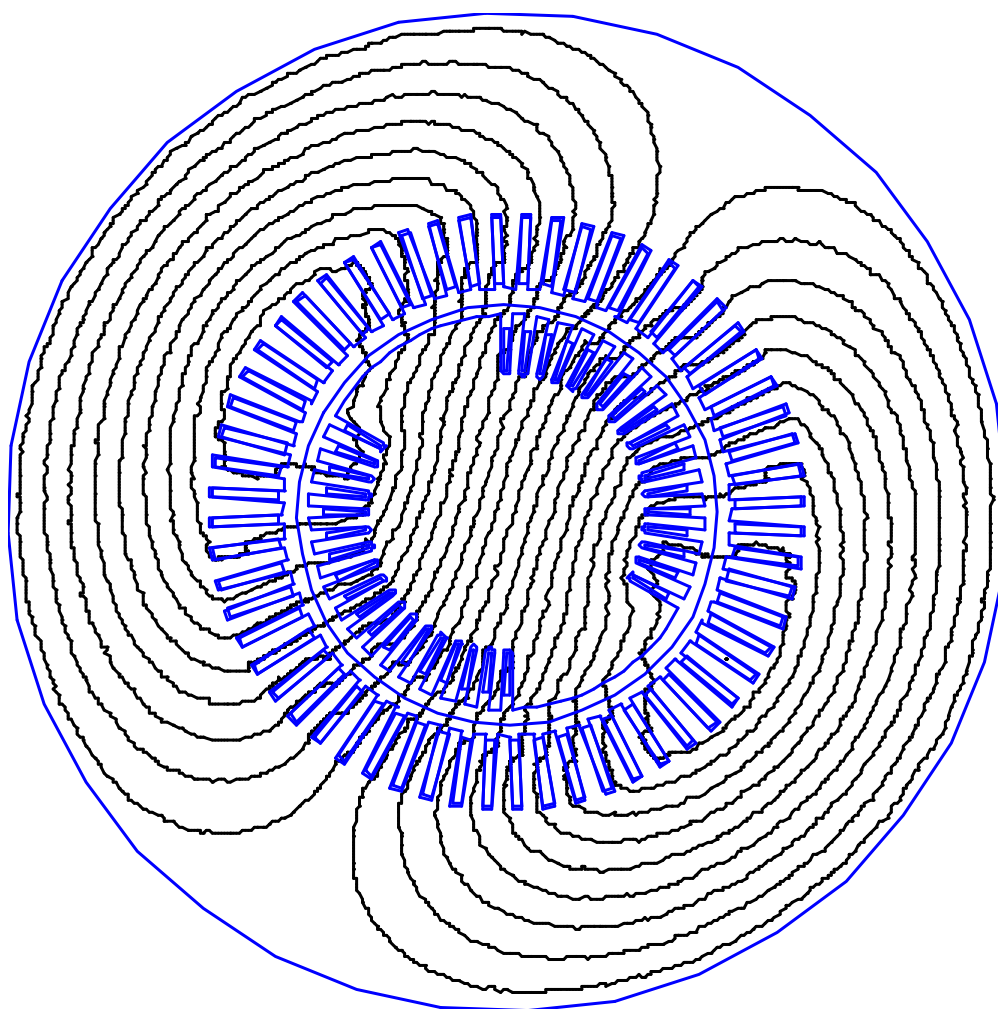
Rys.5.18. Wartość prądu stojana w jednostkach względnych przy zwarcu bliskim w chwili $t_0=2$ s
Fig.5.18. Relative stator current rise at near-shortcut ($t_0=2$ s) versus time



Rys.5.19. Wartość prądu wirnika w jednostkach względnych przy zwarcu bliskim w chwili $t_0=2$ s
Fig.5.19. Relative rotor current rise at near-shortcut ($t_0=2$ s) versus time

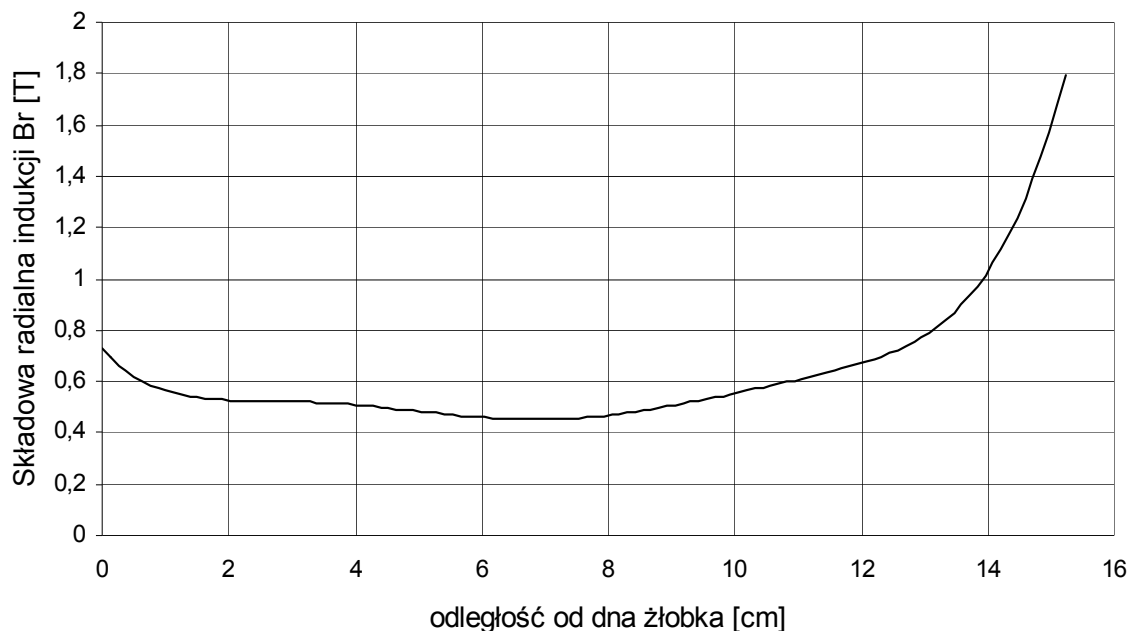
Obliczenie rozkładu pola magnetycznego oraz wartości momentów przeprowadzono w przypadku zwiększenia prądu wirnika i stojana do trzykrotnej ich wartości znamionowej. Zachowano stały stosunek gęstości prądów stojana i wirnika. Jest to uzasadnione z uwagi na ciągłość strumienia magnetycznego oraz zachowanie się prądów w stanach zwarciovych. Rozkład pola magnetycznego (~ 70.000 węzłów, ~ 150.000 elementów) określono przy wykorzystaniu programu FEMM [FEMM – opis programu]. Linie sił pola (rys.5.20) są izoliniami wektorowego potencjału magnetycznego.

Przy forsowaniu wzbudzenia część obwodu magnetycznego wirnika ulega silnemu nasyceniu, co prowadzi do silnego zmniejszenia przenikalności magnetycznej wirnika w pobliżu szerokiego zęba wirnika. W takich stanach pracy generatora wzrasta udział momentu Lorentza w całkowitym momencie elektromagnetycznym.

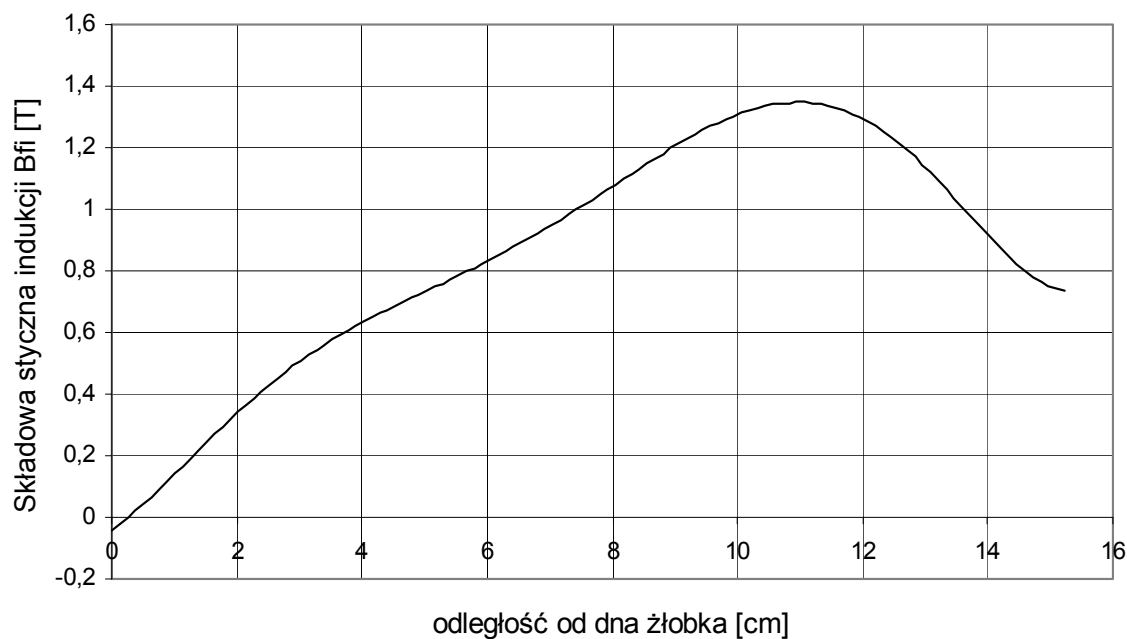


Rys.5.20. Rozkład pola magnetycznego w generatorze synchronicznym
Fig.5.20. Magnetic field distribution in synchronous generator

Na rysunkach 5.21 oraz 5.22 przedstawiono zmienność składowej radialnej i stycznej indukcji pola magnetycznego wzdłuż linii symetrii wybranego żłobka wirnika. Wybrany żłobek jest położony w pobliżu zęba szerokiego maszyny cylindrycznej.

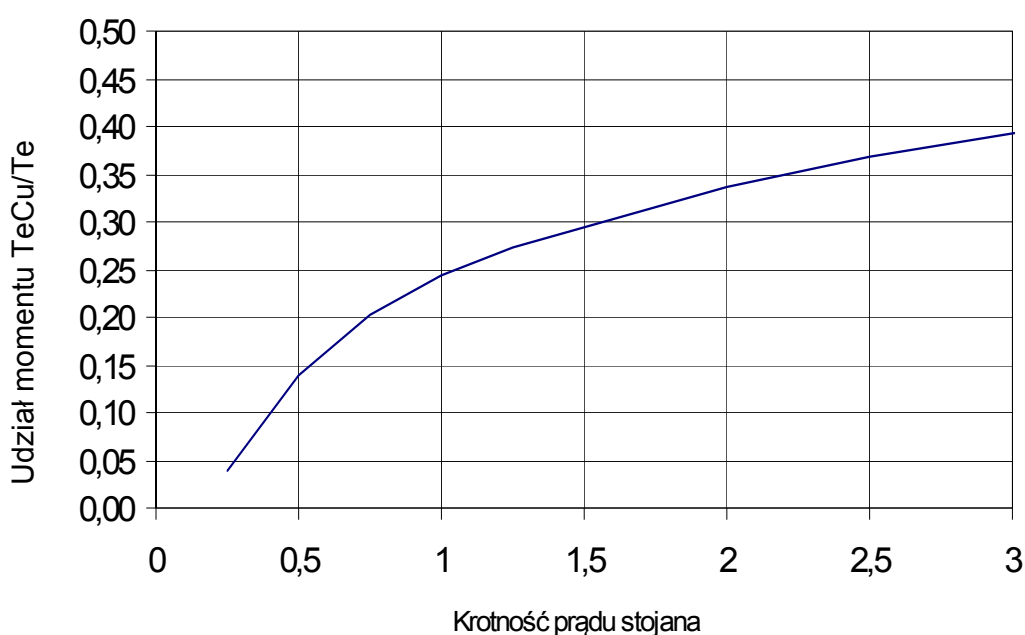


Rys.5.21. Rozkład składowej radialnej indukcji pola magnetycznego w żłobku wirnika
Fig.5.21. Magnetic flux density radial component versus rotor slot height



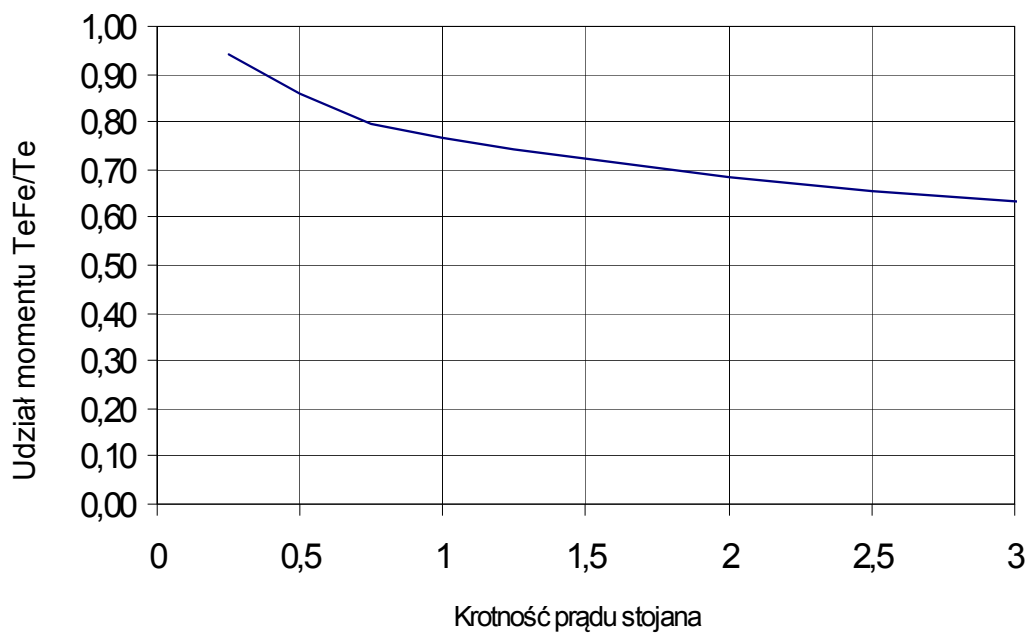
Rys.5.22. Rozkład składowej stycznej indukcji pola magnetycznego w żłobku wirnika
Fig.5.22. Magnetic flux density tangential component versus rotor slot height

Obliczenia momentu permeancyjnego $T_{e,Fe}$ dla maszyny synchronicznej z biegunami utajonymi przy nieznacznym nasyceniu obwodu magnetycznego pokazują, iż stanowi on około 90 % rozwijanego momentu elektromagnetycznego generatora - rys.5.24. W takim stanie pracy generatora siły styczne o niewielkiej wartości są przenoszone przez izolację uzwojenia wirnika. Jednak w stanach pracy generatora przy silnym nasyceniu obwodu magnetycznego wirnika uwzględnienie sił Lorentza jest istotne. Moment sił Lorentza $T_{e,Cu}$ stanowi znaczący procent całkowitej wartości momentu sił turbogeneratora - rys.5.23.



Rys.5.23. Względny udział momentu przenoszonego przez uzwojenie wirnika generatora
Fig.5.23. Rotor currents torque ratio for synchronous generator

Udział momentu permeancyjnego maleje ze wzrostem nasycenia obwodu magnetycznego wirnika generatora - rys.5.24. Wartość momentu Lorentza może stanowić, w stanach awaryjnych, około 40 % całkowitego momentu elektromagnetycznego. Moment Lorentza przenoszony jest przez izolację zębów wirnika w kierunku stycznym. Naprężenia działające w kierunku stycznym (nazywane naprężeniami stycznymi), jak i naprężenia w kierunku promieniowym (naprężenia promieniowe) mogą zagrażać pod względem mechanicznym izolacji wirnika [T.5].



Rys.5.24. Względny udział momentu permeancyjnego dla generatora synchronicznego
Fig.5.24. Permeantive torque ratio for synchronous generator

Przykładowo, dla turbogenerатора TWW 200 - 2a przy nasyceniu obwodu magnetycznego wirnika prądem stojana o gęstości 10 MA/m^2 oraz prądem wirnika o gęstości 20 MA/m^2 otrzymano: $T_{e,Cu} = 565 \text{ kNm}$, $T_e = 1531 \text{ kNm}$. Moment sił przenoszony przez ściskaną warstwę izolacji o największej wartości wynosi zatem:

$$t_{e,Cu} = 25 \text{ kNm} . \quad (5.15a)$$

Siła styczna przenoszona przez izolację ma wartość:

$$f_{Cu,t} = 62 \text{ kN} . \quad (5.15b)$$

Średnie naprężenie ściskające σ_α rozważaną warstwę izolacji (przy założeniu, że cała powierzchnia warstwy izolacji podlega ściskaniu) wynosi:

$$\sigma_\alpha = \frac{t_{e,Cu}}{lhR_{av}} = \frac{f_{Cu,t}}{lh} , \quad (5.15c)$$

gdzie:

R_{av} - średni promień zwojów uzwojenia wzbudzenia,

h - wysokość zwojów wirnika,

l - długość uzwojeń wirnika.

Dla rozważanego generatora: $R_{av} = 0.4 \text{ m}$, $h = 0.113 \text{ m}$, $l = 4.2 \text{ m}$ średnie naprężenie ściskające izolację wynosi:

$$\sigma_{\alpha} \approx 130 \text{ kPa.}$$

Wartość ta w odniesieniu do granicy sprężystości dla izolacji polwinitowej [H.2, PI str. 228 tom I] wynosi:

$$\frac{130 \text{ kPa}}{(1 - 0/0.3) \cdot 5 \text{ MPa}} \approx (3 \div 4) \% . \quad (5.16)$$

Naprężenie takie nie stanowi jednorazowo bezpośredniego zagrożenia dla izolacji wirnika. Należy jednak zwrócić uwagę, iż przyspiesza ono mechaniczną erozję izolacji. Dodatkowo, niekorzystne termiczne warunki pracy uzwojeń mogą zmniejszyć granicę sprężystości izolacji o około 30 %.

Siła promieniowa – obliczona numerycznie – ma wartość:

$$f_{\text{Cu,r}} = 172 \text{ kN} , \quad (5.17)$$

która prowadzi do naprężeń na dnie żłobka o wartości:

$$\sigma_r \approx 1030 \text{ kPa.}$$

Procentowo wartość ta stanowi:

$$\frac{1030 \text{ kPa}}{(1 - 0/0.3) \cdot 5 \text{ MPa}} \approx (20 \div 30) \% , \quad (5.18)$$

w odniesieniu do granicy sprężystości dla izolacji. Oznacza to, że naprężenia promieniowe są groźniejsze pod względem mechanicznym niż naprężenia styczne dla izolacji uzwojenia generatora.

Stosunek składowej promieniowej i stycznej wynosi:

$$\frac{f_{\text{Cu,r}}}{f_{\text{Cu,t}}} \approx 3 , \quad (5.19)$$

i jest kilka razy większy niż w znamionowym stanie pracy turbogeneratora.

W rozdziale piątym dokonano analitycznego oszacowania oraz numerycznego obliczenia wartości momentu: permeancyjnego i Lorentza dla maszyny synchronicznej z wydatnymi biegunami. Wyznaczony moment permeancyjny okazuje się być większy od momentu reluktancyjnego. Stanowi on dopełnienie momentu sił Lorentza do całkowitego momentu elektromagnetycznego. Moment permeancyjny maszyny o liniowym obwodzie magnetycznym wyznacza się określając wartość stosownej całki powierzchniowej. Pokazano, że dla maszyny synchronicznej cylindrycznej o nasycającym się obwodzie magnetycznym udział momentu permeancyjnego w całkowitym momencie sił maleje w miarę nasycania się obwodu magnetycznego. Dokonano oceny naprężeń mechanicznych w izolacji wirnika generatora synchronicznego.

6. ANALIZA SIŁ W PRZETWORNIKACH ELEKTROMECHANICZNYCH

W rozdziale szóstym rozważono przetwornik elektromechaniczny, jakim jest elektro-magnes prądu stałego. Wartość siły permeancyjnej obliczono numerycznie dla elektro-magnesu o nieliniowym obwodzie ferromagnetycznym. Wyróżniono dwie przyczyny warunkujące powstanie sił permeancyjnych.

Celem przeprowadzenia analizy sił powstających w przetwornikach elektro-mechanicznych został rozważony elektromagnes prądu stałego z ruchomą zworą. Wyznaczona zostanie siła permeancyjna oraz jej dwa składniki wywołane skokową i ciągłą zmianą reluktywności w obszarze elektromagnesu z ruchomą zworą (rys.6.1). W elektromagnesie o nasycającym się obwodzie magnetycznym pojawiają się siły zmniejszające pożądaną siłę przyciągania wywołaną naprężeniami na granicy ośrodków ferromagnetyk-powietrze.

W związku ze zjawiskiem nasycania się zwory elektromagnesu następuje zróżnicowanie reluktywności magnetycznej w obszarze ferromagnetycznej zwory. Jest to bezpośrednią przyczyną ujawnienia się niezerowej wartości składnika niejednorodnościowego w obszarze środowiska magnetycznego, który daje wkład do sił permeancyjnych.

Całkowita siła powstająca w opisanym przetworniku elektromechanicznym, w którym dominuje pole magnetyczne, jest sumą:

$$\vec{F} = \vec{F}_{Fe} + \vec{F}_{Cu}, \quad (6.1)$$

- siły permeancyjnej F_{Fe} (środowiskowej) oraz
- siły Lorentza F_{Cu} .

Obie wyróżnione składowe posiadają przejrzystą interpretację fizyczną (rozdział 4). Całkowitą siłę oraz jej składniki można wyznaczać ze wzorów (4.6b), (4.16) i (4.17). W elektromagnesie prądu stałego całkowita siła działająca na ruchomą zworę (przy braku przepływu prądów w obszarze zwory - zwora nieprzewodząca) jest siłą permeancyjną (środowiskową). Siła ta powodowana jest - zgodnie z zależnością (4.6b) - niejednorodnością ośrodka. Przyjęto, iż zwora oraz jarzmo elektromagnesu są magnetycznie izotropowe.

W układzie współrzędnych walcowych składowa osiowa siły przedstawia siłę działającą w kierunku osi OZ. Składowe siły w kierunku prostopadłym od osi OZ są zerowe z uwagi na

symetrię elektromagnesu. Kierunek działania siły całkowitej, Lorentza i permeancyjnej pokrywa się z osią OZ.

Przy powyższych założeniach siłę permeancyjną powstającą w przetwornikach elektromechanicznych działającą w kierunku osiowym OZ można wyrazić zatem jako całkę objętościową składnika niejednorodnościowego N_z :

$$F_{Fe} = \int_V N_z dV. \quad (6.2)$$

Rozdzielając rozważany n-wymiarowy obszar V na dwa rozłączne obszary wzajemnie się uzupełniające:

$$V = V_c \oplus V_s,$$

gdzie:

V_c - podobzdar n-wymiarowy w którym reluktywność magnetyczna ośrodka zmienia się w sposób ciągły,

V_s - podobzdar otaczający obszar (n-1)-wymiarowy S, w którym reluktywność magnetyczna ośrodka zmienia się skokowo,

można całkę (6.2) przedstawić w postaci:

$$F_{Fe} = \int_{V_c} N_z dV + \int_{V_s} N_z dV. \quad (6.3a)$$

Powierzchnia S stanowi płaski pierścień, jaki wyznacza granica środowisk ferromagnetyk-powietrze. W obszarze S - na granicy środowisk występuje zmienność reluktywności magnetycznej względnej o skokowym charakterze (skok względnej reluktywności magnetycznej na granicy ferromagnetyk-powietrze wynosi $1-v_r$). W obszarze V_c może wystąpić zmienność reluktywności magnetycznej ośrodka wynikająca bądź to ze strukturalnej niejednorodności obszaru (np. ruchomej zwory), bądź z faktu nasycania się obwodu magnetycznego (zależnie od aktualnego stanu pracy przetwornika). Oba wyróżnione składniki siły (6.3a) określają odpowiednio część siły powstającą wskutek działania naprężeń na brzegu zwory ferromagnetycznej:

$$F_{Fe,S} = \int_{V_s} N_z dV, \quad (6.3b)$$

oraz nasycania się obwodu magnetycznego - naprężeń wewnątrz zwory:

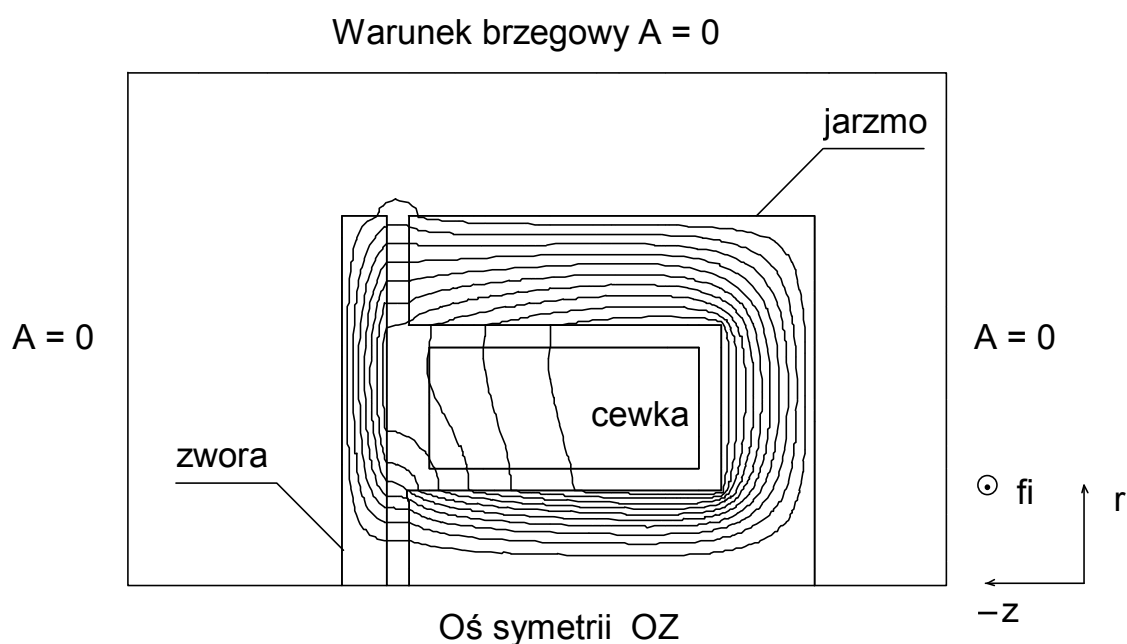
$$F_{Fe,N} = \int_{V_c} N_z dV. \quad (6.3c)$$

Całkowita siła jest sumą działania sił w obszarze ferromagnetyka oraz na granicy ferromagnetyk-powietrze:

$$F_{Fe} = F_{Fe,N} + F_{Fe,S}. \quad (6.3d)$$

Występujące siły w zależności (6.3d) są wypadkowymi sił działających odpowiednio wewnątrz i na brzegu zwory.

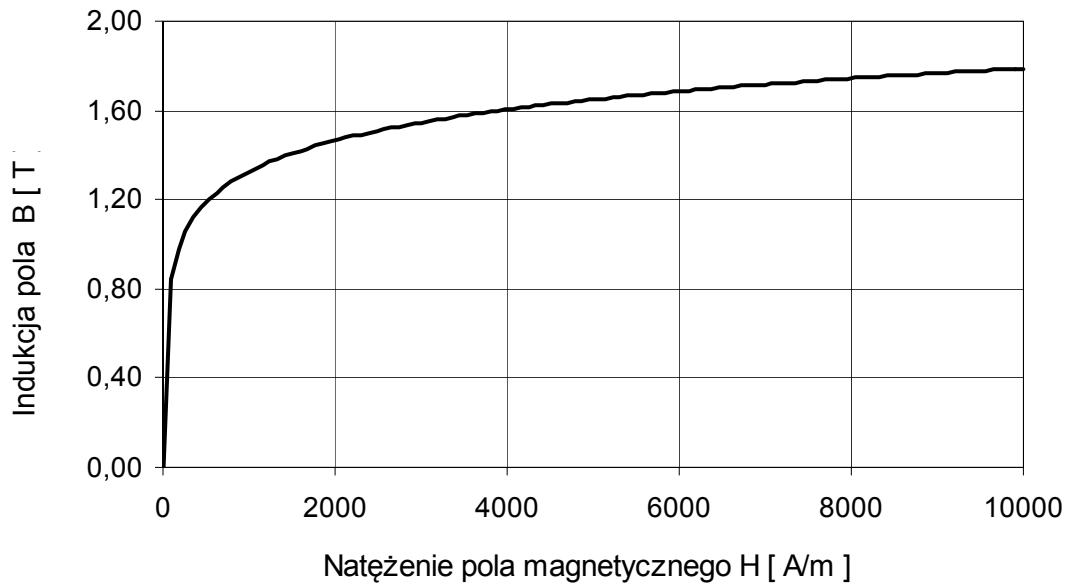
Wydzieloną część siły permeancyjnej związaną ze zjawiskiem nasycania obwodu magnetycznego wyznaczono dla elektromagnesu prądu stałego, którego obwód magnetyczny przedstawiono na rys.6.1.



Rys.6.1. Przekrój i linie indukcji pola magnetycznego elektromagnesu

Fig.6.1. The cross-section and magnetic field distribution for the direct current actuator

Przy numerycznej analizie pola magnetycznego wykorzystano osiową symetrię elektromagnesu dobierając stosownie układ współrzędnych biegunowych (r, φ) . Zwora jest wykonana ze stali E41 o danej przenikalności magnetycznej w funkcji indukcji pola magnetycznego [T.5] - charakterystykę magnesowania zwory przedstawiono na rys. 6.2. Uzwojenie elektromagnesu jest zasilane ze źródła prądu stałego (liczba zwojów $z = 250$, prąd uzwojenia $I = 5A$). Rozkład pola magnetycznego został określony przy wykorzystaniu programu FEMAG - liczba węzłów 3345, liczba elementów 6747 [FEMAG - opis programu].



Rys.6.2. Aproxymowana krzywa magnesowania zwory elektromagnesu
Fig.6.2. The approximated magnetisation curve of the electromagnet keeper

Obliczenia całkowitej siły działającej na ruchomą zworę można dokonać korzystając z zależności (4.16):

$$\vec{f} = -\vec{i}_u \operatorname{div}_{|u|}(\vec{\sigma}_u), \quad (6.4a)$$

zauważając, iż w cylindrycznym układzie współrzędnych:

$$L_z = 1 \quad \text{oraz} \quad k_z = 0. \quad (6.4b)$$

Z uwagi na dobór osi i symetrię elektromagnesu (rys.6.1) zachodzi:

$$\vec{F} = \vec{F}_{Fe} = \vec{i}_z F_{Fe} = \vec{i}_z F_z.$$

W ustalonym stanie pracy całkowita siła działająca na zworę wynosi:

$$F_z = \int_S v_o (B_z B_z - \frac{1}{2} B^2) r d\alpha dr, \quad (6.4c)$$

przy czym pominięto udział pola magnetycznego rozproszenia poza powierzchnią S. W rozważanym przypadku jest to dopuszczalne z uwagi na wyraźne zagęszczenie pola magnetycznego w obszarze między zworą a jarzmem elektromagnesu.

Siła permeancyjna działająca na zworę F_z - w związku ze skalarną zależnością:

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} = (1 - v_r) \cdot \delta(z - z_o) + \frac{dv}{dz} \cdot [1(z) - 1(z - z_o)], \quad (6.5)$$

może być przedstawiona w postaci sumy dwóch składników:

$$F_z = \frac{1}{2} \int_{V_s} v_o (1 - v_r) B^2 r d\alpha dr + \frac{1}{2} \int_{V_c} B^2 \frac{dv}{dz} dV = F_{z,S} + F_{z,N}, \quad (6.6)$$

gdzie:

z_o - współrzędna punktów powierzchni zewnętrznej zwory,

S - powierzchnia zewnętrzna zwory (granica ferromagnetyka i szczeliny powietrznej).

OBLICZENIE SIŁY PERMEANCYJNEJ I JEJ SKŁADOWYCH

Grubość zwory: $g := 0.004$ $\Delta\alpha := 2 \cdot \pi$

Całkowita siła permeancyjna wyznaczona w oparciu o tensor naprężeń Maxwella

$$F_z := \sum_{i=482}^{960} \left[\frac{(B_{zi})^2 + (B_{z_{i-1}})^2 - (B_{ri})^2 - (B_{r_{i-1}})^2}{2 \cdot 2} \right] \cdot (r_i - r_{i-1}) \cdot \left(\frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right) \cdot \Delta\alpha \cdot v_o$$

$F_z = 183.7$ [N]

Składowa siły permeancyjnej związana z naprężeniami na granicy powietrze-ferromagnetyk

$$F_{zS} := \sum_{i=482}^{960} \left[\frac{(B_i)^2 + (B_{i-1})^2}{2} \right] \cdot \left(\frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right) \cdot \Delta\alpha \cdot (r_i - r_{i-1}) \cdot v_o$$

$F_{zS} = 375.1$ [N]

Składowa siły permeancyjnej związana ze zjawiskiem nasycenia ferromagnetycznej zwory

$$F_{zN} := \sum_{i=2}^{1860} \left[\frac{(B_i)^2 + (B_{i-1})^2}{2} \right] \cdot \left(\frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right) \cdot \Delta\alpha \cdot \Delta r \cdot \left(\frac{H_i}{B_i} - \frac{H_{i-1}}{B_{i-1}} \right) \cdot s_i \quad \Delta r := \frac{r_{1860} - r_2}{21}$$

$F_{zN} = -188.5$ [N]

Zgodność obliczeń: $\frac{F_{zS} + F_{zN}}{F_z} \cdot 100 = 101.5$ %

Rys.6.3. Obliczenie składowych sił w elektromagnesie prądu stałego

Fig.6.3. The forces calculation for the DC electromagnet

Na rysunku 6.3 indeks $i = 482 \dots 960$ oznacza numery punktów, w których odczytano wartości indukcji pola magnetycznego na granicy ferromagnetyk-powietrze (pierwszych 481 punktów

znajduje się pomiędzy osią OZ a linią jarzma). Indeks $i = 2..1860$ opisuje punkty położone wewnątrz jarzma elektromagnesu na 22 liniach równoległych do osi OZ.

Analiza pola magnetycznego oraz obliczenia numeryczne całek (rys.6.3) pozwoliły określić siłę całkowitą i jej składniki działające na ruchomą zworę. Siła całkowita (równa sile permeancyjnej) wynosi:

$$F_z = 183,7 \text{ N.}$$

Część siły permeancyjnej związana z naprężeniami na granicy ferromagnetyk-powietrze wynosi:

$$F_{z,S} = 375,1 \text{ N,}$$

natomiast część związana z nasycaniem się zwory ma wartość:

$$\Delta F_{z,N} = -188,5 \text{ N.}$$

Na rys.6.3. przedstawiono fragment programowej realizacji procesu obliczania sił działających na ruchomą, nasycającą się zworę elektromagnesu.

Określenie części siły środowiskowej (permeancyjnej) związanej z nasycaniem się obwodu magnetycznego pozwala na ocenę wpływu zjawiska nasycania się obwodu magnetycznego na powstające siły. W przedstawionym przykładzie część siły powodowana nasycaniem się ferromagnetycznej zwory wydatnie obniża wartość całkowitej siły. Składnik ten ma bowiem przeciwny zwrot do pożądanego składnika wywołanego naprężeniami na granicy zwora-powietrze.

W rozdziale szóstym przeanalizowano przyczyny warunkujące powstawanie siły permeancyjnej na przykładzie elektromagnesu prądu stałego o nieliniowym obwodzie magnetycznym. Zaprezentowano interpretację składowej permeancyjnej siły. Siła permeancyjna wynika tu z nieliniowości ferromagnetyka oraz skokowej zmiany reluktywności na granicy ferromagnetyk-powietrze. Siła powstająca wewnątrz obszaru ferromagnetyka przeciwdziała sile powstającej na granicy ferromagnetyk-powietrze.

7. RÓŻNICOWY TENSOR ENERGII POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO

W rozdziale siódmym poddano analizie możliwość wykorzystania różnicowego tensora energii dla potrzeb obliczeń momentu sił metodą prądów magnetyzacji. Przedyskutowano aspekty wyznaczania momentu sił w obszarach ujawniających anizotropię właściwości magnetycznych. Rozważania przeprowadzono na przykładzie maszyny indukcyjnej o litym, anizotropowym i cylindrycznym wirniku.

