1 Imię i nazwisko

Marcin Sowa

2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe

⇒ 2013, **doktor nauk technicznych w dyscyplinie Elektrotechnika**, Politechnika Śląska, Wydział Elektryczny, tytuł rozprawy: *Wybrane analityczno-numeryczne metody rozwiązywania nieliniowych zagadnień brzegowych w teorii pola elektromagnetycznego* (obrona pracy doktorskiej z wyróżnieniem) (promotor: prof. dr hab. inż. Dariusz Spałek, recenzenci: prof. dr hab inż. Marian Łukaniszyn, prof. dr hab inż. Bernard Baron),

⇒ 2008, dyplom ukończenia studiów magisterskich, Politechnika Śląska, Wydział Automatyki, Elektroniki i Informatyki, kierunek: *Makrokierunek: Automatyka i Robotyka, Elektronika i Telekomunikacja, Informatyka* (studia w języku angielskim); specjalizacja: *Procesy informacyjne w sterowaniu*; tytuł pracy magisterskiej: *Model of the regulatory feedback and oscillations of expression of the p53 gene.*

3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

Okres	Nazwa pracodawcy i miejscowość	Stanowisko	Rodzaj umowy
15.10.2009 – 30.06.2010	Politechnika Śląska w Gliwicach	Doktorant	Umowa-zlecenie
5.10.2010 – 30.06.2011	Politechnika Śląska w Gliwicach	Doktorant	Umowa-zlecenie
14.10.2011 – 17.06.2012	Politechnika Śląska w Gliwicach	Doktorant	Umowa-zlecenie
1.10.2012 – 17.06.2013	Politechnika Śląska w Gliwicach	Doktorant	Umowa-zlecenie
1.10.2008 – 17.04.2013	Politechnika Śląska w Gliwicach	Doktorant	Stypendium doktoranckie
1.06.2013 – obecnie	Politechnika Śląska w Gliwicach	Adiunkt	Umowa o pracę

4 Opis osiągnięcia naukowego

Wskazanie osiągnięcia naukowego wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i

tytule w zakresie sztuki (Dz. U. 2016 r. poz. 882 ze zm. w Dz. U. z 2016 r. poz. 1311.):

A Tytuł osiągnięcia naukowego

Numeryczne rozwiązywanie zagadnień obwodów wykorzystujących pochodne ułamkowego rzędu

B Wykaz prac naukowych dokumentujących osiągnięcie naukowe, stanowiące podstawę ubiegania się o stopień doktora habilitowanego

[1] M. Sowa: "A subinterval-based method for circuits with fractional order elements", Bull. Pol. Ac.: Tech. 62 (3), (2014) pp. 449–454.
Udział procentowy: 100 %
Impact Factor: 0.914
Punktacja MNiSW: 25

[2] M. Sowa: "The subinterval-based ("SubIval") method and its potential improvements", XXXIX International Conference IC-SPETO 2016, Gliwice – Ustroń, 18-21.05.2016 (2016).
(publikacja w materiałach konferencyjnych)
Udział procentowy: 100 %

[3] M.Sowa: "SubIval – a numerical method for fractional derivatives in initial value problems". Konferencja WD 2016, 11- 13.06.2016, (2016) pp. 191-192.
(publikacja w materiałach konferencyjnych)
Udział procentowy: 100 %

[4] M. Sowa: "Application of SubIval, a method for fractional-order derivative computations in IVPs" in Theory and applications of non-integer order systems. Springer International Publishing, 2017, pp. 489–499 in series: Lecture Notes in Electrical Engineering vol. 407 (2017).
(jako rozdział w monografii indeksowanej w bazie Scopus)
Udział procentowy: 100 %
Punktacja MNiSW: 5

[5] M. Sowa: "Numerical computations of the fractional derivative in IVPS, examples in MATLAB and Mathematica" Informat. Autom. Pomiary Gosp. Ochr. Środ. t. 7 z. 3, (2017) pp. 19-22.
Udział procentowy: 100 %
Punktacja MNiSW: 7

[6] M.Sowa: "Error computation strategies in an adaptive step size solver for time fractional problems" in Selected problems on experimental mathematics. Wydaw. Politechniki Śląskiej, 2017, pp. 89-102.
Udział procentowy: 100 %
Punktacja MNiSW: 5

[7] M. Sowa: "SubIval computation time assessment", Proceedings of International Interdisciplinary PhD Workshop 2017. IIPhDW 2017, September 9-11, 2017, Łódź (2017).
(publikacja w materiałach konferencyjnych)
Udział procentowy: 100 %

[8] M. Sowa: "Application of SubIval in solving initial value problems with fractional derivatives", Applied Mathematics and Computation 319, (2018) pp. 86–103.
Udział procentowy: 100 %
Impact Factor: 2.300
Punktacja MNiSW: 40

[9] M. Sowa: "A Harmonic Balance Methodology for Circuits with Fractional and Nonlinear Elements", Circuits Syst Signal Process, Vol. 37, Issue 11, (2018) pp. 4695–4727.
Udział procentowy: 100 %
Impact Factor: 1.998
Punktacja MNiSW: 25

[10] M. Sowa: "Solutions of Circuits with Fractional, Nonlinear Elements by Means of a SubIval Solver", in Non-Integer Order Calculus and its Applications. RRNR 2017. Springer, 2019, in series: Lecture Notes in Electrical Engineering, vol 496 (2019) pp. 217-228.
(jako rozdział w monografii indeksowanej w bazie Web of Science)
Udział procentowy: 100 %
Punktacja MNiSW: 15

[11] M. Sowa: "gcdAlpha – a semi-analytical method for solving fractional state equations", Poznan University of Technology Academic Journals. Electrical Engineering 96, (2018) pp. 231–242.
Udział procentowy: 100 %
Punktacja MNiSW: 9

[12] M. Sowa: "A local truncation error estimation for a SubIval solver", Bull. Pol. Ac.: Tech. 64 (4), (2018) pp. 475–484.
Udział procentowy: 100 %
Impact Factor: 1.361
Punktacja MNiSW: 25

[13] M. Sowa: "Solving fractional circuits with sinusoidal sources by using the gcdAlpha method", ITM Web of Conferences 19, 01008 ZKwE'2018 (2018).
(publikacja w materiałach indeksowanych w bazie Web of Science)
Udział procentowy: 100 %
Punktacja MNiSW: 15

[14] M.Sowa, A.Kawala-Janik, W.Bauer: "Fractional Differential Equation Solvers in Octave/Matlab", 2018 23rd International Conference on Methods & Models in Automation & Robotics (MMAR), (2018) pp. 628-633.
(publikacja w materiałach indeksowanych w bazie Scopus)
Udział procentowy: 60 %
Mój wkład w powstanie pracy polegał na opisie działania metody SubIval w solwerze numerycznym, opisie działania automatycznego doboru kroku czasowego, implementacji solwera numerycznego opartego na metodzie SubIval dla środowisk Matlab i Octave, implementacji solwera numerycznego opartego na aproksymacji wykorzystującej definicję Grünwalda-Letnikova, opracowaniu zagadnienia testowego, otrzymaniu rozwiązania referencyjnego, otrzymaniu rozwiązań różnymi solwerami, porównaniu błędów i czasów obliczeń.

[15] M.Sowa: "Application of a SubIval Numerical Solver for Fractional Circuits", World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Electrical and Computer Engineering Vol. 12, No. 8, 2018.
(publikacja w materiałach konferencyjnych)
Udział procentowy: 100 %

C Zastosowania powiązanej tematyki, opis osiągnięcia i jego wkładu w rozwój dyscypliny

Osiągnięcie składa się z cyklu 15 powiązanych tematycznie publikacji. Liczba punktów MNiSW za te publikacje wynosi 171. W osiągnięciu wyróżnić można 6 jednoautorskich prac opublikowanych w czasopismach lub recenzowanych materiałach z listy Master Journal List (Web of Science), przy czym ich sumaryczny Impact Factor wynosi 6.573. Łączna liczba prac zaliczanych do osiągnięcia, indeksowanych w bazie Scopus wynosi 7 (z czego jedna jest pracą współautorską).

Niniejszy rozdział podzielono na kilka podpunktów:

- w pierwszym podrozdziale zamieszczono krótkie wprowadzenie dotyczące rachunku różniczkowego ułamkowego rzędu, który jest działem matematyki powiązanym z opisywanym osiągnięciem,
- drugi podrozdział zawiera opis przydatności wspomnianego działu matematyki w modelowaniu pewnych elementów w elektrotechnice – tu również

przedstawiono wyniki badań, które należą do pobocznych projektów autora, nie powiązanych bezpośrednio z osiągnięciem (aczkolwiek pozostała działalność naukowa streszczona została w rozdziale D); ich zaprezentowanie ma jednak przedstawić weryfikację (w tym autorską) uzasadnienia stosowania rachunku różniczkowego ułamkowego rzędu w zagadnieniach elektrotechniki,

- w trzecim podrozdziale omówiono stan wiedzy na temat możliwości rozwiązywania zagadnień obwodów wykorzystujących pochodną ułamkowego rzędu,
- w czwartym podrozdziale zawarto opis właściwego osiągnięcia i istotnego wkładu autora w rozwój dziedziny i specjalizacji rozwiązywania zagadnień wykorzystujących pochodne ułamkowego rzędu w elektrotechnice.