Gęstość sił środowiskowych N_α wyraża się poprzez sumę dywergencji różnicowego pseudotensora energii pola elektromagnetycznego i składnika pochodzącego od prądów magnetyzacji (4.17). W szerokiej klasie przetworników elektromechanicznych, których część ruchoma znajduje się w próżni (powietrzu), wpływ składnika opisanego różnicowym tensorem jest zerowy. Różnicowy tensor energii pola elektromagnetycznego zanika bowiem w próżni ($v_r \equiv 1.0$), a z bardzo dobrym przybliżeniem w powietrzu ($v_r = 0.99999964$). W obszarze szeregu innych materiałów pojawiających się w układach przetworników elektromechanicznych przenikalność magnetyczna niewiele się różni od jedności, a mianowicie: $v_{r,Al} = 0.999979$, $v_{r,Cu} = 0.999969$, $v_{r,Hg} = 1.000032$, $v_{r,H2o} = 1.00009$. Oznacza to, iż udział różnicowego tensora energii pola elektromagnetycznego nie przekracza szacunkowo:

$$|v_r - 1| \cdot 100\% < 0.01 \%$$

wartości siły bądź momentu permeancyjnego (środowiskowego) przetwornika elektromechanicznego.

Rozważmy przetwornik elektromechaniczny, jakim jest wirująca maszyna indukcyjna. Niech szczelina powietrzna maszyny zostanie celowo wypełniona środowiskiem o przenikalności magnetycznej względnej różnej od jedności. Środowiskiem takim może być ciecz magnetyczna [K.2, R.4]. Wypełnienie szczeliny magnetycznym medium daje dwa pożądane efekty. Po pierwsze zwiększenie przenikalności magnetycznej szczeliny prowadzi do zwiększenia jej przewodności magnetycznej, a w konsekwencji do *zmniejszenia prądu magnesującego* maszyny indukcyjnej. Po drugie medium w szczelinie może prowadzić do *lepszego odprowadzenia ciepła z wirnika* poprzez szczelinę do obudowy maszyny. Jest to szczególnie ważne w przypadku mikromaszyn. Jakkolwiek aktualnie nie spotka się w szerokiej eksploatacji przetworników elektromaszynowych o takiej szczelinie magnetycznej, to nie można wykluczać ich budowy dla potrzeb specyficznych zadań. Taka modyfikacja właściwości obwodu magnetycznego maszyny indukcyjnej wymagałaby uszczelnienia

budowy maszyny. Niezależnie od aspektów praktycznych, teoretyczne rozważenie opisanego przypadku okazuje się celowe. Mianowicie, przy obliczaniu momentu metodą prądów magnetyzacji mogą się pojawiać błędy obliczeniowe w przypadku, gdy szczelinę wypełnia medium magnetyczne.

Rozważając konkretny przykład przetwornika elektromechanicznego można wskazać część momentu elektromagnetycznego, który opisuje różnicowy tensor energii. Dla maszyny indukcyjnej o cylindrycznym, przewodzącym wirniku można analitycznie określić wartość momentu wyrażonego przez różnicowy tensor energii pola elektromagnetycznego. Ponadto, różnicowy tensor energii pozwala na otrzymanie metodą prądów magnetyzacji poprawnych rezultatów, bez stosowania dodatkowych warunków brzegowych dla wektora magnetyzacji. Określenie momentu sił metodą prądów magnetyzacji przeprowadza się zwykle zadając na powierzchni brzegowej prądy powierzchniowe o ściśle określonej gęstości [aF.1, aK.1]. Tę niedogodność można ominąć stosując fizykalnie słuszne warunki brzegowe oraz posługując się wyprowadzoną tożsamością (4.17), w której pojawia się zdefiniowany różnicowy tensor energii pola elektromagnetycznego.

Przedmiotem rozważań będzie maszyna elektryczna zawierająca części konstrukcyjne magnetycznie anizotropowe. Określenie wartości momentu elektromagnetycznego przykładowej maszyny zostanie przeprowadzone analitycznie.

7.1. OBLICZANIE MOMENTU ELEKTROMAGNETYCZNEGO METODĄ PRĄDÓW MAGNETYZACJI

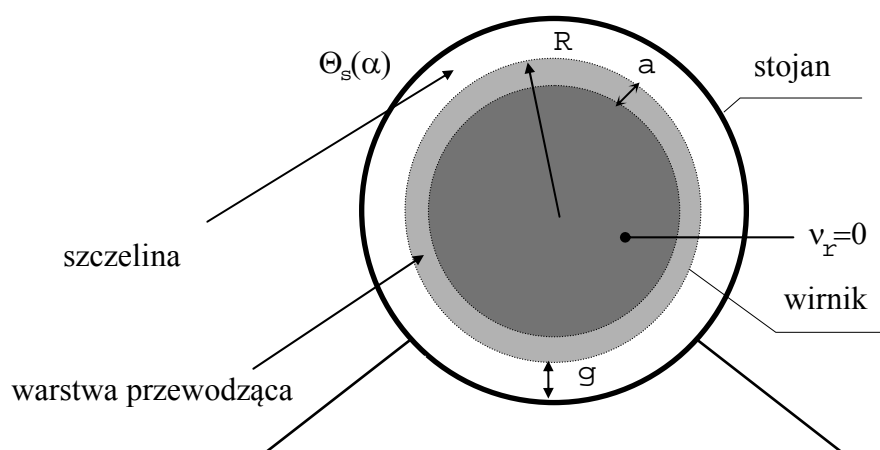
Rozważmy maszynę indukcyjną o przekroju poprzecznym pokazanym na rys.7.1. Stojan maszyny jest uzwojony, jego uzwojenie wytwarza wirujące, kołowe pole magnetyczne (oś obrotu pola magnetycznego i wirnika jest prostopadła do płaszczyzny przekroju maszyny pokazanej na rys.7.1). Wirnik maszyny nie jest uzwojony, stanowiąc lity przewodzący obszar magnetycznie anizotropowy. Obszar zawarty pomiędzy idealnym ferromagnetycznym stojanem oraz rdzeniem wirnika (bez histerezy, o zerowej reluktywności magnetycznej $\nu_r=0$) stanowią dwie cylindryczne, współosiowe warstwy:

- anizotropowa $\nu_{\alpha\alpha\delta} = \nu_{\alpha\delta}, \nu_{rr\delta} = \nu_{r\delta}, \nu_{r\alpha\delta} = \nu_{\alpha r\delta} = 0$, nieprzewodząca $\gamma = 0$ szczelina (indeks δ), o stałej grubości g , oraz

- anizotropowa $\nu_{\alpha\alpha a} = \nu_{\alpha a}, \nu_{rra} = \nu_{ra}, \nu_{r\alpha a} = \nu_{\alpha r a} = 0$, przewodząca $\gamma \neq 0$ warstwa o stałej grubości a , która jest bezpośrednio umieszczona na rdzeniu wirnika maszyny (indeks a).

Stałe materiałowe nie są funkcjami czasu i współrzędnych. Anizotropowa, przewodząca część wirnika może być wykonana na przykład ze stali krzemowej walcowanej na zimno. Zróżnicowanie reluktywności magnetycznych w kierunku równoległym i prostopadłym do kierunku walcowania na zimno dla stali krzemowej wynosi około: - 30% do -20% [R.1, T.4]. Promienie wodzące punktów warstwy przewodzącej zawierają się w przedziale $(R-a, R)$, gdzie

R jest promieniem zewnętrznym wirnika. W przypadku gdy $a = R$, przewodzący wirnik stanowi pełny, anizotropowy blok lity. Jeżeli grubość warstwy przewodzącej jest niewielka ($a \ll R$), to może być ona traktowana jako model uzwojenia wirnika maszyny asynchronicznej. Parametry środowiskowe, jak i geometryczne rozważanej maszyny asynchronicznej nie zależą od współrzędnej kątowej α (pozostają w kierunku stycznym do obwodu wirnika niezmiennie). Uzwojenie stojana zasilane prądem wolnozmiennym o pulsacji ω_1 (takiej iż można zaniedbać prądy przesunięcia) wytwarza pole magnetyczne zamykające się przez ferromagnetyczny stojan, szczelinę i warstwę przewodzącą umieszczoną na wirniku, stanowiącą obszar, w którym indukują się prądy wirnika.



Rys.7.1. Maszyna asynchroniczna o anizotropowej strukturze wewnętrznej - model
Fig.7.1. Asynchronous machine with anisotropic inner structure – the model

Maszyna asynchroniczna analizowana jest dwuwymiarowo w cylindrycznym układzie współrzędnych (r, α, z) . Pomija się zjawiska czołowe; rozważa się maszynę o długości osiowej l , która teoretycznie stanowi część nieskończenie długiej maszyny. W przypadku dwuwymiarowej analizy całkowanie względem zmiennej z - zgodnie z poczynionymi założeniami - sprowadza się do mnożenia przez długość maszyny l .

W układzie współrzędnych cylindrycznych składowa styczna gęstości siły permeancyjnej warunkuje gęstość momentu sił o wartości:

$$rN_\alpha = r\Delta f_\alpha + \text{div}(r\Delta \vec{\sigma}_\alpha). \quad (7.1a)$$

Moment środowiskowy (permeancyjny) maszyny elektrycznej spowodowany siłami działającymi na ośrodek materialny, jakim jest wirnik maszyny, ma wartość równą całce objętościowej iloczynu promienia wodzącego od osi obrotu r oraz gęstości objętościowej składowej stycznej siły:

$$T_{e,Fe} = \int_V r^2 N_\alpha dr dz d\alpha.$$

Po wykorzystaniu twierdzenia Gaussa i zależności (7.1a) otrzymuje się:

$$T_{e,Fe} = \int_{\partial V} r^2 \Delta \sigma_{\alpha r} dS_r + \underbrace{\int_V r \Delta j_z B_r dV}_{\text{mom. od prądów magnetyzacji } T_\mu}, \quad (7.1b)$$

gdzie: $T_\mu = \int_V r \Delta j_z B_r dV$ oznacza moment od prądów magnetyzacji.

Druga z wypisanych całek w zależności (7.1b) odpowiada momentowi sił obliczanemu metodą prądów magnetyzacji T_μ . Moment permeancyjny $T_{e,Fe}$ wynosi:

$$\underline{T_{e,Fe} = \int_{\partial V} r^2 \Delta \sigma_{\alpha r} d\alpha dz + T_\mu}, \quad (7.1c)$$

gdzie:

$$\Delta \vec{j} = \text{rot}(\Delta v_r \vec{B}_r + \Delta v_\alpha \vec{B}_\alpha) - \text{gęstość prądów magnetyzacji (3.4),}$$

$$\Delta v_\alpha = v_o - v_\alpha, \Delta v_r = v_o - v_r,$$

$$I_\alpha = \Delta v_\alpha B_\alpha - \text{składowa wektora magnetyzacji.}$$

Jak wynika z zależności (7.1c), moment obliczany metodą prądów magnetyzacji T_μ nie jest tożsamościowo równy momentowi działającemu na środowisko magnetyczne wirnika $T_{e,Fe}$.

W układzie współrzędnych cylindrycznych składowa $\Delta \sigma_{\alpha r}$ różnicowego tensora naprężeń wyraża się przez składowe wektorów pola magnetycznego następująco:

$$\Delta \sigma_{\alpha r} = -B_r I_\alpha = -\Delta v_\alpha B_\alpha B_r.$$

Zależność (7.1c) można zapisać w postaci:

$$\underline{T_{e,Fe} = \Delta T_{e,Fe} + T_\mu}, \quad (7.1d)$$

gdzie:

$$\underline{\Delta T_{e,Fe} = \int_{\partial V} r^2 \Delta \sigma_{\alpha r} d\alpha dz}, \quad (7.1e)$$

oznacza część momentu permeancyjnego wynikającą z wartości różnicowego tensora energii pola elektromagnetycznego.

Obszar, po którym realizuje się całkowanie, stanowi walec, którego oś pokrywa się z osią obrotu wirnika. Zawiera on w całości ferromagnetyczny rdzeń wirnika oraz warstwę przewodzącą. Pobocznica ∂V walca V o promieniu $r \in (R, R+g)$ usytuowana jest w szczelinie maszyny obejmując w całości wirnik maszyny.

Gęstość sił działających na prądy magnetyzacji wynosi:

$$\Delta \vec{j} \times \vec{B} = \text{rot}(\Delta v_r \vec{B}_r + \Delta v_\alpha \vec{B}_\alpha) \times \vec{B},$$

zatem gęstość momentu od prądów magnetyzacji jest równa:

$$\vec{r} \times [\Delta \vec{j} \times \vec{B}] = \text{rot}(\Delta v_\alpha \vec{B}_\alpha) r \vec{B}_r + \text{rot}(\Delta v_r \vec{B}_r) r \vec{B}_\alpha. \quad (7.2a)$$

- Pierwszy składnik po prawej stronie (7.2a) - po pomnożeniu przez r - można przekształcić do następującej postaci:

$$r^2 \text{rot}(\vec{i}_\alpha \Delta v_\alpha \vec{B}_\alpha) r \vec{B}_r = r^2 \frac{\vec{i}_z}{r} \frac{\partial(r \Delta v_\alpha \vec{B}_\alpha)}{\partial r} r \vec{B}_r = \vec{i}_z \frac{\partial(r^2 \Delta v_\alpha \vec{B}_\alpha \vec{B}_r)}{\partial r} + \vec{i}_z \frac{\partial(\frac{1}{2} \Delta v_\alpha \vec{B}_\alpha^2)}{\partial \alpha}. \quad (7.2b)$$

Przekształcając wyrażenie (7.2b) wykorzystano właściwość bezźródłowości pola magnetycznego. Składnik opisany zależnością (7.2b), jako jeden z dwóch składników w zależności (7.2a), daje wkład do obliczanego momentu sił.

- Drugi składnik po prawej stronie (7.2a) po scałkowaniu po objętości obszaru zanika, gdyż:

$$r \text{rot}(\vec{i}_r \Delta v_r \vec{B}_r) r \vec{B}_r = -r^2 \frac{\vec{i}_z}{r} \frac{\partial(\Delta v_r \vec{B}_r)}{\partial \alpha} r \vec{B}_r = -\frac{1}{2} \frac{\partial(r \Delta v_r \vec{B}_r^2)}{\partial \alpha} \vec{i}_z. \quad (7.3)$$

Całkując po objętości (7.2a) otrzymuje się - wobec (7.2b) i (7.3) - następującą równość:

$$T_\mu = - \int_{\partial V} r^2 \vec{B}_r I_\alpha d\alpha dz = -\Delta T_{e,Fe}. \quad (7.4)$$

Równość powyższa oznacza, iż w rozważanym przypadku

$$T_{e,Fe} = T_\mu + \Delta T_{e,Fe} = 0. \quad (7.5)$$

Otrzymany rezultat należy w tym miejscu skomentować. Jeżeli różnica $\Delta v_\alpha = v_o - v_\alpha$ nie jest zerowa, to wektor magnetyzacji nie zanika na powierzchni brzegowej ∂V . Oznacza to, iż $\Delta T_{e,Fe}$ oraz T_μ są niezerowe. Gdyby we wzorze (4.17) nie występowało wyrażenie będące dywergencją różnicowego tensora energii, to moment środowiskowy okazałby się niezerowy. Jednak moment sił środowiskowych jest w rozważanej maszynie zerowy, gdyż składnik niejednorodnościowy zanika (zanika pochodna reluktywności magnetycznej po kącie). Celem otrzymania poprawnego rezultatu zadać można - niezgodnie z faktycznymi właściwościami środowiska - zerowy warunek na wektor magnetyzacji (całka 7.1e zanika), bądź wprowadzić fikcyjne prądy powierzchniowe [aF.1]. Należy zauważyć, iż obliczanie całki różnicowego tensora energii (zależność (7.1e)) nie nastęrcza większych trudności.

Jakkolwiek zanikania momentu permeancyjnego można dowieść prościej ($N_\alpha = 0$), to przedstawioną drogę wybrano celowo. Jak pokazano powyżej, metoda prądów magnetyzacji nie prowadzi do poprawnej wartości momentów działających sił w środowisku magnetycznym, gdy obszar nie jest otoczony próżnią. Część momentu sił $\Delta T_{e,Fe}$ opisana matematycznie przez różnicowy tensor energii pola elektromagnetycznego nie jest uwzględniana przy posługiwaniu się metodą prądów magnetyzacji. Może być ona formalnie uwzględniona poprzez zadanie odpowiednio zmodyfikowanych warunków brzegowych. W przypadku gdy ruch wirnika odbywa się w środowisku o właściwościach magnetycznych

(np. medium magnetyczne lub pojawienie się substancji obcych w szczelinie powietrznej), należy uwzględnić omówioną poprawkę $\Delta T_{e,Fe}$. Opisana sytuacja w przetwornikach elektromechanicznych o typowych konstrukcjach nie występuje. Jednak z uwagi na postęp technologii materiałowych nie jest wykluczone celowe wprowadzanie środowisk magnetycznych do obszaru szczeliny.

Powyższe rozważania pozwalają stwierdzić, iż:

Dla potrzeb obliczania momentów sił metodą prądów magnetyzacji można stosować naturalne dla danej granicy środowisk warunki brzegowe przy wykorzystaniu zależności (4.17), w której pojawia się zdefiniowany różnicowy tensor energii pola elektromagnetycznego.

Stosowanie zmodyfikowanej metody prądów magnetyzacji ma następujące zalety:

- zachowana jest spójność właściwości i parametrów środowiska z warunkami brzegowymi,
- przedstawiona metodyka uogólnia metodę prądów magnetyzacji,
- wyrażenie będące dywergencją różnicowego tensora energii pola elektromagnetycznego w zależności (4.17) prowadzi do obliczania odpowiedniej całki powierzchniowej (7.1e).

Warto zwrócić uwagę, iż nieuwzględnienie w metodzie prądów magnetyzacji udziału różnicowego tensora energii pola elektromagnetycznego może prowadzić do niezgodności bilansu momentów. Różnica odniesiona do całkowitego momentu maszyny wynosi:

$$\frac{-\Delta T_{e,Fe}}{T_e} = \frac{v_o - v_{\alpha\delta}}{v_{\alpha\delta}}, \quad (7.6)$$

i jest niezerowa dla środowisk w szczelinie o reluktywności względnej różnej od jedności. Obliczenie momentów sił na przykładzie maszyny indukcyjnej o litym wirniku zostanie zaprezentowane w podrozdziale 7.2. Rozkład pola magnetycznego zostanie wyznaczony analitycznie zarówno celem uniezależnienia rezultatów od ewentualnych błędów numerycznych, jak i dla potrzeb ogólniejszej dyskusji wyników.

7.2. DWUWYMIAROWA ANALIZA POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO MASZYNY ELEKTRYCZNEJ O LITYM ANIZOTROPOWYM WIRNIKU

Rozważmy maszynę o budowie opisanej w pkt.7.1, przy następujących założeniach:

- zanikają pochodne cząstkowe względem zmiennej z (OZ jest osią obrotu wirnika maszyny):

$$\frac{\partial}{\partial z} \{.\} = 0, \quad (7.7)$$

- prąd przesunięcia jest pomijalny:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0, \quad (7.8a)$$

- rozkład przestrzenny przepływu uzwojeń stojana jest sinusoidalny:

$$\theta_s(\alpha) = \theta_s \cos(2\pi f_s t - p\alpha + \gamma_s) = \theta_s \operatorname{Re}\{\exp[i(2\pi f_s t - p\alpha + \gamma_s)]\}, \quad (7.8b)$$

co oznacza, iż uzwojenia stojana wywołują wirujące, kołowe pole magnetyczne,

- występuje normalna anizotropia własności magnetycznych w wirniku maszyny - różne są reluktywności magnetyczne w kierunku promieniowym i stycznym:

$$v_{ra} - v_{\alpha a} \neq 0.$$

Dla szczeliny zachodzi: $v_{r\delta} - v_{\alpha\delta} \neq 0$.

Zgodnie z równaniem Maxwella można zapisać:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E}. \quad (7.9a)$$

Wyrażając natężenie pola magnetycznego przez indukcję pola magnetycznego w obszarze anizotropowym (szczelina, warstwa przewodząca) otrzymuje się:

$$\vec{H} = v_\alpha \vec{B}_\alpha + v_r \vec{B}_r = v_o \vec{B} - \Delta v_\alpha \vec{B}_\alpha - \Delta v_r \vec{B}_r. \quad (7.9b)$$

Równanie Maxwella (7.9a) przyjmuje wtedy postać:

$$v_o \operatorname{rot} \vec{B} = -\gamma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \gamma \operatorname{grad} V + \Delta \vec{j}.$$

Nałożenie warunku potencjałów postaci:

$$\operatorname{div} \vec{A} + v_o^{-1} \gamma V = 0$$

proceedzi do następującego równania określającego magnetyczny potencjał wektorowy:

$$v_o \Delta(\vec{A}) = \gamma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \Delta \vec{j}, \quad (7.9c)$$

w którym:

$$\Delta \vec{j} = \operatorname{rot}(\Delta v_\alpha \vec{B}_\alpha + \Delta v_r \vec{B}_r). \quad (7.9d)$$

Zgodnie z drugą z zależności (3.6b) można zapisać:

$$\operatorname{rot}(\vec{I}) = \operatorname{rot}(-\vec{H} + v_o \vec{B}) = \operatorname{rot}(-v_r \vec{B}_r - v_\alpha \vec{B}_\alpha + v_o \vec{B}) = \operatorname{rot}(\Delta v_\alpha \vec{B}_\alpha + \Delta v_r \vec{B}_r). \quad (7.9e)$$

W układzie współrzędnych cylindrycznych, rzutując na kierunek osi OZ, uzyskuje się:

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (v_\alpha r \frac{\partial A_z}{\partial r}) - \frac{v_r}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \alpha^2} = -\gamma \frac{\partial A_z}{\partial t}, \quad (7.9f)$$

gdzie z uwagi na założoną symetrię maszyny, jedyną zmienną przestrzennie składową potencjału wektorowego jest A_z określająca indukcję pola magnetycznego:

$$\vec{B} = \vec{i}_r B_r + \vec{i}_\alpha B_\alpha = \vec{i}_r \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \vec{i}_\alpha \frac{\partial A_z}{\partial r}. \quad (7.9g)$$

Oznaczając przez \mathbf{A} wielkość będącą obrazem składowej A_z potencjału wektorowego pola magnetycznego w wybranym poniżej opisie dziedziny czasowej, zaś przez s operator odpowiadający operacji obliczania pochodnej cząstkowej po czasie, dla których można dokonać przejścia do zapisu formalnego:

$$\frac{\partial A_z}{\partial t} \Rightarrow s\mathbf{A}.$$

Parę (\mathbf{A}, s) mogą stanowić:

$$(\mathbf{A}, s) = \begin{cases} \mathbf{A}, & s = i\omega \\ A_z(s_L), & s_L \\ A_z, & s = -1/\tau \end{cases}$$

gdzie:

- ω - pulsacja przebiegu sinusoidalnie zmiennego w czasie (i - jednostka urojona),
- s_L - operator Laplace'a,
- $A_z(s_L)$ - transformacja Laplace'a funkcji o zerowej wartości początkowej: $A_z(0+) = 0$,
- τ - stała czasowa ($\tau > 0$ dla przebiegów zanikających wykładniczo z czasem).

Zależności obrazu \mathbf{A} potencjału A_z od czasu t przy analizie zespolonych wielkości nie wypisuje się jawnie w równaniach. Rozważmy stan pracy maszyny elektrycznej przy ustalonej prędkości obrotowej oraz sinusoidalnie zmiennych w czasie przebiegach prądów.

W obszarze warstwy przewodzącej (7.9f) przedstawia równanie Helmholtza:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (v_\alpha r \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r}) + v_r \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \alpha^2} = s\gamma \mathbf{A}. \quad (7.9h)$$

W obszarze szczeliny ($\gamma=0$, $v_\alpha=v_{\alpha\delta}$) równanie (7.9f) przechodzi w równanie Laplace'a:

$$\frac{\partial}{\partial r} (v_{\alpha\delta} r \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r}) + v_{r\delta} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \alpha^2} = 0. \quad (7.9k)$$

Równanie Helmholtza (7.9h) ma jednoznaczne rozwiązanie ($s\gamma = i\gamma\omega \neq 0$) przy zadaniu warunku brzegowego pierwszego, drugiego lub trzeciego rodzaju na brzegu rozpatrywanego obszaru. Natomiast równanie Laplace'a (7.9k) ma jednoznaczne rozwiązanie przy zadaniu warunku brzegowego pierwszego lub trzeciego rodzaju (nie redukującego się do warunku brzegowego drugiego rodzaju). Jeżeli poszukując rozwiązania w postaci iloczynu funkcji zmiennej $R(r)$ oraz funkcji $S(\alpha)$ uzyska się rozwiązanie równania (7.9h) lub (7.9k) spełniające odpowiednie warunki brzegowe, to jest to jedyne rozwiązanie. Separacja zmiennych dla

równania Laplace'a bądź Helmholtza jest możliwa w cylindrycznym układzie współrzędnych, ponieważ są spełnione warunki Stäckela [R.2].

Poszukiwane są zatem rozwiązania postaci:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, \alpha) = R(r)S(\alpha).$$

Po separacji zmiennych na podstawie (7.9h) uzyskuje się w obszarze warstwy przewodzącej:

$$\begin{cases} \frac{r}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR(r)}{dr} \right) - \frac{s\gamma r^2}{v_{\alpha a}} = \frac{v_{ra}}{v_{\alpha a}} p^2 \\ -\frac{1}{S(\alpha)} \frac{d^2 S(\alpha)}{d\alpha^2} = p^2, \end{cases} \quad (7.10a,b)$$

gdzie po prawych stronach obu równań użyto kwadratu liczby par biegunów maszyny p , dla oznaczenia stałej niezależnej od zmiennych α oraz r . Uzyskano w ten sposób rozkład przestrzenny pola magnetycznego w maszynie elektrycznej o p parach biegunów.

Równanie różniczkowe (7.10a) przy $\beta \neq 0$ przedstawia równanie różniczkowe Bessela:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} - \left(\beta^2 + \frac{p_B^2}{r^2} \right) R(r) = 0. \quad (7.11a)$$

gdzie:

p_B - jest rzędem funkcji walcowych:

$$p_B = p \sqrt{\frac{v_{ra}}{v_{\alpha a}}}, \quad (7.11b)$$

różnym - w przypadku wystąpienia anizotropii własności magnetycznych ($v_{ra} - v_{\alpha a} \neq 0$) - od liczby par biegunów p ,

β - parametr zmodyfikowanego równania Bessela: $\beta = \sqrt{s\gamma / v_{\alpha a}}$.

Rozwiązanie (7.11a) wyraża się poprzez zmodyfikowane funkcje Bessela [G.3]:

$$R(r) = \tilde{a} I_{p_B}(\beta r) + \tilde{b} K_{p_B}(\beta r), \quad (7.11c)$$

rzędu p_B o wartościach rzeczywistych dla argumentu rzeczywistego. Jeżeli p_B jest liczbą niecałkowitą, to zamiast funkcji $K_{p_B}(\)$ dla uzyskania rozwiązania ogólnego można wykorzystać funkcję $I_{-p_B}(\)$ (dodatek D3). Stałe \tilde{a} , \tilde{b} są stałymi zespolonymi.

Równanie harmoniczne (7.10b) ma rozwiązanie ogólne:

$$S(\alpha) = S_- \exp(-i p \alpha + i \varphi) + S_+ \exp(i p \alpha - i \varphi),$$

a z uwagi na wywołane poprzez uzwojenia stojana wirujące, kołowe pole magnetyczne tylko jedna ze składowych nie zanika, np. $S_+ = 0$, stąd:

$$S(\alpha) = S_- \exp(-i p \alpha + i \varphi). \quad (7.11d)$$

W obszarze warstwy przewodzącej przy prędkości obrotowej różnej od prędkości wirującego pola magnetycznego stojana składowe indukcji pola wynoszą:

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{ar} = \frac{p}{r} \{a_a I_{pB}(\beta r) + b_a K_{pB}(\beta r)\} \exp(-ip\alpha + i\varphi_a - i\frac{\pi}{2}) \\ \mathbf{B}_{a\alpha} = -\{a_a \beta I'_{pB}(\beta r) + b_a \beta K'_{pB}(\beta r)\} \exp(-ip\alpha + i\varphi_a), \end{cases} \quad (7.12a,b)$$

przy czym: $a_a = \tilde{a}S_-$, $b_a = \tilde{b}S_-$.

Natomiast w obszarze szczeliny obowiązują równania:

$$\begin{cases} \frac{r}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{dR(r)}{dr}) = \frac{v_{r\delta}}{v_{a\delta}} p^2 \\ -\frac{1}{S(\alpha)} \frac{d^2 S(\alpha)}{d\alpha^2} = p^2. \end{cases} \quad (7.13a,b)$$

W obszarze szczeliny po separacji zmiennych składowe indukcji pola magnetycznego (indeks δ odnosi się do stałych opisujących rozwiązania w obszarze szczeliny) wyrażają się zależnościami:

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{\delta r} = \frac{p}{r} \{a_\delta r^{p\delta} + b_\delta r^{-p\delta}\} \exp(-ip\alpha + i\varphi_\delta - i\frac{\pi}{2}) \\ \mathbf{B}_{\delta\alpha} = -p_\delta \{a_\delta r^{p\delta-1} - b_\delta r^{-p\delta-1}\} \exp(-ip\alpha + i\varphi_\delta), \end{cases} \quad (7.14a,b)$$

gdzie:

$$p_\delta = p \sqrt{\frac{v_{r\delta}}{v_{a\delta}}}.$$

Rozkład pola magnetycznego w rozważanej maszynie modelowej wymuszają wirujące, kołowe przepływy stojana i wirnika. Określenie rozkładu pola magnetycznego - z uwagi na założoną liniowość obwodu magnetycznego maszyny - zostanie przeprowadzone w oparciu o zasadę superpozycji. Pole magnetyczne pochodzi od wymuszonych prądów w uzwojeniach stojana oraz w wirniku. Wyznaczenie stałych występujących w rozwiązaniach równań pola pozwoli na wyznaczenie momentu elektromagnetycznego rozpatrywanej maszyny asynchronicznej.

Pole od przepływu uzwojeń stojana (amplituda przepływu wynosi Θ_s) opisują warunki brzegowe na granicach odpowiednich środowisk:

- Idealny ferromagnetyk - łuska prądowa (uzwojenie stojana) - szczelina ($r = R + g$):

$$v_{a\delta} \mathbf{B}_{\delta\alpha} = -\frac{1}{R + g} \frac{\partial \Theta_s(\alpha)}{\partial \alpha},$$

czyli:

$$a_\delta (R + g)^{p\delta-1} - b_\delta (R + g)^{-p\delta-1} = p\Theta_s \{(R + g)p_\delta v_{a\delta}\}^{-1}, \quad (7.15a)$$

oraz

$$\varphi_\delta = \gamma_s - \pi/2 \quad (7.15b)$$

(łuska prądowa przylega do powierzchni wewnętrznej idealnego ferromagnetycznego stojana).

- Szczelina - warstwa przewodząca ($r = R$):

$$\mathbf{B}_{\delta r} = \mathbf{B}_{ar} ,$$

czyli:

$$a_{\delta} R^p + b_{\delta} R^{-p} = a_a \beta I_{pB}(\beta R) + b_a \beta K_{pB}(\beta R) , \quad (7.15c)$$

$$v_{\alpha\delta} \mathbf{B}_{\delta\alpha} = v_{\alpha a} \mathbf{B}_{a\alpha} ,$$

czyli:

$$v_{\alpha\delta} p_{\delta} \{a_{\delta} R^{p_{\delta}-1} - b_{\delta} R^{-p_{\delta}-1}\} = v_{\alpha a} \beta \{a_a I'_{pB}(\beta R) + b_a K'_{pB}(\beta R)\} , \quad (7.15d)$$

$$\text{oraz} \quad \varphi_a = \varphi_{\delta} . \quad (7.15e)$$

- Warstwa przewodząca - idealny ferromagnetyk ($r = R - a = R_a > 0$):

$$v_{\alpha a} \mathbf{B}_{a\alpha} = 0 ,$$

czyli:

$$a_a I'_{pB}(\beta R_a) + b_a K'_{pB}(\beta R_a) = 0 . \quad (7.15f)$$

Na podstawie równań (7.15a-f) określa się stałe występujące w zależnościach (7.12a,b) oraz (7.14a,b). Stałe te wynoszą odpowiednio:

$$a_a = \frac{p_{\delta} \Theta_s}{p_{\delta} v_{\alpha\delta}} \{U(R+g)^{p_{\delta}} - W(R+g)^{-p_{\delta}}\}^{-1} , \quad (7.16a)$$

$$b_a = -a_a S, \quad S = \frac{I'_{pB}(\beta R_a)}{K'_{pB}(\beta R_a)} , \quad (7.16b,c)$$

$$a_{\delta} = a_a U, \quad b_{\delta} = a_a W , \quad (7.16d,e)$$

przy pomocniczych oznaczeniach:

$$U = \frac{1}{2} (R^{-p_{\delta}+1} P + R^{-p_{\delta}} Q) , \quad W = \frac{1}{2} (-R^{p_{\delta}+1} P + R^{p_{\delta}} Q) ,$$

$$P = \frac{\beta v_{\alpha a}}{p_{\delta} v_{\alpha\delta}} \{I'_{pB}(\beta R) - S K'_{pB}(\beta R)\} , \quad Q = I_{pB}(\beta R) - S K_{pB}(\beta R) .$$

Dla uproszczenia zapisu rozwiązań pola pochodzących od prądów stojana oznacza się:

$$D(r) = a_{\delta} r^{p_{\delta}} + b_{\delta} r^{-p_{\delta}} , \quad Z(\beta r) = a_a I_{pB}(\beta r) + b_a K_{pB}(\beta r) ,$$

przy czym stałe a oraz b z indeksem δ dotyczą rozwiązań w obszarze szczeliny powietrznej, zaś stałe z indeksem a odnoszą się do obszaru warstwy anizotropowej.

Pole magnetyczne może być dodatkowo wywoływane przez wymuszony przepływ w wirniku maszyny (maszyna dwustronnie zasilana). Amplituda przepływu wymuszonego zostanie oznaczona jako $\Delta\theta_r$, zaś kąt przesunięcia tego wymuszonego przepływu względem przepływu prądów indukowanych poprzez κ . Wartość wymuszonego przepływu i warunki brzegowe dla granic odpowiednich środowisk prowadzą do wyznaczenia nieznanych stałych. Kolejne stałe otrzymuje się zapisując:

- Przepływ wirnika pod jednym biegunem:

$$\Delta\theta_r \exp\{i(\omega_s t + \varphi_a - \kappa)\} = -s\gamma \int_{-\frac{\pi}{2p}}^{\frac{\pi}{2p}} \int_{R-a}^R Zr(\beta r) \exp\{i(\omega_s t - p\alpha + \varphi_r)\} r dr d\alpha \Rightarrow$$

$$\Delta\theta_r = |\Delta\theta_r| = -\frac{2s\gamma}{p} \{C_a a_{ar} + C_b b_{ar}\}, \quad \varphi_{ra} = \varphi_a - \kappa,$$

$$\text{gdzie:} \quad C_a = \int_{R-a}^R I_{pB}(\beta r) r dr, \quad C_b = \int_{R-a}^R K_{pB}(\beta r) r dr, \quad (7.17a)$$

oraz warunki brzegowe dla granic:

- szczelina - warstwa przewodząca ($r = R$):

$$\mathbf{Br}_{\delta r} = \mathbf{Br}_{ar},$$

czyli:

$$a_{\delta r} R^{p\delta} + b_{\delta r} R^{-p\delta} = a_{ar} I_{pB}(\beta R) + b_{ar} K_{pB}(\beta R), \quad (7.17b)$$

$$v_{\alpha\delta} \mathbf{Br}_{\delta\alpha} = v_{\alpha a} \mathbf{Br}_{a\alpha},$$

czyli:

$$v_{\alpha\delta} p_{\delta} \{a_{\delta r} R^{p\delta-1} - b_{\delta r} R^{-p\delta-1}\} = v_{\alpha a} \beta \{a_{ar} I'_{pB}(\beta R) + b_{ar} K'_{pB}(\beta R)\}, \quad (7.17c)$$

$$\text{oraz} \quad \varphi_{r\delta} = \varphi_{ra}, \quad (7.17d)$$

- warstwa przewodząca - idealny ferromagnetyk ($r = R - a = R_a > 0$):

$$v_{\alpha a} \mathbf{Br}_{a\alpha} = 0,$$

czyli:

$$a_{ar} I'_{pB}(\beta R_a) + b_{ar} K'_{pB}(\beta R_a) = 0. \quad (7.17e)$$

Stałe występujące w rozwiązaniach równań Laplace'a i Helmholtza pochodzących od wymuszonego prądu w wirniku są dodatkowo opatrzone literą r. Równania (7.17a÷e) określają wartości stałych występujące w zależnościach (7.12a,b) oraz (7.14a,b). Stałe te wynoszą odpowiednio:

$$a_{ar} = \frac{p\Delta\Theta_r}{2s\gamma} \{SC_b - C_a\}^{-1}, \quad b_{ar} = -a_{ar}S, \quad (7.18a)$$

$$a_{\delta r} = \frac{1}{2R^{p\delta}} \{W1 + W2\}, \quad b_{\delta r} = \frac{R^{p\delta}}{2} \{W1 - W2\}, \quad (7.18b)$$

przy pomocniczych oznaczeniach:

$$W1 = a_{ar} I_{pB}(\beta R) + b_{ar} K_{pB}(\beta R), \quad W2 = \frac{\beta R v_{\alpha a}}{p_{\delta} v_{\alpha \delta}} \{a_{ar} I'_{pB}(\beta R) + b_{ar} K'_{pB}(\beta R)\}.$$

Dla uproszczenia zapisu rozwiązań (7.12a,b) oraz (7.14a,b) pochodzących od prądów wirnika wprowadza się funkcje:

$$D_r(r) = a_{\delta r} r^{p\delta} + b_{\delta r} r^{-p\delta}, \quad Z_r(\beta r) = a_{ar} I_{pB}(\beta r) + b_{ar} K_{pB}(\beta r). \quad (7.19)$$

Dodatkowe oznaczenia bądź indeks dolny r odnoszą się do rozwiązań pola wywołanych przez wymuszone prądy wirnika.