C.1 Rachunek różniczkowy ułamkowego rzędu i jego zastosowania

Symbolicznie za datę powstania koncepcji pochodnej niecałkowitego rzędu (często zwanej pochodną ułamkowego rzędu lub, dla uproszczenia, pochodną ułamkową) uznaje się rok 1695 [1–3]*. Istotnego rozwoju rachunek różniczkowy ułamkowego rzędu doczekał się jednak dopiero około XIX wieku [4–6]. W pracach na temat tego działu matematyki odnaleźć można wiele różnych definicji pochodnej ułamkowego rzędu oraz całki ułamkowego rzędu (lub ogólnie tak zwanej całkopochodnej). Definicja, którą brano pod uwagę w pracach to definicja Caputo [7], gdzie rozpatrywano jedynie pochodną rzędu $\alpha \in [0, 1]$:

$$ {}_{t_0}\mathrm{D}_t^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^{t} \frac{x^{(1)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} \mathrm{d}\tau, \tag{1} $$

gdzie $x^{(1)}(t)$ oznacza pochodną pierwszego rzędu zmiennej $x(t)$, t_0 oznacza początkową chwilę czasu analizy a $\Gamma(\cdot)$ oznacza funkcję gamma:

$$ \Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t. \tag{2} $$

Definicja Caputo dla rzędu $\alpha \in [0, 1]$ zawiera prostą relację co do starszej definicji pochodnej ułamkowej – definicji Riemanna-Liouville'a [8]:

$$ {}^{\mathrm{RL}}_{t_0}\mathrm{D}_t^{\alpha} x(t) = {}_{t_0}\mathrm{D}_t^{\alpha} x(t) + \frac{x(t_0)}{\Gamma(1-\alpha)} (t-t_0)^{-\alpha}. \tag{3} $$

W ostatnich latach zauważyć można duży wzrost popularności tego działu matematyki. Tym bardziej, że przyczyną nie jest jedynie fakt, że rachunek różniczkowy ułamkowego rzędu jest wymagający pod względem obliczeniowym, lecz przede wszystkim ze względu na fakt, że pochodne i całki ułamkowego rzędu znalazły zastosowania w wielu specjalizacjach, między innymi:

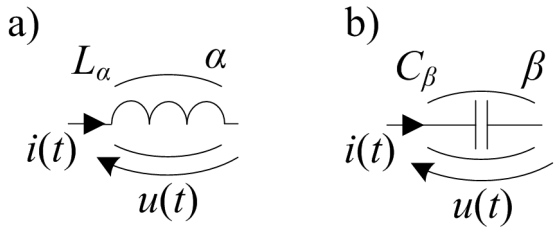
*literatura cytowana w niniejszym rozdziale znajduje się na jego końcu

- w zagadnieniach automatyki (w dużej mierze ze względu na analizę regulatorów PID ułamkowego rzędu [9, 10]),
- w zagadnieniach pola elektrycznego [11] i magnetycznego [12] przy modelowaniu materiałów o skomplikowanych właściwościach,
- w zagadnieniach lepkosprężystości [13, 14],
- przy projektowaniu filtrów ułamkowego rzędu [15, 16],
- w analizach pól temperaturowych [17, 18], gdy rozpatrywane są materiały o istotnym wpływie historii oddziaływań.

Zastosowanie pochodnej ułamkowego rzędu występuje również w elektrotechnice (konkretnie w zagadnieniach obwodów), czego dotyczy kolejny podrozdział.

C.2 Zastosowanie modeli ułamkowego rzędu w analizach obwodów

Rachunek różniczkowy ułamkowego rzędu zastosowany w teorii obwodów pozwala na wprowadzenie dwóch podstawowych elementów niestandardowych, mianowicie cewkę ułamkowego rzędu i kondensator ułamkowego rzędu (rysunek 1). W dalszych częściach niniejszego wniosku, dla uproszczenia, elementy te nazywane są *elementami ułamkowymi* oraz odpowiednio *cewką ułamkową* i *kondensatorem ułamkowym*. Podobnie w przypadku zagadnień uwzględniających zastosowanie pochodnej ułamkowego rzędu – nazywane są dla uproszczenia *zagadnieniami ułamkowymi*. Obwody wykorzystujące elementy ułamkowe są dla uproszczenia nazywane *obwodami ułamkowymi*.



Rysunek 1: Symbole (pierwszy raz zaproponowane w publikacji [22]) elementów ułamkowego rzędu: a) cewka ułamkowa, b) kondensator ułamkowy

Wprowadzanie tych niestandardowych elementów było źródłem pewnych dyskusji na temat ich odniesienia do klasycznej teorii obwodów [19]. Ich postać nie wynika jednak z wyprowadzeń matematycznych uproszczonych przypadków jak dla zwyczajnej cewki i kondensatora (całkowitego rzędu). W publikacjach [20, 21] odpowiedziano przede wszystkim odwołując się na przydatność tych elementów w modelowaniu. W przypadku badań autora elementy te właśnie są traktowane

jako pomocne w modelowaniu, to znaczy zawierające przydatną zależność z punktu widzenia obserwacji odpowiedzi elementów i ich odzwierciedlenia. Traktowane są fenomenologicznie, tzn. istotnym rezultatem jest tu odpowiedź elementu. Natomiast w dalszym ciągu występują tu najbardziej istotne mierzalne wielkości występujące w analizach obwodów, czyli napięcie i prąd.

Kondensator ułamkowy opisany jest równaniem:

$$C_\beta \, {}_{t_0}\mathrm{D}_t^\beta u(t) = i(t), \tag{4}$$

gdzie C_β jest sztucznym parametrem, którego jednostka to $\mathrm{F} \cdot \mathrm{s}^{\beta-1}$. Cewka ułamkowa jest opisana równaniem:

$$L_\alpha \, {}_{t_0}\mathrm{D}_t^\alpha i(t) = u(t), \tag{5}$$

gdzie L_α również nie odnosi się do klasycznej teorii obwodów – parametr ten opisany jest jednostką $\mathrm{H} \cdot \mathrm{s}^{\alpha-1}$. Przy wprowadzaniu elementów przydatnych w modelowaniu – można również wykorzystać nieliniowy kondensator ułamkowy (rysunek 2b) opisany równaniem różniczkowym:

$${}_{t_0}\mathrm{D}_t^\beta q(t) = i(t), \tag{6}$$

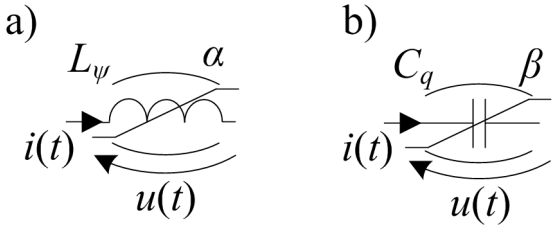
gdzie q jest zmienną o jednostce $\mathrm{C} \cdot \mathrm{s}^{\beta-1}$, zatem nie opisuje ładunku, lecz jedynie jest zmienną pośrednią w obliczeniach, przy czym dodatkowo wprowadzana jest funkcja $q(u)$ lub $u(q)$ – podobnie do klasycznego nieliniowego kondensatora, gdzie wprowadza się zależność ładunku i napięcia. Tak zdefiniowany nieliniowy element ułamkowy w dalszym ciągu opisuje relację pomiędzy napięciem a prądem, lecz jest ona bardziej skomplikowana. Przy modelowaniu z wykorzystaniem pochodnej ułamkowego rzędu wprowadzić można również nieliniową cewkę ułamkowego rzędu (rysunek 2a), której równaniem różniczkowym jest:

$${}_{t_0}\mathrm{D}_t^\alpha \psi(t) = u(t), \tag{7}$$

gdzie ψ jest zmienną o jednostce $\mathrm{Wb} \cdot \mathrm{s}^{\alpha-1}$, zatem nie przedstawia strumienia skojarzonego. Podobnie jak w przypadku nieliniowego kondensatora ułamkowego rzędu – tu również dodatkowo wprowadzana jest funkcja $\psi(i)$ lub $i(\psi)$.

Mimo iz ψ nie przedstawia strumienia skojarzonego Ψ to przy wykorzystaniu takiego modelu można jednak go wyznaczyć wykorzystując dobrze znane równanie:

$$\Psi(t) = \Psi(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{8}$$



Rysunek 2: Symbole (pierwszy raz zaproponowane w publikacji [22]) nieliniowych elementów ułamkowego rzędu: a) nieliniowy kondensator ułamkowy, b) nieliniowa cewka ułamkowa (L_ψ oraz C_q nie reprezentują tu parametrów, lecz jedynie symbole elementów)

Jedną z pierwszych obserwacji jaką można dokonać pod względem przydatności zastosowania pochodnej ułamkowego rzędu wynika z analizy charakterystyk częstotliwościowych elementów ułamkowych. Impedancja kondensatora ułamkowego ma postać:

$$\underline{Z}_\beta = \frac{1}{\underline{\mathrm{j}}_\beta\, \omega^\beta C_\beta}, \tag{9}$$

gdzie:

$$\underline{\mathrm{j}}_\beta = \exp\left(\mathrm{j}\beta\frac{\pi}{2}\right). \tag{10}$$

Impedancja cewki ułamkowej ma postać:

$$\underline{Z}_\alpha = \underline{\mathrm{j}}_\alpha\, \omega^\alpha L_\alpha, \tag{11}$$

gdzie:

$$\underline{\mathrm{j}}_\alpha = \exp\left(\mathrm{j}\alpha\frac{\pi}{2}\right). \tag{12}$$

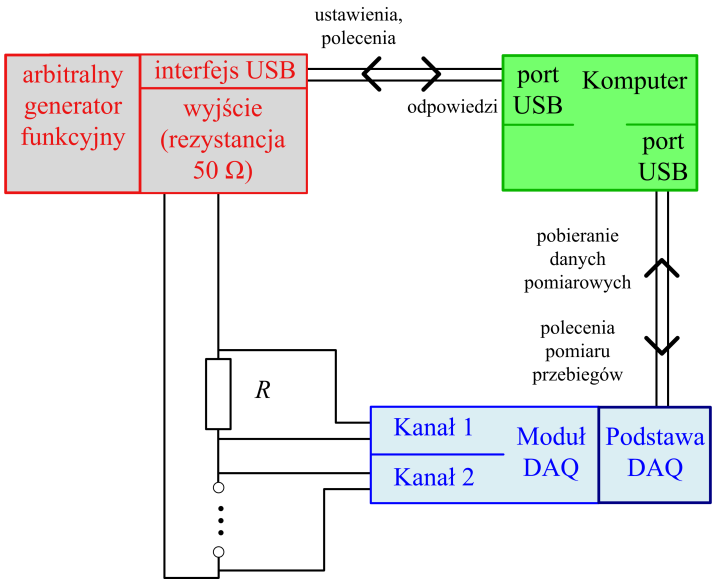
Elementy te posiadają zatem pewne stałe argumenty, jednoczenie posiadając wpływ modułu na częstotliwość.

Wskazówką do zastosowania modelu ułamkowego rzędu do odzwierciedlania odpowiedzi wybranych elementów mogą być właśnie wspomniane obserwacje przy charakterystykach częstotliwościowych. Dla pewnych elementów autor wniosku wykonał szereg dodatkowych badań (część z czego jeszcze nie została opublikowana [23–25], a jedynie ukazała się publikacja z fragmentem badań [26]). Są to badania wprawdzie nie zaliczane do *cyklu publikacji*, lecz stanowią weryfikację autora co do celowości stosowania pochodnej ułamkowego rzędu w analizach obwodów.

Do pobrania charakterystyk badanego elementu zastosowano stanowisko, którego schemat przedstawiono na rysunku 3. W stanowisku wykorzystano:

- arbitralny generator funkcyjny, gdzie występowała możliwość zadawania przebiegów przez interfejs USB (w badaniach autora wykorzystano generator GW Instek AFG-2105 [27]),

- kartę pomiarową (także zwaną "kartą akwizycji danych" składającą się z modułu NI-9239 [28] montowanego do podstawy cDAQ-9174 [29]), gdzie dane pobierano przez interfejs USB,
- rezystor o znanej rezystancji R, który służył do pomiaru prądu poprzez pomiar jego spadku napięcia,
- komputer z odpowiednim (autorskim) oprogramowaniem wykorzystującym bibliotekę do komunikacji z kartą pomiarową.



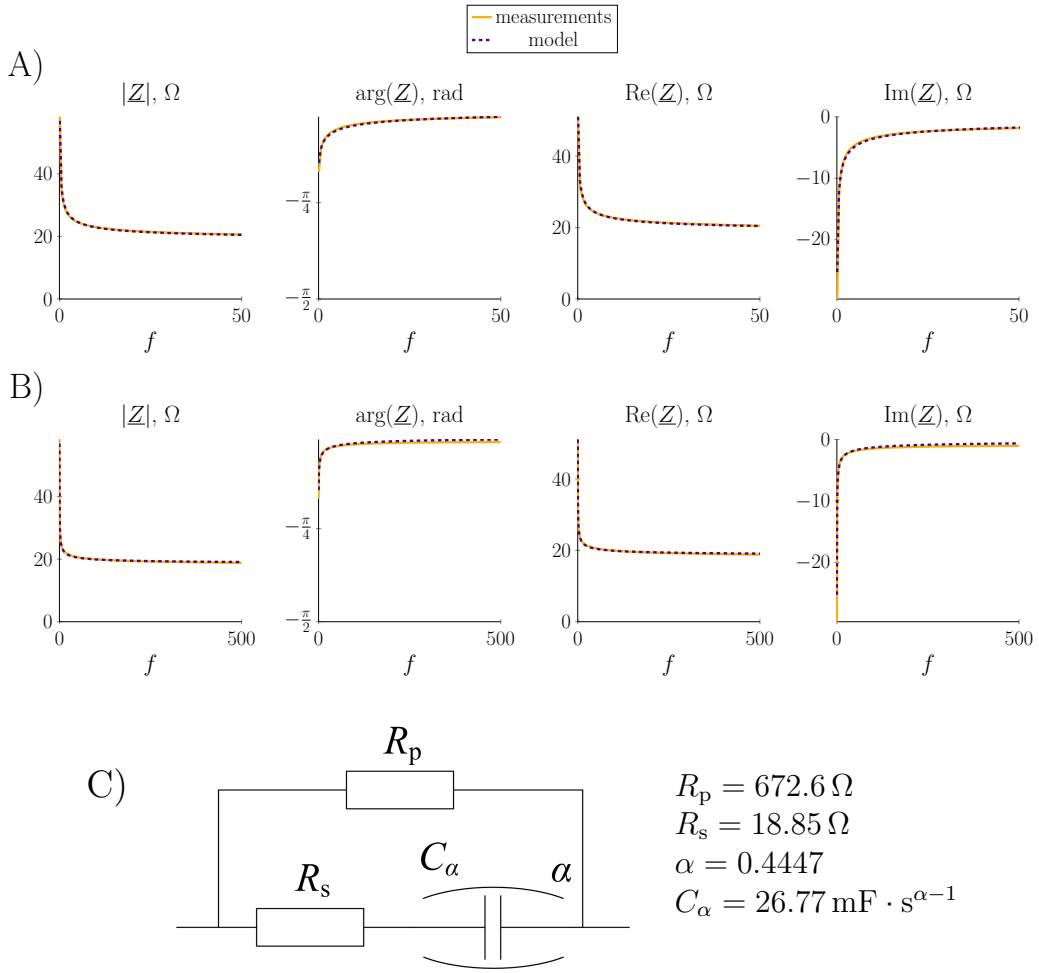
Rysunek 3: Schemat stanowiska do pobierania charakterystyk częstotliwościowych superkondensatorów i cewek z rdzeniami ferromagnetycznymi (w miejscu trzech kropek podłączany jest badany element)

Pobieranie charakterystyk sterowane było przez program (autora) napisany w języku C#, gdzie wykorzystano elementy biblioteki DAQmx [30] do komunikacji pomiędzy komputerem a urządzeniem pomiarowym. W programie zaimplementowano również algorytm do poboru danych, gdyż pobierane były one z próbek czasowych. Algorytm dla cewek z rdzeniami ferromagnetycznymi omówiono w publikacji [26]. Dla superkondensatorów dobrano pewne inne elementy algorytmu, co przedstawione jest w publikacji [23] (obecnie w druku). Różnice w traktowaniu różnych typów elementów wynika z kilku przyczyn:

- dla cewek z rdzeniami ferromagnetycznymi na generatorze zadawano funkcje sinusoidalne bez składowej stałej, dla superkondensatorów celowo wprowadzono składową stałą, aby zapewnić jego działanie tylko dla dodatnich napięć (superkondensatory nie powinny być połączone z odwrotną polaryzacją [31, 32]),

- ze względu na powyższe – dla cewek z rdzeniami ferromagnetycznymi sprawdzano stan ustalony poprzez wyznaczenie (po otrzymaniu harmonicznych) wymiaru składowej stałej (gdy ta przekraczała pewną dopuszczalną wartość – uznano, że stan ustalony jeszcze nie został osiągnięty),
- natomiast dla superkondensatorów, przy występującej składowej stałej na generatorze – również oczekiwano składowej stałej w przebiegach napięcia i prądu superkondensatora, przez co stan ustalony należy sprawdzać w inny sposób (w badaniach autora [23] polegało to na sprawdzeniu pozostałości przebiegu po odjęciu pierwszej harmonicznej oraz składowej stałej),
- dla superkondensatorów oczekiwano liniowej odpowiedzi, dlatego nie sprawdzano wyższych harmonicznych,
- dla cewek z rdzeniami ferromagnetycznymi w algorytmie zastosowano dobieranie amplitudy na generatorze tak, aby zawartość wyższych harmonicznych nie przekraczała pewnego z góry ustalonego progu [26].

Przykładowe zastosowanie prostego modelu wykorzystującego kondensator ułamkowy dla kondensatora BIGCAP@ (parametry znamionowe: 5.5 V, 33 mF) [33] przedstawiono na rysunku 4. Do pobrania charakterystyk na generatorze zadano amplitudę 1 V i składową stałą 4.5 V.