Dla uzwojonej maszyny asynchronicznej dwustronnie zasilanej uzwojenie wirnika może być modelowane poprzez warstwę przewodzącą wirnika o niewielkiej grubości w porównaniu z promieniem zewnętrznym wirnika $a \ll R$.

Jeżeli $a = R$, to warstwa anizotropowa rozciąga się od osi obrotu wirnika $r = 0$ do zewnętrznej powierzchni wirnika o promieniu $r = R$ tworząc pełny blok lity. Wtedy stałe b_a , S , C_b muszą zanikać z uwagi na ograniczoność wektorowego potencjału pola magnetycznego.

W przypadku maszyny jednostronnie zasilanej $\Delta\theta_r=0$ (zasilanie stojana), bądź $\theta_s=0$ (przypadek zasilania od strony wirnika).

Znajomość stałych występujących w równaniach (7.12a,b) i (7.14a,b) pozwala na określenie momentu całkowitego i Lorentza maszyny. Moment całkowity maszyny wynosi:

$$T_e = \int_{\partial V} r^2 v_{\alpha\delta} B_r B_{\alpha} dz d\alpha. \quad (7.20)$$

Przy analizie zespolonej pola magnetycznego (dodatek D4) można wyrazić wartości chwilowe poprzez odpowiednie wartości zespolone:

$$B_r B_{\alpha} = \text{Re}\{B_r\} \text{Re}\{B_{\alpha}\} = \frac{1}{2} \text{Re}\{B_r B_{\alpha}\} + \frac{1}{2} \text{Re}\{B_r \bar{B}_{\alpha}\}.$$

Iloczyn wielkości zespolonych pod pierwszym symbolem wartości rzeczywistej zawiera wyrażenie $\exp(2i\omega_s t - 2ip_{\alpha} + \text{const})$, które po scałkowaniu po pełnym kącie $\alpha \in (0, 2\pi)$ daje wartość zerową. Składnik ten bywa nazywany składnikiem o pulsacji $2\omega_s$ [aM.2], a jego wartość średnia jest zerowa. Drugie wyrażenie nie zależy od kąta α i od czasu. Wartość całki

(7.20) iloczynu wartości chwilowych nie zależy od czasu. Po podstawieniu do powyższej zależności sumy rozwiązań odpowiednich składowych pola magnetycznego (7.12a,b) oraz (7.14a,b) uzyskuje się (D4):

$$T_e = -v_{\alpha\delta} C_{rp} \operatorname{Im}[D \overline{D'} + D_r \overline{D'_r} + D \overline{D'_r} e^{ik} + D_r \overline{D'} e^{-ik}]. \quad (7.21)$$

Nadkreślenie oznacza tu wartość sprzężoną, 'prim' oznacza pochodną względem promienia, a $C=\pi pl$. Moment całkowity nie zależy od promienia $r \in (R, R+g)$ wybranej powierzchni cylindrycznej umieszczonej w szczeliny maszyny, po której oblicza się całkę powierzchniową tensora naprężeń.

Analogicznie wyznacza się moment Lorentza:

$$T_{e,Cu} = -\gamma s i C \int_{R-a}^R \operatorname{Re}\{ |Z(\beta r)|^2 + |Z_r(\beta r)|^2 + 2Z(\beta r) \overline{Z_r}(\beta r) e^{ik} \} r dr. \quad (7.22)$$

Moment sił Lorentza został określony na podstawie wyrażenia na gęstość objętościową sił Lorentza, aby potwierdzić zgodność relacji (4.15d), (4.16) i (4.17). Wartości momentów maszyny opisane zależnościami (7.21), (7.22) i moment środowiskowy (permeancyjny) spełniają równość:

$$T_e = T_{e,Cu} + T_{e,Fe}.$$

Równość ta została potwierdzona również przykładami obliczeń zamieszczonych na rysunkach 7.2÷7.6 dla różnych parametrów geometrycznych i środowiskowych maszyny asynchronicznej. Na rysunkach przedstawiono przykłady obliczeń momentów maszyny z anizotropową magnetycznie szczeliną oraz przewodzącą warstwą umieszczoną na wirniku maszyny. Zaprezentowano również obliczenia mocy i sprawdzono dokładność rozwiązania równań różniczkowych opisujących potencjał magnetyczny. Obliczenia zrealizowano przy wykorzystaniu programu Mathcad pozwalającego na łatwy wgląd w strukturę obliczanych wyrażeń. Wartości wielkości podano w jednostkach układu SI. Na rys.7.2 i 7.3 przedstawiono wyniki obliczeń momentów sił dla maszyny o szczeliny powietrznej ($v_{\alpha\delta}=v_{r0}=1$) przy wirniku odpowiednio izotropowym i anizotropowym. Na rys. 7.4 i 7.5 przedstawiono wyniki obliczeń momentów sił dla maszyny o szczeliny magnetycznej i wirniku izotropowym oraz anizotropowym. Na rys. 7.6 przedstawiono wyniki obliczeń momentów sił dla maszyny dwustronnie zasilanej o szczeliny magnetycznej i wirniku anizotropowym. Na rysunkach 7.7 oraz 7.8 przedstawiono przebiegi: zmienności składowej radialnej, stycznej gęstości sił oraz ich stosunku w anizotropowej, przewodzącej warstwie wirnika maszyny indukcyjnej. Wykresy te pozwalają na ocenę ich wzajemnej proporcji (dla maszyny synchronicznej przedstawiono ich proporcje w rozdziale 5).

Celem sprawdzenia poprawności analiz:

- Potwierdzono spełnienie warunków brzegowych dla rozwiązań potencjału pola magnetycznego wymuszonego przez prądy stojana i wirnika:

$$\frac{v_{\alpha\delta} dD(R+g)}{\theta_e p p_{\delta}^{-1} (R+g)^{-1}} = 1, \quad \frac{v_{\alpha\delta} p_{\delta} dD(R)}{v_{\alpha} \beta dZ(\beta R)} = 1,$$

$$\frac{Z(\beta R)}{D(R)} = 1, \quad dZ(\beta(R-a)) = 0.$$

- Dokonano oceny dokładności uzyskiwanych rozwiązań równania Helmholtza oraz Laplace'a:

$$LZ = \frac{d}{dr} \{ \beta dZ(\beta r) \} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \{ Z(\beta r) \}, \quad RZ = \{ \beta^2 + \frac{p_B^2}{r^2} \} Z(\beta r),$$

$$LD = \frac{d}{dr} \{ \frac{dD(r)}{dr} \} + \frac{1}{r} \frac{dD(r)}{dr}, \quad RD = \frac{p_{\delta}^2}{r^2} D(r),$$

obliczając ilorazy lewej i prawej strony równania:

$$\frac{LZ}{RZ} = 1, \quad \frac{LD}{RD} = 1.$$

- Sprawdzono zupełność rozkładu całkowitego momentu maszyny:

$$\frac{T_{e,Cu} + T_{e,Fe}}{T_e} = 1.$$

- Obliczono moc strat cieplnych w wirniku maszyny dwukrotnie:
całkując po objętości gęstość objętościową mocy strat Joula - Q_e ,

$$Q_e = \pi \gamma |s|^2 \int_{R-a}^R [|Z(\beta r)|^2 + |Z_r(\beta r)|^2 + 2 \operatorname{Re} \{ Z(\beta r) \overline{Z_r(\beta r) e^{ik}} \}] r dr,$$

oraz całkując po odpowiedniej powierzchni wektor Poyntinga - S_e :

$$S_e = i s \pi l r p_{\delta} v_{\alpha\delta} \operatorname{Im} \{ D \overline{dD} + D_r \overline{dD_r} + D(r) \overline{dD_r} e^{ik} + D_r \overline{dD} e^{-ik} \},$$

sprawdzono:

$$S_e = Q_e.$$

Pochodna energii magnetycznej po czasie oraz moc mechaniczna widziana przez obserwatora związanego z wirnikiem wynoszą zero.

Przykłady obliczeniowe potwierdzają analizę teoretyczną i zaprezentowane wnioski, w szczególności zupełność dekompozycji momentu całkowitego na moment środowiskowy i Lorentza. Różnicowy tensor energii pola elektromagnetycznego pozwala na uzupełnienie gęstości siły od prądów magnetyzacji do gęstości sił środowiskowych. Tensor ten ma zatem fizykalną interpretację, która pozwala na wprowadzenie go do teorii pola elektromagnetycznego i teorii przetworników elektromechanicznych.

Maszyna indukcyjna z izotropowym, przewodzącym wirnikiem i szczeliną powietrzną

$$l := 1.0 \quad R := 0.2 \quad a := 0.1 \quad p := 1 \quad \boxed{v\alpha := 0.2 \cdot v_0} \quad \boxed{v_r := 0.2 \cdot v_0} \quad \gamma := 25 \cdot 10^6$$

$$g := 0.001 \quad s := 2 \cdot \pi \cdot 3.0i \quad \theta_s := 570 \quad \boxed{v\alpha\delta := v_0} \quad \boxed{v_r\delta := v_0} \quad pB := p \cdot \sqrt{\frac{v_r}{v\alpha}} \quad \beta := \sqrt{s \cdot \frac{\gamma}{v\alpha}}$$

$$|\beta| = 54.414 \quad |\beta| \cdot R = 10.883$$

Spełnienie warunków brzegowych przez rozwiązania równ. różniczkowych:

$$\frac{v\alpha\delta \cdot Rg \cdot dD(R+g)}{\theta_s \cdot p \cdot p\delta^{-1}} = 1 \quad \frac{v\alpha\delta \cdot p\delta \cdot dD(R)}{v\alpha \cdot \beta \cdot dZ(\beta \cdot R)} = 1 \quad \frac{Z(\beta \cdot R)}{D(R)} = 1 \quad dZ[\beta \cdot (R-a)] = 0$$

Momenty maszyny:

$$C := \pi \cdot l \cdot p \quad r := R + g$$

Moment całkowity:

$$T_e := -v\alpha\delta \cdot C \cdot r \cdot p\delta \cdot \text{Im}(D(r) \cdot \overline{dD(r)}) \quad \boxed{T_e = 0.442}$$

Moment Lorentza:

$$T_{eCu} := -C \cdot s \cdot i \cdot \gamma \cdot \int_{R-a}^R (|Z(\beta \cdot r)|)^2 \cdot r \, dr \quad \boxed{T_{eCu} = 0.442}$$

Moment permeancyjny:

$$\boxed{T_{eFe} := 0}$$

Moment pr. magnetyzacji

$$T_{e\mu} := -(v_0 - v\alpha\delta) \cdot C \cdot r \cdot p\delta \cdot \text{Im}(D(r) \cdot \overline{dD(r)})$$

$$\boxed{T_{e\mu} = 0}$$

Poprawka do wyznaczenia momentu metodą prądów magnetyzacji:

$$\boxed{\frac{T_{e\mu}}{T_e} = 0}$$

$$\boxed{\frac{v_0 - v\alpha\delta}{v\alpha\delta} = 0}$$

Udziały procentowe momentów:

$$\boxed{\frac{T_{eCu}}{T_e} \cdot 100 = 100} \quad \%$$

$$\boxed{\frac{T_{eFe}}{T_e} \cdot 100 = 0} \quad \%$$

$$\boxed{\frac{T_{eCu} + T_{eFe}}{T_e} \cdot 100 = 100} \quad \%$$

Bilans mocy - wektor Poyntinga, moc cieplna

$$r := R + g \cdot 0.5$$

$$Q_e := \pi \cdot (|s|)^2 \cdot l \cdot \gamma \cdot \int_{R-a}^R (|Z(\beta \cdot r)|)^2 \cdot r \, dr \quad S_e := \pi \cdot l \cdot s \cdot i \cdot r \cdot v\alpha\delta \cdot p\delta \cdot \text{Im}(D(r) \cdot \overline{dD(r)})$$

$$\boxed{Q_e = 8.338}$$

$$\boxed{S_e = 8.338}$$

$$\boxed{\frac{Q_e}{S_e} = 1.000}$$

Sprawdzenie poprawności rozwiązań dla równ. Helmholtza i Laplace'a:

$$r := R - \frac{a}{2} \quad LZ := \left[\frac{d}{dr} \left[\frac{d}{dr} (K(pB, \beta \cdot r)) \right] + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} (K(pB, \beta \cdot r)) \right] \quad RZ := \left(\beta^2 + \frac{pB^2}{r^2} \right) \cdot K(pB, \beta \cdot r)$$

$$r := R + \frac{g}{2} \quad LD := \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{d}{dr} D(r) \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} D(r) \right] \quad RD := \frac{p\delta^2}{r^2} \cdot D(r) \quad \boxed{\frac{LD}{RD} = 1.00000} \quad \boxed{\left| \frac{LZ}{RZ} \right| = 1.00000}$$

Rys.7.2. Obliczenie momentów dla maszyny z izotropowym wirnikiem i szczeliną powietrzną
Fig.7.2. The torques calculations for machine with isotropic rotor and air-gap

Maszyna indukcyjna z anizotropowym, przewodzącym wirnikiem i szczeliną powietrzną

$$l := 1.0 \quad R := 0.2 \quad a := 0.1 \quad p := 1 \quad \boxed{v\alpha := 0.3 \cdot v_0} \quad \boxed{v_r := 0.2 \cdot v_0} \quad \gamma := 25 \cdot 10^6$$

$$g := 0.001 \quad s := 2 \cdot \pi \cdot 3.0i \quad \theta_s := 570 \quad \boxed{v\alpha\delta := v_0} \quad \boxed{v_r\delta := v_0} \quad pB := p \cdot \sqrt{\frac{v_r}{v\alpha}} \quad \beta := \sqrt{s \cdot \frac{\gamma}{v\alpha}}$$

$$|\beta| = 44.429 \quad |\beta| \cdot R = 8.886$$

Spełnienie warunków brzegowych przez rozwiązania równ. różniczkowych:

$$\frac{v\alpha\delta \cdot Rg \cdot dD(R+g)}{\theta_s \cdot p \cdot p\delta^{-1}} = 1 \quad \frac{v\alpha\delta \cdot p\delta \cdot dD(R)}{v\alpha \cdot \beta \cdot dZ(\beta \cdot R)} = 1 \quad \frac{Z(\beta \cdot R)}{D(R)} = 1 \quad dZ[\beta \cdot (R-a)] = 0$$

Momenty maszyny:

$$C := \pi \cdot l \cdot p \quad r := R + g$$

Moment całkowity:

$$T_e := -v\alpha\delta \cdot C \cdot r \cdot p\delta \operatorname{Im}(D(r) \cdot \overline{dD(r)}) \quad \boxed{T_e = 0.368}$$

Moment Lorentza:

$$T_{eCu} := -C \cdot s \cdot i \cdot \gamma \cdot \int_{R-a}^R (|Z(\beta \cdot r)|)^2 \cdot r \, dr \quad \boxed{T_{eCu} = 0.368}$$

Moment permeancyjny:

$$\boxed{T_{eFe} := 0}$$

Moment pr. magnetyzacji

$$T_{e\mu} := -(v_0 - v\alpha\delta) \cdot C \cdot r \cdot p\delta \operatorname{Im}(D(r) \cdot \overline{dD(r)})$$

$$\boxed{T_{e\mu} = 0}$$

Poprawka do wyznaczenia momentu metodą prądów magnetyzacji:

$$\boxed{\frac{T_{e\mu}}{T_e} = 0}$$

$$\boxed{\frac{v_0 - v\alpha\delta}{v\alpha\delta} = 0}$$

Udziały procentowe momentów:

$$\boxed{\frac{T_{eCu}}{T_e} \cdot 100 = 100} \quad \%$$

$$\boxed{\frac{T_{eFe}}{T_e} \cdot 100 = 0} \quad \%$$

$$\boxed{\frac{T_{eCu} + T_{eFe}}{T_e} \cdot 100 = 100} \quad \%$$

Bilans mocy - wektor Poyntinga, moc cieplna

$$r := R + g \cdot 0.5$$

$$Q_e := \pi \cdot (|s|)^2 \cdot l \cdot \gamma \cdot \int_{R-a}^R (|Z(\beta \cdot r)|)^2 \cdot r \, dr \quad S_e := \pi \cdot l \cdot s \cdot i \cdot r \cdot v\alpha\delta \cdot p\delta \operatorname{Im}(D(r) \cdot \overline{dD(r)})$$

$$\boxed{Q_e = 6.928}$$

$$\boxed{S_e = 6.928}$$

$$\boxed{\frac{Q_e}{S_e} = 1.000}$$

Sprawdzenie poprawności rozwiązań dla równ. Helmholtza i Laplace'a:

$$r := R - \frac{a}{2} \quad LZ := \left[\frac{d}{dr} \left[\frac{d}{dr} (K(pB, \beta \cdot r)) \right] + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} (K(pB, \beta \cdot r)) \right] \quad RZ := \left(\beta^2 + \frac{pB^2}{r^2} \right) \cdot K(pB, \beta \cdot r)$$

$$r := R + \frac{g}{2} \quad LD := \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{d}{dr} D(r) \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} D(r) \right] \quad RD := \frac{p\delta^2}{r^2} \cdot D(r) \quad \boxed{\frac{LD}{RD} = 1.00000} \quad \boxed{\left| \frac{LZ}{RZ} \right| = 1.00000}$$

Rys.7.3. Obliczenie momentów dla maszyny z anizotropowym wirnikiem i szczeliną powietrzną
Fig.7.3. The torques calculations for machine with anisotropic rotor and air-gap

Maszyna indukcyjna z izotropowym, przewodzącym wirnikiem i szczeliną magnetyczną

$$l := 1.0 \quad R := 0.2 \quad a := 0.1 \quad p := 1 \quad \boxed{v\alpha := 0.2 \cdot v_0} \quad \boxed{v_r := 0.2 \cdot v_0} \quad \gamma := 25 \cdot 10^6$$

$$g := 0.001 \quad s := 2 \cdot \pi \cdot 3.0i \quad \theta_s := 570 \quad \boxed{v\alpha\delta := 0.8 \cdot v_0} \quad \boxed{v_r\delta := 0.8 \cdot v_0} \quad pB := p \cdot \sqrt{\frac{v_r}{v\alpha}} \quad \beta := \sqrt{s \cdot \frac{\gamma}{v\alpha}}$$

$$|\beta| = 54.414 \quad |\beta| \cdot R = 10.883$$

Spełnienie warunków brzegowych przez rozwiązania równ. różniczkowych:

$$\frac{v\alpha\delta \cdot Rg \cdot dD(R+g)}{\theta_s \cdot p \cdot p\delta^{-1}} = 1 \quad \frac{v\alpha\delta \cdot p\delta \cdot dD(R)}{v\alpha \cdot \beta \cdot dZ(\beta \cdot R)} = 1 \quad \frac{Z(\beta \cdot R)}{D(R)} = 1 \quad dZ[\beta \cdot (R-a)] = 0$$

Momenty maszyny:

$$C := \pi \cdot l \cdot p \quad r := R + g$$

Moment całkowity:

$$T_e := -v\alpha\delta \cdot C \cdot r \cdot p\delta \operatorname{Im}(D(r) \cdot \overline{dD(r)}) \quad \boxed{T_e = 0.443}$$

Moment Lorentza:

$$T_{eCu} := -C \cdot s \cdot i \cdot \gamma \cdot \int_{R-a}^R (|Z(\beta \cdot r)|)^2 \cdot r \, dr \quad \boxed{T_{eCu} = 0.443}$$

Moment permeancyjny:

$$\boxed{T_{eFe} := 0}$$

Moment pr. magnetyzacji

$$T_{e\mu} := -(v_0 - v\alpha\delta) \cdot C \cdot r \cdot p\delta \operatorname{Im}(D(r) \cdot \overline{dD(r)}) \quad \boxed{T_{e\mu} = 0.111}$$

Poprawka do wyznaczenia momentu metodą prądów magnetyzacji:

$$\boxed{\frac{T_{e\mu}}{T_e} = 0.25}$$

$$\boxed{\frac{v_0 - v\alpha\delta}{v\alpha\delta} = 0.25}$$

Udziały procentowe momentów:

$$\boxed{\frac{T_{eCu}}{T_e} \cdot 100 = 100} \quad \%$$

$$\boxed{\frac{T_{eFe}}{T_e} \cdot 100 = 0} \quad \%$$

$$\boxed{\frac{T_{eCu} + T_{eFe}}{T_e} \cdot 100 = 100} \quad \%$$

Bilans mocy - wektor Poyntinga, moc cieplna

$$r := R + g \cdot 0.5$$

$$Q_e := \pi \cdot (|s|)^2 \cdot l \cdot \gamma \cdot \int_{R-a}^R (|Z(\beta \cdot r)|)^2 \cdot r \, dr \quad S_e := \pi \cdot l \cdot s \cdot i \cdot r \cdot v\alpha\delta \cdot p\delta \operatorname{Im}(D(r) \cdot \overline{dD(r)})$$

$$\boxed{Q_e = 8.343}$$

$$\boxed{S_e = 8.343}$$

$$\boxed{\frac{Q_e}{S_e} = 1.000}$$

Sprawdzenie poprawności rozwiązań dla równ. Helmholtza i Laplace'a:

$$r := R - \frac{a}{2} \quad LZ := \left[\frac{d}{dr} \left[\frac{d}{dr} (K(pB, \beta \cdot r)) \right] + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} (K(pB, \beta \cdot r)) \right] \quad RZ := \left(\beta^2 + \frac{pB^2}{r^2} \right) \cdot K(pB, \beta \cdot r)$$

$$r := R + \frac{g}{2} \quad LD := \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{d}{dr} D(r) \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} D(r) \right] \quad RD := \frac{p\delta^2}{r^2} \cdot D(r) \quad \boxed{\frac{LD}{RD} = 1.00000} \quad \boxed{\left| \frac{LZ}{RZ} \right| = 1.00000}$$

Rys.7.4. Obliczenie momentów dla maszyny z izotropowym wirnikiem i magnetyczną szczeliną
Fig.7.4. The torques calculations for machine with isotropic rotor and magnetic-gap

Maszyna indukcyjna z anizotropowym, przewodzącym wirnikiem i szczeliną magnetyczną

$$l := 1.0 \quad R := 0.2 \quad a := 0.1 \quad p := 1 \quad \boxed{v\alpha := 0.4 \cdot v_0} \quad \boxed{v_r := 0.2 \cdot v_0} \quad \gamma := 25 \cdot 10^6$$

$$g := 0.001 \quad s := 2 \cdot \pi \cdot 3.0i \quad \theta_s := 570 \quad \boxed{v\alpha\delta := 0.8 \cdot v_0} \quad \boxed{v_r\delta := 0.8 \cdot v_0} \quad pB := p \cdot \sqrt{\frac{v_r}{v\alpha}} \quad \beta := \sqrt{s \cdot \frac{\gamma}{v\alpha}}$$

$$|\beta| = 38.476 \quad |\beta| \cdot R = 7.695$$

Spełnienie warunków brzegowych przez rozwiązania równ. różniczkowych:

$$\frac{v\alpha\delta \cdot Rg \cdot dD(R+g)}{\theta_s \cdot p \cdot p\delta^{-1}} = 1 \quad \frac{v\alpha\delta \cdot p\delta \cdot dD(R)}{v\alpha \cdot \beta \cdot dZ(\beta \cdot R)} = 1 \quad \frac{Z(\beta \cdot R)}{D(R)} = 1 \quad dZ[\beta \cdot (R-a)] = 0$$

Momenty maszyny:

$$C := \pi \cdot l \cdot p \quad r := R + g$$

Moment całkowity:

$$Te := -v\alpha\delta \cdot C \cdot r \cdot p\delta \cdot \text{Im}(D(r) \cdot \overline{dD(r)})$$

$$\boxed{Te = 0.321}$$

Moment Lorentza:

$$Te_{Cu} := -C \cdot s \cdot i \cdot \gamma \cdot \int_{R-a}^R (|Z(\beta \cdot r)|)^2 \cdot r \, dr$$

$$\boxed{Te_{Cu} = 0.321}$$

Moment permeancyjny:

$$\boxed{Te_{Fe} := 0}$$

Moment pr. magnetyzacji

$$Te_{\mu} := -(v_0 - v\alpha\delta) \cdot C \cdot r \cdot p\delta \cdot \text{Im}(D(r) \cdot \overline{dD(r)})$$

$$\boxed{Te_{\mu} = 0.08}$$

Poprawka do wyznaczenia momentu metodą prądów magnetyzacji:

$$\boxed{\frac{Te_{\mu}}{Te} = 0.25}$$

$$\boxed{\frac{v_0 - v\alpha\delta}{v\alpha\delta} = 0.25}$$

Udziały procentowe momentów:

$$\boxed{\frac{Te_{Cu}}{Te} \cdot 100 = 100} \quad \%$$

%

$$\boxed{\frac{Te_{Fe}}{Te} \cdot 100 = 0} \quad \%$$

%

$$\boxed{\frac{Te_{Cu} + Te_{Fe}}{Te} \cdot 100 = 100} \quad \%$$

%

Bilans mocy - wektor Poyntinga, moc cieplna

$$r := R + g \cdot 0.5$$

$$Q_e := \pi \cdot (|s|)^2 \cdot l \cdot \gamma \cdot \int_{R-a}^R (|Z(\beta \cdot r)|)^2 \cdot r \, dr \quad Se := \pi \cdot l \cdot s \cdot i \cdot r \cdot v\alpha\delta \cdot p\delta \cdot \text{Im}(D(r) \cdot \overline{dD(r)})$$

$$\boxed{Q_e = 6.055}$$

$$\boxed{Se = 6.055}$$

$$\boxed{\frac{Q_e}{Se} = 1.000}$$

Sprawdzenie poprawności rozwiązań dla równ. Helmholtza i Laplace'a:

$$r := R - \frac{a}{2} \quad LZ := \left[\frac{d}{dr} \left[\frac{d}{dr} (K(pB, \beta \cdot r)) \right] + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} (K(pB, \beta \cdot r)) \right] \quad RZ := \left(\beta^2 + \frac{pB^2}{r^2} \right) \cdot K(pB, \beta \cdot r)$$

$$r := R + \frac{g}{2} \quad LD := \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{d}{dr} D(r) \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} D(r) \right] \quad RD := \frac{p\delta^2}{r^2} \cdot D(r) \quad \boxed{\frac{LD}{RD} = 1.00000} \quad \boxed{\left| \frac{LZ}{RZ} \right| = 1.00000}$$

Rys.7.5. Obliczenie momentów dla maszyny z anizotropowym wirnikiem i szczeliną magnetyczną
Fig.7.5. The torques calculations for machine with anisotropic rotor and magnetic-gap

Maszyna dwustronnie zasilana z anizotropowym wirnikiem i szczeliną magnetyczną

$$s := 2 \cdot \pi \cdot 3.0i \quad p := 2 \quad v\alpha := 0.3 \cdot v_0 \quad v_r := 0.4 \cdot v_0 \quad \gamma := 25 \cdot 10^6 \quad pB := p \cdot \sqrt{\frac{v_r}{v\alpha}} \quad \beta := \sqrt{s \cdot \frac{\gamma}{v\alpha}}$$

$$g := 0.001 \quad \Delta\theta r := 50 \quad v\alpha\delta := 0.9 \cdot v_0 \quad v_r\delta := 0.8 \cdot v_0 \quad l := 1.0 \quad R := 0.2 \quad a := 0.1$$

$$|\beta| = 44.429 \quad \kappa := 0.7 \quad |\beta \cdot R| = 8.886 \quad \theta_s := 500$$

Spełnienie warunków brzegowych przez rozwiązania równ. różn. od prądów stojana:

$$\frac{v\alpha\delta \cdot Rg \cdot dD(R+g)}{\theta_s \cdot p \cdot p\delta^{-1}} = 1 \quad \frac{v\alpha\delta \cdot p\delta \cdot dD(R)}{v\alpha \cdot \beta \cdot dZ(\beta \cdot R)} = 1 \quad \frac{Z(\beta \cdot R)}{D(R)} = 1 \quad dZ[\beta \cdot (R-a)] = 0$$

Spełnienie warunków brzegowych przez rozwiązania równ. różn. - od prądów wirnika:

$$\frac{-2 \cdot s \cdot \gamma \cdot (C_a \cdot aar + C_b \cdot bar)}{\Delta\theta r \cdot p} = 1 \quad \frac{v\alpha\delta \cdot p\delta \cdot dDr(R)}{v\alpha \cdot \beta \cdot dZr(\beta \cdot R)} = 1 \quad \frac{Zr(\beta \cdot R)}{Dr(R)} = 1 \quad |dZr[\beta \cdot (Ra)]| = 0$$

$$C := \pi \cdot p \cdot l \quad r := R$$

Moment całkowity: $Te := -v\alpha\delta \cdot r \cdot C \cdot p\delta \cdot \text{Im}(D(r) \cdot \overline{dD(r)} + Dr(r) \cdot \overline{dDr(r)} + D(r) \cdot \overline{dDr(r)} \cdot e^{i\kappa} + Dr(r) \cdot \overline{dD(r)} \cdot e^{-i\kappa})$

Moment Lorentza: $Te_{Cu} := -C \cdot s \cdot i \cdot \gamma \cdot \int_{Ra}^R [(|Z(\beta \cdot r)|)^2 + (|Zr(\beta \cdot r)|)^2 + 2 \cdot \text{Re}(Z(\beta \cdot r) \cdot \overline{Zr(\beta \cdot r)} \cdot e^{i\kappa})] \cdot r \, dr$

Moment permeancyjny:

$$Te_{Fe} := 0$$

$$Te = 2.034$$

$$Te_{Cu} = 2.034$$

Udziały procentowe momentów:

$$\frac{Te_{Cu}}{Te} \cdot 100 = 100 \quad \%$$

%

$$\frac{Te_{Fe}}{Te} \cdot 100 = 0 \quad \%$$

%

$$\frac{Te_{Cu} + Te_{Fe}}{Te} \cdot 100 = 100 \quad \%$$

%

Bilans mocy pola od pr. stojana - wektor Poyntinga, moc cieplna, energia

$$E_r := \frac{v_r}{2} \cdot l \cdot \int_{Ra}^R \left(\left| Z(\beta \cdot r) \cdot \frac{p}{r} \right| \right)^2 \cdot r \, dr \quad E_\alpha := \frac{v\alpha}{2} \cdot l \cdot \int_{Ra}^R (|\beta \cdot dZ(\beta \cdot r)|)^2 \cdot r \, dr \quad Q := 2 \cdot |s| \cdot (E_\alpha + E_r)$$

$$Sc := v\alpha\delta \cdot s \cdot l \cdot R \cdot D(R) \cdot p\delta \cdot \overline{dD(R)} \quad P := (|s|)^2 \cdot \gamma \cdot l \cdot \int_{Ra}^R (|Z(\beta \cdot r)|)^2 \cdot r \, dr$$

$$Sc = 6.543 + 6.488i$$

$$P = 6.543$$

$$Q = 6.488$$

$$\frac{P + iQ}{Sc} = 1.00000$$

Bilans mocy obu pól - wektor Poyntinga, moc cieplna

$$\Delta P := \pi \cdot (|s|)^2 \cdot l \cdot \gamma \cdot \int_{Ra}^R [(|Z(\beta \cdot r)|)^2 + (|Zr(\beta \cdot r)|)^2 + 2 \cdot \text{Re}(Z(\beta \cdot r) \cdot \overline{Zr(\beta \cdot r)} \cdot e^{i\kappa})] \cdot r \, dr$$

$$r := R + g$$

$$S := \pi \cdot l \cdot s \cdot i \cdot r \cdot v\alpha\delta \cdot p\delta \cdot \text{Im}(D(r) \cdot \overline{dD(r)} + Dr(r) \cdot \overline{dDr(r)} + D(r) \cdot \overline{dDr(r)} \cdot e^{i\kappa} + Dr(r) \cdot \overline{dD(r)} \cdot e^{-i\kappa}) \quad \frac{\Delta P}{S} = 1.000$$

Rys.7.6. Obliczenie momentów dla maszyny asynchronicznej dwustronnie zasilanej
Fig.7.6. The calculation for torques of doubly-fed asynchronous machine

Dla rozważanej maszyny asynchronicznej - korzystając z wyznaczonego rozkładu pola elektromagnetycznego - można oprócz sił stycznych określić gęstość objętościową sił promieniowych działających w obszarze przewodzącej warstwy magnetycznej. Zgodnie z zależnością (D2.10b) (dodatek D2, $L_r = 1$) składowa promieniowa gęstości całkowitej siły działającej w wybranym dowolnie punkcie przewodzącej warstwy wirnika jest równa:

$$f_r = -\operatorname{div}_{|r|}(\vec{\sigma}_r) + k_{\mu,r}, \quad (7.23a)$$

gdzie pominięto pochodną czasową gęstości pędu pola, a indeks „r” oznacza składową promieniową.

Składowa promieniowa gęstości siły Lorentza wynosi:

$$f_{Cu,r} = -j_z B_\alpha, \quad (7.23b)$$

która jest obliczana celem potwierdzenia poprawności analiz. Przeprowadzone obliczenia potwierdzają dodatkowo poprawność wykorzystywanych zależności wektorowych.