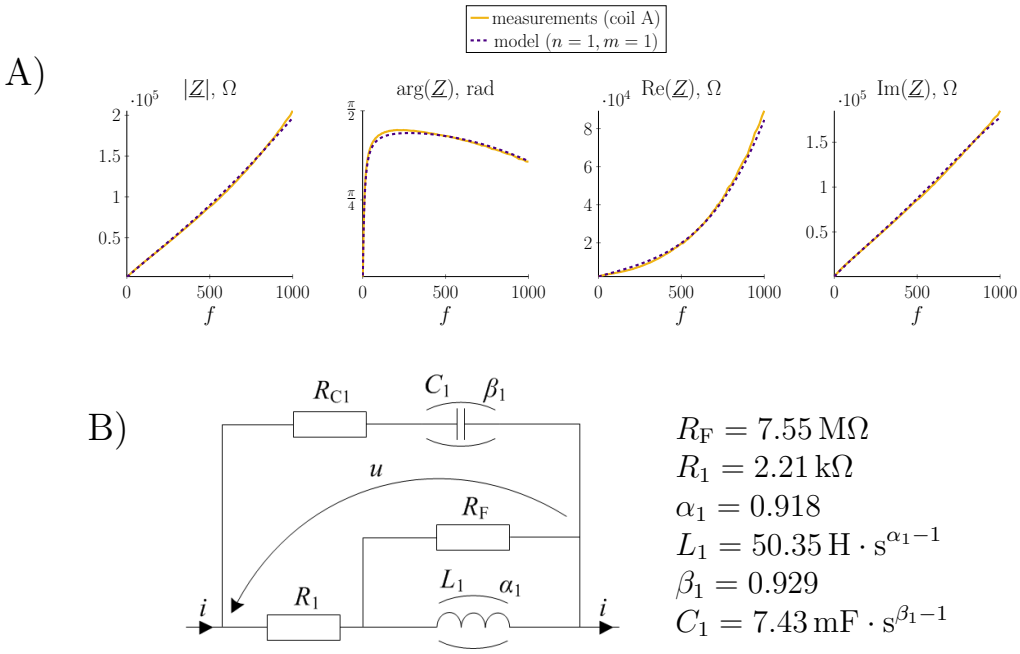


Rysunek 4: Modelowanie superkondensatora: porównanie charakterystyk częstotliwościowych (wyniki pomiarów i odpowiedź modelu) dla kondensatora BIGCAP@ z parametrami znamionowymi 5.5 V, 33 mF: A) zakres częstotliwości do 50 Hz, B) zakres częstotliwości do 500 Hz, C) zastosowany model superkondensatora i jego parametry

Badania, o których wspomniano wyżej można zaliczyć do wielu, gdzie zweryfikowano przydatność modeli wykorzystujących kondensator ułamkowy do modelowania superkondensatorów. Badania innych autorów odnaleźć można między innymi w publikacjach [34–36].

Cewki z rdzeniami ferromagnetycznymi zostały również zbadane przez autora pod kątem zastosowania elementów ułamkowego rzędu w ich modelach (jest to również część badań nie należących bezpośrednio do *cyklu publikacji*). Są to badania, których tylko pewien fragment został opublikowany [26]. Tu również zastosowano wcześniej opisane stanowisko laboratoryjne (Rys. 3). Na rysunku 5 przedstawiono przykładowe porównania zmierzonych charakterystyk częstotliwościowych dla cewki z rdzeniem ferromagnetycznym z odpowiedziami modelu (oraz zastosowany model). W niektórych zbadanych przypadkach do modelowa-

nia cewek z rdzeniami ferromagnetycznymi wystarczyły modele wykorzystujące rezystor i cewkę ułamkową. Na rysunku przedstawiono trudniejszy przypadek, gdzie zastosowano model, w którym również przydatne było uwzględnienie gałęzi z kondensatorem ułamkowym.



Rysunek 5: Modelowanie cewki z rdzeniem ferromagnetycznym: A) porównanie charakterystyk częstotliwościowych (wyniki pomiarów i odpowiedź modelu), B) zastosowany model i jego parametry

W przypadku cewek z rdzeniami ferromagnetycznymi do niedawna niewiele było prac, gdzie wykazywano przydatność zastosowania modeli z cewkami ułamkowymi – tu w szczególności wyróżniała się praca [37]. W ostatnich latach, oprócz badań autora, ukazały się nowe publikacje [38, 39] dotyczące tej tematyki. Zastosowano również nieliniowe cewki ułamkowe (opisane równaniem (7) i zależnością ψ-i). Przykładowe wyniki porównania histerezy nieliniowej cewki ułamkowej z otrzymaną z pomiarów cewki z rdzeniem ferromagnetycznym można odnaleźć w publikacji [39].

C.3 Opis zagadnień obwodów wykorzystujących pochodną ułamkową i znane sposoby ich rozwiązywania

Przydatność elementów ułamkowych rzędów przy modelowaniu cewek z rdzeniami ferromagnetycznymi [26, 37–39] oraz (jak wielokrotnie wykazano) superkondensatorów [23, 34–36] uzasadniają badania nad możliwością rozwiązywania

zagadnień obwodów z ich wykorzystaniem.

Dobrze znane zagadnienia obwodów nie uwzględniających elementów ułamkowych, gdzie wyznaczane są nawet stany nieustalone a obwody te zawierają tradycyjne elementy (rezystory liniowe i nieliniowe, cewki liniowe i nieliniowe, kondensatory liniowe i nieliniowe, źródła autonomiczne oraz źródła sterowane) opisać można za pomocą równań różniczkowo-algebraicznych, na przykład w następującej postaci [40]:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) = f(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)), \\ \qquad\quad 0 = g(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)), \end{cases} \tag{13}$$

gdzie poszukiwane jest rozwiązanie w pewnym przedziale czasowym $t \in [t_0, t_{\max}]$; $\boldsymbol{x}(t)$ przedstawia wektor zmiennych stanu, podczas gdy $\boldsymbol{y}(t)$ jest wektorem pozostałych zmiennych. W przypadku liniowych zagadnień dynamiki, przy spełnieniu pewnych warunków [41] sprowadzić można problem do postaci równań stanu:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}(t), \tag{14}$$

gdzie $\boldsymbol{v}(t)$ jest wektorem zawierającym funkcje opisujące przebiegi źródeł autonomicznych. Powyższe postacie przedstawiają wielokrotnie rozpatrywane w przeszłości przypadki i wyprowadzić je można z zagadnień obwodów rozpatrywanych również na poziomie dydaktycznym. W przypadku rozwiązywania równań (14) można przede wszystkim do obliczeń zastosować ewaluacje rozwiązań analitycznych [41] (przede wszystkim jeśli dotyczy to źródeł o stałych wymuszeniach). Przy rozwiązywaniu równań różniczkowo-algebraicznych zastosować można metody numeryczne, których powstała duża ilość [42–44]. Metody numeryczne opierają się głównie na otrzymaniu rozwiązań w wybranych chwilach czasowych i mogą być stosowane w tzw. solwerach numerycznych, czyli narzędziach do wyznaczania rozwiązań z wykorzystaniem pewnej metody numerycznej. Do opisu takich solwerów w anglojęzycznej literaturze stosowane jest często stwierdzenie *time-stepping solver* [45, 46]. W niniejszym wniosku tego typu solwery nazywane są dla uproszczenia *solwerami numerycznymi*. W różnych środowiskach obliczeniowych (np. środowisku Matlab [40] lub GNU Octave [47]) odnaleźć można wiele różnych solwerów numerycznych, które pozwalają na wyznaczanie rozwiązań dla zagadnień opisanych równaniem (13).

W przypadku zagadnień obwodów, gdzie występują elementy ułamkowego rzędu (oraz również mogą występować tradycyjne elementy obwodów) w literaturze odnaleźć można znacznie mniej opracowań.

Ponieważ elementy ułamkowe są stosunkowo nowym elementem rozpatrywanym w zagadnieniach obwodów – stosunkowo niewiele odnaleźć można prac o rozwiązywaniu zagadnień z pochodnymi ułamkowego rzędu, które bezpośrednio dotyczą obwodów. Opracowania dotyczące zagadnień obwodów często dotyczą badania przypadków, gdzie mamy do czynienia z obwodami liniowymi z cewkami i kondensatorami ułamkowymi [48–50]. Często są to również badania, gdzie

wszystkie elementy ułamkowe wykorzystują ten sam rząd pochodnej α [51, 52]. Ograniczenia te niewątpliwie spowodowane są faktem, że w literaturze najczęściej odnaleźć można prace o szczegółowym opisie, gdzie rozpatrywane są ułamkowe równania stanu o postaci:

$$ {}_{t_0}\mathrm{D}_t^{\alpha}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}(t). \tag{15} $$