Składowa promieniowa gęstości sił permeancyjnych, z uwagi na stałość reluktywności magnetycznych w obszarze wirnika maszyny, jest równa zero:

$$f_{Fe,r} = N_r = 0. \quad (7.23c)$$

Dla składowych promieniowych sił w przewodzącej warstwie wirnika zachodzi następująca równość:

$$f_r = f_{Cu,r} + f_{Fe,r} = f_{Cu,r}. \quad (7.23d)$$

Wykorzystując zależności (7.23a,b,c) obliczono gęstości sił promieniowych dla maszyny z przewodzącą warstwą na wirniku z następujących relacji (dodatek D2; $x = \omega t - p\alpha + \alpha_0$):

$$f_r = f_{Cu,r} + f_{Fe,r} = f_{Cu,r},$$

$$f_{Cu,r} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \gamma_s (Z(\beta r) \exp(ix) + Zr(\beta r) \exp(ix - i\kappa)) \overline{B_\alpha} \},$$

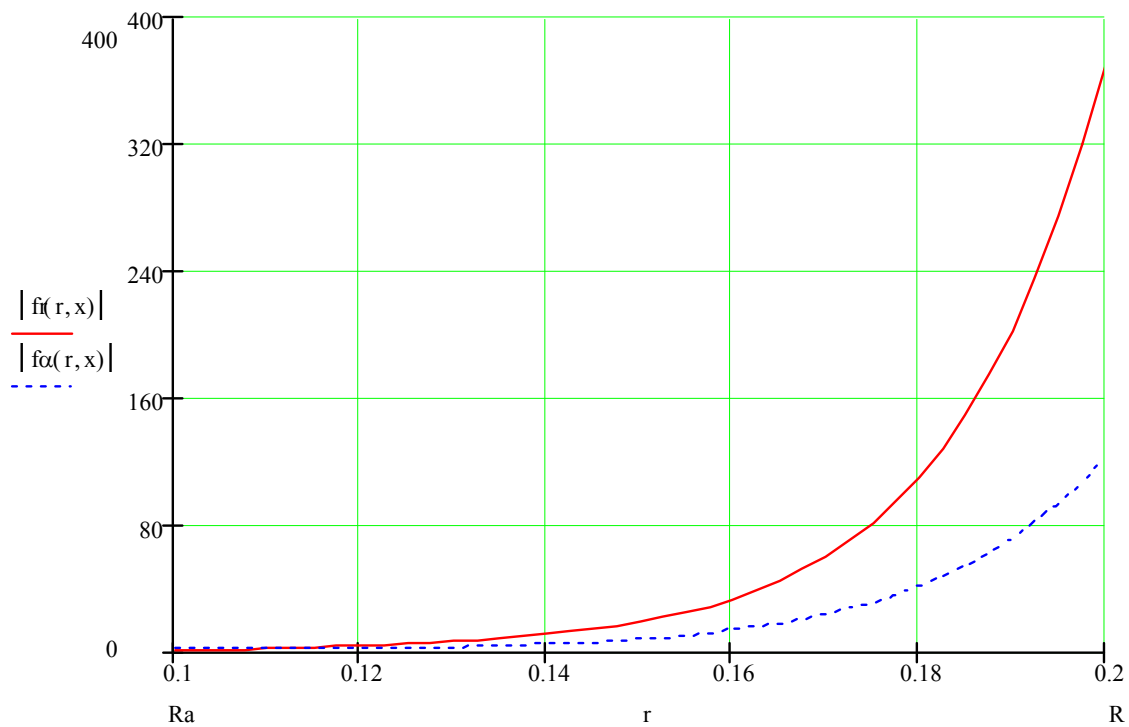
przy oznaczeniach zespolonych składowych pól postaci:

$$\mathbf{B}_r = -\frac{ip}{r} [Z(\beta r) \exp(ix) + Zr(\beta r) \exp(ix - i\kappa)],$$

$$\mathbf{B}_\alpha = -\frac{d}{dr} [Z(\beta r) \exp(ix) + Zr(\beta r) \exp(ix - i\kappa)].$$

oraz oznaczeniach pomocniczych:

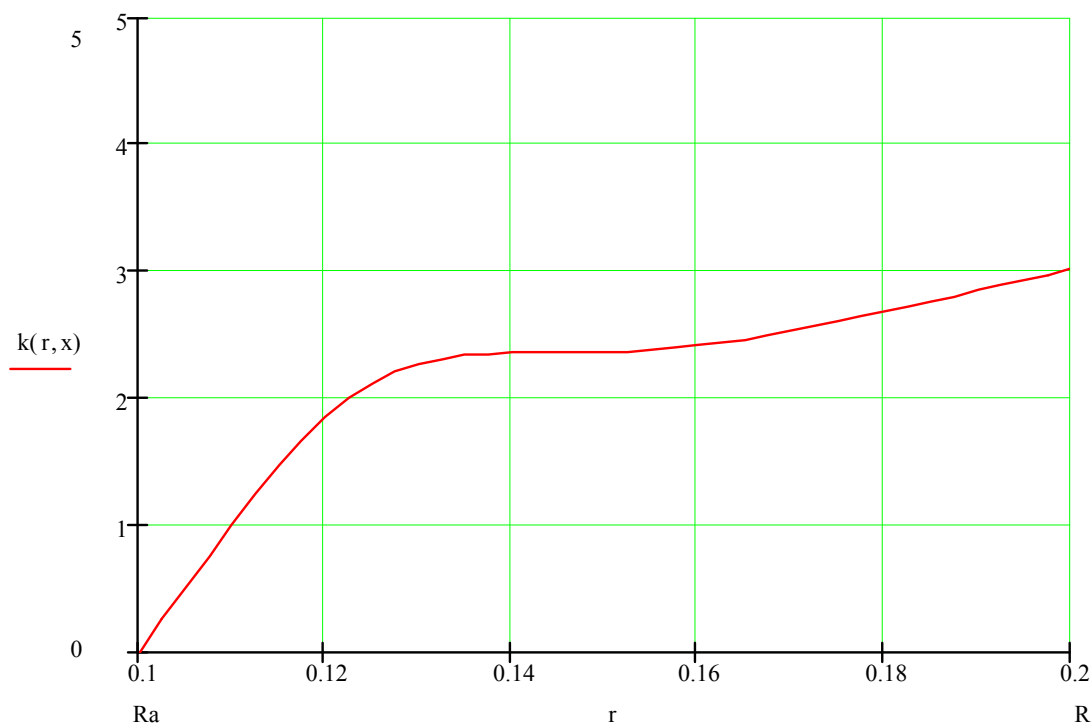
$$G\alpha = \overline{H}_r B_\alpha, \quad G = \overline{H}_r B_r - \overline{H}_\alpha B_\alpha.$$



Rys.7.7. Rozkład gęstości sił promieniowych i stycznych w litym wirniku maszyny indukcyjnej
Fig.7.7. Distribution of radial and tangential forces density versus radius in solid rotor

Na rysunku 7.7 przedstawiono zmienność składowej promieniowej i stycznej gęstości sił w przewodzącej warstwie wirnika w funkcji promienia. Na rysunku 7.8 przedstawiono przebieg ilorazu sił promieniowych do stycznych $k(r, x)$ w funkcji promienia w obszarze litej warstwy wirnika. Iloraz $k(r, x)$ nie ulega zmianie przy zamianach kąta α na obwodzie wirnika. Celem dodatkowego potwierdzenia poprawności obliczeń sprawdzono wartość ilorazu:

$$\frac{f_{Cu,r}}{f_r} = 1 .$$



Rys.7.8. Iloraz sił promieniowych do stycznych w funkcji promienia w litej warstwie maszyny indukcyjnej

Fig.7.8. The radial and tangential forces ratio versus radius in solid rotor of induction machine

Z przeprowadzonych obliczeń wynikają wnioski.

- Na przykładzie maszyny indukcyjnej o litym wirniku pokazano, iż prowadzenie obliczeń momentów sił metodą prądów magnetyzacji przy wykorzystaniu różnicowego tensora energii prowadzi do poprawnych rezultatów. Zaproponowana metodyka nie wymaga definiowania prądów powierzchniowych o określonych gęstościach powierzchniowych.
- W maszynie o litym - przewodzącym i anizotropowym wirniku występują siły styczne i promieniowe o wartościach tego samego rzędu (rys.7.8). Jest to konsekwencją właściwości magnetycznych przewodzącej warstwy wirnika. Rozważane przenikalności magnetyczne względne mają wartości do kilku do kilkudziesięciu. Takie właściwości odpowiadają stanowi silnego nasycenia obwodu wirnika (podrozdział 5.6).

7.3. OBLICZANIE MOMENTU ELEKTROMAGNETYCZNEGO W ŚRODOWISKACH ANIZOTROPOWYCH MAGNETYCZNIE

W środowiskach anizotropowych obliczanie momentu elektromagnetycznego jest problemem, który wymaga oprócz analiz numerycznych, prowadzenia analiz teoretycznych [aS.21, aS.27, T.1]. W szeregu układach elektromechanicznych, pojawiających się w zastosowaniach szeroko rozumianej elektrotechniki, wykorzystywane są środowiska magnetyczne, których macierz przenikalności magnetycznych jest niesymetryczna.

Przykładowo, tak jest w przypadku ujawniania się tzw. anizotropii wymuszonej [B.3 ss.305-306, G.1, aS.21]. Dla magnetyków, takich jak: samar-kobalt, neodym-żelazo-bor, macierz przenikalności magnetycznych jest niesymetryczna:

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_x & c \\ 0 & \mu_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.24)$$

gdzie w ogólności $c = c(H_x, H_y) \neq 0$.

Z kolei środowiska anizotropowe absorbujące (tzw. perfectly matched layer PML [aK.3]) charakteryzują się macierzą przenikalności symetryczną, niediagonalną:

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_x & a & c \\ a & \mu_y & b \\ c & b & \mu_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix}. \quad (7.25)$$

Obliczanie momentu sił w środowiskach magnetycznych anizotropowych o różnych właściwościach jest tematem rozważań w niniejszym podrozdziale.

W środowiskach anizotropowych, w których nie ma magnesów trwałych, nie ujawnia się zjawisko magnetostrykcji oraz niejednorodność przenikalności magnetycznej, moment Lorentza powinien być równy momentowi obliczonemu za pomocą tensora naprężeń Maxwella. W pracy [T.1] została przedstawiona zależność określająca moment elektromagnetyczny (str.132 wzór (33.9); oznaczenia osi zostały cyklicznie zmienione oraz został zmieniony znak tensora naprężeń stosownie do definicji (4.12a)) postaci:

$$T_e = \int_V (x f_y - y f_x) dV = - \int_S (x \sigma_{yn} - y \sigma_{xn}) dS - \int_V (\sigma_{xy} - \sigma_{yx}) dV, \quad (7.26)$$

gdzie:

T_e - moment elektromagnetyczny sił względem osi OZ,

f_x, f_y - składowe gęstości sił w kierunku osi OX oraz OY,

V - objętość rozpatrywanego obszaru,

S - powierzchnia zewnętrzna.

Zgodnie z (7.26) całkowity moment sił pola elektromagnetycznego w obszarze anizotropowym powinien być równy momentowi określonoemu poprzez tensor naprężeń Maxwella, gdy środowisko jest izotropowe. Zanika wtedy bowiem druga z całek występujących po prawej stronie zależności (7.26). W przypadku, gdy środowisko nie jest anizotropowe - zgodnie z (7.26) - to równość obu momentów nie zachodzi.

Można pokazać jednak, iż istnieje taka możliwość również wtedy, gdy dane środowisko jest anizotropowe, o diagonalnej macierzy przenikalności magnetycznych. W przypadku takiego ośrodka anizotropowego macierz reluktywności magnetycznych ma postać:

$$\begin{bmatrix} v_{uu} & 0 & 0 \\ 0 & v_{vv} & 0 \\ 0 & 0 & v_{ww} \end{bmatrix}. \quad (7.27)$$

Przykładowo, dla maszyny indukcyjnej opisanej w podrozdziale 7.2 macierz reluktywności jest diagonalna w układzie współrzędnych (r, α, z) .

Jeżeli $v_{r\alpha} = v_o$, to całkowity moment elektromagnetyczny (7.20) jest równy:

$$T_e = \int_{\partial V} v_o r B_\alpha B_r dS. \quad (7.28a)$$

Gęstość objętościowa siły Lorentza winna prowadzić do tej samej wartości momentu elektromagnetycznego:

$$T_{eCu} = \int_V r j_z B_r dV. \quad (7.29a)$$

Druga całka po prawej stronie równania (7.26) ma wymiar momentu sił i zostanie oznaczona jako:

$$\Delta T_e = (v_r - v_\alpha) \int_V B_\alpha B_r dV. \quad (7.30a)$$

Szczegółowe przekształcenie wyrażenia podcałkowego przedstawiono w dodatku D3.

Przy powyższych oznaczeniach zależność (7.26) przyjmuje następującą postać:

$$T_{eCu} = T_e + \Delta T_e. \quad (7.31)$$

Zależność (7.26) dla środowisk anizotropowych pozostaje w sprzeczności z poniższą zależnością (wirnik maszyny jest jednorodny magnetycznie - brak sił środowiskowych):

$$T_e = T_{eCu}. \quad (7.32)$$

Zgodnie z zależnością (4.16) można bowiem przedstawić całkowity moment działających sił, w obszarze zarówno izotropowym, jak i anizotropowym, poprzez całkę powierzchniową tensora energii pola elektromagnetycznego w cylindrycznym układzie współrzędnych. Celem potwierdzenia równości obu momentów sił: T_e oraz T_{eCu} zostaną one obliczone niezależnie. Pozwoli to na rozstrzygnięcie, która z zależności (7.31) czy też (7.32) jest słuszna. Zależność (7.32) okaże się być słuszna. Dodatkowo zostanie obliczona

wartość wyrażenia ΔT_e - okaże się ono być niezerowe. Zależność (7.31) jest więc nieprawdziwa. Warto zauważyć, iż dla środowisk izotropowych obie zależności pozostają zgodne, ponieważ ΔT_e zanika tożsamościowo. Różnica powinna się pojawiać w przypadku analizy maszyny indukcyjnej o anizotropowym litym wirniku.

Przedmiotem szczegółowych rozważań jest model maszyny indukcyjnej o litym wirniku przedstawiony w podrozdziale 7.2. Podstawiając za składowe indukcji pola magnetycznego otrzymane uprzednio (podrozdział 7.1, 7.2) rozwiązania otrzymuje się w elementarny sposób wartości momentów sił.

Moment elektromagnetyczny zgodnie z (7.28a) wynosi:

$$T_e = -v_o C p \operatorname{Im}[D(r) \overline{D'}(r) + D_r(r) \overline{D'_r}(r) + D(r) \overline{D'_r}(r) e^{ik} + D_r(r) \overline{D'}(r) e^{-ik}], \quad (7.28b)$$

gdzie $r \in (R, R+g)$.

Moment sił Lorentza - zgodnie z zależnością (7.22) - wynosi:

$$T_{e,Cu} = -\gamma s i C \int_0^R \{ |Z(\beta r)|^2 + |Z_r(\beta r)|^2 + 2 \operatorname{Re}[Z(\beta r) \overline{Z_r}(\beta r) e^{ik}] \} r dr. \quad (7.29b)$$

Natomiast całka (7.30a) ma wartość:

$$\Delta T_e = \Delta v C \int_0^R \operatorname{Im}[Z \overline{Z'} + Z_r \overline{Z'_r} + Z \overline{Z'_r} e^{ik} + Z_r \overline{Z'} e^{-ik}] dr, \quad (7.30b)$$

gdzie nadkreślenie oznacza wartość sprzężoną do danej; znak ' oznacza pochodną względem promienia r , $C = \pi p l$ - stała, l - długość maszyny, p - liczba par biegunów, $\Delta v = v_r - v_\alpha$.

Rachunkowego potwierdzenia analiz dokonano przeprowadzając obliczenia analityczne dla maszyny indukcyjnej o przewodzącym i anizotropowym wirniku - rys.7.9, 7.10. Obliczenia i uprzednie analizy potwierdzają słuszność następującej tezy:

Istnieje możliwość przedstawienia momentu sił Lorentza działających w obszarze magnetycznym anizotropowym (bez histerezy, magnetostrykcji oraz niejednorodności) poprzez całkę powierzchniową tensora naprężeń Maxwella, gdy przenikalności magnetyczne tworzą macierz symetryczną.

Należy zwrócić uwagę, iż takie przedstawienie *nie jest możliwe w obszarach, w których macierz przenikalności magnetycznych nie jest symetryczna* [aS.21, aS.27].

Maszyna dwustronnie zasilana z anizotropowym wirnikiem i szczeliną powietrzną

$$s := 2 \cdot \pi \cdot 5.0i \quad p := 2 \quad \boxed{v\alpha := 0.25 v_0} \quad \boxed{v_r := 0.5 v_0} \quad \gamma := 11 \cdot 10^5 \quad pB := p \cdot \sqrt{\frac{v_r}{v\alpha}} \quad \beta := \sqrt{s \cdot \frac{\gamma}{v\alpha}}$$

$$g := 0.002 \quad \Delta\theta_r := 50 \quad \boxed{v\alpha\delta := v_0} \quad \boxed{v_r\delta := v_0} \quad l := 1.0 \quad R := 0.3 \quad a := 0.2$$

$$|\beta| = 13.18 \quad \kappa := 0.7 \quad |\beta \cdot R| = 3.954 \quad \theta_s := 250 \quad \Delta v := v_r - v\alpha$$

Spełnienie warunków brzegowych przez rozwiązania równ. różn. od prądów stojana:

$$\frac{v\alpha\delta \cdot Rg \cdot dD(R + g)}{\theta_s \cdot p \cdot p\delta^{-1}} = 1 \quad \frac{v\alpha\delta \cdot p\delta \cdot dD(R)}{v\alpha \cdot \beta \cdot dZ(\beta \cdot R)} = 1 \quad \frac{Z(\beta \cdot R)}{D(R)} = 1 \quad dZ[\beta \cdot (R - a)] = 0$$

Spełnienie warunków brzegowych przez rozwiązania równ. różn. - od prądów wirnika:

$$\frac{-2 \cdot s \cdot \gamma \cdot (C_a \cdot aar + C_b \cdot bar)}{\Delta\theta_r \cdot p} = 1 \quad \frac{v\alpha\delta \cdot p\delta \cdot dDr(R)}{v\alpha \cdot \beta \cdot dZr(\beta \cdot R)} = 1 \quad \frac{Zr(\beta \cdot R)}{Dr(R)} = 1 \quad |dZr[\beta \cdot (Ra)]| = 0$$

Moment całkowity:

$$C := \pi \cdot p \cdot l \quad r := R$$

$$Te := -v\alpha\delta \cdot r \cdot C \cdot p\delta \cdot \text{Im}(D(r) \cdot \overline{dD(r)} + Dr(r) \cdot \overline{dDr(r)} + D(r) \cdot \overline{dDr(r)} \cdot e^{i\kappa} + Dr(r) \cdot \overline{dD(r)} \cdot e^{-i\kappa})$$

Moment Lorentza:

$$Te_{Cu} := -C \cdot s \cdot i \cdot \gamma \cdot \int_{Ra}^R [(|Z(\beta \cdot r)|)^2 + (|Zr(\beta \cdot r)|)^2 + 2 \cdot \text{Re}(Z(\beta \cdot r) \cdot \overline{Zr(\beta \cdot r)} \cdot e^{i\kappa})] \cdot r \, dr$$

Błąd ΔTe :

$$\Delta Te := \Delta v \cdot C \cdot \int_{Ra}^R \text{Im}[\beta \cdot (Z(\beta \cdot r) \cdot \overline{dZ(\beta \cdot r)} + Zr(\beta \cdot r) \cdot \overline{dZr(\beta \cdot r)} + Z(\beta \cdot r) \cdot \overline{dZr(\beta \cdot r)} \cdot e^{i\kappa} + Zr(\beta \cdot r) \cdot \overline{dZ(\beta \cdot r)} \cdot e^{-i\kappa})] \, dr$$

Udziały procentowe momentów:

$$\boxed{\frac{Te}{Te_{Cu}} \cdot 100 = 100} \quad \% \quad \boxed{\frac{\Delta Te}{Te_{Cu}} \cdot 100 = -12.705} \quad \% \quad \boxed{\frac{Te + \Delta Te}{Te_{Cu}} \cdot 100 = 87.295} \quad \%$$

Bilans mocy pola od pr. stojana - wektor Poyntinga, moc cieplna, energia

$$Er := \frac{v_r}{2} \cdot l \cdot \int_{Ra}^R \left(\left| Z(\beta \cdot r) \cdot \frac{p}{r} \right| \right)^2 \cdot r \, dr \quad Ea := \frac{v\alpha}{2} \cdot l \cdot \int_{Ra}^R (|\beta \cdot dZ(\beta \cdot r)|)^2 \cdot r \, dr \quad Sc := v\alpha\delta \cdot s \cdot l \cdot R \cdot D(R) \cdot p\delta \cdot \overline{dD(R)}$$

$$Sc = 5.159 + 8.628i \quad Q := 2 \cdot |s| \cdot (Ea + Er) \quad Q = 8.628 \quad P := (|s|)^2 \cdot \gamma \cdot l \cdot \int_{Ra}^R (|Z(\beta \cdot r)|)^2 \cdot r \, dr$$

$$P = 5.159$$

$$\boxed{\frac{P + iQ}{Sc} = 1.00000}$$

Rys.7.9. Obliczenie momentu sił w przypadku $v\alpha < v_r$

Fig.7.9. Electromagnetic torque calculation in the case $v\alpha < v_r$

Maszyna dwustronnie zasilana z anizotropowym wirnikiem i szczeliną powietrzną

$$s := 2 \cdot \pi \cdot 5.0i \quad p := 2 \quad v_\alpha := 0.5 \cdot v_0 \quad v_r := 0.25 \cdot v_0 \quad \gamma := 11 \cdot 10^5 \quad pB := p \cdot \sqrt{\frac{v_r}{v_\alpha}} \quad \beta := \sqrt{s \cdot \frac{\gamma}{v_\alpha}}$$

$$g := 0.002 \quad \Delta\theta_r := 50 \quad v_\alpha \delta := v_0 \quad v_r \delta := v_0 \quad l := 1.0 \quad R := 0.3 \quad a := 0.2$$

$$|\beta| = 9.319 \quad \kappa := 0.7 \quad |\beta \cdot R| = 2.796 \quad \theta_s := 250 \quad \Delta v := v_r - v_\alpha$$

Spełnienie warunków brzegowych przez rozwiązania równ. różn. od prądów stojana:

$$\frac{v_\alpha \delta \cdot R g \cdot dD(R + g)}{\theta_s \cdot p \cdot p \delta^{-1}} = 1 \quad \frac{v_\alpha \delta \cdot p \delta \cdot dD(R)}{v_\alpha \cdot \beta \cdot dZ(\beta \cdot R)} = 1 \quad \frac{Z(\beta \cdot R)}{D(R)} = 1 \quad dZ[\beta \cdot (R - a)] = 0$$

Spełnienie warunków brzegowych przez rozwiązania równ. różn. - od prądów wirnika:

$$\frac{-2 \cdot s \cdot \gamma \cdot (C_a \cdot aar + C_b \cdot bar)}{\Delta\theta_r \cdot p} = 1 \quad \frac{v_\alpha \delta \cdot p \delta \cdot dDr(R)}{v_\alpha \cdot \beta \cdot dZr(\beta \cdot R)} = 1 \quad \frac{Zr(\beta \cdot R)}{Dr(R)} = 1 \quad |dZr[\beta \cdot (Ra)]| = 0$$

Moment całkowity:

$$C := \pi \cdot p \cdot l \quad r := R$$

$$Te := -v_\alpha \delta \cdot r \cdot C \cdot p \delta \cdot \text{Im}(D(r) \cdot \overline{dD(r)} + Dr(r) \cdot \overline{dDr(r)} + D(r) \cdot \overline{dDr(r)} \cdot e^{i\kappa} + Dr(r) \cdot \overline{dD(r)} \cdot e^{-i\kappa})$$

Moment Lorentza:

$$Te_{Cu} := -C \cdot s \cdot i \cdot \gamma \cdot \int_{Ra}^R [(|Z(\beta \cdot r)|)^2 + (|Zr(\beta \cdot r)|)^2 + 2 \cdot \text{Re}(Z(\beta \cdot r) \cdot \overline{Zr(\beta \cdot r)} \cdot e^{i\kappa})] \cdot r \, dr$$

Błąd ΔTe :

$$\Delta Te := \Delta v \cdot C \cdot \int_{Ra}^R \text{Im}[\beta \cdot (Z(\beta \cdot r) \cdot \overline{dZ(\beta \cdot r)} + Zr(\beta \cdot r) \cdot \overline{dZr(\beta \cdot r)} + Z(\beta \cdot r) \cdot \overline{dZr(\beta \cdot r)} \cdot e^{i\kappa} + Zr(\beta \cdot r) \cdot \overline{dZ(\beta \cdot r)} \cdot e^{-i\kappa})] \, dr$$

Udziały procentowe momentów:

$$\frac{Te}{Te_{Cu}} \cdot 100 = 100 \quad \% \quad \frac{\Delta Te}{Te_{Cu}} \cdot 100 = 10.941 \quad \% \quad \frac{Te + \Delta Te}{Te_{Cu}} \cdot 100 = 110.941 \quad \%$$

Bilans mocy pola od pr. stojana - wektor Poyntinga, moc cieplna, energia

$$Er := \frac{v_r}{2} \cdot l \cdot \int_{Ra}^R \left(\left| Z(\beta \cdot r) \cdot \frac{p}{r} \right| \right)^2 \cdot r \, dr \quad E_\alpha := \frac{v_\alpha}{2} \cdot l \cdot \int_{Ra}^R (|\beta \cdot dZ(\beta \cdot r)|)^2 \cdot r \, dr \quad Sc := v_\alpha \delta \cdot s \cdot l \cdot R \cdot D(R) \cdot p \delta \cdot \overline{dD(R)}$$

$$Sc = 5.513 + 5.97i \quad Q := 2 \cdot |s| \cdot (E_\alpha + Er) \quad Q = 5.97 \quad P := (|s|)^2 \cdot \gamma \cdot l \cdot \int_{Ra}^R (|Z(\beta \cdot r)|)^2 \cdot r \, dr$$

$$P = 5.513$$

$$\frac{P + iQ}{Sc} = 1.00000$$

Rys.7.10. Obliczenie momentu sił w przypadku $v_\alpha > v_r$

Fig.7.10. Electromagnetic torque calculation in the case $v_\alpha > v_r$

W rozdziale siódmym przeanalizowano możliwość wykorzystania różnicowego tensora energii dla potrzeb obliczeń momentu sił metodą prądów magnetyzacji. Przedstawiono stosowne przykłady obliczeniowe.

Poddano analizie rezultaty obliczeń momentu sił otrzymywane przy wykorzystaniu metody tensora Maxwella i sił Lorentza w przypadku występowania wybranych anizotropii środowiska. W środowiskach izotropowych oraz anizotropowych o diagonalnej macierzy reluktywności moment całkowity jest równy momentowi sił Lorentza. Zwrócono uwagę, iż w środowiskach anizotropowych o niesymetrycznej macierzy reluktywności właściwość ta nie musi być spełniona.

Szczegółowe obliczenia przeprowadzono dla maszyny indukcyjnej o litym, przewodzącym i anizotropowym magnetycznie wirniku.

8. MASZYNA INDUKCYJNA O NIESYMETRYCZNYM I EKSCENTRYCZNIE WIRUJĄCYM WIRNIKU

W rozdziale ósmym poddano analizie maszynę indukcyjną o litym, przewodzącym i ekscentrycznie wirującym wirniku. W maszynie indukcyjnej z wirnikiem kubkowym powstaje moment Lorentza oraz moment permeancyjny. Oba momenty - odmiennie niż w maszynie synchronicznej - przeciwdziałają sobie. Moment środowiskowy pozwala na podanie efektywnego numerycznie algorytmu określania strat mocy czynnej w wirniku maszyny. Dodatkowo, dokonano również oceny poziomu hałasu magnetycznego powstającego w wyniku działania sił promieniowych.

Moment środowiskowy, jako uzależniony od pochodnej cząstkowej reluktywności magnetycznej po kącie - powstaje w przypadku, gdy wirnik nie jest cylindryczny oraz również wtedy, gdy wiruje on ekscentrycznie. Ekscentryczność położenia wirnika może się pojawić jako efekt szeregu przyczyn. Może to być niedoskonałość wykonania maszyny wirującej. Wynikać może ona z dopuszczalnej tolerancji wykonania mechanicznego. Niekorzystne dodanie się odpowiednich odchyłek wymiarów mieszczących się w granicach tolerancji może prowadzić do ujawniania się niesymetrii. Również stopniowe zużycie łożysk oraz efekty termiczne w litym wirniku [aS.20] mogą prowadzić do niecentrycznego ułożenia osi wirowania wirnika maszyny elektrycznej. Te, jak i inne przyczyny mogą prowadzić do niesymetrii maszyny, która w założeniach była projektowana jako symetryczna geometrycznie, o wirniku wirującym wokół własnej osi symetrii.

Wpływ opisanych wyżej przyczyn na wartość rozwijanego momentu elektromagnetycznego zostanie przeanalizowany przy następujących założeniach upraszczających:

- wewnętrzna powierzchnia stojana jest cylindryczna; umieszczone są na niej cienkie uzwojenia stojana tworzące przepływ postaci (8.2),
- wirnik maszyny jest cylindryczny, eliptyczny bądź ukształtowany wg „drugiej harmonicznej” przewodności magnetycznej szczeliny powietrznej (tabela 8.1, rys.8.2),
- oś symetrii stojana C_s może się nie pokrywać z osią symetrii wirnika C_r (np. może się pokrywać z jednym z ognisk eliptycznego przekroju wirnika F_r),
- oś symetrii stojana C_s pokrywa się z osią wirowania wirnika,
- przyjmuje się dwuwymiarowy rozkład pola elektromagnetycznego.

Analitycznie rozważone przykłady niesymetrii i ekscentryczności maszyny indukcyjnej zostały ujęte w tabeli 8.1. Dopuszcza się deformację powierzchni zewnętrznej wirnika, jak i jego obrót wokół osi nie pokrywającej się z jego osią symetrii (osie te pozostają jednak równoległe). Należy zwrócić uwagę, iż prezentowane rozważania mogą się również odnosić do maszyny synchronicznej przy pracy asynchronicznej.

Wartości momentów: całkowitego, Lorentza oraz permeancyjnego zostały obliczone dla wyróżnionych w tabeli 8.1 przypadków. Dla porównania pewne wymiary i parametry maszyn zostały wybrane jako jednakowe. Są nimi następujące wielkości charakteryzujące stan pracy oraz budowę maszyny indukcyjnej:

- amplituda przepływu uzwojeń stojana θ_s ,
- wewnętrzny promień obudowy stojana $R_g = R + g$,
- zewnętrzny promień ferromagnetycznej części wirnika $R_a = R - a$,
- reluktywności anizotropowej warstwy wirnika ν_r, ν_α , oraz jej przewodność γ ,
- najmniejsza grubość szczeliny powietrznej wynosi g , co oznacza, iż największy promień opisujący powierzchnię zewnętrzną wirnika $r_o = r(\alpha)$ wynosi:

$$r_{\max} = R,$$

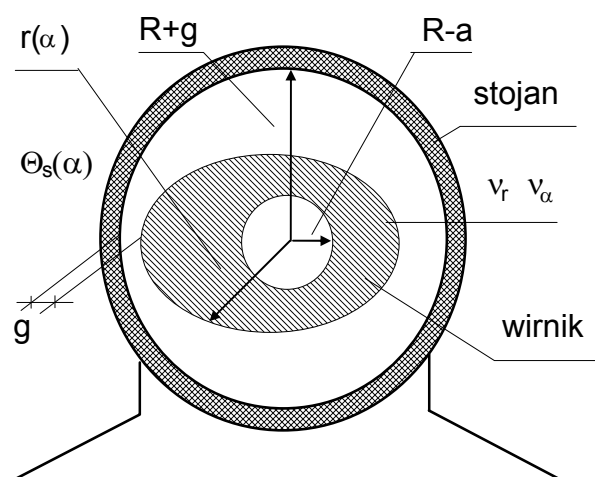
- największa grubość szczeliny powietrznej wynosi $3 \cdot g$, co prowadzi z kolei do najmniejszego promienia $r(\alpha)$ opisującego powierzchnię zewnętrzną wirnika:

$$r_{\min} = R_g - 3g = R - 2g,$$

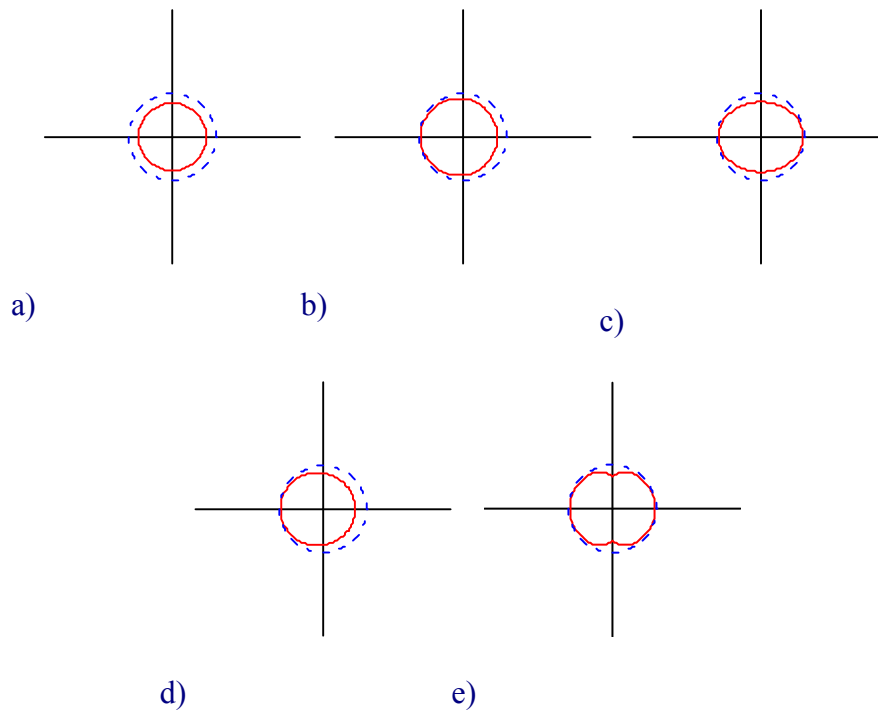
- współczynniki d, e_0, e, a_2 (tabela 8.1) zostały tak dobrane, aby funkcja $r(\alpha)$ opisująca powierzchnię zewnętrzną wirnika zawierała się w przedziale $[R, R - 2g]$ dla $\alpha \in [0, 2\pi]$.

Dla porównania założono, iż w maszynie o cylindrycznym wirniku promień wirnika wynosi:

$$r(\alpha) = 0.5 \cdot (r_{\min} + r_{\max}) = R - g.$$



Rys.8.1. Maszyna indukcyjna o ekscentrycznie wirującym i niesymetrycznym wirniku
Fig.8.1. Induction machine with eccentrically rotating and asymmetrical rotor



Rys.8.2. Przykładowe kształty i ułożenie wirnika wewnątrz obudowy stojan (linia przerywana):
a) wirnik cylindryczny - przypadek 1c, b) ekscentrycznie ułożony cylindryczny wirnik - przypadek 2c, c) wirnik eliptyczny - przypadek 1e, d) ekscentrycznie położony eliptyczny wirnik - przypadek 2e, e) wirnik wyprofilowany, tak aby szczelina powietrzna miała przewodność magnetyczną o składowej stałej i drugiej harmonicznej przestrzennej - przypadek 1h

Fig.8.2. The exemplary rotors inside stator frame (the dashed circle): a) circular rotor - the case 1c, b) eccentrically displaced circular rotor - the case 2c, c) elliptical rotor - the case 1e, d) eccentrically displaced elliptical rotor - the case 2e, e) 'second harmonic permeance - shaped' rotor - the case 1h

Tabela 8.1

Przykłady niesymetrii i ekscentryczności położenia wirnika

	1. pokrywające się osie symetrii stojana i wirnika	2. przemieszczone osie symetrii stojana i wirnika
wirnik cylindryczny	przypadek 1c: $C_s \equiv C_r$, $r(\alpha) = R = \text{const}$,	przypadek 2c: $C_s \neq C_r$, $r(\alpha) = R_o \sqrt{1 - d^2 \sin^2 \varphi} - R_o d \cos \varphi$, w przybliżeniu ($d^4 \approx 0$): $r(\alpha) = R_o (1 - d \cos \varphi - \frac{1}{2} d^2 \sin^2 \varphi)$, $R_o = R(1 + d)^{-1}$,
wirnik eliptyczny	przypadek 1e: $C_s \equiv C_r$, $r(\alpha) = \frac{R \sqrt{1 - e_o^2}}{\sqrt{1 - e_o^2 \cos^2 \varphi}}$, w przybliżeniu ($e_o^4 \approx 0$): $r(\alpha) = R(1 - \frac{1}{4} e_o^2 + \frac{1}{4} e_o^2 \cos 2\varphi)$.	przypadek 2e: $C_s \neq C_r$, $C_s \equiv F_r$, $r(\alpha) = \frac{R(1 - e)}{1 + e \cos \varphi}$, w przybliżeniu ($e^2 \approx 0$): $r(\alpha) = R(1 - e - e \cos(\varphi))$.
wirnik wyprofilowany wg drugiej harmonicznej przewodności szczeliny $\lambda = (v_o g)^{-1}$ $g = g(\alpha)$ $g = R_g - r(\alpha)$	przypadek 1h: $C_s \equiv C_r$, $r(\alpha) = R_g - \frac{g(1 + a_2)}{1 + a_2 \cos(\varphi)}$, $R_g = R + g$, w przybliżeniu ($a_2^2 \approx 0$): $r(\alpha) = R'(1 + b \cos(\varphi))$, $R' = R(1 + b)^{-1} = R - g a_2$, $b = g a_2 (R - g a_2)^{-1}$	

W tabeli 8.1 oznaczono: $\varphi = \Omega_m t - k\alpha + \Delta\gamma$, k - liczba całkowita (np. $k=2$), $\Delta\gamma$ - kąt przesunięcia amplitudy przepływu stojana względem ustalonego punktu wirnika.

8.1. OBLICZANIE MOMENTU ELEKTROMAGNETYCZNEGO MASZYN O NIESYMETRYCZNYM WIRNIKU

Analiza dwuwymiarowa rozkładu pola elektromagnetycznego jest prowadzona przy wykorzystaniu metody uzmienniania stałych. Mianowicie, w przypadku 1c amplitudy składowych indukcji magnetycznej nie zależą od kąta α . Wynika to z założenia cylindrycz-

nego ukształtowania powierzchni wirnika i jego symetrycznego mocowania. W innych wyróżnionych przypadkach, na skutek niesymetrii wirnika, pole magnetyczne w maszynie nie posiada symetrii kołowej. Tę deformację pola magnetycznego - przy niedużej niesymetrii wirnika - można uwzględnić dopuszczając zmienność amplitud składowych pola magnetycznego.

Dokładność otrzymywanych obliczeń jest potwierdzana poprzez:

- podstawienie otrzymanych rozwiązań do równań wyjściowych,
- sprawdzenie spełnienia warunków brzegowych oraz
- ocenę zupełności rozkładu momentu elektromagnetycznego na dwa wyróżnione momenty:

$$\delta_T = \frac{T_{e,Cu} + T_{e,Fe}}{T_e}. \quad (8.1)$$

Teoretycznie, wartość powyżej zdefiniowanego wskaźnika δ_T jest równa jedności.

Dane analizowanej maszyny elektrycznej przedstawiono bezpośrednio przed prezentacją rezultatów analiz (tabele 8.2 - 8.4).

Wartości momentów sił określa się na podstawie znajomości rozkładu pola magnetycznego. Zakładając wymuszenie przepływu stojana o rozkładzie przestrzennym ($h = 6c+1$, $c = 0, \pm 1, \dots$, $\Delta\alpha_h = 0, \pi$ dla przebiegów antysymetrycznych):

$$\Theta(t, \alpha) = \sum_{c=0, \pm 1, \pm 2, \dots} \theta_h \sin(2\pi f t - p h \alpha + \Delta\alpha_h) \quad (8.2)$$

oraz uwzględniając założoną uprzednio strukturę maszyny indukcyjnej można natężenie pola magnetycznego w obszarze wirnika i szczeliny powietrznej maszyny wyrazić następująco:

$$\vec{H} = v_r \vec{B}_r + v_\alpha \vec{B}_\alpha = \vec{i}_r \frac{v_r}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \vec{i}_\alpha v_\alpha \frac{\partial A_z}{\partial r}. \quad (8.3a)$$

Pomijając prąd przesunięcia - z uwagi na dostatecznie niską częstotliwość prądów stojana - można zapisać:

$$\text{rot}(\vec{H}) = \gamma \vec{E}_z = -\gamma \dot{A}_z. \quad (8.3b)$$

Równania (8.3a) oraz (8.3b) prowadzą, analogicznie jak pokazano w rozdziale 7, do równania różniczkowego dla magnetycznego potencjału wektorowego o postaci:

$$\frac{v_\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_h}{\partial r} \right) + \frac{v_r}{r^2} \frac{\partial^2 A_{ah}}{\partial \alpha^2} = i \gamma \omega_h A_h, \quad (8.4)$$

gdzie:

$$\omega_h = 2\pi \left(\frac{f_s}{p} - n \right) \text{ jest pulsacją prądów wirnika.}$$

Równanie (8.4), po dokonaniu separacji zmiennych i analogicznych przekształceniach jak w rozdziale 7 prowadzi do poniższego rozwiązania w obszarze wirnika:

$$\mathbf{A}(r, \alpha) = \sum_{c=0, \pm 1, \pm 2, \dots} \mathbf{R}_h(r) \mathbf{S}_h(\alpha). \quad (8.5)$$

Funkcje separowane są postaci:

$$R_h(r) = a_h I_{pB}(\beta_h r) + b_h K_{pB}(\beta_h r), \quad (8.6a)$$

$$S_h(\alpha) = c_h \exp(-jhp\alpha), \quad (8.6b)$$

gdzie a_h , b_h oraz c_h są stałymi.

Wartości stałych pojawiających się w rozwiązaniach określa się formułując warunki brzegowe na odpowiednich granicach środowisk.

- Uzwojenie stojana ułożone na ferromagnetycznym stojanie - szczelina powietrzna ($r = R + g = R_g$):

$$v_o B_{\delta\alpha} = -\frac{1}{R_g} \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} \rightarrow a_{\delta h} R_g^{ph} - b_{\delta h} R_g^{-ph} = \frac{\Theta_h}{v_o}. \quad (8.7)$$

- Szczelina powietrzna - warstwa przewodząca wirnika ($r = R$):

$$\mathbf{B}_{\delta n} = \mathbf{B}_{an} = \mathbf{B}_n, \quad \rightarrow$$

$$\mathbf{B}_n = \mathbf{B}_{\delta r} \cos(\delta) - \mathbf{B}_{\delta\alpha} \sin(\delta) = \mathbf{B}_{ar} \cos(\delta) - \mathbf{B}_{a\alpha} \sin(\delta) \quad (8.8)$$

$$\mathbf{H}_{\delta t} = \mathbf{H}_{at} = \mathbf{H}_t, \quad \rightarrow$$

$$\mathbf{H}_t = v_o \mathbf{B}_{\delta r} \sin(\delta) + v_o \mathbf{B}_{\delta\alpha} \cos(\delta) = v_r \mathbf{B}_{ar} \sin(\delta) + v_\alpha \mathbf{B}_{a\alpha} \cos(\delta). \quad (8.9)$$

- Warstwa przewodząca wirnika - ferromagnetyczny rdzeń wirnika:

($r = R - a = R_a < r(\alpha)$ dla $\alpha \in [0, 2\pi]$)

$$v_{\alpha\alpha} \mathbf{B}_{a\alpha} = 0 \rightarrow a_{ah} I'_{pB}(\beta_h R_a) + b_{ah} K'_{pB}(\beta_h R_a) = 0. \quad (8.10)$$

Powyższe równania (8.7) - (8.10) określają stałe pojawiające się w rozwiązaniach (8.5) oraz (8.6a,b):

$$a_{ah}(\alpha) = \Theta_h v_o^{-1} \{U(\alpha) R_g^{ph} - W(\alpha) R_g^{-ph}\}^{-1}, \quad S_h = -\frac{I'_{pB}(\beta_h R_a)}{K'_{pB}(\beta_h R_a)},$$

$$\delta = \delta(\alpha) = \arctan\left(\frac{dr_o}{r_o}\right), \quad a_{\delta h} = a_{ah} U_h(\alpha), \quad b_{\delta h} = a_{ah} W_h(\alpha), \quad b_{ah} = -a_{ah} S_h,$$

$$U_h(\alpha) = \frac{\mathbf{B}_{nah} Dd_h(\delta, r_o) - \mathbf{H}_{tah} Bb_h(\delta, r_o)}{A_h(\delta, r_o) Dd_h(\delta, r_o) - Bb_h(\delta, r_o) C_h(\delta, r_o)},$$

$$W_h(\alpha) = \frac{\mathbf{H}_{tah} A_h(\delta, r_o) - \mathbf{B}_{nah} C_h(\delta, r_o)}{A_h(\delta, r_o) Dd_h(\delta, r_o) - Bb_h(\delta, r_o) C_h(\delta, r_o)},$$

$$A_h(\delta, r) = -iph r^{ph-1} \cos(\delta) + ph r^{ph-1} \sin(\delta),$$

$$Bb_h(\delta, r) = -iph r^{-ph-1} \cos(\delta) - ph r^{-ph-1} \sin(\delta),$$

$$C_h(\delta, r) = -iph v_{r\delta} r^{ph-1} \sin(\delta) - ph v_{\alpha\delta} r^{ph-1} \cos(\delta),$$

$$Dd_h(\delta, r) = -iph v_{r\delta} r^{-ph-1} \sin(\delta) + ph v_{\alpha\delta} r^{-ph-1} \cos(\delta),$$

$$\mathbf{B}_{nah}(\alpha) = -\frac{ph}{r_o} F(r) \cos(\delta) + \beta_h dF(r) \sin(\delta), \quad \mathbf{H}_{tah}(\alpha) = -\frac{v_r ph}{r_o} F(r) \sin(\delta) - v_\alpha \beta_h dF(r) \cos(\delta),$$

gdzie dla uproszczenia oznaczono:

$$\begin{aligned} F(r) &= I_{pB}(\beta_h r) - SK_{pB}(\beta_h r), \quad dF(r) = I'_{pB}(\beta_h r) - SK'_{pB}(\beta_h r), \\ D(\alpha, r) &= a_{\delta h}(\alpha)r^{ph} + b_{\delta h}(\alpha)r^{-ph}, \quad Z(\alpha, \beta r) = a_{ah}(\alpha)I_{pB}(\beta_h r) + b_{ah}(\alpha)K_{pB}(\beta_h r), \\ dD(\alpha, r) &= a_{\delta h}(\alpha)r^{ph-1} - b_{\delta h}(\alpha)r^{-ph-1}, \quad dZ(\alpha, \beta r) = a_{ah}(\alpha)I'_{pB}(\beta_h r) + b_{ah}(\alpha)K'_{pB}(\beta_h r), \\ \mathbf{B}_{nah} &= \mathbf{B}_{nh} a_{ah}^{-1}, \quad \mathbf{H}_{tah} = \mathbf{H}_{th} a_{ah}^{-1}. \end{aligned}$$

Znajomość rozkładu pola elektromagnetycznego w obszarze szczeliny i wirnika maszyny pozwala na określenie momentu elektromagnetycznego oraz jego dwóch momentów składowych; i tak całkowity moment elektromagnetyczny wynosi:

$$T_e = v_o R_g \int_{\partial V} B_\alpha B_r dS, \quad (8.11)$$

gdzie R_g jest promieniem powierzchni usytuowanej w szczelinie powietrznej maszyny.

Moment Lorentza opisuje całka:

$$T_{eCu} = \int_V r j_z B_r dV, \quad (8.12)$$

zaś moment permeancyjny:

$$T_{e,Fe} = \frac{1}{2} \int_V (B_r^2 \frac{\partial v_r}{\partial \alpha} + B_\alpha^2 \frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha}) dV. \quad (8.13)$$

Przestrzenny rozkład reluktywności magnetycznej w pobliżu granicy środowisk szczelina powietrzna - wirnik jest opisany poprzez funkcję skoku jednostkowego Heaviside'a:

$$v_r(r, \alpha) = v_r + (v_{r\delta} - v_r) 1\{\Delta r\}, \quad (8.14)$$

gdzie $r(\alpha)$ opisuje kształt zewnętrznej powierzchni wirnika, $\Delta r = r - r(\alpha)$, $v_r(r, \alpha)$ jest funkcją reluktywności magnetycznej (indeks 'r' oznacza składową promieniową), $v_{r\delta}$ jest reluktywnością w kierunku radialnym szczeliny powietrznej (rozdział 7).

Analogiczna zależność odnosi się do reluktywności magnetycznej w kierunku stycznym (zamiast indeksu 'r' pojawia się indeks 'α'). Pochodna cząstkowa reluktywności magnetycznej po kącie α wynosi:

$$\frac{\partial v_r}{\partial \alpha} = \frac{\partial v_r}{\partial \Delta r} \frac{\partial \{r - r_o(\alpha)\}}{\partial \alpha} = - \frac{\partial v_r}{\partial \Delta r} \frac{dr_o(\alpha)}{d\alpha}. \quad (8.15)$$

W podobny sposób można przedstawić pochodną reluktywności w kierunku stycznym.

Całka objętościowa w równaniu (8.13) może być przedstawiona jako iloczyn całki po powierzchni zewnętrznej wirnika $\int_S (\cdot) dS$ oraz całki w kierunku radialnym $\int_R (\cdot) dr$, a zatem:

$$T_{e,Fe} = -\frac{1}{2} \int_S \int_R (B_r^2 \frac{\partial v_r}{\partial \Delta r} \frac{\partial r_o(\alpha)}{\partial \alpha} + B_\alpha^2 \frac{\partial v_\alpha}{\partial \Delta r} \frac{\partial r_o(\alpha)}{\partial \alpha}) dr dS. \quad (8.16)$$

Moment środowiskowy - po wykonaniu całkowania w kierunku radialnym - można wyrazić następująco:

$$T_{e,Fe} = -\frac{1}{2} \int_S \left\{ \int_{(v_r, v_\alpha)}^{(v_{r\delta}, v_{\alpha\delta})} (B_r^2 dv_r + B_\alpha^2 dv_\alpha) \right\} \frac{dr_0}{d\alpha} dS. \quad (8.17)$$

Wyrażenie pod całką liniową, ujęte w nawias zwykły, stanowi różniczkę zupełną dwóch zmiennych, którymi są reluktywności magnetyczne w odpowiednich osiach:

$$dF(v_r, v_\alpha) = B_r^2 dv_r + B_\alpha^2 dv_\alpha. \quad (8.18)$$

Wartość powyższej całki zostanie określona przy wykorzystaniu faktu zupełności różniczki (8.18). Mianowicie, różniczka jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek [L.6, L.7] :

$$\frac{\partial B_r^2}{\partial v_\alpha} = \frac{\partial B_\alpha^2}{\partial v_r}. \quad (8.19)$$

Warunek ten jest spełniony. Mianowicie, składowe indukcji pola magnetycznego (dla wybranej harmonicznej) jako opisane zależnościami:

$$B_r = \frac{cB_n y + sH_t}{\Delta(x, y)}, \quad B_\alpha = \frac{cH_t - sB_n x}{\Delta(x, y)}, \quad (8.20)$$

pozwalają zapisać warunek (8.19) następująco:

$$B_r \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{cB_n y + sH_t}{\Delta(x, y)} \right\} = B_\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{cH_t - sB_n x}{\Delta(x, y)} \right\}. \quad (8.21)$$

Dla uproszczenia oznaczono: $c = \cos(\delta)$, $s = \sin(\delta)$, $x = v_r$, $y = v_\alpha$, $\Delta = \Delta(x, y) = s^2 x^2 + c^2 y^2$. Obliczenie pochodnych cząstkowych prowadzi do równości:

$$\begin{aligned} (cB_n v_\alpha + sH_t) \{cB_n \Delta - (cB_n v_\alpha + sH_t) c^2\} = \\ = (cH_t - sB_n v_r) \{-sB_n \Delta - (cH_t - sB_n v_r) s^2\}, \end{aligned} \quad (8.22)$$

która jest spełniona dla dowolnych wartości H_t , B_n , v_r , v_α , co uzasadnia (8.19).

Spełnienie warunku (8.19) pozwala stwierdzić, iż całka (8.17) nie zależy od kształtu drogi, która łączy punkt początkowy (v_r, v_α) i końcowy $(v_{r\delta}, v_{\alpha\delta})$ drogi całkowania w całce:

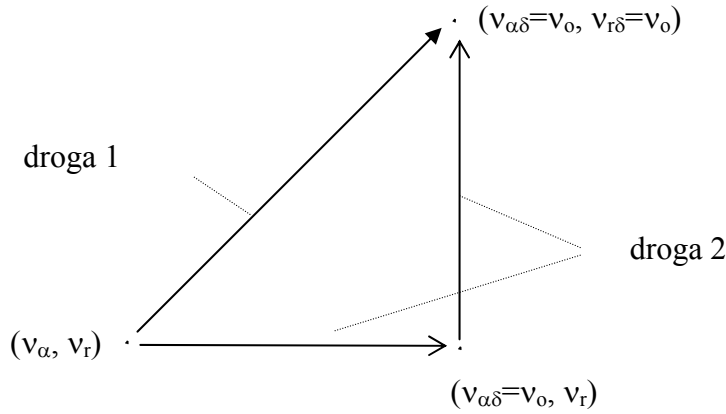
$$I = \int_{(v_r, v_\alpha)}^{(v_{r\delta}, v_{\alpha\delta})} (B_r^2 dv_r + B_\alpha^2 dv_\alpha) = \int_{(v_r, v_\alpha)}^{(v_{r\delta}, v_{\alpha\delta})} dF(v_r, v_\alpha). \quad (8.23)$$

Wartości całek:

$$I_1 = \int_{(v_r, v_\alpha)}^{(v_{r\delta}, v_{\alpha\delta})} B_r^2 dv_r, \quad I_2 = \int_{(v_r, v_\alpha)}^{(v_{r\delta}, v_{\alpha\delta})} B_\alpha^2 dv_\alpha, \quad (8.24)$$

wynoszą [G.3]:

$$I_1 = -\frac{(cB_n y + sH_t)^2}{s^2 (s^2 x + c^2 y)} \Big|_{(v_r, v_\alpha)}^{(v_{r\delta}, v_{\alpha\delta})}, \quad I_2 = -\frac{(cH_t - sB_n x)^2}{c^2 (s^2 x + c^2 y)} \Big|_{(v_r, v_\alpha)}^{(v_{r\delta}, v_{\alpha\delta})}. \quad (8.25)$$



Rys.8.3. Drogi na płaszczyźnie (v_α, v_r) wykorzystywane do obliczenia momentu permeacyjnego
 Fig.8.3. The paths in the (v_α, v_r) co-ordinate system the for the permeantive torque calculation

Wybierając drogę 1 (rys.8.3) przy parametryzacji $t \in [0,1]$:

$$v_\alpha(t) = (v_\alpha - v_o)t + v_o, \quad v_r(t) = (v_r - v_o)t + v_o,$$

można moment permeacyjny (dla harmonicznej o indeksie h) obliczyć na podstawie zależności:

$$T_{e,Fe} = -\frac{1}{2} l \Delta v_r \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{|(\Delta v_\alpha t + v_o) \cos(\delta) B_n(\alpha) + \sin(\delta) H_t(\alpha)|^2}{(v_\alpha - v_r)t \cos^2(\delta) + (\Delta v_r t + v_o)^2} dt \frac{dr_o}{d\alpha} r_o d\alpha -$$

$$-\frac{1}{2} l \Delta v_\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{|H_t(\alpha) \cos(\delta) - (\Delta v_r t + v_o) B_n(\alpha) \sin(\delta)|^2}{(v_\alpha - v_r)t \cos^2(\delta) + (\Delta v_r t + v_o)^2} dt \frac{dr_o}{d\alpha} r_o d\alpha,$$

która z uwagi na występowanie całek podwójnych nie jest numerycznie korzystna.

Droga 2, która z punktu widzenia obliczeń jest korzystniejsza od drogi 1 (rys.8.3), pozwala określić całkę (8.23) (dla harmonicznej o indeksie h) następująco:

$$I_h(\alpha) = I_{1h}(\alpha) + I_{2h}(\alpha), \quad (8.26)$$

gdzie:

$$I_{1h}(\alpha) = \left\{ \frac{1}{v_r \sin^2(\delta) + v_\alpha \cos^2(\delta)} - \frac{1}{v_{r\delta} \sin^2(\delta) + v_\alpha \cos^2(\delta)} \right\} \{v_\alpha \operatorname{ctg}(\delta) B_{nh}(\alpha) + H_{th}(\alpha)\}^2, \quad (8.27)$$

$$I_{2h}(\alpha) = \left\{ \frac{1}{v_{r\delta} \sin^2(\delta) + v_\alpha \cos^2(\delta)} - \frac{1}{v_{r\delta} \sin^2(\delta) + v_{\alpha\delta} \cos^2(\delta)} \right\} \{H_{th}(\alpha) - v_{r\delta} \operatorname{tg}(\delta) B_{nh}(\alpha)\}^2. \quad (8.28)$$

W szczególnym przypadku, gdy maszyna jest izotropowa magnetycznie: $v_r = v_\alpha = v$, $v_{r\delta} = v_{\alpha\delta} = v_o$, to równości (8.27), (8.28) przyjmują postać:

$$I_{1h}(\alpha) = \left\{ \frac{1}{v} - \frac{1}{v_o \sin^2(\delta) + v \cos^2(\delta)} \right\} \{v \operatorname{ctg}(\delta) B_{nh}(\alpha) + H_{th}(\alpha)\}^2, \quad (8.29)$$

$$I_{2h}(\alpha) = \left\{ \frac{1}{v_o \sin^2(\delta) + v \cos^2(\delta)} - \frac{1}{v_o} \right\} \{H_{th}(\alpha) - v_o \operatorname{tg}(\delta) B_{nh}(\alpha)\}^2, \quad (8.30)$$

a zatem:

$$I_h(\alpha) = I_{1h}(\alpha) + I_{2h}(\alpha) = \frac{v_o - v}{v_o v} H_{th}(\alpha)^2 + (v_o - v) B_{nh}(\alpha)^2. \quad (8.31)$$

Jeżeli wirnik maszyny asynchronicznej stanowi idealny ferromagnetyk $v_r = v_\alpha = v \rightarrow 0$, to:

$$I_h(\alpha) = v_o B_{nh}(\alpha)^2. \quad (8.32)$$

Moment środowiskowy można przedstawić jako całkę:

$$T_{e,Fe} = -\frac{1}{2} l \sum_h \int_0^{2\pi} (|I_{1h}(\alpha)| + |I_{2h}(\alpha)|) \frac{dr(\alpha)}{d\alpha} r(\alpha) d\alpha, \quad (8.33)$$

w której funkcje podcałkowe $I_{1h}(\alpha)$, $I_{2h}(\alpha)$ zawierają zespolone wartości składowych indukcji magnetycznych zgodnie z zależnościami (8.27), (8.28).

Całkowity moment elektromagnetyczny wynosi (rozdział 7):

$$T_e = -\frac{1}{2} v_o l R_g p \sum_h \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}[D_h(\alpha, R_g) \overline{D'_h(\alpha, R_g)}] d\alpha. \quad (8.34)$$

Natomiast moment sił Lorentza jest równy:

$$T_{e,Cu} = \frac{1}{2} l p \gamma \sum_h \omega_h \int_0^{2\pi} \int_{Ra}^r |Z(\alpha, \beta_h r)|^2 r dr d\alpha. \quad (8.35)$$

Powyższe zależności pozwalają na określenie wartości momentów sił dla dowolnego kształtu wirnika maszyny przy uwzględnieniu jego niesymetrii oraz ekscentryczności.

Określono również straty mocy w wirniku wirującej maszyny wynikające z przepływu prądów indukowanych na podstawie zależności:

$$P_{Cu} = \frac{1}{2} \sum_h \int_V \operatorname{Re}\{j_h \overline{E_h}\} dV = \frac{1}{2} \sum_h \gamma \omega_h^2 \int_V |A_h|^2 dV, \quad (8.36)$$

która po porównaniu z relacją:

$$T_{e,Cu} = \int_V r j B_r dV = \frac{1}{2} \int_V \operatorname{Re}\{j \frac{\partial \overline{A}}{\partial \alpha}\} dV = \frac{1}{2} \sum_h \omega_h \gamma p h \int_V |A_h|^2 dV, \quad (8.37)$$

proceedzi do efektywnej obliczeniowo zależności:

$$P_{Cu} = \sum_h P_{Cu,h} = \sum_h \omega_h \frac{T_{e,Cu,h}}{ph} = \sum_h \omega_h \frac{T_{eh} - T_{e,Fe,h}}{ph}, \quad (8.38)$$

w której występują wielkości wyrażone poprzez całki powierzchniowe.

Do szczegółowych analiz przyjęto silnik o następujących parametrach geometrycznych i materiałowych: $p = 1$, $l = 0.2$ m, $R = 0.1$ m, $a = 0.05$ m, $\gamma = 7 \cdot 10^5$ S/m, $g = 0.002$ m, $v_\alpha = 0.05 \cdot v_o$, $v_r = 0.067 \cdot v_o$. Amplitudy harmonicznego przepływu stojana wynoszą: $\theta_{s1} = 3.500$ A ($h = 1$, $c = 0$), $\theta_{s5} = 3.100$ A ($h = 5$, $c = -1$), $\theta_{s7} = 3.71,5$ A ($h = 7$, $c = 1$).

W tabelach 8.2, 8.3 oraz 8.4 przedstawiono rezultaty obliczeń momentów sił dla wybranych niesymetrii wirnika ujętych w tabeli 8.1. Zupełność rozkładu momentu elektromagnetycznego dla przedstawionych przypadków niesymetrii - zdefiniowana zależnością (8.1) - wynosi $\delta_T = 1 \pm 0.005$.

Na wykresach słupkowych (rys. 8.4, 8.5, 8.6) porównano wartości momentów, momentów permeancyjnych oraz strat mocy czynnej w wirniku dla różnych niesymetrii wirnika maszyny indukcyjnej. Procentowy udział momentu permeancyjnego w całkowitym momencie sił zawiera się w przedziale $\sim(-15 \div +15)\%$.

Wyniki obliczeń momentu elektromagnetycznego przedstawione w tabeli 8.2 graficznie zobrazowano na rysunku 8.4. Wyniki obliczeń udziału momentu permeancyjnego w całkowitym momencie maszyny przedstawiono w tabeli 8.3 i graficznie zobrazowano na rysunku 8.5. Natomiast wyniki obliczeń strat mocy przedstawione w tabeli 8.4 graficznie zobrazowano na rysunku 8.6.

Na rysunku 8.7 przedstawiono zmienność składowych indukcji pola magnetycznego w przypadku maszyny indukcyjnej 1e względem kąta położenia na obwodzie wirnika. Należy zwrócić uwagę, iż składowe te pozostają stałe względem kąta α w przypadku, gdy wirnik maszyny jest cylindryczny.

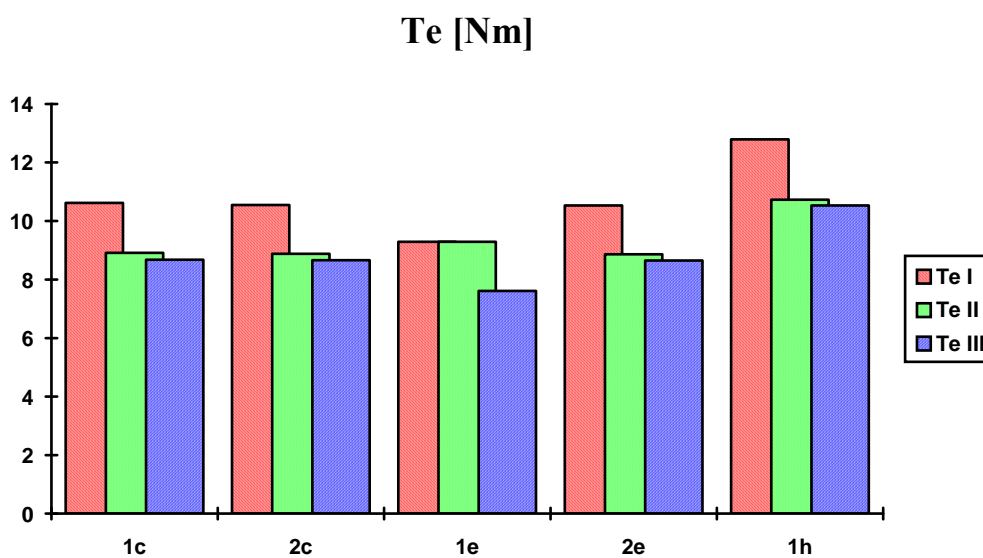
Na rysunku 8.8 przedstawiono zmienność składowej stycznej tensora $\sigma_{\alpha r}$ wzdłuż obwodu maszyny.

Dla maszyny o niesymetrycznym wirniku wyznaczono również charakterystyki mechaniczne (rys.8.9 - 8.12) oraz charakterystykę strat mocy czynnej (rys.8.13).

Tabela 8.2

Całkowity moment maszyny indukcyjnej

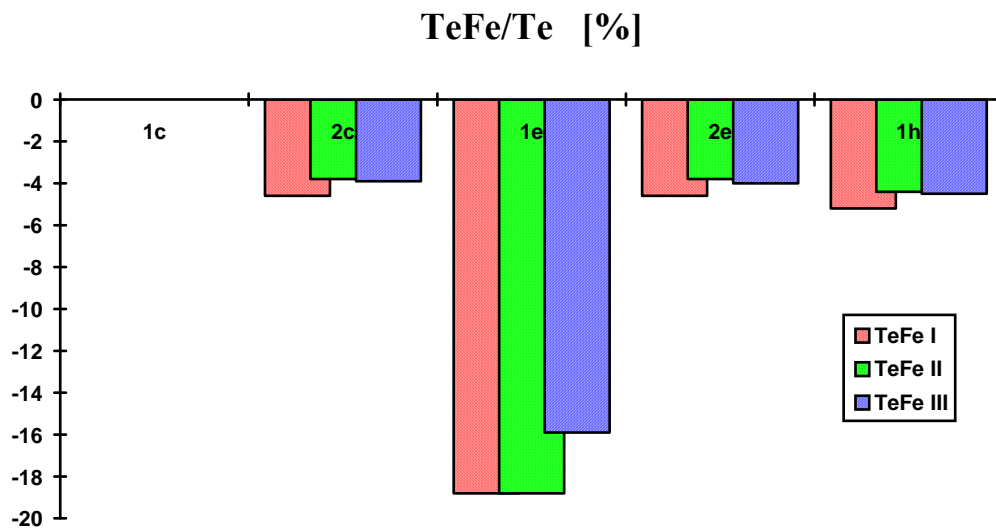
$\mathbf{T_e}$ [Nm]	I) wirnik anizotropowy $v_r < v_\alpha$ $\mathbf{T_e}$	II) wirnik izotropowy $v_r = v_\alpha$ $\mathbf{T_e}$	III) wirnik anizotropowy $v_r > v_\alpha$ $\mathbf{T_e}$
1c $r(\alpha) = R-g$	10.62	8.91	8.68
2c $d = 0.0204$	10.55	8.88	8.66
1e $e_o = 0.28$	9.29	9.29	7.61
2e $e = 0.0204$	10.53	8.86	8.65
1h $a_2 = 0.3334$	12.79	10.73	10.53



Rys.8.4. Wartości momentu całkowitego - porównanie
 Fig.8.4. The total electromagnetic torque - the comparison

Moment permeancyjny (w procentach momentu całkowitego)

$\frac{T_{e,Fe}}{T_e}$ [%]	I) wirnik anizotropowy $v_r < v_\alpha$ $T_{e,Fe}/T_e$	II) wirnik izotropowy $v_r = v_\alpha$ $T_{e,Fe}/T_e$	III) wirnik anizotropowy $v_r > v_\alpha$ $T_{e,Fe}/T_e$
1c	0,0	0,0	0,0
2c	- 4,6	- 3,8	- 3,9
1e	- 18,8	- 18,8	- 15,9
2e	- 4,6	- 3,8	- 4,0
1h	- 5,2	- 4,4	- 4,5



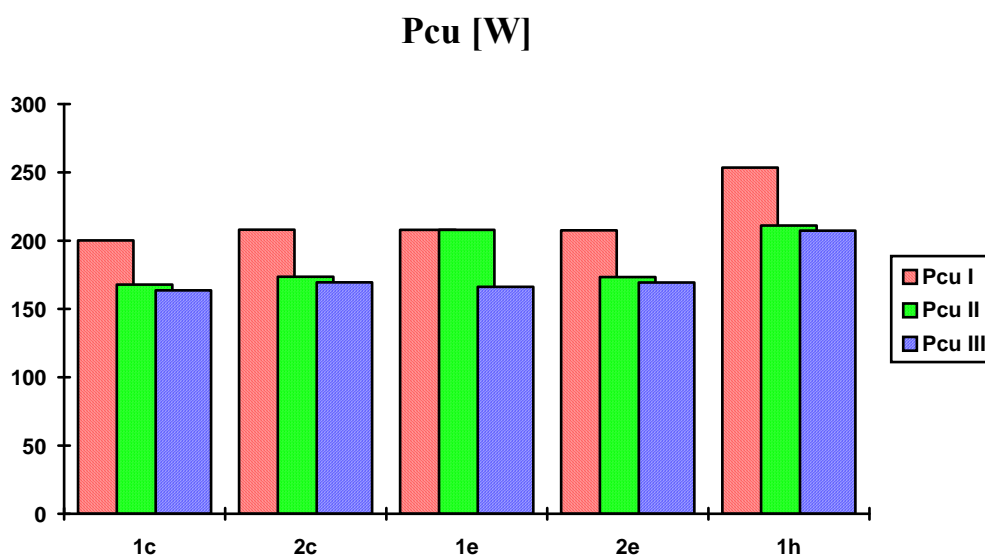
Rys.8.5. Porównanie wartości momentu permeancyjnego

Fig.8.5. The permeantive torque - the comparison

Tabela 8.4

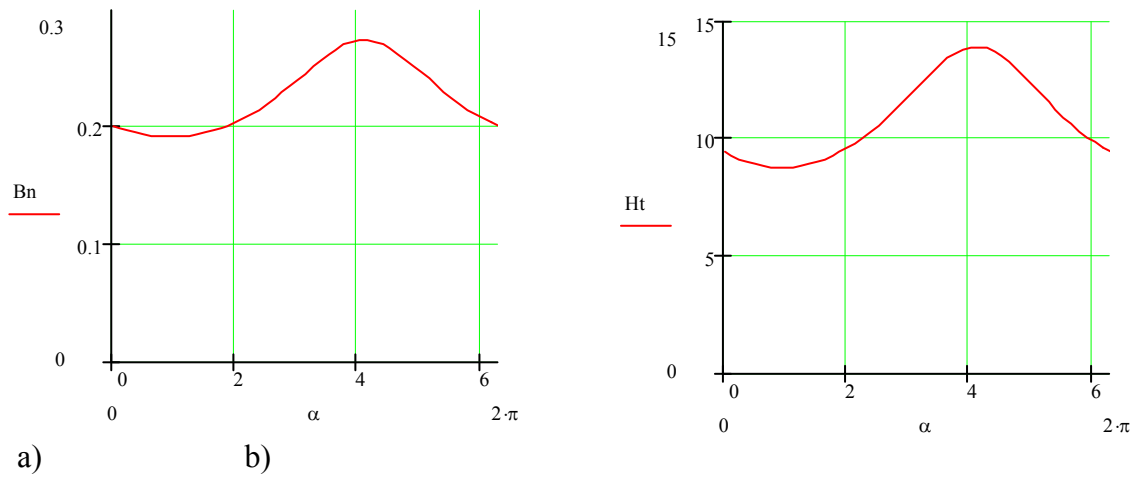
Straty mocy czynnej w wirniku maszyny

P_{cu} [W]	I) wirnik anizotropowy $v_r < v_\alpha$	II) wirnik izotropowy $v_r = v_\alpha$	III) wirnik anizotropowy $v_r > v_\alpha$
1c	200.2	167.9	163.6
2c	208.1	173.7	169.6
1e	208.0	208.0	166.3
2e	207.6	173.4	169.6
1h	253.6	211.2	207.4



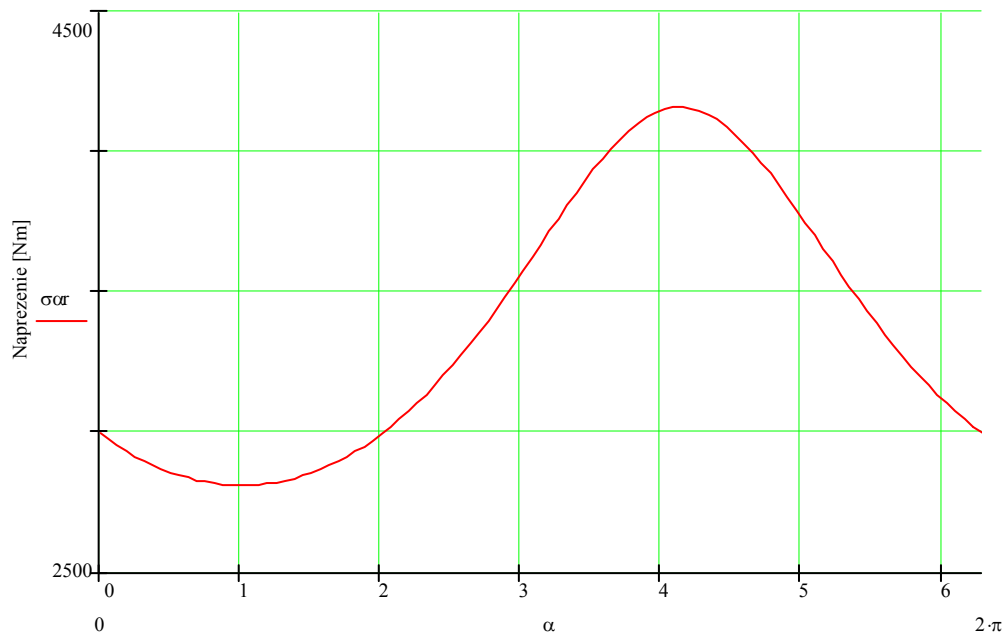
Rys.8.6. Porównanie wartości strat mocy

Fig.8.6. The eddy-current losses - the comparison



Rys.8.7. Amplitudy a) składowej normalnej indukcji [T], b) składowej stycznej natężenia pola magnetycznego [kA/m] do powierzchni wirnika w funkcji kąta α [rad]