Rozwiązanie analityczne powyższego równania uwzględnia zastosowanie dwuparametrowej funkcji Mittag-Lefflera [53]:

$$ \mathrm{E}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \tag{16} $$

Wyznaczanie tego typu funkcji wiąże ze sobą konieczność numerycznego traktowania nieskończonych sum, tzn. w najprostszy sposób – wyznaczane są kolejne wyrazy aż ich wkład procentowy w całkowitą wartość jest nieznaczny. Przy niektórych przypadkach te ewaluacje potrafią jednak doprowadzić do błędów numerycznych (w szczególności dla $t \geqslant 1$). Pewną alternatywą jest zastosowane innych aproksymacji powyższej funkcji, przez co można uniknąć wspomnianych problemów numerycznych [54]. Należy zaznaczyć jednak, że funkcje Mittag-Lefflera opisują rozwiązanie dla przypadku, gdzie mamy do czynienia ze źródłami o stałych wartościach. W przypadku innych funkcji źródeł – występuje konieczność dalszych wyprowadzeń analitycznych zanim możliwa będzie ewaluacja numeryczna. Niewiele prac dotyczy rozwiązania przypadku, gdzie mamy do czynienia z ułamkowymi równaniami stanu o różnych rzędach (do równania tego odnosić się można skrótem FDE, od **f**ractional **d**ifferential **e**quations):

$$ {}_{t_0}\mathbf{D}_t^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}(t), \tag{17} $$

gdzie w tym przypadku każda zmienna w wektorze $\boldsymbol{x}(t)$ może występować pod innym rzędem pochodnej. Pochodne są umieszczone w wektorze:

$$ \boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n_x}], \tag{18} $$

gdzie n_x oznacza długość wektora $\boldsymbol{x}(t)$. Wektor po lewej stronie równania przedstawia pochodne ułamkowego rzędu:

$$ {}_{t_0}\mathbf{D}_t^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{x}(t) = [\ {}_{t_0}\mathrm{D}_t^{\alpha_1}x_1(t) \quad {}_{t_0}\mathrm{D}_t^{\alpha_2}x_2(t) \quad \ldots \quad {}_{t_0}\mathrm{D}_t^{\alpha_{n_x}}x_{n_x}(t)\ ]^{\mathrm{T}}. \tag{19} $$

Co do rozwiązań analitycznych to wyróżniającym przypadkiem jest praca [55]. Jednak implementacja zamieszczonych tam wzorów i procedur koniecznych do ewaluacji rozwiązań może być nawet uznawana za metodę analityczno-numeryczną. Dodatkowo, dla źródeł nie opisanych stałymi wartościami konieczne są dalsze wyprowadzenia analityczne.

Za metody analityczno-numeryczne [56] (również często zwane metodami półanalitycznymi [57]) można uznać metody, gdzie wykorzystywane są pewne postacie rozwiązań ogólnych, lecz wymagające znacznych implementacji dalszych

procedur (uproszczeń lub nawet algorytmów decyzyjnych w zależności od napotkanych wartości) w celu wyznaczania wartości rozwiązań. Często metodami analityczno-numerycznymi (lub półanalitycznymi) nazywa się też metody, gdzie postać rozwiązania jest z góry założona (np. w postaci nieskończonego szeregu potęgowego, gdzie branych jest pod uwagę skończona ilość wyrazów), ale wyznaczenie współczynników rozwiązania wymaga procedur numerycznych [58]. Poza własnymi publikacjami, autor nie odnalazł opracowań metod analityczno-numerycznych, które bezpośrednio dotyczyły obwodów. Wiele prac dotyczy różnych postaci równań zagadnień wykorzystujących pochodne ułamkowego rzędu. W literaturze odnaleźć można opracowania na temat następujących metod analityczno-numerycznych:

- metoda dekompozycji Adomiana ("Adomian decomposition method") [59],
- metoda transformacji różniczkowej ("differential transform method") [60],
- metoda oparta na falkach CAS ("CAS wavelet method") [61],
- metoda oparta na rozwinięciu w szereg Taylora ("Taylor expansion method") [62].

Przy rozwiązywaniu najtrudniejszych zagadnień optymalnym podejściem jest zastosowanie metod numerycznych. Podobnie jak w przypadku rozwiązań zagadnień z pochodnymi całkowitych rzędów – często ich celem jest wyznaczenie rozwiązania w danych punktach czasowych, przy czym, podobnie jak w przypadku metod do rozwiązywania zagadnień z pochodnymi całkowitych rzędów – zbudować można na ich podstawie solwer numeryczny. Często rozwiązanie te jest z góry traktowane jako rozwiązanie przybliżone, jednak przy doborze odpowiednich parametrów metody (np. rzędów wielomianów lub odstępów pomiędzy chwilami czasu, dla których otrzymywane jest rozwiązanie) otrzymać można bardzo dokładne rozwiązania. W literaturze można odnaleźć wiele opracowań na temat metod numerycznych do rozwiązywania zagadnień z pochodnymi ułamkowych rzędów, przykładowo:

- metody kolokacji ("collocation methods") [63, 64],
- metody "product Integration rule" [65],
- metody FLMM ("Fractional Linear Multistep Methods") [66],
- najczęściej stosowana – metoda oparta na zastosowaniu aproksymacji wynikającej z definicji Grünwalda-Letnikova.

Definicja Grünwalda-Letnikova [67] (równoznaczna z definicją Riemanna-Liouville'a, zatem również z definicją Caputo dla zerowych warunków początkowych) opisana jest równaniem:

$$ {}_{t_0}^{\mathrm{GL}}\mathrm{D}_t^{\alpha} x(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t-kh). \tag{20} $$

Jak wspomniano wyżej – stosunkowo niewiele badań na temat rozwiązywania zagadnień z pochodnymi ułamkowych rzędów dotyczy zagadnień obwodów. Znacznie więcej prac skupia się na samych matematycznych aspektach tych zagadnień. Niektóre badania dotyczą tez innych definicji pochodnej [68, 69].

Co do metod numerycznych to należy wspomnieć, że opracowań na ich temat można odnaleźć wiele, lecz niewiele z nich to prace, które zakładają zmienny krok czasowy Δt – większość metod i badań (w tym – wyników symulacji) przedstawiono dla stałego kroku czasowego.

O dostępności gotowych, ogólnodostępnych solwerów numerycznych (nawet w popularnych środowiskach obliczeniowych), za pomocą których można rozwiązać zagadnienia z pochodnymi ułamkowego rzędu można jedynie wspomnieć w kilku przypadkach [70–72].

Cykl publikacji dotyczy rozwiązywania zagadnień obwodów wykorzystujących pochodne ułamkowego rzędu. Badania zapoczątkowała propozycja i konstrukcja metody, która wstępnie nazywana była metodą podprzedziałów (*the subinterval-based method for fractional derivative computations* [73], w późniejszych publikacjach występująca pod nazwą *SubIval*). Początkowe badania dotyczyły równań stanu ułamkowego rzędu (17). Badania jednak od początku celowały w bardzo ogolną postać (zwaną często FDAE, od **f**ractional **d**ifferential-**a**lgebraic **e**quations):

$$\begin{aligned} {}_{t_0}\mathbf{D}_t^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{x}(t) &= f(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)), \\ 0 &= g(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)), \end{aligned} \tag{21}$$

co pozwoliłoby na bardziej ogólne traktowanie zagadnień (w tym szerszy zakres różnych postaci zagadnień, co w zagadnieniach obwodów oznacza uwzględnienie najróżniejszych typów elementów i ich charakterystyk).

Co również istotne – badania od początku zakładały implementacje w solwerach numerycznych z możliwością automatycznego doboru kroku czasowego.

Szczegółowy opis badań i dokonań z *cyklu publikacji* zawarto rozdziale C.4.

C.4 Opis osiągnięcia

C.4.1 Podstawy metody SubIval i jej pierwsze zastosowanie

Metoda SubIval została zbudowana dla jej zastosowania w typowym solwerze numerycznym (*time-stepping solver* – jak wspomniano w poprzednim podrozdziale), gdzie dla każdego kroku czasowego $t = t_{\mathrm{now}}$ wartości z poprzednich wybranych punktów czasowych ($t < t_{\mathrm{now}}$) są znane i nie są już poprawiane. Jej zastosowanie prowadzi do wygodnej w praktyce obliczeń solwerów numerycznych postaci:

$$ {}_{t_0}\mathrm{D}^{\alpha}_{t_{\mathrm{now}}} x(t) \approx a x_{\mathrm{now}} + b \tag{22} $$

gdzie x_{now} jest wyznaczaną wartością rozwiązania dla zmiennej $x(t)$ w punkcie t_{now}, podczas gdy współczynniki a i b wyznaczane są właśnie za pomocą metody SubIval. Dla pochodnej rzędu $\alpha = 1$ otrzymane współczynniki są takie jak dla niejawnej metody różnic wstecznych (*implicit backward differentiation formula*).