Fig.8.7. The magnitude of a) the normal magnetic flux density [T], b) the tangential magnetic field strength [kA/m] versus position angle α [rad]



Rys.8.8. Zmienność tensora naprężeń σ_{or} [Nm] w szczelinie powietrznej maszyny o ekscentrycznym wirniku w funkcji kąta α [rad]

Fig.8.8. The quasitensor radial component σ_{or} [Nm] versus position angle α [rad] in the air-gap

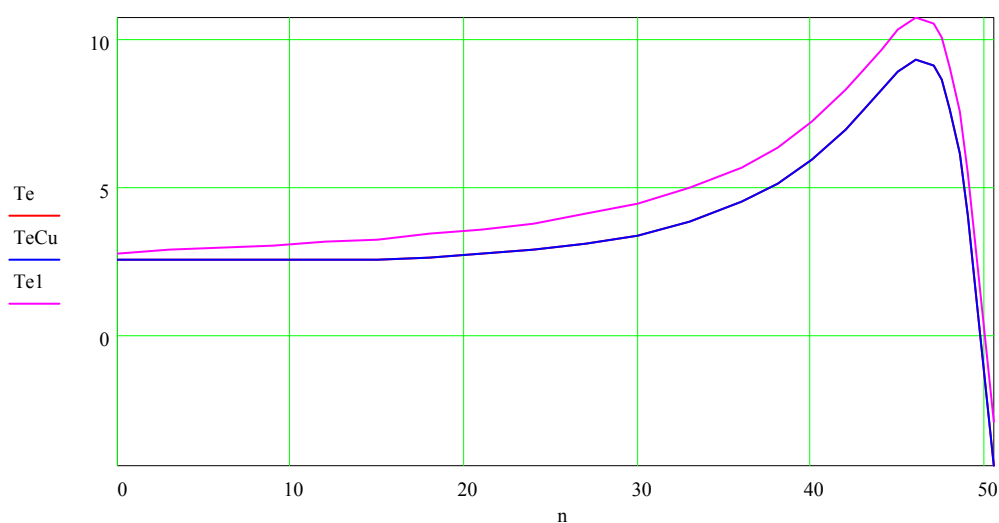
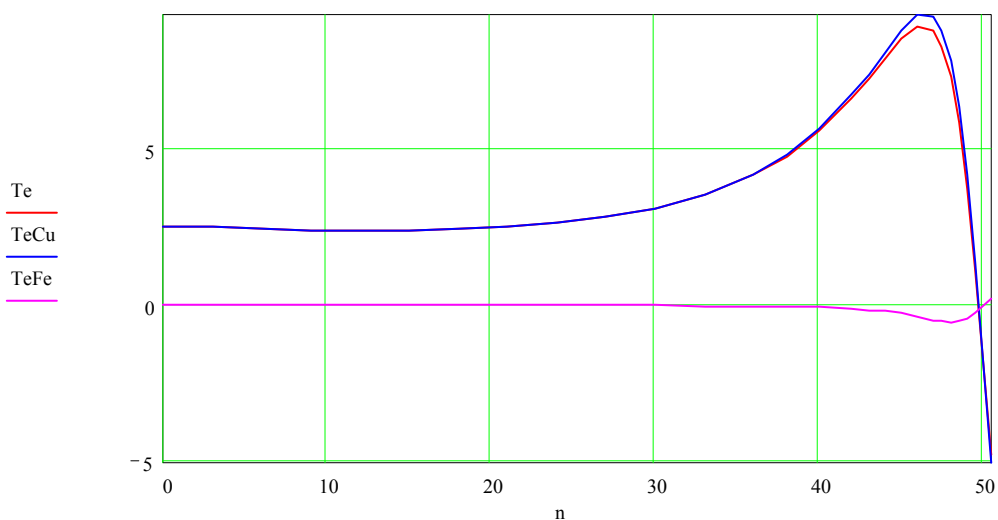


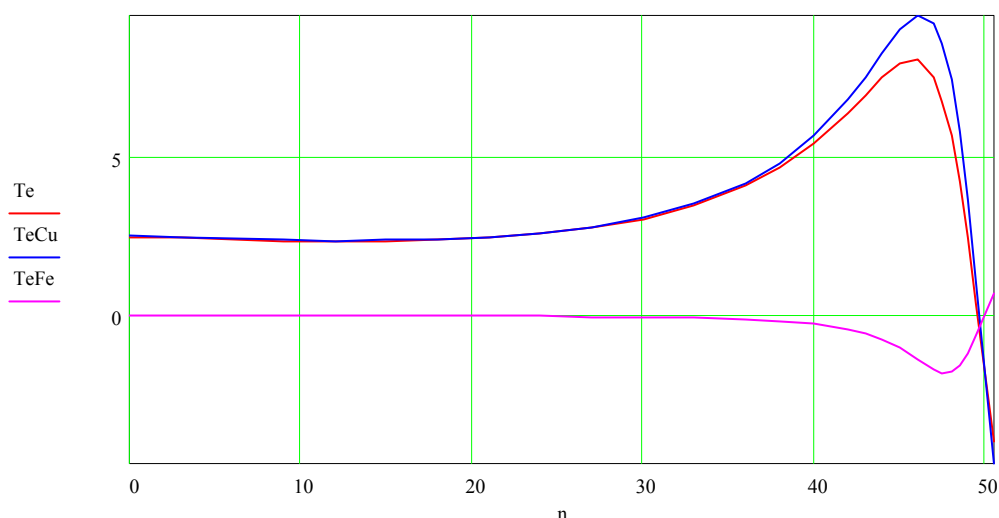
Fig. 8.9. Moment elektromagnetyczny i moment Lorentza ($T_e = T_{e,Cu}$) oraz moment sił wywołany pierwszą harmoniczną SMM stojana T_{e1} [Nm] w funkcji prędkości n [obr/s] dla wirnika symetrycznego (przypadek 1c)

Fig. 8.9. The total electromagnetic torque, the currents torque components ($T_e = T_{e,Cu}$) and torque component of stator mmf first harmonic T_{e1} [Nm] versus speed n [rps] for the symmetrical rotor (the case 1c)



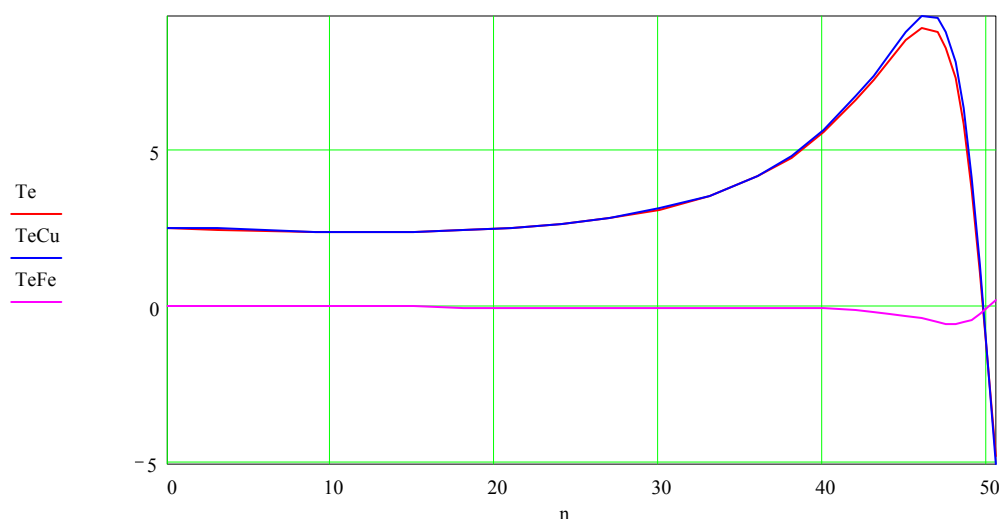
Rys. 8.10. Moment elektromagnetyczny i jego składniki: moment Lorentza i moment permeancyjny [Nm] w funkcji prędkości obrotowej n [obr/s] w przypadku 2c

Fig. 8.10. The total electromagnetic torque and its components: the currents torque and permeantive torque [Nm] versus speed n [rps] for the case 2c



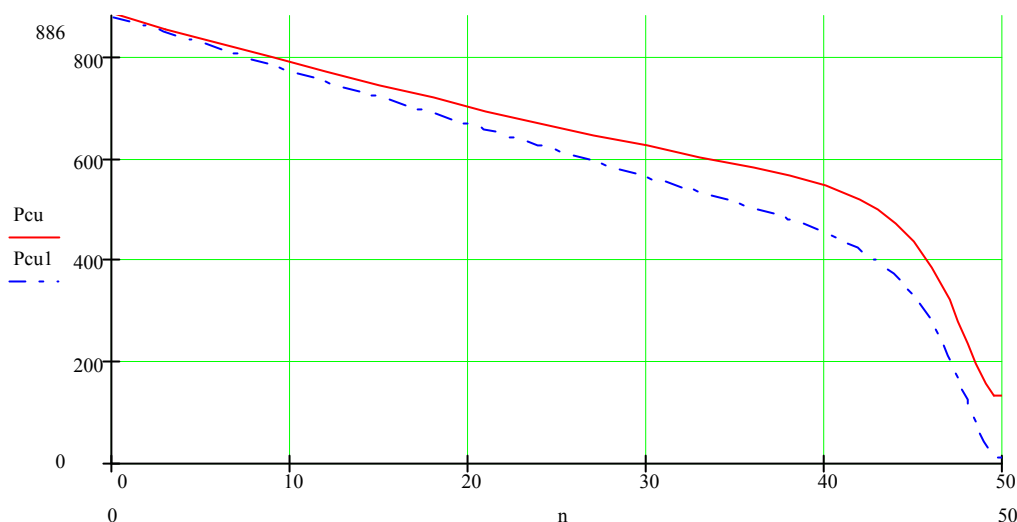
Rys. 8.11. Moment elektromagnetyczny i jego składniki: moment Lorentza i moment permeancyjny [Nm] w funkcji prędkości obrotowej n [obr/s] w przypadku 1e

Fig. 8.11. The total electromagnetic torque and its components: the currents torque and permeantive torque [Nm] versus speed n [rps] for the case 1e



Rys. 8.12. Moment elektromagnetyczny i jego składniki: moment Lorentza i moment permeancyjny [Nm] w funkcji prędkości obrotowej n [obr/s] w przypadku 2e

Fig. 8.12. The total electromagnetic torque and its components: the currents torque and permeantive torque [Nm] versus speed n [rps] for the case 2e



Rys. 8.13. Straty mocy czynnej [W] w funkcji prędkości obrotowej n [obr/s] dla eliptycznego i centralnie ułożyskowanego wirnika – przypadek 1e (linia przerywana odnosi się do harmonicznej głównej)

Fig. 8.13. The eddy current losses [W] versus speed n [rps] for the elliptical and centrally positioned rotor – the case 1e (the dashed line for the main mmf harmonic, only)

Przeprowadzone obliczenia analityczne pozwalają na ocenę wartości niepożądanego momentu permeancyjnego maszyny indukcyjnej powstającego wskutek niecyldrycznego ukształtowania wirnika bądź jego ekscentryczności. Porównanie otrzymanych rezultatów - dla różnych przypadków niesymetrii (przypadki 1e, 2e, 1c, 2c, 1h) - pozwala na wyciągnięcie następujących wniosków:

- 1) Moment permeancyjny maszyny indukcyjnej o litym wirniku przeciwdziała momentowi Lorentza. Jakkolwiek fakt ten nie musi prowadzić do zmniejszenia całkowitego momentu maszyny (przypadek 1h), to zawsze prowadzi do wzrostu strat mocy w wirniku maszyny (tabela 8.4, rys.8.6).
Należy podkreślić, iż w maszynie synchronicznej (rozdział 5) moment środowiskowy (permeancyjny) współdziała z momentem Lorentza.
- 2) Wyznaczenie wartości momentu permeancyjnego wymaga przeprowadzania całkowania tylko po brzegu obszaru obejmującego jednorodny wirnik dla maszyny. Obliczana wartość momentu środowiskowego pozwala na określenie momentu Lorentza $T_{e,Cu} = T_e - T_{e,Fe}$, który tylko celem potwierdzenia poprawności obliczeń był wyznaczany również przy wykorzystaniu całki objęściowej (8.35).

- 3) Bazując na otrzymanych wynikach można stwierdzić, iż największy moment permeancyjny pojawia się w przypadku, gdy wirnik jest eliptyczny i centralnie ułożony (przypadek 1e).
- 4) Anizotropia właściwości magnetycznych - przy danej niesymetrii wirnika - prowadzi do wzrostu momentu permeancyjnego, gdy $v_r < v_\alpha$.
- 5) Przedstawiona metoda analizy może zostać dołączona do listy metod prowadzących do określania niepożądanego składnika momentu sił maszyny indukcyjnej.
- 6) Wyróżniony moment sił (moment permeancyjny) pozwala na wyznaczenie strat mocy czynnej w litym wirniku maszyny indukcyjnej zgodnie z (8.38). Obliczenia prowadzone zgodnie z zależnością (8.38) wymagają obliczenia dwóch całek powierzchniowych, zamiast jednej całki objętościowej (8.36). Taki sposób wyznaczenia strat jest alternatywny w stosunku do metody Joule'a.

Maszyna indukcyjna o litym, niesymetrycznym wirniku

$l := 0.2$ $R := 0.1$ $a := 0.05$ $\theta_s := 3.5 \cdot 100$ $p := 1$ $k := 1$ $\gamma := 7 \cdot 10^5$
 $g := 0.002$ $\omega_r := 2 \cdot \pi \cdot 3.0$ $v_r := \frac{v_o}{20}$ $v_\alpha := \frac{v_o}{15}$ $v_r \delta := v_o$ $v_\alpha \delta := v_o$ $s := \omega_r \cdot i$
 $R_a := R - a$ $R_g := R + g$ $\Delta \gamma := 1.5 \cdot \pi$ $p_B := p \cdot \sqrt{\frac{v_r}{v_\alpha}}$ $p_\delta := p \cdot \sqrt{\frac{v_r \delta}{v_\alpha \delta}}$ $\beta := \sqrt{s \cdot \gamma \cdot v_\alpha}^{-1}$ $\Delta v_r := v_r - v_o$
 $\Delta v_\alpha := v_\alpha - v_o$

Wirnik cylindryczny $r(\alpha) := R - g$ $drr(\alpha) := 0$

Wirnik cylindryczny przesunięty $d := 0.0204$ $R_o := R \cdot (1 + d)^{-1}$

$r(\alpha) := R_o \cdot \left(1 - d \cdot \cos(-k \cdot \alpha + \Delta \gamma) - \frac{d^2}{2} \cdot \sin(-k \cdot \alpha + \Delta \gamma)^2 \right)$
 $dr(\alpha) := -k \cdot R_o \cdot \left(d \cdot \sin(-k \cdot \alpha + \Delta \gamma) - \frac{d^2}{2} \cdot \sin(-2 \cdot k \cdot \alpha + 2 \cdot \Delta \gamma) \right)$
 $r(\alpha) := R_o \cdot \left(\sqrt{1 - d^2 \cdot \sin(-k \cdot \alpha + \Delta \gamma)^2} - d \cdot \cos(-k \cdot \alpha + \Delta \gamma) \right)$
 $dr(\alpha) := R_o \cdot k \cdot \left(\frac{d^2 \cdot \sin(-2 \cdot k \cdot \alpha + 2 \cdot \Delta \gamma)}{2 \cdot \sqrt{1 - d^2 \cdot \sin(-k \cdot \alpha + \Delta \gamma)^2}} - d \cdot \sin(-k \cdot \alpha + \Delta \gamma) \right)$

Wirnik eliptyczny

$r(\alpha) := \frac{R \cdot \sqrt{1 - e o^2}}{\sqrt{1 - (e o \cdot \cos(-k \cdot \alpha + \Delta \gamma))^2}}$ $e o := 0.28$ $drr(\alpha) := \frac{-R \cdot \sqrt{1 - e o^2} \cdot e o^2 \cdot k \cdot \sin(-2 \cdot k \cdot \alpha + 2 \cdot \Delta \gamma)}{2 \cdot [1 - (e o \cdot \cos(-k \cdot \alpha + \Delta \gamma))^2]^{1.5}}$

Wirnik cylindryczny przesunięty $e := 0.0204$

$r(\alpha) := \frac{R \cdot (1 - e)}{1 + e \cdot \cos(-k \cdot \alpha + \Delta \gamma)}$ $drr(\alpha) := \frac{-R \cdot (1 - e) \cdot e \cdot k \cdot \sin(-k \cdot \alpha + \Delta \gamma)}{(1 + e \cdot \cos(-k \cdot \alpha + \Delta \gamma))^2}$

Wirnik 'drugiej harmonicznej' $a2 := 0.3334$

$r(\alpha) := R_g - \frac{g \cdot (1 + a2)}{1 + a2 \cdot \cos(-2 \cdot k \cdot \alpha + \Delta \gamma)}$ $drr(\alpha) := \frac{2 \cdot k \cdot a2 \cdot g \cdot (1 + a2) \cdot \sin(-2 \cdot k \cdot \alpha + \Delta \gamma)}{(1 + a2 \cdot \cos(-2 \cdot k \cdot \alpha + \Delta \gamma))^2}$

Moment całkowity: Moment sił Lorentza: $f := 2$ $C := \frac{2}{f} \cdot 0.5 \cdot l$

$Te := -v_o \cdot R_g \cdot C \cdot p \cdot \delta \int_0^{f \cdot \pi} \text{Im}(D(\alpha, R_g) \cdot \overline{dD(\alpha, R_g)}) d\alpha$ $TeCu := C \cdot p \cdot \omega_r \cdot \gamma \cdot \int_0^{f \cdot \pi} \int_{R_a}^{r(\alpha)} (|Z(\alpha, \beta \cdot x)|)^2 \cdot x dx d\alpha$

Moment permeancyjny: Straty mocy czynnej:

$TeFe := -C \cdot \int_0^{f \cdot \pi} (|Ia1(\alpha)| + |Ia2(\alpha)|) \cdot (|aa(\alpha)|)^2 \cdot dr(\alpha) \cdot r(\alpha) d\alpha$
 $\frac{TeCu}{Te} = 1.046$ $\frac{TeFe}{Te} = -0.046$ $Te = 10.6$ $Pcu := \omega_r^2 \cdot C \cdot \gamma \cdot \int_0^{f \cdot \pi} \int_{R_a}^{r(\alpha)} [|Z(\alpha, \beta \cdot x)|]^2 \cdot x dx d\alpha$
 $\frac{TeCu + TeFe}{Te} = 1.00004$ $\frac{Pcu}{TeCu \cdot p^{-1} \cdot \omega_r} = 1.00000$ $Pcu = 208.1$

Rys.8.14. Obliczenie momentu elektromagnetycznego i jego składników - fragment programu
Fig.8.14. The calculation of the electromagnetic torque and its components - program extract

8.2. SIŁY PROMIENIOWE – ŹRÓDŁO HAŁASU MAGNETYCZNEGO

Analiza sił promieniowych - jako uzupełnienie analizy rozkładów sił stycznych oraz momentów sił - pozwala na ocenę poziomu hałasu magnetycznego. Z zagadnieniami eksploatacji przetworników elektromechanicznych, jakimi są maszyny elektryczne, wiąże się problematyka obliczania naciągów magnetycznych [aSt.2, aV.1] powodowanych ekscentrycznością wirnika. Deformacja rozkładu pola magnetycznego powodowana niesymetrią położenia wirnika maszyny prowadzi do zmiany poziomu hałasu magnetycznego [K.7, aB.1, aB.2]. Ocena poziomu hałasu jest istotna z uwagi na ciągle rosnące wymagania, jakie stawia się przed przetwornikami elektromechanicznymi ze względu na ich eksploatację w miejscu pracy. Niniejszy podrozdział stanowi krótkie uzupełnienie analiz sił stycznych o analizę sił promieniowych.

Drgania układu, jaki stanowi stojan i wirnik maszyny wraz z łożyskami, są analizowane bądź przy wykorzystaniu modeli uproszczonych [K.7, S.3, T.3, a.V1], bądź rozbudowanych polowych [aB.1, S.3]. Pierwsza grupa prac bazuje na opisie stanu mechanicznego przetwornika elektromechanicznego za pomocą równań różniczkowych zwyczajnych, druga zaś za pomocą równań różniczkowych cząstkowych. O częstotliwości drgań stojana oraz hałasu magnetycznego decyduje częstotliwość wymuszających sił oraz częstotliwości drgań własnych mechanicznych maszyny. Analizy numeryczne oraz pomiary potwierdzają fakt, iż często znaczący udział w powstawaniu drgań daje ciśnienie magnetyczne o częstotliwości równej podwojonej częstotliwości zasilania stojana $2f_s$ [aSt.1]. O częstotliwościach ujawniających się w widmie fali akustycznej maszyny decyduje wartość częstotliwości drgań własnych układu. Złożony układ konfiguracji geometrycznej prowadzi do pojawienia się w widmie drgań akustycznych częstotliwości wyraźnie różniących się od częstotliwości drgań własnych i częstotliwości wymuszającej.

Pole magnetyczne na powierzchni stojana prowadzi do powstania ciśnienia magnetycznego działającego na granicy powietrze-ferromagnetyk. Na podstawie równania:

$$\vec{f}_n = -\vec{i}_n \operatorname{div}(-H_n \vec{B} + \vec{i}_n 0.5 \vec{H} \vec{B}), \quad (8.39a)$$

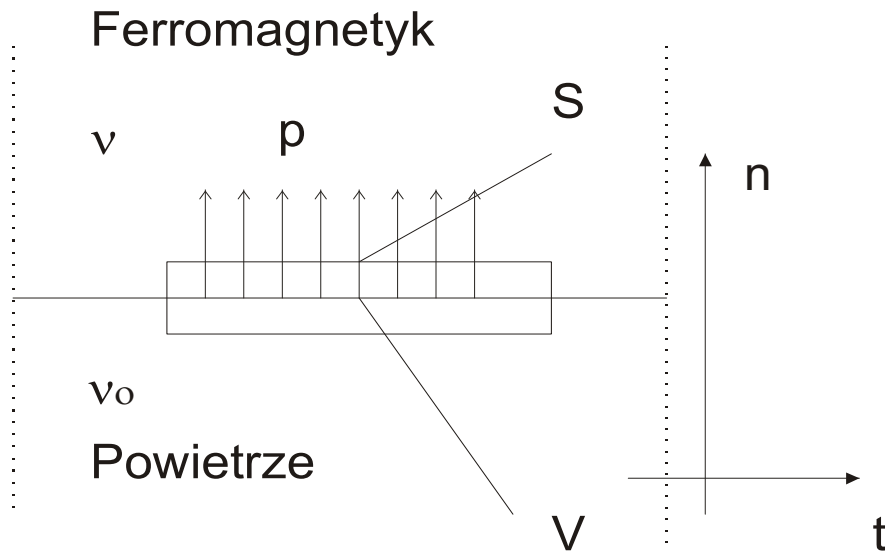
przy oznaczeniach z rys.8.15, otrzymuje się:

$$p_\mu = \frac{1}{S} \int_V f_n dV = (H_n B_n - 0.5 \vec{H} \vec{B}) \Big|_{S_0}^S. \quad (8.39b)$$

Ostatecznie po prostych przekształceniach wartość ciśnienia magnetycznego równa jest:

$$p_\mu = -\frac{1}{2}(\nu - \nu_o) B_n^2 + \frac{1}{2}(\mu - \mu_o) H_t^2. \quad (8.40)$$

Wobec czasowej zmienności pola magnetycznego na obwodzie maszyny ciśnienie magnetyczne jest również zmienne w czasie. Przy występowaniu tylko jednej harmonicznej (np. podstawowej) rozkładu pola magnetycznego ciśnienie magnetyczne prowadzi do wymuszania drgań mechanicznych o podwojonej częstotliwości.



Rys.8.15. Obliczenie ciśnienia magnetycznego
Fig.8.15. The calculation of the magnetic pressure

Drgania wymuszone opisuje równanie różniczkowe [K.7, H.2, S.3, T.3] postaci:

$$m_k \ddot{w} + r_k \dot{w} + K_k w = p_{k,\max} \sin(\omega_k t), \quad (8.41a)$$

w którym współczynniki są równe:

$$m_k = \frac{1}{2} h \rho \left(1 + \frac{1}{k^2}\right), \quad (8.41b)$$

$$r_k = \frac{R_k}{S}, \quad (8.41c)$$

$$K_k = \frac{8\pi EJ}{Sd^3} (1 - k^2)^2, \quad (8.41d)$$

Dla wielkości występujących w definicjach współczynników (8.41.b÷8.41.d) przyjęto następujące oznaczenia:

d - średnica linii środkowej pierścienia odkształcanego,

l - długość obliczeniowa, $S = \pi dl$,

J - moment bezwładności powierzchni, np. dla prostokątnego przekroju pierścienia przy zginaniu wynosi $J = lh^3/12$, h - wysokość przekroju jarzma,

E - moduł sprężystości podłużnej, np. dla blachy elektrotechnicznej $(1.2-2) \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$,

R_m - współczynnik tłumienia (rezystancja mechaniczna) $(1 \div 6) \cdot 10^6 \text{ Ns/m}$,

k - rząd drgań swobodnych $k = 1, 2, \dots$ równy liczbie strzałek odkształceń na obwodzie,

$p_{k,max}$ - amplituda ciśnienia magnetycznego o pulsacji ω_k zbliżonej bądź równej pulsacji drgań własnych,

w - przemieszczenie, odkształcenie powierzchni stojana ($\sim \mu m$).

Równanie (8.41a) pozwala na podanie amplitudy odkształceń w stanie ustalonym (bez składowej przejściowej) w postaci:

$$w_{k,max} = \frac{p_{k,max}}{\sqrt{(K_k - m_k^2 \omega_k^2)^2 - r_k^2 \omega_k^2}}. \quad (8.42)$$

Amplituda prędkości drgań wynosi:

$$V_k = \omega_k w_{k,max}, \quad (8.43)$$

i pozwala na wyznaczenie natężenia dźwięku zgodnie z zależnością:

$$I_k = \frac{1}{2} Z_0 V_k^2, \quad (8.44)$$

w której Z_0 oznacza impedancję akustyczną powietrza będącą iloczynem gęstości i prędkości rozchodzenia się fali akustycznej; dla powietrza w temperaturze 20°C wynosi ona 415 Ns/m³.

Częstotliwości drgań własnych [K.7, R.5, T.3] wynoszą:
dla rzędu $k = 0$

$$f_0 = \frac{1}{\pi d} \sqrt{\frac{E}{\rho_{Fe}}}, \quad (8.45a)$$

przy $k = 1$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mK}{m_r(m - m_r)}}, \quad (8.45b)$$

oraz przy $k > 1$

$$f_k = f_0 \sqrt{\frac{2}{3} \frac{k(k^2 - 1)}{\sqrt{k^2 + 1}}}, \quad (8.45c)$$

gdzie K - sztywność wału z łożyskami, m - masa całkowita silnika, m_r - masa wirnika.

Dla określenia poziomu hałasu wprowadza się decybelową skalę wyrażania natężeń dźwięku zdefiniowaną jako:

$$L_k = 10 \log(I_k / I_{odn}), \quad (8.46)$$

gdzie natężenie odniesienia $I_{odn} = 10^{-12}$ W/m² jest progiem słyszalności.

W uproszczonym modelu opisu hałasu zakłada się - pomijając interferencję fal akustycznych - możliwość sumowania natężeń hałasów, a zatem poszukiwane natężenie dźwięku można określić z poniższej zależności:

$$L = 10 \log(\sum_k I_k / I_{odn}). \quad (8.47)$$

Dla oceny poziomu hałasu w odległości $\Delta r = 1$ [m] od maszyny elektrycznej należy uwzględnić zmniejszenie natężenia dźwięku. Dla małych maszyn można założyć, iż źródło dźwięku jest kuliste ($I \sim 1/r^2$), a zatem:

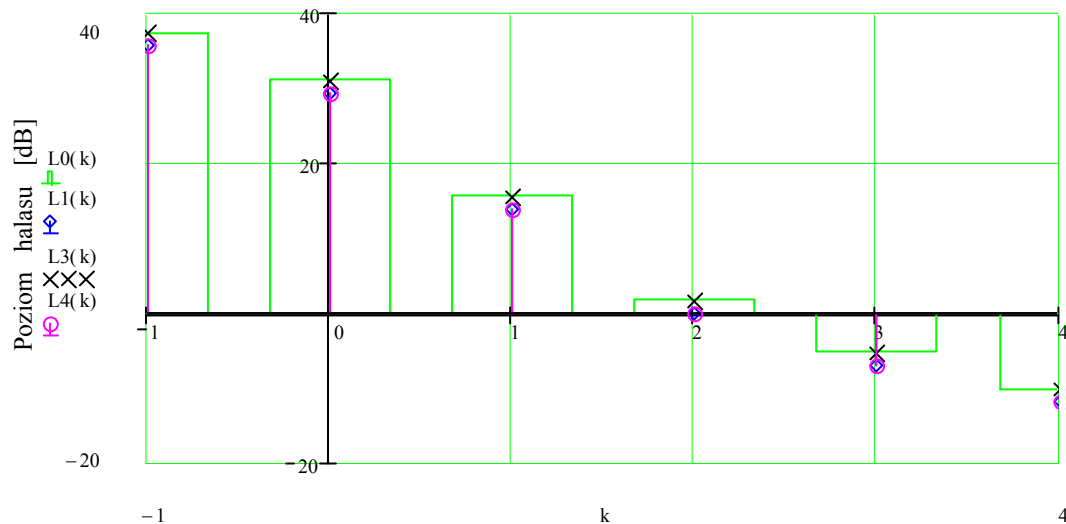
$$L = 10 \log \left(\frac{r_z^2}{(r_z + \Delta r)^2} \sum_k I_k / I_{\text{odn}} \right), \quad (8.48a)$$

lub równoważnie

$$L = 10 \log \left(\sum_k \frac{I_k}{I_{\text{odn}}} \right) + 20 \log \left(\frac{r_z}{r_z + \Delta r} \right), \quad (8.48b)$$

gdzie r_z - jest zewnętrznym promieniem źródła.

Zależności (8.48a,b) pozwalają na ocenę hałasu magnetycznego dla maszyn elektrycznych. Wykorzystując model analityczny maszyny indukcyjnej o litym, anizotropowym wirniku - przedstawionym w rozdziale 7 i podrozdziale 8.1 - można podjąć próbę oszacowania poziomu hałasu magnetycznego dla maszyny indukcyjnej o wirniku kubkowym niesymetrycznym. Zaproponowany model okazuje się obliczeniowo korzystny. Zaletą prezentowanego algorytmu obliczeniowego jest możliwość prowadzenia jakościowej analizy wpływu wartości parametrów oraz ekscentryczności na otrzymywane wyniki.



Rys.8.16. Obliczenie poziomu hałasu magnetycznego dla drgań rzędu $k = -1, 0, \dots, 4$

Fig.8.16. The calculation of the magnetic noise for order of $k = -1, 0, \dots, 4$

Na wykresie 8.16 przedstawiono przybliżone wartości poziomu hałasu magnetycznego dla drgań rzędu $k = -1, 0, \dots, 4$ dla wybranych ekscentryczności wirnika przetwornika elektromechanicznego. Umownie oznaczone na wykresie 8.16 drgania rzędu $k = -1$ odnoszą się do drgań wymuszonych siłami radialnymi o częstotliwości równej podwojonej częstotliwości zasilania stojana [T.3]. Na wykresie poziomy hałasu odnoszą się do maszyny o wirniku odpowiednio: cylindrycznym (1c) - przebieg $L0(k)$, cylindrycznym przesuniętym (2c) - $L1(k)$, eliptycznym (1e) - $L3(k)$, oraz eliptycznym przesuniętym (2e) - $L4(k)$ (rys.8.2, tabela 8.1). Poziomy drgań dla poszczególnych przypadków ekscentryczności wirnika różnią

się o kilka procent. Najwyższy poziom hałasu magnetycznego występuje dla maszyny o wirniku eliptycznym wirującym wokół osi symetrii geometrycznej - przypadek 1e.

W rozdziale ósmym rozważono maszynę indukcyjną o wirniku litym. Uwzględniono możliwość wystąpienia ekscentryczności wirowania i niesymetrii geometrii wirnika, np. na skutek tolerancji wykonania bądź deformacji. Przedstawiono analityczne rozwiązanie zagadnienia wyznaczenia rozkładu pola magnetycznego, sił stycznych, momentu elektromagnetycznego oraz jego składowych dla wybranych przypadków ekscentryczności. Zaproponowano efektywny numeryczny algorytm określania strat mocy czynnej w litym wirniku maszyny. Dodatkowo, wykorzystując wyniki analiz pola, dokonano oceny poziomu hałasu magnetycznego powodowanego siłami promieniowymi.

9. PODSUMOWANIE

W pracy rozważono możliwość opisu działających sił, a co za tym idzie - momentów sił powstających przy udziale pola elektromagnetycznego, poprzez wykorzystanie tensorów energii pola elektromagnetycznego zdefiniowanych w ortogonalnych układach współrzędnych. Dokonano rozdziału działających sił na dwa wzajemnie uzupełniające się składniki:

- siły Lorentza - działające w środowiskach przewodzących,
- siły permeancyjne - działające w środowiskach magnetycznych.

Uzasadniono różniczkowe zależności określające gęstości objętościowe sił: całkowitej i permeancyjnej (środowiskowej). Przedstawione zależności pozwalają na wskazanie podobszarów układu przetwornika elektromechanicznego, w których powstają wyróżnione siły. Powyższy rozkład zastosowano dla potrzeb analizy momentów sił i sił w przetwornikach elektromechanicznych o dominującym polu magnetycznym. Omawiany rozkład sił charakteryzuje się naturalną i prostą interpretacją fizyczną. Siły Lorentza działają w obszarach, w których płyną prądy. Siły środowiskowe pojawiają się w obszarach niejednorodnych, w szczególności na granicy środowisk. Momenty elektromagnetyczne obu składowych sił mogą pozostawać w różnej proporcji wzajemnej, w różnych stanach pracy przetwornika. Również pokazano, iż mogą działać zgodnie bądź przeciwdziałać sobie wzajemnie.

W pracy zwrócono uwagę na zagadnienie możliwości przedstawienia sił i momentów sił poprzez dywergencję pewnego tensora (pseudotensora). Zagadnienie to jest istotne, ponieważ prowadzi do uproszczenia algorytmów numerycznego obliczania momentów sił. Twierdzenie Gaussa sprowadza całkowanie po obszarze do całkowania po brzegu obszaru. Nie jest możliwe przedstawienie składnika niejednorodnościowego w postaci dywergencji pewnego tensora (rozdział 4). W rozdziale 7 pokazano, iż możliwe jest przedstawienie całkowitego momentu sił poprzez całkę powierzchniową w obszarach magnetycznie anizotropowych (o symetrycznej macierzy reluktywności). Szczegółowo rozważono to zagadnienie na przykładzie maszyny o anizotropowym wirniku. Zwrócono również uwagę, iż nie zawsze takie przedstawienie jest możliwe.

Przedstawione w pracy przykłady potwierdzają użyteczność zaproponowanego rozdziału momentów sił zarówno w obliczeniach jak i w ich interpretacji fizycznej. Dokonano opisu oraz zinterpretowania momentów sił w modelowej maszynie prądu przemiennego, hydrogeneratorze synchronicznym, turbogeneratorze synchronicznym,

maszynie asynchronicznej o anizotropowej strukturze i maszynie indukcyjnej o ekscentrycznym i niesymetrycznym wirniku.

Zdefiniowany moment permeancyjny umożliwia wzbogacenie procesu projektowania maszyny synchronicznej o utajonych i wydajnych biegunach dla potrzeb oceny naprężeń w izolacji uzwojeń wirnika. Moment środowiskowy pozwala również określić niekorzystny składnik momentu sił oraz straty mocy czynnej w wirniku maszyny indukcyjnej o ekscentrycznym i niesymetrycznym wirniku.

Celowość definiowania różnicowego tensora energii pola elektromagnetycznego pokazano na przykładzie analitycznego opisu momentów sił powstających w maszynie asynchronicznej ujawniającej anizotropię właściwości magnetycznych. Wykorzystując definicję różnicowego tensora energii przedstawiono zmodyfikowany algorytm obliczania momentu sił metodą prądów magnetyzacji.

Jakkolwiek, z punktu widzenia napędu elektrycznego często nie są istotne wartości składników całkowitego momentu, to przedstawiony podział pozwala na opis rozkładu sił w poszczególnych częściach przetwornika elektromagnetycznego. Opis ten jest istotny dla oceny działania podzespołów przetwornika elektromechanicznego (rozdział 5, 6, 7, 8).

Zaproponowana koncepcja rozkładu działających sił na dwa składniki z pewnością nie wyczerpuje wszystkich możliwości dekompozycji siły całkowitej, które byłyby istotne z punktu widzenia opisu takich zjawisk, jak na przykład, rozkład naprężeń powodowany polem temperatury oraz innych. Prezentowana idea rozkładu pozwala jednak na przejrzystą interpretację fizyczną oraz posiada pewne zalety umożliwiające jej wykorzystanie w teorii przetworników elektromechanicznych.

WNIOSKI

- a) Przedstawione zależności (rozdział 4) pozwalają na obliczenie składników sił bądź momentu sił w dowolnym stanie pracy przetwornika elektromechanicznego przy zastosowaniu opisu pola elektromagnetycznego w ortogonalnych układach współrzędnych. Równania te pozwalają na prostą interpretację składników sił oraz momentów sił powstających w przetwornikach elektromechanicznych. Analiza składowych sił prowadzi do wskazania miejsc powstawania sił Lorentza i środowiskowych (rozdziały 5, 6, 7, 8).
- b) Moment permeancyjny (środowiskowy) maszyny powodowany działaniem sił stycznych działających w obszarach magnetycznych (wyprofilowany wirnik maszyny) nie jest tożsamy z momentem reluktancyjnym.
Moment permeancyjny pozwala na ocenę naprężeń mechanicznych w izolacji uzwojeń maszyny synchronicznej oraz na określenie strat mocy w wirniku maszyny indukcyjnej o ekscentrycznym bądź niecyldrycznym wirniku (rozdziały 5, 6).

- c) Istnieje pewna klasa przetworników elektromechanicznych, w których różnicowy tensor energii pola elektromagnetycznego daje wkład do bilansu momentów sił. Przykładowo, rozważono przetwornik elektromechaniczny w postaci maszyny asynchronicznej z magnetyczną szczeliną, w którym składowe różnicowego tensora $\Delta\sigma_{uw}$ opisują niezerowy moment sił stycznych. Wykorzystanie definicji różnicowego pseudotensora energii pola elektromagnetycznego pozwala na podanie algorytmu wyznaczania momentu maszyny metodą prądów magnetyzacji (rozdział 7).

DODATEK D1

TOŻSAMOŚĆ POMOCNICZA

Iloczyn składowej siły Lorentza i współczynnika Lamego można przedstawić następująco:

$$L_{|u|}f_{Lu} = L_{|u|}(\rho\vec{E} + \mathbf{j} \times \vec{B})_u = L_{|u|}(-\rho \frac{\partial V}{L_{|u|}\partial x_u} - \rho \frac{\partial A_u}{\partial t} + (\mathbf{j} \times \text{rot } \vec{A})_u), \quad (D1.1)$$

W krzywoliniowym układzie współrzędnych ortogonalnych (x_u, x_v, x_w) współczynniki Lamego oznaczają się jako L_u, L_v, L_w , a wynoszą one w układzie współrzędnych

- kartezjańskich (x, y, z): $L_u = L_v = L_w = 1$,

- cylindrycznych (walcowych) (r, α, z): $L_u = L_r = 1, L_v = L_\alpha = r, L_w = L_z = 1$.

Dla składowej siły Lorentza f_{LMu} opisanej iloczynem wektorowym gęstości prądu i indukcji magnetycznej otrzymuje się:

$$L_{|u|}f_{LMu} = \frac{j_{|v|}}{L_{|v|}} \left\{ \frac{\partial(L_{|v|}A_v)}{\partial x_u} - \frac{\partial(L_{|u|}A_u)}{\partial x_v} \right\} - \frac{j_{|w|}}{L_{|w|}} \left\{ \frac{\partial(L_{|u|}A_u)}{\partial x_w} - \frac{\partial(L_{|w|}A_w)}{\partial x_u} \right\}, \quad (D1.2)$$

stąd:

$$\begin{aligned} L_{|u|}f_{LMu} = & \frac{j_{|u|}}{L_{|u|}} \frac{\partial(L_{|u|}A_u)}{\partial x_u} + \frac{j_{|v|}}{L_{|v|}} \frac{\partial(L_{|v|}A_v)}{\partial x_u} + \frac{j_{|w|}}{L_{|w|}} \frac{\partial(L_{|w|}A_w)}{\partial x_u} - \\ & - \frac{j_{|u|}}{L_{|u|}} \frac{\partial(L_{|u|}A_u)}{\partial x_u} - \frac{j_{|v|}}{L_{|v|}} \frac{\partial(L_{|u|}A_u)}{\partial x_v} - \frac{j_{|w|}}{L_{|w|}} \frac{\partial(L_{|u|}A_u)}{\partial x_w}. \end{aligned} \quad (D1.3a)$$

Stosując zapis sumacyjny można zapisać:

$$L_{|u|}f_{LMu} = \frac{j_v}{L_v} \frac{\partial(L_v A_v)}{\partial x_u} - \frac{j_v}{L_v} \frac{\partial(L_{|u|}A_u)}{\partial x_v}. \quad (D1.3b)$$

Gęstość siły Lorentza (D1.1) opisuje zatem następująca relacja:

$$L_{|u|}f_{Lu} = -\rho \frac{\partial V}{\partial x_u} - \rho L_{|u|} \frac{\partial A_u}{\partial t} + \frac{j_v}{L_v} \frac{\partial(L_v A_v)}{\partial x_u} - \frac{j_v}{L_v} \frac{\partial(L_{|u|}A_u)}{\partial x_v}. \quad (D1.4a)$$

Równość (D1.4a) w notacji sumacyjnej czterowskaźnikowej ($i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $L_0 = 1$) przyjmuje formę:

$$L_{|u|}f_{Lu} = \frac{j_i}{L_i} \frac{\partial(A_i L_i)}{\partial x_u} - \frac{j_i}{L_i} \frac{\partial(L_{|u|}A_u)}{\partial x_i}, \quad (D1.4b)$$

gdzie wprowadzono oznaczenia czteropotencjału $A_i = (-V/c, A_u, A_v, A_w)$ i czterogęstości prądu $j_i = (c\rho, j_u, j_v, j_w)$ [L.2, L.4]. Wykorzystując zasadę ciągłości prądu w postaci:

$$\frac{1}{L} \frac{\partial \left(\frac{L}{L_i} j_i \right)}{\partial x_i} = \frac{1}{L} \frac{\partial(s_i j_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (D1.5)$$

można - dodając składnik zerowy (D1.5) - zależność (D1.4b) przekształcić do postaci:

$$LL_{|u|}f_{Lu} = s_i j_i \frac{\partial(A_i L_i)}{\partial x_u} - \frac{\partial}{\partial x_i} (s_i L_{|u|} A_u j_i),$$

lub ostatecznie:

$$s_i j_i \frac{\partial(A_i L_i)}{\partial x_u} = LL_{|u|}f_{Lu} + L \operatorname{div}(L_{|u|} A_u \vec{j}) + L \frac{\partial}{\partial t} (L_{|u|} A_u \rho). \quad (D1.6)$$

DODATEK D2 GĘSTOŚCI SIŁ - RÓWNANIA POMOCNICZE

Pierwsza para równań Maxwella ma postać:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad \wedge \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (D2.1a)$$

przy czym operatory różniczkowe są postaci:

$$(\operatorname{rot} \vec{E})_u = \frac{1}{L_{|v|} L_{|w|}} \left\{ \frac{\partial(L_{|w|} E_w)}{\partial x_v} - \frac{\partial(L_{|v|} E_v)}{\partial x_w} \right\}, \quad (D2.1b)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{1}{L_{|u|} L_{|v|} L_{|w|}} \left\{ \frac{\partial(E_{|u|} L_v L_w)}{\partial x_u} + \frac{\partial(E_{|v|} L_u L_w)}{\partial x_v} + \frac{\partial(E_{|w|} L_u L_v)}{\partial x_w} \right\}, \quad (D2.1c)$$

Drugą parę równań Maxwella dla trzech wyróżnionych niżej przypadków zapisano w jednolitej formie:

$$\operatorname{rot} \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{j}} + \underline{\dot{\vec{D}}} \quad \wedge \quad \operatorname{div} \underline{\dot{\vec{D}}} = \underline{\rho}, \quad (D2.2)$$

gdzie:

$$\underline{\vec{H}} = \begin{cases} v_o \vec{B} & \text{w przypadku a)} \\ \vec{H} & \text{w przypadku b)} \\ -\vec{I} & \text{w przypadku c)}, \end{cases} \quad (D2.3a)$$

$$\underline{\vec{j}} = \begin{cases} \vec{j}_0 & \text{w przypadku a)} \\ \vec{j} & \text{w przypadku b)} \\ -\Delta\vec{j} & \text{w przypadku c)}, \end{cases} \quad (\text{D2.3b})$$

$$\underline{\vec{D}} = \begin{cases} \epsilon_0 \vec{E} & \text{w przypadku a)} \\ \vec{D} & \text{w przypadku b)} \\ \vec{P} & \text{w przypadku c)}, \end{cases} \quad (\text{D2.3c})$$

$$\underline{\rho} = \begin{cases} \rho_0 & \text{w przypadku a)} \\ \rho & \text{w przypadku b)} \\ -\Delta\rho & \text{w przypadku c)}. \end{cases} \quad (\text{D2.3d})$$

Powyższa forma zapisu pozwala na wyprowadzenie zależności (4.16) - przypadek b), (4.17) - przypadek c) przy jednym, formalnym rachunku wektorowym. W każdym z poniższych wzorów rozważana zależność dla przypadku b) jest również wynikiem dodania stronami zależności dotyczących przypadków a) oraz c).

Gęstość objętościowa siły wynosi:

$$\underline{\vec{f}} = \begin{cases} \rho_0 \vec{E} + \vec{j}_0 \times \vec{B} = \vec{f}_0 & \text{w przypadku a)} \\ \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} = \vec{f} & \text{w przypadku b)} \\ -\Delta\rho \vec{E} - \Delta\vec{j} \times \vec{B} = -\Delta\vec{f} & \text{w przypadku c)}. \end{cases} \quad (\text{D2.4})$$

Związki materiałowe są postaci:

$$\underline{\vec{H}} = \underline{\underline{v}} \underline{\vec{B}} \quad \wedge \quad \underline{\vec{D}} = \underline{\underline{\epsilon}} \underline{\vec{E}}. \quad (\text{D2.5a})$$

Nadkreślenie oznacza tu macierzowy charakter powyższych związków materiałowych w obszarach ujawniających anizotropowe własności magnetyczne bądź dielektryczne. Mianowicie, współczynniki środowiskowe w przypadku anizotropowego środowiska tworzą odpowiednio następujące symetryczne macierze:

$$\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{v}} = \begin{cases} \text{diag}(\epsilon_0; v_0) & \text{w przypadku a)} \\ [\epsilon_{uw}; v_{uw}] & \text{w przypadku b)} \\ [\epsilon_{uw}; v_{uw}] - \text{diag}(\epsilon_0; v_0) & \text{w przypadku c)}. \end{cases} \quad (\text{D2.5b})$$

Współczynniki środowiskowe dla izotropowego ośrodka są równe odpowiednio (mnożenie macierzowe w tym przypadku sprowadza się do mnożenia przez liczbę):

$$\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{v}} = \begin{cases} \epsilon_0; v_0 & \text{w przypadku a)} \\ \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r; v = v_0 v_r & \text{w przypadku b)} \\ \epsilon_0 (\epsilon_r - 1); v_0 (v_r - 1) & \text{w przypadku c)}. \end{cases} \quad (\text{D2.5c})$$

Zapis postaci (D2.5a) oznacza sumę iloczynów odpowiednich składowych wektora pola oraz współczynnika środowiskowego, np.:

$$\underline{H}_u = \underline{v}_{uw} B_w, \quad \underline{\vec{H}} = \underline{\vec{v}} \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{i}}_u \underline{v}_{uw} B_w.$$

Gęstość objętościowa siły wynosi:

$$\underline{\vec{f}} = \underline{\rho} \underline{\vec{E}} + \underline{\vec{j}} \times \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{E}} \operatorname{div} \underline{\vec{D}} + (\operatorname{rot} \underline{\vec{H}} - \underline{\dot{\vec{D}}}) \times \underline{\vec{B}},$$

co prowadzi do zależności:

$$\underline{\vec{f}} = -\frac{\partial}{\partial t} (\underline{\vec{D}} \times \underline{\vec{B}}) + \underline{\vec{H}} \operatorname{div} \underline{\vec{B}} + \operatorname{rot}(\underline{\vec{v}} \underline{\vec{B}}) \times \underline{\vec{B}} + \underline{\vec{E}} \operatorname{div} \underline{\vec{D}} + \operatorname{rot}(\underline{\vec{E}}) \times \underline{\vec{D}}, \quad (\text{D2.6a})$$

gdzie dodano do prawej strony zerowe wyrażenie: $\underline{\vec{H}} \operatorname{div} \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{v}} \underline{\vec{B}} \operatorname{div} \underline{\vec{B}}$.

Drugi i trzeci składnik przekształca się do postaci:

$$\operatorname{rot}(\underline{\vec{H}}) \times \underline{\vec{B}} + \underline{\vec{H}} \operatorname{div} \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{i}}_u \operatorname{div}_{|u|} (\underline{H}_u \underline{\vec{B}}) - \operatorname{grad}(\frac{1}{2} \underline{\vec{H}} \underline{\vec{B}}) - \underline{\vec{N}}_\mu + \underline{\vec{k}}_\mu, \quad (\text{D2.6b}_1)$$

$$(\operatorname{rot}(\underline{\vec{H}}) \times \underline{\vec{B}} + \underline{\vec{H}} \operatorname{div} \underline{\vec{B}})_u = \frac{1}{L_{|u|}} \operatorname{div}(L_{|u|} \underline{H}_u \underline{\vec{B}}) - \frac{\partial(\frac{1}{2} \underline{\vec{H}} \underline{\vec{B}})}{L_{|u|} \partial x_u} - (\underline{\vec{N}}_\mu)_u + (\underline{\vec{k}}_\mu)_u, \quad (\text{D2.6b}_2)$$

$$\operatorname{div}_u (*) = \frac{1}{L_u} \operatorname{div} \{L_{|u|} \cdot (*)\}, \quad (\text{D2.6b}_3)$$

$$\underline{\vec{N}}_\mu = \frac{1}{2} B_u B_w \operatorname{grad}(\underline{v}_{uw}), \quad (\text{D2.6b}_4)$$

$$\underline{\vec{k}}_\mu = -\frac{1}{2} \frac{B_u B_w \underline{v}_{uw}}{L_u L_w} \operatorname{grad}(L_u L_w), \quad (\text{D2.6b}_5)$$

gdzie wykorzystano fakt *symetrii współczynników reluktywności*.

Należy zwrócić uwagę na fakt, iż operacja dywergencji oraz inne operacje różniczkowe w układzie współrzędnych ortogonalnych nie oznaczają w ogólności tych samych działań co analogiczne operacje różniczkowe dla tensorów w układach współrzędnych krzywoliniowych.

Czwarty i piąty składnik po prawej stronie (D2.6a) przekształca się analogicznie:

$$\operatorname{rot}(\underline{\vec{E}}) \times \underline{\vec{D}} + \underline{\vec{E}} \operatorname{div} \underline{\vec{D}} = \underline{\vec{i}}_u \operatorname{div}_{|u|} (\underline{E}_u \underline{\vec{D}}) - \operatorname{grad}(\frac{1}{2} \underline{\vec{E}} \underline{\vec{D}}) - \underline{\vec{N}}_\epsilon + \underline{\vec{k}}_\epsilon, \quad (\text{D2.6b}_6)$$

$$\underline{\vec{N}}_\epsilon = -\frac{1}{2} E_u E_w \operatorname{grad}(\underline{\epsilon}_{uw}), \quad (\text{D2.6b}_7)$$

$$\underline{\vec{k}}_\epsilon = -\frac{1}{2} \frac{E_u E_w \underline{\epsilon}_{uw}}{L_u L_w} \operatorname{grad}(L_u L_w), \quad (\text{D2.6b}_8)$$

przy założonej *symetrii przenikalności dielektrycznych*.

Po podstawieniu do zależności (D2.6a) otrzymuje się:

$$\vec{f} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D} \times \vec{B}) - \vec{i}_u \operatorname{div}_{|u|}(\vec{\mathcal{G}}_u) + \vec{M} - \vec{N} + \vec{k}, \quad (\text{D2.7})$$

gdzie zdefiniowano składnik niejednorodnościowy w ortogonalnym układzie współrzędnych jako:

$$\vec{N} = \vec{N}_\mu + \vec{N}_\varepsilon,$$

równy:

$$\vec{N} = \begin{cases} 0 & \text{w przypadku a)} \\ \vec{N} & \text{w przypadku b)} \\ \vec{N} & \text{w przypadku c)}, \end{cases}$$

gradient gęstości energii pola elektromagnetycznego:

$$\vec{M} = \operatorname{grad}(\frac{1}{2} \vec{v} \vec{B} \vec{B} + \frac{1}{2} \vec{\varepsilon} \vec{E} \vec{E}) = \operatorname{grad}(\frac{1}{2} \vec{H} \vec{B} + \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D}) = \operatorname{grad}(\underline{e}_\mu + \underline{e}_\varepsilon) = \operatorname{grad}(\underline{e}_v),$$

oraz pseudowektor:

$$\vec{\mathcal{G}}_u = -\underline{H}_u \vec{B} - E_u \vec{D}. \quad (\text{D2.8a})$$

Zależność (D2.7) można zapisać w układzie współrzędnych ortogonalnych w postaci:

$$\vec{f} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D} \times \vec{B}) - \vec{i}_u \operatorname{div}_{|u|}(\vec{\mathcal{G}}_u) + \vec{k} - \vec{N}, \quad (\text{D2.8b})$$

przy czym:

$$\vec{k} = \vec{k}_\varepsilon + \vec{k}_\mu + \underline{e}_v \operatorname{grad}\{\ln(L)\}, \quad (\text{D2.8c})$$

$$\vec{k} = \begin{cases} \vec{k}_{o\varepsilon} + \vec{k}_{o\mu} + \underline{e}_{ov} \operatorname{grad}\{\ln(L)\} & \text{w przypadku a)} \\ \vec{k}_\varepsilon + \vec{k}_\mu + \underline{e}_v \operatorname{grad}\{\ln(L)\} & \text{w przypadku b)} \\ \Delta \vec{k}_\varepsilon + \Delta \vec{k}_\mu + \Delta \underline{e}_v \operatorname{grad}\{\ln(L)\} & \text{w przypadku c)}. \end{cases}$$

Wektor \vec{k} zanika w kartezjańskim układzie współrzędnych, gdzie $L_x = L_y = L_z = 1$. Zanika też składowa styczna tego wektora w cylindrycznym układzie współrzędnych.

Przez analogię do postaci tensora energii pola elektromagnetycznego w kartezjańskim układzie współrzędnych definiuje się pseudotensor naprężeń Maxwella. W układzie współrzędnych krzywoliniowych ortogonalnych z jego składowych buduje się pseudowektor postaci:

$$\vec{\mathcal{G}}_u = -\underline{H}_u \vec{B} - E_u \vec{D} + \vec{i}_u \underline{e}_v. \quad (\text{D2.8d})$$

Należy podkreślić, iż własności transformacyjne pseudotensorów i pseudowektorów nie są przedmiotem dalszych analiz. Stąd nazwa pseudotensor bądź pseudowektor. Pseudotensor traktuje się tylko jako wielkość indeksowaną dwoma wskaźnikami, a pseudowektor jednym.

Dany pseudowektor stosuje się tylko w jednym układzie współrzędnych i to tylko w tym, w którym go zdefiniowano.

Zwraca się uwagę, iż pseudotensor symetryczny σ_0 jest sumą obu pseudotensorów niesymetrycznych.

$$(\vec{\sigma}_u)_w = \begin{cases} \sigma_{0_{uw}} = -v_o B_u B_w - \epsilon_o E_u E_w + \delta_{uw} \frac{1}{2} (v_o B^2 + \epsilon_o E^2) - a) \\ \sigma_{uw} = -H_u B_w - E_u D_w + \delta_{uw} \frac{1}{2} (\vec{H}\vec{B} + \vec{E}\vec{D}) - b) \\ -\Delta\sigma_{uw} = I_u B_w - E_u P_w - \delta_{uw} \frac{1}{2} (\vec{B}\vec{I} - \vec{E}\vec{P}) - c), \end{cases} \quad (D2.8d)$$

$$\underline{e}_v = \begin{cases} e_{ov} = \frac{1}{2} (v_o B^2 + \epsilon_o E^2) - a) \\ e_v = \frac{1}{2} (\vec{H}\vec{B} + \vec{E}\vec{D}) - b) \\ -\Delta e_v = -\frac{1}{2} (\vec{B}\vec{I} - \vec{E}\vec{P}) - c), \end{cases} \quad (D2.8e)$$

gdzie δ_{uw} jest deltą Kroneckera; $L = L_u L_v L_w$ - iloczyn współczynników Lamego.

Na podstawie (D2.8c) zachodzi:

$$\vec{\sigma}_0 = \vec{\sigma}_u + \Delta\vec{\sigma}_u, \dots \quad (D2.9)$$

Równanie (D2.8b) w przypadku a) implikuje tożsamość:

$$\vec{f}_o = -\epsilon_o \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{i}_u \operatorname{div}_{|u|} (\vec{\sigma}_0) + \vec{k}_o, \quad (D2.10a)$$

w przypadku b):

$$\vec{f}_L = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \times \vec{B}) - \vec{i}_u \operatorname{div}_{|u|} (\vec{\sigma}_u) + \vec{k} - \vec{N}, \quad (D2.10b)$$

zaś w przypadku c):

$$\Delta\vec{f} = +\frac{\partial}{\partial t} (\vec{P} \times \vec{B}) - \vec{i}_u \operatorname{div}_{|u|} (\Delta\vec{\sigma}_u) + \Delta\vec{k} + \vec{N}. \quad (D2.10c)$$

Otrzymane zależności (D2.10b,c) są wykorzystywane przy wprowadzaniu zależności (4.16), (4.17) w rozdziale 4.

DODATEK D3

OPERACJE W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH CYLINDRYCZNYCH

W układzie współrzędnych cylindrycznych (ortogonalnych) dla składowych wektorów trójwymiarowych następujące operacje różniczkowe oznaczają:

$$\text{dywergencja:} \quad \operatorname{div} \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial B_z}{\partial z},$$

rotacja:

$$\text{rot } \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i}_r & \vec{i}_\alpha & \vec{i}_z \\ \frac{r}{\partial} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{r}{\partial z} \\ B_r & rB_\alpha & B_z \end{vmatrix},$$

laplasjan (skalaryny):

$$\Delta A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}.$$

Równanie Bessela:

$$y'' + \frac{1}{r} y' + (\beta^2 - \frac{p_B^2}{r^2}) y = 0 \Rightarrow y(r) = C_1 J_{p_B}(\beta r) + C_2 Y_{p_B}(\beta r),$$

$$J_{p_B}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (0.5z)^{2k+p_B}}{\Gamma(k+1)\Gamma(p_B+k+1)}.$$

Równanie Bessela zmodyfikowane (p_B - liczba całkowita):

$$y'' + \frac{1}{r} y' - (\beta^2 + \frac{p_B^2}{r^2}) y = 0 \Rightarrow y(r) = C_1 I_{p_B}(\beta r) + C_2 K_{p_B}(\beta r),$$

$$I_{p_B}(z) = i^{-p_B} J_{p_B}(iz), \quad \psi(k) = \sum_{m=1}^k \frac{1}{m},$$

$$K_{p_B}(z) = (-1)^{-p_B+1} (C_E + \ln(\frac{z}{2})) I_{p_B}(z) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{p_B-1} (-1)^k \frac{\Gamma(p_B-k)}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-p_B} + \\ + \frac{1}{2} (-1)^{p_B} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(p_B+k+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+p_B} \{\psi(k) + \psi(p_B+k)\}.$$

Równanie Bessela zmodyfikowane (p_B - liczba rzeczywista, niecałkowita):

$$y'' + \frac{1}{r} y' - (\beta^2 + \frac{p_B^2}{r^2}) y = 0 \Rightarrow y(r) = C_1 I_{p_B}(\beta r) + C_2 I_{-p_B}(\beta r).$$

PRZEDSTAWIENIE GĘSTOŚCI MOMENTU SIŁ W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH CYLINDRYCZNYCH

Gęstość momentu sił w płaszczyźnie prostopadłej do osi OZ wynosi:

$$rf_\alpha = xf_y - yf_x = x(-\text{div} \vec{\sigma}_y) - y(-\text{div} \vec{\sigma}_x), \quad (D3.1)$$

gdzie [T.1]:

$$\vec{\sigma}_w = \vec{i}_u \sigma_{wu} = \vec{i}_x \sigma_{wx} + \vec{i}_y \sigma_{wy} + \vec{i}_z \sigma_{wz}, \quad u, w \in \{x, y, z\}.$$

Składowe radialna W_r , styczna W_α , osiowa W_z wektora w ortogonalnym układzie współrzędnych cylindrycznych wyrażają się poprzez składowe wektora \vec{W} w kartezjańskim układzie współrzędnych prostokątnych następująco:

$$\begin{cases} W_r = W_x \cos \alpha + W_y \sin \alpha \\ W_\alpha = -W_x \sin \alpha + W_y \cos \alpha, \\ W_z = W_z \end{cases} \quad (D3.2a)$$

wersory obu układów współrzędnych wiążą się następująco:

$$\begin{cases} \vec{i}_r = \vec{i}_x \cos \alpha + \vec{i}_y \sin \alpha \\ \vec{i}_\alpha = -\vec{i}_x \sin \alpha + \vec{i}_y \cos \alpha, \\ \vec{i}_z = \vec{i}_z \end{cases}, \quad \begin{cases} \vec{i}_x = \vec{i}_r \cos \alpha - \vec{i}_\alpha \sin \alpha \\ \vec{i}_y = \vec{i}_r \sin \alpha + \vec{i}_\alpha \cos \alpha, \\ \vec{i}_z = \vec{i}_z \end{cases}. \quad (D3.2b,c)$$

Oznaczając przez $\vec{\sigma}_\alpha$ ‘wektor styczny’ zbudowany ze składowych tensora naprężeń Maxwella:

$$\vec{\sigma}_\alpha = \vec{i}_x \sigma_{\alpha x} + \vec{i}_y \sigma_{\alpha y} = \vec{i}_x (\sigma_{yx} \cos \alpha - \sigma_{xx} \sin \alpha) + \vec{i}_y (\sigma_{yy} \cos \alpha - \sigma_{xy} \sin \alpha), \quad (D3.3a)$$

można zależność (D3.1) przedstawić następująco:

$$rf_\alpha = -\text{div}(r\vec{\sigma}_\alpha) + \sigma_{yx} - \sigma_{xy}, \quad (D3.3b)$$

gdyż:

$$\begin{aligned} \text{div}(r\vec{\sigma}_\alpha) &= \text{div}(x\vec{\sigma}_y - y\vec{\sigma}_x) = x\text{div}\vec{\sigma}_y + \vec{\sigma}_y \text{grad}(x) - y\text{div}(\vec{\sigma}_x) - \vec{\sigma}_x \text{grad}(y) = \\ &= x\text{div}\vec{\sigma}_y - y\text{div}(\vec{\sigma}_x) + \sigma_{yx} - \sigma_{xy}. \end{aligned}$$

‘Wektor styczny’ $\vec{\sigma}_\alpha$ w układzie współrzędnych cylindrycznych zgodnie z (D3.2c) ma postać:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_\alpha &= \vec{i}_r (\sigma_{yx} \cos^2 \alpha - \sigma_{xx} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{yy} \cos \alpha \sin \alpha - \sigma_{xy} \sin^2 \alpha) + \\ &+ \vec{i}_\alpha (-\sigma_{yx} \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_{xx} \sin^2 \alpha + \sigma_{yy} \cos^2 \alpha - \sigma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha) \\ &= \vec{i}_r \sigma_{\alpha r} + \vec{i}_\alpha \sigma_{\alpha \alpha}. \end{aligned} \quad (D3.4a)$$

zaś ‘wektor promieniowy’ $\vec{\sigma}_r$:

$$\vec{\sigma}_r = \vec{i}_x \sigma_{rx} + \vec{i}_y \sigma_{ry} = \vec{i}_x (\sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{yx} \sin \alpha) + \vec{i}_y (\sigma_{xy} \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha),$$

a stąd:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= \vec{i}_r (\sigma_{yx} \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + \sigma_{yy} \cos \alpha \sin \alpha - \sigma_{xy} \cos \alpha \sin \alpha) + \\ &+ \vec{i}_\alpha (-\sigma_{yx} \sin^2 \alpha - \sigma_{xx} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{xy} \cos^2 \alpha) \\ &= \vec{i}_r \sigma_{\alpha r} + \vec{i}_\alpha \sigma_{\alpha \alpha}. \end{aligned} \quad (D3.4b)$$

Na podstawie (D3.4a) oraz (D3.4b) jest:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha r} - \sigma_{r\alpha} = & (\sigma_{yx} \cos^2 \alpha - \sigma_{xx} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{yy} \cos \alpha \sin \alpha - \sigma_{xy} \sin^2 \alpha) - \\ & (-\sigma_{yx} \sin^2 \alpha - \sigma_{xx} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_{xy} \cos^2 \alpha) = \sigma_{yx} - \sigma_{xy}. \end{aligned} \quad (D3.5)$$

Zależność (D3.3b) przyjmuje zatem postać:

$$rf_{\alpha} = -\text{div}(r\vec{\sigma}_{\alpha}) + \sigma_{\alpha r} - \sigma_{r\alpha}. \quad (D3.6a)$$

DODATEK D4 CAŁKI POMOCNICZE

Jeżeli poprzez fizykalną wielkość, opisywaną odpowiadającą jej wielkością zespoloną, jest rozumiana jej wartość rzeczywista:

$$a = \text{Re}\{A\}, \quad b = \text{Re}\{B\}, \quad (D4.1)$$

to zachodzi:

$$ab = \text{Re}\{A\}\text{Re}\{B\} = \frac{1}{2} \text{Re}\{AB\} + \frac{1}{2} \text{Re}\{A\bar{B}\}.$$

Jeżeli wielkości zespolone A , B zawierają operator: $\exp\{i(\omega t - p\alpha + \text{const})\}$, to całka po kącie pełnym wynosi:

$$I = \int_0^{2\pi} ab d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \text{Re}\{AB\} d\alpha + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \text{Re}\{A\bar{B}\} d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \text{Re}\{A\bar{B}\} d\alpha,$$

z uwagi na zależność od kąta α ($p \neq 0$).

Jeżeli wielkości zespolone są wyrażone poprzez sumę dwóch wielkości zespolonych:

$$A = C_1 e^{i\gamma_1} + C_2 e^{i\gamma_2}, \quad B = D_1 e^{i\delta_1} + D_2 e^{i\delta_2}, \quad (D4.2)$$

to zachodzi:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \text{Re}\{A\bar{B}\} d\alpha = \pi \text{Re}\{A\bar{B}\}.$$

Jeżeli argumenty składowych (indeksowane przez '1' bądź '2') są przesunięte o ten sam kąt $c\pi/2$ (np. $c = 0$ lub 1):

$$\gamma_1 - \delta_1 = c\pi/2, \quad \gamma_2 - \delta_2 = c\pi/2,$$

a dodatkowo dany jest kąt: $\gamma_1 - \gamma_2 = \kappa$ (stąd wynika: $\delta_1 - \delta_2 = \kappa$), to zachodzi:

$$I = \pi \text{Re}\{C_1 \bar{D}_1 e^{ic0.5\pi} + C_1 \bar{D}_2 e^{i\kappa} e^{ic0.5\pi} + C_2 \bar{D}_1 e^{-i\kappa} e^{ic0.5\pi} + C_2 \bar{D}_2 e^{ic0.5\pi}\}.$$

Jeżeli $c = 1$ - kąt przesunięcia wynosi $\pi/2$, to zachodzi:

$$I = -\pi \text{Im}\{C_1 \bar{D}_1 + C_2 \bar{D}_2 + C_1 \bar{D}_2 e^{i\kappa} + C_2 \bar{D}_1 e^{-i\kappa}\},$$

Przypadek przesunięcia składowych o $\pi/2$ zachodzi dla pary zmiennych zespolonych $B_r = -A\pi i/r$ oraz $B_\alpha = -A'(r)$ przy określaniu momentu elektromagnetycznego (rozdział 7).

Jeżeli $c = 0$ - kąt przesunięcia wynosi 0, to zachodzi:

$$I = \pi \operatorname{Re} \{ C_1 \overline{D_1} + C_2 \overline{D_2} + C_1 \overline{D_2} e^{ik} + C_2 \overline{D_1} e^{-ik} \},$$

Przypadek zerowego przesunięcia składowych zachodzi dla następujących par zmiennych zespolonych (rozdział 7):

$E_z = -sA$ oraz $H_\alpha = v_{\alpha\delta} B_\alpha = -v_{\alpha\delta} A'(r)$ - obliczanie całki wektora Poyntinga,

$j = -s\gamma A$ oraz $B_r = -A\pi i/r$ - przy określaniu momentu sił Lorentza,

j oraz j - przy obliczaniu strat mocy.

LITERATURA

POZYCJE KSIĄŻKOWE

- A.1.Adkins B.: The general theory of electrical machines. Chapman & Hall Ltd., London 1962.
- B.1.Bevley L.V.: Tensor analysis of electric circuit and machines. The Ronald Press Company, New York 1961.
- B.2.Białynicki-Birula I., Białynicka-Birula Z.: Quantum Electrodynamics. Pergamon Press 1975.
- B.3.Binns K.J., Lawrenson P.J., Trowbridge C.W.: The analytical and numerical solution of electric and magnetic fields. John Wiley & Sons, 1994.
- B.4.Bödefeld Th., Sequenz H.: Elektrische Maschinen. Wien-New York, Springer-Verlag 1971.
- B.5.Brodzki M.: Wstęp do teorii pola elektromagnetycznego w ujęciu geometrycznym. Skrypty Centralne 1553/5, Gliwice 1991.
- C.1.Charles V.J.: The unified theory of electrical machines. Butterworths, London 1967.
- D.1.Dąbrowski M.: Projektowanie maszyn elektrycznych prądu przemiennego. WNT, Warszawa 1994.
- D.2.Demenko A.: Symulacja dynamicznych stanów pracy maszyn elektrycznych w ujęciu polowym. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1997.
- E.1.Einstein A.: Istota teorii względności. PWN, Warszawa 1958.
- F.1.Fitzgerald A.E., Kingsley Ch. Jr., Kusko A.: Electric machinery. The processes, Devices and Systems of electromechanical energy conversion. McGraw Hill Book Company, 1971 (third edition).
- G.1.Gąsiorek S., Wadas R.: Ferryty. Zarys własności i technologii. Wydawnictwo Komunikacji i Łączności, Warszawa 1987.
- G.2.Gołąb S.: Rachunek tensorowy. PWN, Warszawa 1966.
- G.3.Gradsztejn I.S., Ryżyk I.M.: Tablice całek, sum, ciągów i pochodnych. Moskwa 1962.
- H.1.Hammond A.S., Sykulski J.K.: Engineering Electromagnetism Physical Processes and Computation. Oxford Science Publications, 1993.
- H.2.Huber T.M.: Stereomechanika teoretyczna. PWN, Warszawa 1958.