Podstawową czynnością metody SubIval jest podział przedziału całkopochodnej $\Xi = [t_0, t_{\mathrm{now}}]$ na zestaw M podprzedziałów oznaczonych jako $\Xi_s = [t_{\mathrm{start}\ s}, t_{\mathrm{end}\ s}]$. t_{now} jest chwilą czasu, dla której wykonywane są obliczenia. Podprzedziały te zsumowane tworzą przedział Ξ – zatem dla $s > 1$ mamy $t_{\mathrm{start}\ s} = t_{\mathrm{end}\ s-1}$ (oraz $t_{\mathrm{start}\ 1} = t_0$). Przydatne w takim przypadku jest zastosowanie notacji, gdzie przy symbolu całkopochodnej pojawia się symbol przedziału zamiast jego granice:

$$ \mathrm{d}^{\alpha}_{\Xi} x(t) = {}_{t_{\mathrm{a}}}\mathrm{D}^{\alpha}_{t_{\mathrm{b}}} x(t), \tag{23} $$

gdzie $\Xi = [t_{\mathrm{a}}, t_{\mathrm{b}}]$. Przy takim opisie całkopochodną po przedziale, gdzie $t \in [t_0, t_{\mathrm{now}}]$ zapisać można jako sumę:

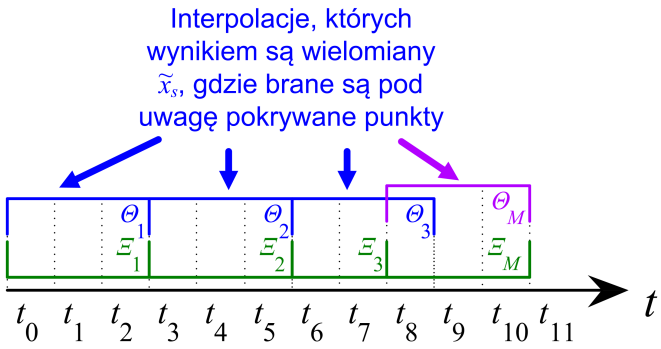
$$ \mathrm{d}^{\alpha}_{\Xi_{\mathrm{tot}}} x(t) = \sum_{s=1}^{M} \mathrm{d}^{\alpha}_{\Xi_s} x(t). \tag{24} $$

Podstawą przybliżeń metody SubIval jest założenie, że pod każdym podprzedziałem Ξ_s zmienna pod pochodną ułamkową ma postać wielomianu oznaczonego jako $\widetilde{x}_s(t)$, przy czym całkopochodną zapisać można w postaci:

$$ \mathrm{d}^{\alpha}_{\Xi_{\mathrm{tot}}} x(t) \approx \sum_{s=1}^{M} \mathrm{d}^{\alpha}_{\Xi_s} \widetilde{x}_s(t). \tag{25} $$

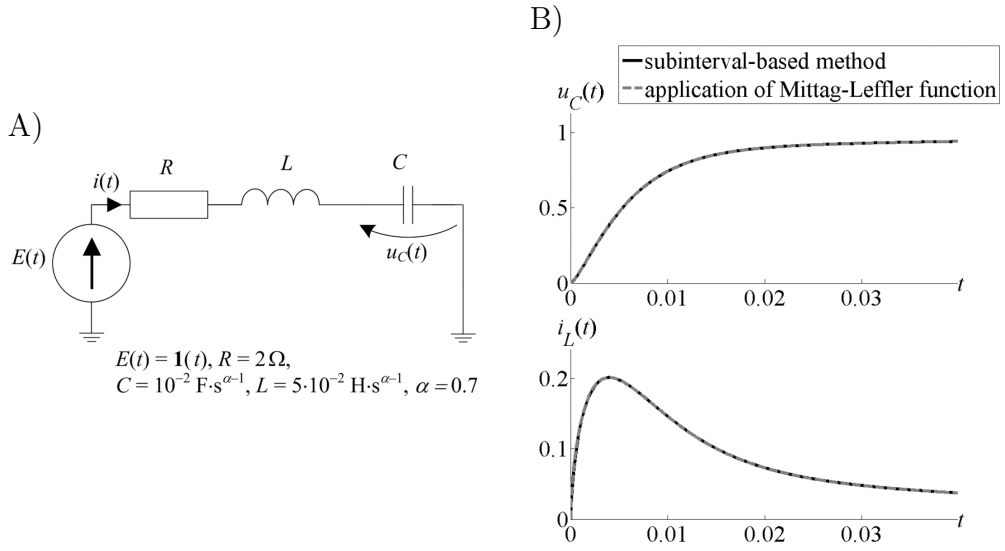
Wielomiany $\widetilde{x}_s(t)$ budowane są poprzez interpolację Lagrange'a opartej na punktach, które obejmują inne podprzedziały, zwane Θ_s, które dla kolejnych $s = 1, 2, \ldots M$ tworzą z odpowiednimi podprzedziałami Ξ_s tzw. pary podprzedziałów. Ze względu na fakt, że metoda opiera się na podziale na podprzedziały Ξ_s oraz (symbolicznych, gdyż bardziej istotne są tu punkty które one obejmują) przedziałach Θ_s metodę początkowo nazywano "metodą podprzedziałów", przy czym od jej anglojęzycznej nazwy "the **subi**nter**val**-based method for fractional

derivative computations" wywodzi się właśnie akronim SubIval. Przykładowy podział podprzedziałów przy stosowaniu metody SubIval przedstawia rysunek 6.

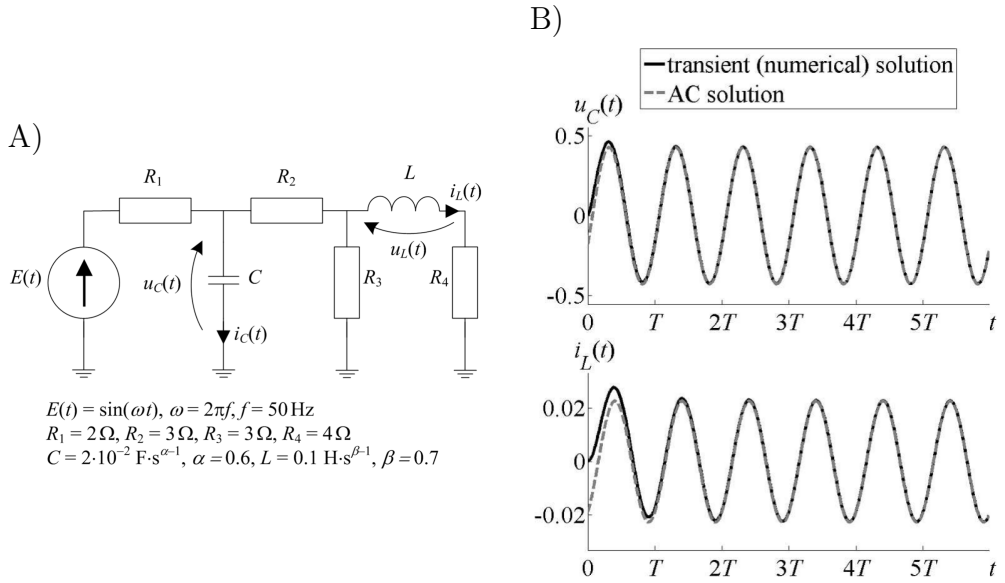


Rysunek 6: Przykładowy podział na podprzedziały w metodzie numerycznej SubIval

Pierwsze implementacje metody SubIval wykonano w środowisku Matlab. Została ona pierwszy raz opisana w publikacji [73]. Tam metodę sprawdzono na zagadnieniach, które można było doprowadzić do postaci FDE (równanie (17)). Przykładowe zagadnienie jakie rozpatrzono to często rozpatrywany obwód *RLC* ułamkowego rzędu (rysunek 7 gdzie również przedstawiono rozwiązanie dla badanego przedziału czasowego). Zagadnienie zostało wybrane ze względu na jego dobrze znane rozwiązanie analityczne [53], które pozwalało na ocenienie czy implementowana metoda potrafi otrzymywać prawidłowe rozwiązania (oraz z jakim błędem). Jako dodatkowy sposób sprawdzania metody wybrano porównania rozwiązań zagadnień, gdzie poszukiwany jest stan ustalony okresowo zmienny w czasie. Zagadnienie tego typu przedstawiono w publikacji [73]. Taką metodologię (sprawdzania jedynie stanów ustalonych) wybrano ze względu na brak dostępności w literaturze rozwiązań analitycznych w stanach nieustalonych dla zagadnień obwodów z okresowymi wymuszeniami. Tu wprawdzie nie było porównywane pełne rozwiązanie, lecz jedynie rozwiązanie w stanie ustalonym, ale możliwe było sprawdzenie metody na bardziej złożonych zagadnieniach. Rozwiązanie referencyjne w stanie ustalonym okresowo zmiennym otrzymać można było za pomocą wprowadzenia opisu przez liczby zespolone i przyjęcie impedancji (11) dla cewki ułamkowej oraz impedancji (9) dla kondensatora ułamkowego.



Rysunek 7: Zagadnienie stanu nieustalonego [73]: A) ułamkowy obwód RLC, B) jego rozwiązanie



Rysunek 8: Przykład z publikacji [73]: A) ułamkowy obwód liniowy z wymuszeniem sinusoidalnie zmiennym w czasie, B) rozwiązanie zagadnienia

⇒ Opracowanie i implementacja metody SubIval należały do pierwszych głównych (oraz oryginalnych) dokonań opisanych w *cyklu publikacji*.

C.4.2 Usprawnienia metody i oryginalnego algorytmu dynamiki podprzedziałów

Po pierwszych badaniach (publikacja [73]) kolejne implementacje metody SubIval odbywały się w języku C#. Taka decyzja zapadła, ponieważ w ten sposób jej obliczenia mogły odbywać się w znacznie krótszym czasie. Dotyczyło to również podstawowych obliczeń metody SubIval, gdzie konstruowane były wielomiany $\widetilde{x}_s(t)$:

$$\widetilde{x}_s(t) = \sum_{j=1}^{n_s} x_{s,j} L_{s,j}(t), \tag{26}$$

gdzie $L_{s,j}$ oznaczają bazowe wielomiany, które spełniają warunki:

$$L_{s,j}(t_{s,k}) = \begin{cases} 0, & \text{if } k \neq j, \\ 1, & \text{if } k = j. \end{cases} \tag{27}$$

Przy budowaniu wielomianów przydatny okazał się fragment biblioteki do obliczeń symbolicznych (na wielomianach wielu zmiennych), którą autor zaimplementował w języku C# w ramach badań niepowiązanych bezpośrednio z *cyklem publikacji* [74–76].