- I.1.Ingarden R.S., Jamiołkowski A.: Classical electrodynamics. Elsevier-PWN, Warszawa, 1985.
- I.2.Iwanow-Smolienskij A.W.: Elektromagnitnyje siły i priobrazowanije energii w elektryczeskich maszinach. Moskwa 1989.
- I.3.Ivanov-Smolenskij A.V., Meye J.: Physikalische Modellierung elektromagnetischen Felder und Prozesse in elektrischen Maschinen. VEB Verlag Technik, Berlin 1984.
- J.1.Jackson J.: Elektrodynamika klasyczna. PWN, Warszawa 1982.
- J.2.Jaworski B., Dietław A., Mikołowska L.: Fizyka. Tom I, II, III, PWN, Warszawa 1979.
- J.3.Joos G.: Lehrbuch der theoretischen Physik. Leipzig 1954.
- K.1.Kästner S.: Vektoren, Tensoren, Spinoren. Akademie-Verlag, Berlin 1960.
- K.2.Kneller E.: Ferromagnetismus. Berlin 1962.
- K.3.Kołodziej W.: Analiza matematyczna. PWN, Warszawa 1983.
- K.4.Konorski B.: Elementy teorii względności, relatywistycznej mechaniki i elektrodynamiki dla inżynierów. WNT, Warszawa 1976.
- K.5.Kovacs K.A.S., Racz I.: Transiente vorgänge in wechselstrommaschinen. Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest 1959.
- K.6.Krause P.C.: Analysis of electric machinery. McGraw-Hill Book Company, USA 1986.
- K.7.Kwaśnicki S.: Hałas magnetyczny silników indukcyjnych trójfazowych klatkowych. BOBRME KOMEL, Katowice 1998.
- L.1.Laible Th.: Die Theorie der synchronmaschine im nichtstationären Betrieb. Maschinenfabrik Örlikon, Springer-Verlag, Zürich 1952.
- L.2.Landau L.D., Lifszyc E.M.: Teoria pola. PWN, Warszawa 1980.
- L.3.Landau L.D., Lifszyc E.M.: Teoria sprężystości. PWN, Warszawa 1993.
- L.4.Landau L.D., Lifszyc E.M.: Elektrodynamika ośrodków ciągłych. PWN 1960.
- L.5.Latek W.: Turbogeneratory. WNT, Warszawa 1973.
- L.6.Leja F.: Rachunek różniczkowy i całkowity. Z dodatkiem F. Bierskiego. PWN, Warszawa 1978.
- L.7.Leja F.: Funkcje zespolone. PWN, Warszawa 1979.
- M.1.Marcinkowska H.: Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych. PWN, Warszawa 1986.
- M.2.Maurin K.: Analiza. Tom I, II, III. PWN, Warszawa 1991.
- M.3.Marx B., Suesse R.: Theoretische Elektrotechnik. Wissenschaftsverlag Band 1.: Variation rechnung und Maxwellsche Gleichungen, 1994.
- M.4.Mlak W.: Wstęp do przestrzeni Hilberta. PWN, Warszawa 1987.
- M.5.Müller G.: Elektrische Maschinen - Grundlagen, Aufbau und Wirkungsweise. Verlag Technik, Berlin 1985.
- M.6.Musiela J.: Wstęp do analizy funkcjonalnej. PWN, Warszawa 1989.
- N.1.Nürnberg W.: Die Asynchronmaschine. Springer-Verlag 1963.
- N.2.Nürnberg W., Lax F.: Synchronmaschine. AEG-Telefunken Handbücher Band 12.
- P.1.Paszek W.: Stany nieustalone maszyn prądu przemiennego. WNT, Warszawa 1984.

- P.2.Plamitzer A.: Maszyny elektryczne. WNT, Warszawa 1986.
- P.3.Pogorzelski S.: Podstawy teorii pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1964.
- P.4.Puchała A.: Dynamika maszyn i układów elektromechanicznych. PWN, Warszawa 1977.
- R.1.Rawa H.: Elektryczność i magnetyzm w technice. PWN, Warszawa 1994.
- R.2.Raszewski P.K.: Geometria Riemanna i analiza tensorowa. PWN, Warszawa 1958.
- R.3.Ratnajeevan S., Hoole H.: Finite elements, electromagnetics and design. Elsevier 1995.
- R.4.Rosensweig R.: Ferrohydrodynamics. Cambridge University Press, Cambridge 1985.
- R.5.Rusek J.: Komputerowa analiza maszyny elektrycznej z wykorzystaniem bilansu harmonicznego. AGH Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne, Kraków 2000.
- S.1.Sikora R.: Teoria pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1985.
- S.2.Simonyi K.: Physikalische Elektronik. B.G. Trubner, Stuttgart 1962.
- S.3.Skalmierski B.: Mechanika. PWN, Warszawa 1994.
- S.4.Suffczyński M.: Elektrodynamika. PWN, Warszawa 1980 (wyd. IV).
- T.1.Tamm I.E.: Podstawy teorii elektryczności. WNT, Warszawa 1965.
- T.2.Thaler G.J., Wilcox M.L.: Electric machines. Dynamics and steady state. John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney 1966.
- T.3.Timar P.L., Fazekas A., Kiss J., Miklos A., Yang S.J. (edited by Timar P.L.): Noise and vibration of electrical machines. Akademiai Kiado, Budapest 1989.
- T.4.Turowski J.: Elektrodynamika techniczna. WNT, Warszawa 1993.
- T.5.Turowski J., Zakrzewski K., Sikora R.: Analiza i synteza pola elektromagnetycznego. Ossolineum, Warszawa 1990.
- T.6.Turowski J.: Obliczenia elektromagnetyczne maszyn i urządzeń elektrycznych. WNT, Warszawa 1982.
- W.1.Woodston H.H., Melcher J.R.: Electromechanical dynamics. John Wiley & Sons, New York, 1968.
- Z.1. Zadrozny J., Życki Z. i inni: Poradnik inżyniera elektryka. Maszyny elektryczne. WNT, Warszawa 1975.

ARTYKUŁY, SKRYPTY, PRACE DOKTORSKIE, HABILITACYJNE, INSTRUKCJE

- aA.1.Abel-Razek A.A., Coulomb J.L., Feliachi M., Sabonnadiere J.C.: The calculation of electromagnetic torque in saturated electrical machine within combined numerical and analytical solution of the field equations. IEEE Transaction on Magnetics, Vol.17, No.6, pp.3250-3252, 1981.
- aA.2.Arkkio A.: Time stepping finite element analysis of induction motors. Proceedings of International Conference on Electrical Machines ICEM'88, pp.275-280, Pisa, 1988.
- aB.1.Bauer T., Albertz D., Henneberger G.: Fully three-dimensional method for the calculation of the time-harmonic magnetic, structural-dynamic and acoustic field of induction machines applied to an induction furnace. 12th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, COMPUMAG, pp. 52-53, Sapporo 1999.

- aB.2.Belachen A.: Force calculation for vibration and noise analysis of electrical machines. Proceedings of International Conference on Electrical Machines ICEM'2000, Vol.III pp.1829-1833, Helsinki, IX 2000.
- aB.3.Benda O.: Mechanical effects of electromagnetics waves on material medium. Proceedings on MEI, pp.21-42, Moskwa 1970.
- aB.4.Benda O.: The unusual ponderomotive forces in electromagnetic fields. XX Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów. SPETO GLIWICE-USTROŃ Proc.Vol.II., pp.65-69, 1997.
- aB.5.Bossavit A.: Differential forms and the computation fields and forces in electromagnetism. European Journal of Mechanics, B/Fluids Vol.10, No.5 1991.
- aB.6.Burlikowski W, Spalek D.: Determination of saturation influence on electromagnetic torque. XIV Symposium Electromagnetic Phenomena in Nonlinear Circuits, EPNC'96, Proceedings pp.67-72, Poznań - Kiekrz, 1996.
- aB.7a.Burlikowski W., Spalek D.: Evaluation of permeantive and reluctative torques in electrical machines by asymmetrical stress tensors. Proceedings of International Conference on Electrical Machines ICEM'96, Vol.I pp.90-95, Vigo, IX. 1996.
- aB.7b.Burlikowski W., Spalek D.: Permeantive and reluctative torques evaluated by asymmetrical stress tensors. 5-th International Conference ELECTRIMAS'96. Proceedings Vol. 2/3, pp. 673-678, France, 1996.
- aB.8.Burlikowski W., Spalek D.: Calculation for pm-torque by means of hysteresis component. Proceedings of International Conference on Electrical Machines ICEM'2000 Vol.III, pp. 1232-1236 Helsinki, IX. 2000.
- aB.9.Byczkowska-Lipińska L., Gryglewicz-Kacerka W., Kacperski M.: Free vibration of the rotor synchronous machine. Proceedings of International Conference on Electrical Machines ICEM'96, Vol.I pp.371-376, Vigo, IX. 1996.
- aC.1.Coulomb J.L.: A methodology for determination of global electromechanical quantities from a finite elements analysis and its application to the evaluation of magnetics forces, torques and stiffness. IEEE Transaction on Magnetics, Vol. 19, No.6, pp.2514-2519, 1983.
- aC.2.Coulomb J.L., Meunier G.: Finite elements implementation of virtual work principle for magnetic or electric force and torque calculation. IEEE Transaction on Magnetics, Vol. 20, No.5, pp.1894-1896, 1984.
- aC.3.Coulomb J.L., Meunier G., Sabonnadiere J.C.: Energy methods for the evaluation of global quantities and parameters in a finite elements analysis of electromagnetic devices. IEEE Transaction on Magnetics, Vol. 21, No.5, pp.1817-1822, September 1985.
- aD.1.Demenko A., Nowak L.: Polowo-obwodowy model stanów pracy układów napędowych. VI Sympozjum Podstawowe Problemy Energoelektroniki i Elektromechaniki, Gliwice-Ustroń, Vol. I, ss.267-272, 1995.
- aD.2.Demenko A.: Movement simulation in finite element analysis of electric machine dynamics. IEEE Transaction on Magnetics, Vol.32, No.3, pp.1553-1556, 1996.
- aD.3.Di Barba P., Savini A., Wiak S.: 3-D Computer-aided analysis of an electrostatic motor. International Conference on Electrical Machines ICEM'94, Vol.II, pp.111-115, Paris 1994.
- aD.4.Domnisoru C., Simion A., Cojan M., Livadaru L.: Synchronous machine parameters using negative excitation regime. Proceedings of International Conference on Electrical Machines ICEM'98, Vol.I, pp.2094-2099, Stambuł 1998.

- aE.1.Escarela-Perez R., Campero-Littlewood E.: Analytical formula for accurate torque calculation in 2D numerical modelling of rotating electrical machines. 12th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, COMPUMAG, pp. 206-207, Sapporo 1999.
- aF.1.Farschtschi A., Plontke J., Roscher H.-J., Dreschler S.: Berücksichtigung von ferromagnetischen Material in der FNM durch Einführung von Magnetisierungsstromdichten. *Electrical Engineering* 81 (1998), pp.65-68.
- aG.1.Glinka T.: Własności komutacyjne maszyn prądu stałego przy pulsującym bądź szybkozmiennym prądzie twornika. Monografia habilitacyjna, ZN Elektryka 44, Gliwice 1974.
- aG.2.Guangyu X., Nasar S.A.: Analysis of fields and forces in a permanent magnet linear synchronous machine based on the concept of magnetic charge. *IEEE Transaction on Magnetics* Vol.25, No.3, pp.2713-2719, 1989.
- aH.1.Hamler A., Hribernik B., Likar M., Guid N.: Torque calculation by Bernstein Berier's surfaces. *IEEE Transaction on Magnetics* Vol.31, No.3, May 1995, pp.1885-1887.
- aH.2.Hirsinger L., Billardon R.: Magnetoelastic finite element analysis including magnetic forces and magnetostriction effects. *IEEE Transaction on Magnetics* Vol.31, No.3, pp.1877-1880, 1995.
- aH.3.Ho S.C., Hong C.G., Hwang G.J.: Transient and steady-state performance of a squirrel-cage induction motor. *IEE Proceedings*. Vol.136, Part B, No.3, pp.136-142, May 1989.
- aH4.Huber J.: Electrodynamics forces exerted on a wheel-set moving on railway tracs. *E&M* No 3, pp. 169-174, 1959.
- aJ.1.Jacobus A., Müller W.: Numerical solution of forces and toques. *IEEE Transaction on Magnetics*, Vol.19, No.6, November 1983.
- aJ.2.Jordan A., Szymański J.: Analiza częstotliwościowa przebiegów falowych. XXXI Sympozjum Maszyn Elektrycznych'95, vol.I, ss.163-171, Ustroń, 1995
- aK.1.Kabashima T., Kawahare A., Goto T.: Force calculation using magnetizing currents. *IEEE Transaction on Magnetics*, Vol.24, No.1, pp.451-455, 1988.
- aK.2.Kalbhen AS.: Drehstrom-Wanderfeldantrieb für magnetische Strahlmittel. *etz Archiv* Vol.10 (1988) No.6 PAS., ss.189-193, 1988.
- aK.3.Kantartzis N.V., Yioultsis T.V., Kosmanis T.I., Tsibouksis T.D.: Nondiagonally anisotropic PML: A generalized unsplit-field wide-angle absorber for the efficient of the near-grazing incidence effect in FDTD meshes. 12th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, COMPUMAG, pp. 4-5, Sapporo 1999.
- aK.4.Kent D., Vachevanos G., Powers R.: The analysis of forces and torques in spherical induction motors. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol.23, No.1, January 1987.
- aK.5.Kloss G.: Magnetostatic Maxwell stresses and magnetostriction. *Electrical Engineering* 81 (1998), pp.77-80, 1998.
- aK.6.Komęza K., Pelikant A., Tegopoulos J., Wiak S.: Comparative computation of forces and torques of electromagnetic devices by means of difference formulation. *IEEE Transaction on Magnetics*, Vol.30, No.5, pp.3475-3478, 1994.
- aK.7.Kramer C.: Auslesung und Optimierung eines Permeanenterregten hochdynamischen Synchronstellmotors mittels numerischer and analytischer Feldberechnung. Diss. Darmstadt 1983.
- aL.1.Low T.S., Bi C., Liu Z.J.: A hybrid technique for electromagnetic torque and force analysis of electric machines. *COMPEL - The International Journal for Computation &*

- Mathematics in Electrical & Electronics Engineering, Vol. 16, Issue 3, pp.191-205, MCB UK, 1997.
- aŁ.1.Łyskawiński W.: Formy kwadratowe do jednoznacznego ujęcia polowego sił i momentów ponderomotorycznych w przetwornikach elektromechanicznych. Rozprawa doktorska, Poznań, 1997.
- aM.1.Mahfooz Sh., Hardo May.: Grenzwerte der Normalkräfte von linearen Asynchronmotoren. etz Archiv Vol. 10 (1988) No.3. PAS.67-72, 1988.
- aM.2.Mercier J.C., Durantay L., Enon J.: Finite elements computation of the magnetic fields and forces in an induction machine at its rated point with simulation of electromechanical defects. Proceedings ICEM'94, pp.44-50, Paris 1994.
- aM.3.Mizia J., Adamiak K., Eastman., Dawson C.E.: Finite element force calculation: comparison of methods for electric machines. IEEE Transaction on Magnetics Vol.24, No.1, pp.447-450, 1988.
- aM.4. Moreno F.M., Vazquez J.J.L., Texeira M.M., Beltran M.F.: Transient performance analysis of rotary electrical machines using variational calculus and Hamiltonial mechanics. Proceedings of International Conference on Electrical Machines ICEM'96, Vol.I pp.186-191, Vigo 1996.
- aN.1.Netuschil A.V.: Electromechanical Huber effect and its development. Electrictschestvo, No.8, pp.24-28, 1992.
- aN.2.Netuschil A.V.: Two discs motor of Moyssides as the development of Huber effect. Electrictschestvo, No.7, pp.28-30, 1993.
- aO.1.Oberretl K.: Das zweidimensionale Luftspaltfeld des Asynchronmotors im Kurzschluss. Archiv für Elektrotechnik, Vol.64, pp.363-367, 1982.
- aP.1.Purczyński J., Kaszycki L.: Straty mocy i moment napędowy silnika indukcyjnego o symetrii kulistej. Rozprawy Elektrotechniczne, z.3 1988, ss.819-838.
- aR.1.Razek A.: Modelling of mechanical behaviour of an electromagnetic actuator accounting for damper effect. Proceedings ICEM'94, pp. 34-139, Paris 1994.
- aR.2.Ren Z., Besbes M., Boukhtache S.: Calculation of local force in magnetized materials. Proceedings of International Workshop on Electric and Magnetic fields from Numerical Models to Industrial Applications, 1992. pp. 641-646.
- aR.3.Ren Z., Razek A.: Local force computation in deformable bodies using edge elements. IEEE Transaction on Magnetics Vol.28, No.2, 1992, pp.1212-1215.
- aR.4.Ren Z.: Comparison of different force calculation method in 3D finite element modelling. IEEE Transaction on Magnetics Vol.30, No.5, pp.3471-3474, 1994.
- aR.5.Ren Z., Ionescu B., Berbes M., Razek A.: Calculation of mechanical deformation of magnetic material in electromagnetic devices. IEEE Transaction on Magnetics Vol.31, No.3, pp.1873-1876, 1995.
- aS.1.Sadowski N., Lefevre Y., Lajoie-Mazenc M., Cros J.: Finite element torque calculation in electrical machines while considering the movement. IEEE Transaction, Vol.28, No.2, pp. 1410-1413, 1992.
- aS.2.Spalek D.: Idea of evaluation of permeantive electromagnetic torque in synchronous machine. The Second Chinese International Conference on Electrical Machines CICEM'95 Vol.I pp.242-247, Hangzhou, China, 1995.
- aS.3.Spalek D.: Example for evaluation of permeantive electromagnetic torque in synchronous machine. The Second Chinese International Conference on Electrical Machines CICEM'95 Vol.I pp.248-255, Hangzhou, China, 1995.

- aS.4.Spalek D.: Podstawy teoretyczne oceny udziału momentu permeancyjnego w całkowitym momencie silnika synchronicznego. XXXI Sympozjum Maszyn Elektrycznych'95 ss.301-307, Ustroń IX.1995.
- aS.5.Spalek D.: Przykład oceny udziału momentu permeancyjnego w momencie elektromagnetycznym silnika synchronicznego. XXXI Sympozjum Maszyn Elektrycznych'95, ss.308-314, Ustroń IX.1995.
- aS.6.Spalek D.: Evaluation of permeantive component of electromagnetic torque in electrical machine. 8th ISTET'95 International Symposium on Theoretical Electrical Engineering, Proc. pp.140-143, Thessaloniki Greece, 1995.
- aS.7.Spalek D.: Asymmetrical energy tensors of electromagnetic field. Archives of Electrical Engineering Vol. XLIV, No.4, pp.527-543, 1995.
- aS.8.Spalek D.: Moment reluktancyjny a permeancyjny - definicje oraz różnice. ZN Pol.Śl., Elektryka, nr 149, ss.137-149, Gliwice 1996.
- aS.9.Spalek D.: Maxwell equations for generalized lagrangian functional. IEE Proceedings Science, Measurement and Technology, Vol.143, No.2, pp.99-102, 1996.
- aS.10.Spalek D.: Rozkład tensora energii pola elektromagnetycznego na składowe i ich zastosowanie. XVIII Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów. SPETO Gliwice-Ustroń Proc.Vol.I, pp.155-163, 1995.
- aS.11.Spalek D.: Fizykalna interpretacja zasad zachowania energii w oparciu o pojęcie niesymetrycznych tensorów energii. XIX Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów. SPETO GLIWICE-USTROŃ Proc.Vol.II., pp.189-192, 1996.
- aS.12.Spalek D.: Szeregi Fouriera prądu magnesującego w nieliniowych magnetykach. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., Elektryka nr 154, ss.101-108, Gliwice 1996.
- aS.13.Spalek D., Burlikowski W.: Field evaluation for electromagnetic torque components. IEE Proceedings Electric Power Applications, Vol.144, No. 2, pp.85-94, 1997.
- aS.14.Spalek D.: Permeantive and reluctantive torque components in electrical machines determined by new asymmetrical stress tensors. Proceedings of International Conference on Electrical Machines ICEM'96, Vol.II pp.73-78, Vigo 1996.
- aS.15.Spalek D., Burlikowski W.: Hysteresis phenomenon influence on forces and torques in electromechanical converter. 9th International Symposium on Theoretical Electrical Engineering ISTET'97, Proc. pp. 263-266, Palermo Italy 1997.
- aS.16.Spalek D.: Electromagnetic torque components in synchronous salient-pole machine. COMPEL - The International Journal for Computation & Mathematics in Electrical & Electronics Engineering, Vol. 16, Issue 3, pp.129-143, MCB University Press,UK 1997.
- aS.17.Spalek D.: Electromagnetic torque in anisotropic electromechanical converter. Archives of Electrical Engineering, Vol. XLVII No 1, pp. 39-56, 1998.
- aS.18.Spalek D.: Asynchronous torque component for solid rotor induction motor on ecentricity. Materiały VIII Sympozjum PPEE'99, pp.399-404, Wisła 1999.
- aS.19.Spalek D.: Maxwell's equations for certain form of electromagnetic field lagrangian. XXII Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów IC-SPETO, Proc. pp. 71-74, Gliwice-Ustroń 1999.
- aS.20.Spalek D.: The temperature distribution and heat transfer in anisotropic electromechanical converter, Heat & Mass Transfer, 42 pp. 3631-3641, 1999.
- aS.21.Spalek D.: Anisotropy component of electromagnetic torque in electrical machines. Archives of Electrical Engineering, Vol. XLVIII, No 1-2, pp.109-126, 1999.

- aS.22.Spalek D., Burlikowski W.: Hysteresis component of electromagnetic torque in permanent magnet machines. Archives of Electrical Engineering, Vol. XLVIII No 3, pp. 245-260, 1999.
- aS.23.Spalek D.: Fast analytical model of induction motor for approaching rotor eccentricity. COMPEL. International Journal for Computation Mathematics in Electrical & Electronics Engineering, Vol. 18, Issue 4, pp. 570-586, MCB University Press UK 1999.
- aS.24.Spalek D.: Third boundary condition formulation for electromagnetic field problems, Journal of Technical Physics, Vol. XL No.2, pp. 209-221, 1999.
- aS.25.Spalek D.: Fourth boundary condition for electromagnetic field problems, Journal of Technical Physics, Vol. 41, No. 2, pp.107-121, 2000.
- aS.26.Spalek D.: Różnicowy pseudotensor energii pola elektromagnetycznego a metoda prądów magnetyzacji. ZN Politechniki Śląskiej, Elektryka nr 167, pp.57-78, Gliwice 2000.
- aS.27.Spalek D.: Obliczanie momentu elektromagnetycznego w środowiskach anizotropowych. ZN Politechniki Śląskiej, Elektryka nr 167, pp.79-86, Gliwice 2000.
- aS.28.Spalek D.: Torque decrease in drug-cup motor due to rotor eccentricity. Proceedings of International Conference on Electrical Machines ICEM'2000 Vol.I, pp. 482-486 Helsinki, IX. 2000.
- aS.29.Spalek D.: Analysis of excitation system modified for power station generator. Proceedings of International Conference on Electrical Machines ICEM'2000 Vol.II, pp. 977-981 Helsinki, IX. 2000.
- aS.30.Spalek D.: Przetwornik elektromechaniczny a układ termodynamiczny - wybrane podobieństwa. Materiały IX Sympozjum PPEE'00, ss.289-294, Wisła 2000.
- aS.31.Spalek D.: Turbogenerator as a electromechanical converter – transient states. Materiały IX Sympozjum PPEE'00, pp.295-300, Wisła 2000.
- aS.32.Spalek D.: Analiza naprężeń stycznych i promieniowych w izolacji wirnika cylindrycznej maszyny synchronicznej. XXXVII Międzynarodowe Sympozjum Maszyn Elektrycznych'01 ZN 177 ss.15-20. Ustroń VI.2001
- aS.33.Spalek D.: Electromagnetic torque surface representation. XI Sympozjum Środowiskowe. Zastosowania Elektromagnetyzmu w Nowoczesnych Technikach i Informatyce, ss.109-112. Wenecja k.Bydgoszczy VI.2001.
- aSu.1.Suffczyński M.: Note on electrodynamics without potential. Acta Physica Polonica, Vol.XII, pp.83-86, 1953.
- aSu.2.Suffczyński M.: Quantisation of non-linear electrodynamics. Acta Physica Polonica, Vol.XIII, pp.291-299, 1954.
- aSt.1.Stoll R.L.: Simple computational model for calculating the unbalanced magnetic pull on a two-pole turbogenerator rotor due to eccentricity. IEE Proceedings Electric Power Applications, Vol.144, No. 4, pp.263-270, 1997.
- aSt.2.Sturgess J.P.: Force calculations for finite-element simulations of time varying fields. ICEM'94 Vol.3., pp. 726-729, Paris 1994.
- aT.1.Taernhuvud T., Reichert K.: Accuracy problems of force and torque calculation in FE-system. IEEE Transaction on Magnetics, Vol.24, No.1, pp.443-446, 1988.
- aT.2.Takefumi K., Atsushi K., Tadahiko G.: Force calculation using magnetizing currents. IEEE Transaction on Magnetics, Vol.24, No.1, pp.451-455, 1988.

- aT.3.Tsukerman I., Lavers J.A., Konrad A.: Using complementary formulation for accurate computations of magnetostatic fields and forces in a synchronous motor. IEEE Transaction on Magnetics, Vol.30, No.5, pp.3479-3482, 1994.
- aT.4.Tsukerman I., Lavers J.A., Konrad A.: Finite element analysis of static and time-dependent fields and forces in a synchronous motor. Proceedings of International Conference on Electrical Machines ICEM'94, Vol. 2, pp.27-32, Paris 1994.
- aY.1.Yeong-Der Y., Gwo-Ji Ch., Der-Ray H.: Theoretical computations for the torque of magnetic coupling. IEEE Transaction on Magnetics Vol.31, No.3 May 1995, pp.1881-1884.
- aV.1.Vandeveld L., Gyselinck J.J.C., Melkebeek J.A.A.: Theoretical and numerical analysis of vibrations of magnetic origin of switched reluctance motors. 12th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, COMPUMAG, pp. 58-59, Sapporo 1999.
- aW.1.Wiak S., Di Barba P., Savini A.: 3-D Computer aided analysis of the „Berkeley” electrostatic micromotor. ICEM Gif-sur-Yvette, France, 1994.
- aW.2.Wignall A.N., Gilbert A.J., Yang S.J.: Calculation of forces on magnetised ferrous cores using the Maxwell stress method. IEEE Transaction on Magnetics, Vol.24, No.1 pp. 459-462, 1988.
- aW.3.Witczak P.: Calculation of force densities distribution in electrical machinery by means of magnetic stress tensor. Archives of Electrical Engineering, Vol. XLV, No.1, pp.67-81, 1996.
- aW.4.Witczak P.: Wyznaczanie drgań mechanicznych silnika indukcyjnego wywołanych siłami magnetycznymi. Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, nr 725, 1995.
- aZ.1.Zadrozny J.: Drgania uzwojonego rdzenia stojana silnika indukcyjnego. Przegląd Elektrotechniczny, z.7-8, 1970.
- aZ.2.Zadrozny J.: Straty I^2R a moment znamionowy magnetoelektrycznego silnika elektrycznego. Przegląd Elektrotechniczny, z.8, 1984.
- aZ.3.Zakrzewski K.: Pole elektromagnetyczne w ciałach ferromagnetycznych przewodzących. Zeszyty Naukowe Elektryka nr 38, Łódź 1972.
- aZ.4.Zakrzewski K.: Physical modelling of leakage field and stray losses in steel constructional parts of electromechanical devices. Archiv für Elektrotechnik, pp.129- 135, 1986.
- aZ.5.Zimny P.: Analiza drgań magnetotermospężystych płyty wywołanych udarem prądowym. XX Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów. SPETO Gliwice-Ustroń Proc.pp.185-188, 1997.
- aZ.6.Zimny P.: Pole elektromagnetyczne w strukturach periodycznych. XXI Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów. SPETO Gliwice-Ustroń Proc.pp.195-198, 1998.
- PI. Poradnik Inżyniera Elektryka. Praca zbiorowa, Tom I, II, III. WNT, Warszawa 1998.
- FEMAG - (opis programu) Interaktives Programm für Workstations (VAX, DEC, SUN HP) zur Berechnung 2-dimensionaler oder rotationssymmetrischer Magnet- und Wirbelstromfelder mit stationäre oder zeitlich sinusförmiger Anregung. Version 5.1. Institut für Elektrische Maschinen ETH, Zürich 1991.
- FEMM - (opis programu) - Aladdin Free Public License, <http://members.aol.com/dcm3c>.

MOMENTY SIŁ W ŚRODOWISKACH PRZEWODZĄCYCH I MAGNETYCZNYCH PRZETWORNIKÓW ELEKTROMECHANICZNYCH

STRESZCZENIE

W pracy zaprezentowano fizykalnie uzasadnioną ideę rozdziału całkowitej siły, a co za tym idzie, również momentu sił na dwa składniki działające: na ośrodek materialny (składnik środowiskowy, permeancyjny) i na prądy wymuszone (składnik Lorentza). Rozdział na dwa wyróżnione składniki jest zupełny - oba składniki uzupełniają się wzajemnie, opisując całkowitą siłę bądź moment sił powstający w przetworniku elektromechanicznym. Zaproponowana idea dekompozycji - przy założeniu pomijalności zjawiska histerezy, magnetostrykcji oraz efektów związanych ze zjawiskiem pędu pola elektromagnetycznego - odnosi się do stanów nieustalonych i ustalonych, przetworników izotropowych bądź anizotropowych.

Został zdefiniowany moment permeancyjny (środowiskowy) dla wirującej maszyny elektrycznej. Określono jego wartość dla maszyny synchronicznej oraz asynchronicznej. Proponowany rozkład momentów sił, w odniesieniu do maszyny synchronicznej, pozwala na wprowadzenie odmiennego od tradycyjnie stosowanego rozkładu momentu całkowitego. Dekompozycja momentu elektromagnetycznego na moment permeancyjny i moment Lorentza, w odróżnieniu od stosowanego podziału na moment synchroniczny i reluktancyjny, ma ogólniejszą interpretację. Moment reluktancyjny nie opisuje w całości wpływu, jaki wywierają cechy geometryczno-środowiskowe wirnika maszyny synchronicznej na wartość momentu sił działającego na wirnik maszyny. Moment środowiskowy - działający na ferromagnetyczny wirnik maszyny - stanowi około (60-70) % całkowitego momentu elektromagnetycznego maszyny synchronicznej z wydatnymi biegunami w znamionowym stanie pracy, przewyższając około dwukrotnie wartość momentu reluktancyjnego. W stanach awaryjnych pracy turbogeneratorsa również tego samego rzędu wartości może osiągać moment permeancyjny. Wydzielone składowe momentu sił pozwalają na określanie naprężeń mechanicznych w izolacji wirnika.

Idea rozkładu może być również z powodzeniem stosowana w odniesieniu do maszyny indukcyjnej o niesymetrycznym wirniku. Moment permeancyjny opisuje tu wartość niepożądanego składnika momentu sił, jak i pozwala na podanie prostego algorytmu prowadzącego do wyznaczenia wartości strat mocy w wirniku maszyny.

Zdefiniowano różnicowy tensor energii pola elektromagnetycznego, który pozwala na wprowadzenie zmodyfikowanego algorytmu obliczania momentu metodą prądów magnetyzacji.

W pracy rozważono również możliwość przedstawienia całkowitego momentu sił działających w środowiskach anizotropowych magnetycznie poprzez stosowną całkę powierzchniową.

W pracy, w oparciu o analizę numeryczną, określono wartości sił i momentów sił w elektromagnesie prądu stałego oraz w maszynie synchronicznej z biegunami utajonymi, jak i wydatnymi. Zaś w oparciu o otrzymane rozwiązania analityczne dokonano obliczeń momentów sił w modelowej maszynie synchronicznej (analiza monoharmoniczna), w maszynie indukcyjnej o litym, anizotropowym symetrycznym oraz ekscentrycznie wirującym wirniku (dwuwymiarowa analiza połowa). Określono również rozkład gęstości sił radialnych w maszynie asynchronicznej o przewodzącym i anizotropowym magnetycznie wirniku.

TORQUES IN CONDUCTING AND MAGNETIC MATERIALS OF ELECTROMECHANICAL CONVERTERS

ABSTRACT

In this work the decomposition idea of the force for two components for electromechanical converter has been presented. One component acts upon the material region the second upon the currents. The decomposition for these two components is complete, and these components describe together the total either force or torque. The mathematical correctness of the idea with the help of the coenergy function has been proved. The idea proposed of the decomposition - if omitted the electromagnetic field momentum phenomena - for transient and steady-state, for isotropic and anisotropic electromechanical converter could be applied.

There is defined the permeantive torque. The permeantive torque for the synchronous and asynchronous machines has been evaluated. The permeantive torque enables one to calculate the stresses in insulation of the coils in synchronous salient-pole machine. The defined torque leads to the decomposition method that is different than the traditionally used in the electrical machine theory. Particularly, the idea of the decomposition and its completeness enables one to criticize the reluctance torque. The separation for the permeantive and the currents torque, on the contrary to the decomposition for the synchronous and the reluctance torque, has got the simple and the general interpretation. The reluctance torque does not describe entirely the influence of the geometrical and region features for the torque value. The permeantive torque, which acts upon the ferromagnetic rotor core - is about (60-70)% for salient-pole synchronous machine with nominal state of the work. The value is about twice times higher than the value of the reluctance torque. Moreover, that fact is important for designing process of the salient-pole synchronous machine. For chosen loci of cylindrical generator the permeantive torque keeps the analogous ratio. The tension in some parts of rotor isolation could be easily calculated with the help of the permeantive torque value.

The permeantive torque for induction machines with eccentric and asymmetrical rotor constitutes the simple way for calculating of the unwilling torque component and eddy-current losses in machine rotor.

The residual tensor defined gives the insight to the magnetic currents method. It enables to formulate the modified algorithm for electromagnetic torque calculation.

There is also considered the way for surface representation of total electromagnetic torque for anisotropic magnetic regions.

In this work the numerical analysis for the direct current actuator and for the both salient-pole and cylindrical synchronous machine has been carried. Moreover, the considerable attention for analytical solutions of magnetic field distribution for the simplified synchronous machine (monoharmonic analysis) and the eccentric rotating induction machine with anisotropic and conducting rotor (two dimensional field analysis) has been paid. The radial force density for the asynchronous machine with the conducting and anisotropic rotor has been evaluated.

The main thesis of the work state:

2. The material force component has been detached for electromechanical converters with magnetic field being predominant (with respect to its volume density). This component is described mathematically with the help of nonhomogeneous component. The material component is called the either permeantive or material force/torque. The permeantive torque could be used for tension calculation for salient-pole and cylindrical synchronous machine. The permeantive torque leads to formulate the algorithm that enables us to calculate the undesirable torque component for machine with eccentric rotor.
3. The residual energy tensor of electromagnetic field $\Delta\sigma_{uw}$ has been defined as follows

$$\Delta\sigma_{uw} = -I_u B_w + E_u P_w + \delta_{uw} \frac{1}{2} (\vec{B}\vec{I} - \vec{E}\vec{P}),$$

that appears in given below relation for nonhomogeneous component:

$$\vec{N} = \Delta\vec{f} + \vec{i}_u \text{div}_{|u|} (\Delta\vec{\sigma}_u) - \Delta\vec{k}.$$

The written above equation has been proved basing on:

- Maxwells equation of electromagnetic field,
- the Lorentzs relation for force density:

$$\vec{f}_L = \rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}.$$

The modification of magnetising current method with the help of the residual energy tensor of electromagnetic field has been proposed. The force density is given by the divergence of the residual energy tensor of electromagnetic field and the nonhomogeneous component.

4. The total torque acting in anisotropic region can be presented in the form of surface integral. This theorem has been proved for anisotropic region that reluctivity matrix is symmetrical. There is pointed out, this theorem is not satisfied in the case the reluctivity matrix is non-symmetrical.

*Niniejsza praca jest rozwinięciem pierwotnie wydanej monografii habilitacyjnej autora jako
Zeszyt Naukowy nr 179 serii Elektryka w 2001 roku:*

Momenty sił w środowiskach przewodzących i magnetycznych przetworników elektromechanicznych. Zeszyty
Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 179, Gliwice 2001.

dostępna na stronie <http://www.elekt.polsl.pl/dspalek/>