Implementacja w języku C# również usprawniła inne podstawowe obliczenia metody, takie jak wyznaczanie całkopochodnej w podanym przedziale $[t_\mathrm{a}, t_\mathrm{b}]$ jednomianu. Szczegółowe wzory na te operacje przedstawiono przykładowo w pracy [83]. Wspomniane wyznaczanie całkopochodnej jednomianów w wybranych przedziałach było jedną z podstawowych operacji, którą trzeba było wykonać po skonstruowaniu wielomianu, aby w końcu otrzymać współczynniki a i b równania (22).

W kolejnych badaniach zaproponowano wiele możliwości usprawnienia metody SubIval (przykładowo w publikacjach [77, 78]), z czego ważniejsze (głównie dotyczące dokładności i czasu obliczeń) zostały zaimplementowane.

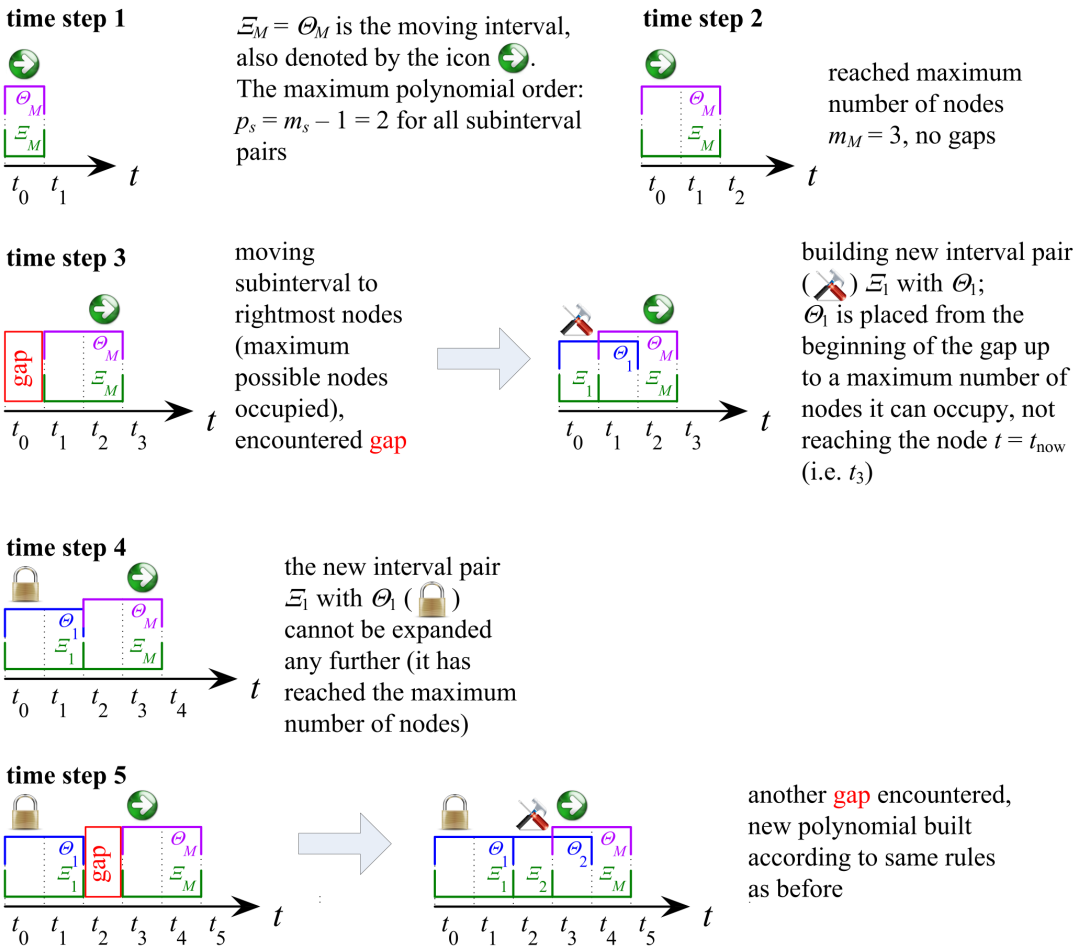
Usprawnienia dotyczyły również oryginalnego algorytmu konstruowania i ustawiania par podprzedziałów Ξ_s oraz Φ_s (tak zwany algorytm dynamiki podprzedziałów – *subinterval dynamics algorithm*). Został on zaproponowany w publikacji [73], a jej modyfikacje wprowadzono w badaniach z publikacji [79, 80]. Najbardziej aktualna postać algorytmu została przedstawiona w publikacji [80]. Ze względu na czytelność algorytmu wprowadzono następujące typy par podprzedziałów:

- tak zwana *ruchoma* para podprzedziałów (w publikacjach występująca pod nazwą *moving subinterval pair*), która dotyczy zawsze podprzedziałów Ξ_M oraz Φ_M (czyli obejmujących punkt $t = t_\mathrm{now}$, dla którego poszukiwane jest rozwiązanie),

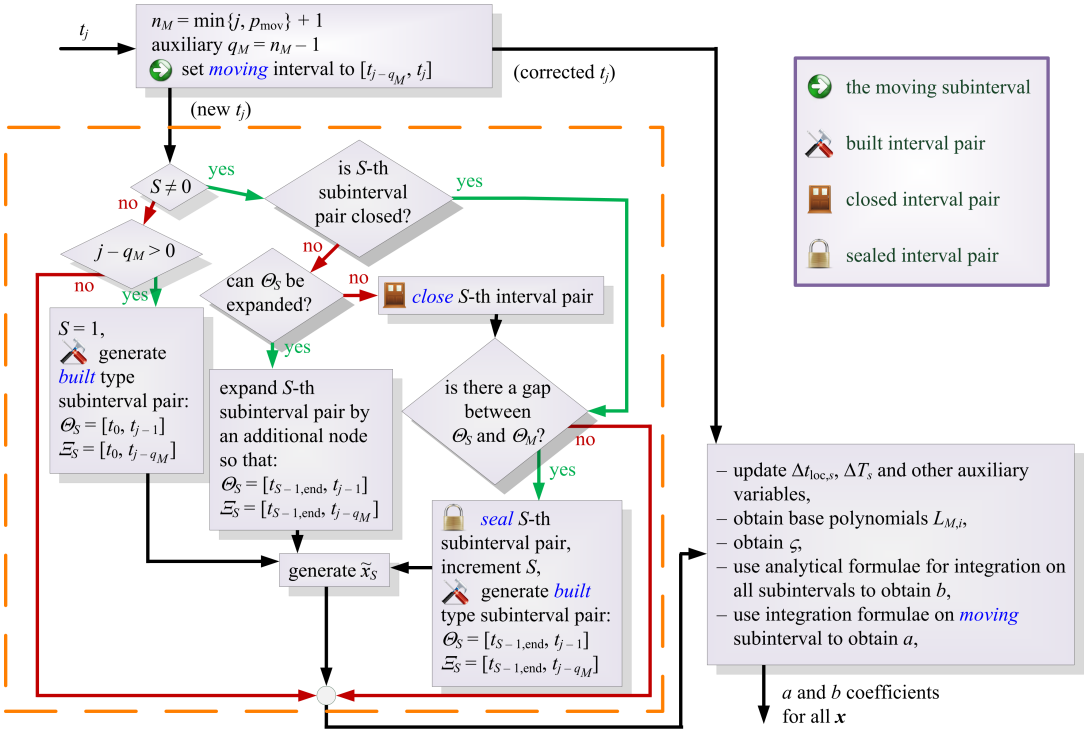
- tak zwana *budowana* para podprzedziałów (w publikacjach – *built subinterval pair*), gdzie nastąpić mogą zmiany co do postaci funkcji $\widetilde{x}_s(t)$,

- tak zwana *zamknięta* para podprzedziałów (w publikacjach nazywana *closed subinterval pair*), gdzie funkcja $\widetilde{x}_s(t)$ nie jest zmieniana, lecz nie koniecznie brany jest pod uwagę cały podprzedział Φ_s do całkopochodnej (tzn. $\Xi_s \neq \Phi_s$),
- *przypieczętowaną* (*sealed subinterval pair*) nazwano parę podprzedziałów, gdzie $\Xi_s = \Phi_s$ oraz zmianom nie ulega funkcja $\widetilde{x}_s(t)$.

Bardzo szczegółowy opis algorytmu dynamiki podprzedziałów zawarto w publikacji [80]. Tam również podano przykład w postaci rysunku 9 oraz wyjaśniono działanie algorytmu posługując się rysunkiem 10.



Rysunek 9: Wyjaśnienie działania algorytmu dynamiki podprzedziałów – przykład dla maksymalnego rzędu wielomianów $p = 2$ [80]



Rysunek 10: Działanie algorytmu dynamiki podprzedziałów (zaznaczonego pomarańczową linią przerywaną) w metodzie SubIval [80]

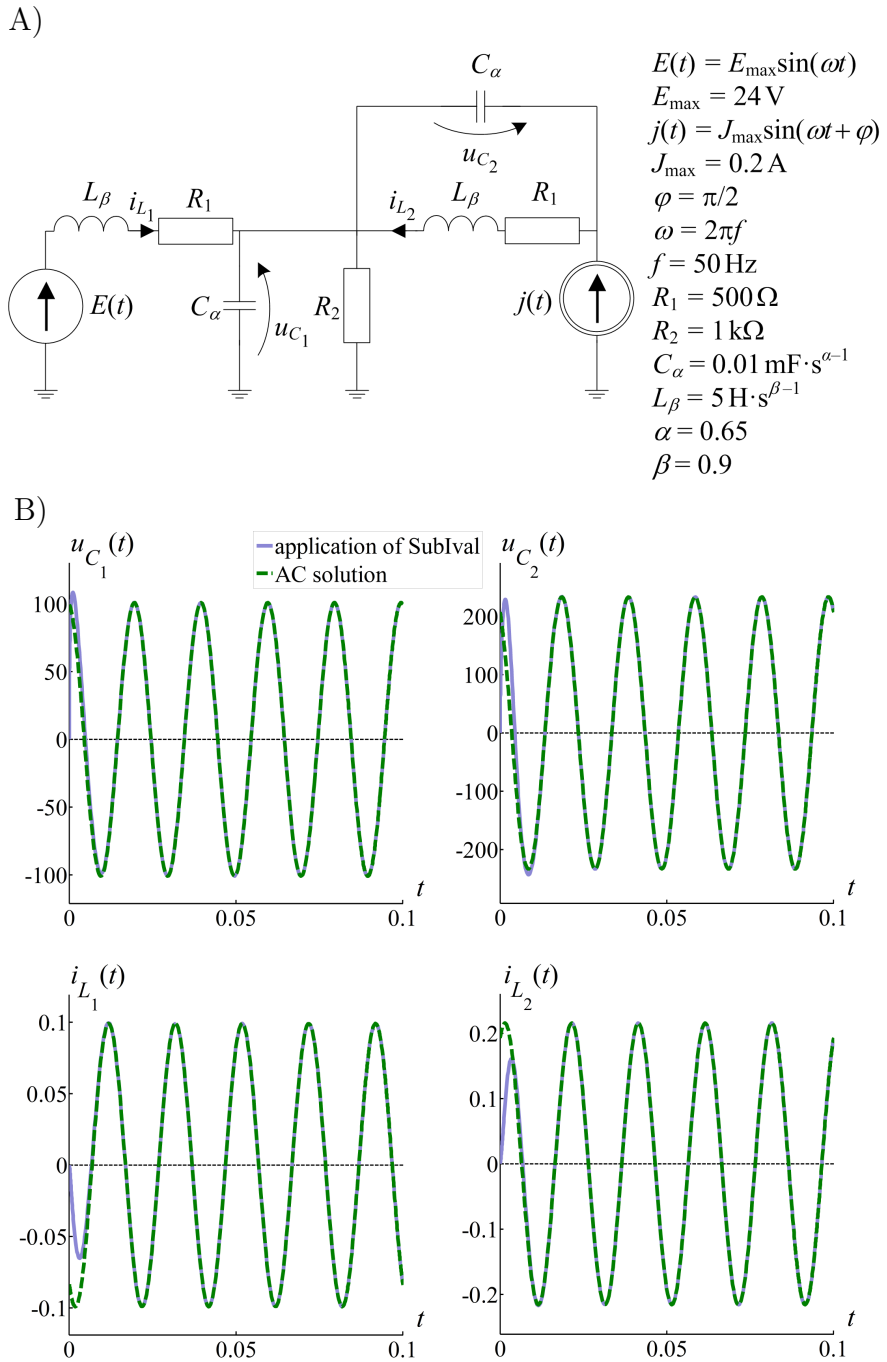
> ⇒ Oryginalny, opracowany przez autora algorytm dynamiki podprzedziałów oraz jego usprawnienia zapewniały prawidłowe zastosowanie aproksymacji wielomianowych oraz skuteczne i szybkie działanie metody SubIval.

C.4.3 Implementacja w bibliotece DLL

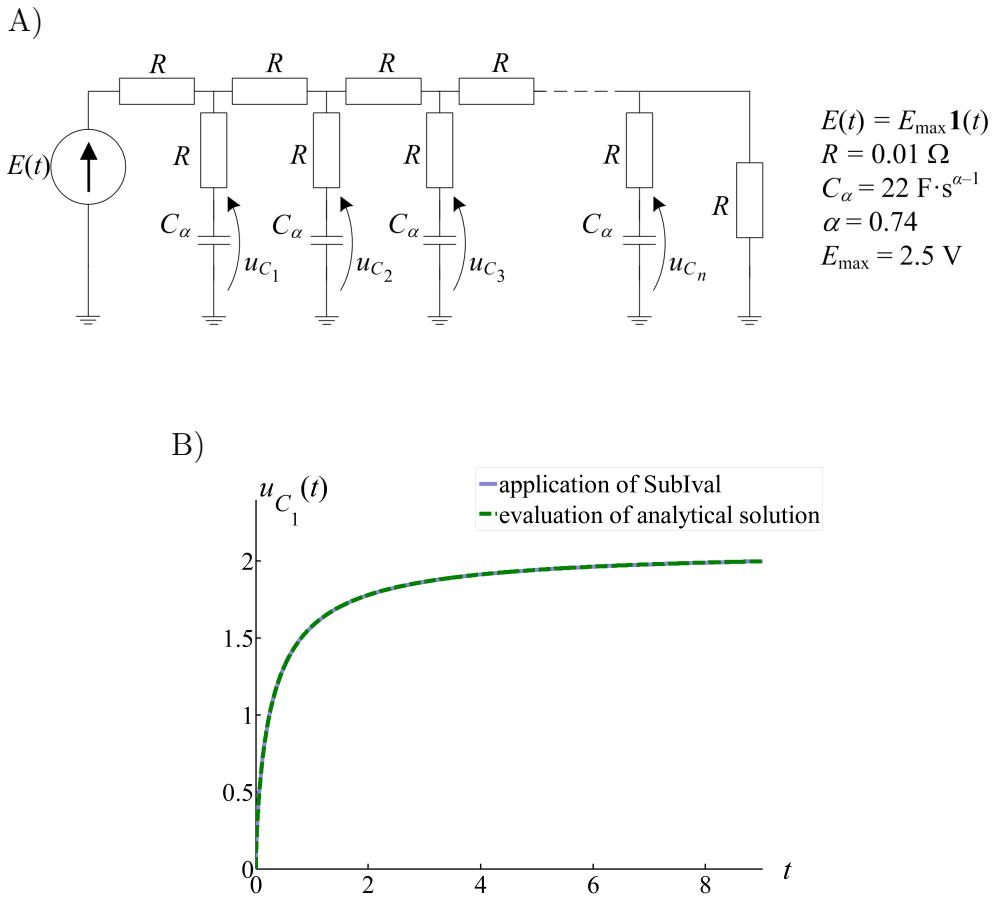
W kolejnych badaniach metodę SubIval zaimplementowano w bibliotece DLL, którą można rejestrować jako komponent ActiveX. Powstała biblioteka SubIval.dll została publicznie udostępniona na stronie autora [81] razem ze szczegółami na temat jej obsługi. Opis jej obsługi i jej opcji zawarto również w publikacjach [80] oraz [82] wraz z przykładami jej wykorzystania w środowiskach Matlab i Mathematica.

Przykłady zastosowania biblioteki we wspomnianych środowiskach obliczeniowych przedstawiono wraz z przykładowymi kodami w publikacji [80]; przykładowe zagadnienia rozwiązane w tej pracy przedstawiono na rysunkach 11 oraz 12. Pierwsze zagadnienie dotyczyło wyznaczenia rozwiązania liniowego obwodu z elementami ułamkowymi, gdzie każdy z elementów opisany był pochodną ułamkową innego rzędu. Ze względu na złożoność tego zagadnienia rozwiązanie porównano

jedynie z rozwiązaniem w stanem ustalonym (otrzymanym poprzez zastosowanie liczb zespolonych). Drugie zagadnienie wybrano ze względu na dostępność w literaturze dobrze opisanego rozwiązania analitycznego oraz jego praktycznego zastosowania jako modelu superkondensatora [36].



Rysunek 11: Zagadnienie poszukiwania stanu ustalonego [80]: A) ułamkowy obwód liniowy o elementach opisanych różnymi rzędami pochodnych, b) porównanie rozwiązań



Rysunek 12: Zagadnienie stanu nieustalonego [80]: A) drabinkowy obwód z kondensatorami ułamkowymi, B) przebieg czasowy wybranej zmiennej rozwiązania

⇒ Autorska biblioteka z zaimplementowaną biblioteką SubIval pozwala na wygodne wykorzystanie tej metody w różnych środowiskach obliczeniowych (wykazano możliwość dokonania tego w środowiskach Matlab [85], FreeMat [86], Mathematica [87] i Octave [88]) oraz w programach, gdzie możliwe jest obsługiwanie bibliotek wykorzystujących platformę .NET Framework. Dostępna jest również biblioteka dla języka C (co również pozwala na jej zastosowanie w programach napisanych w języku C++). Implementacja ta pozwala na szybkie wykonanie wewnętrznych obliczeń metody SubIval, tzn. wyznaczenie parametrów a i b (jak oznaczono w równaniu (22)) dla każdej zmiennej pod pochodną ułamkową. Od użytkownika wymagane jest jedynie podawanie wartości chwil czasowych dla każdego kroku oraz wartości wyznaczonych rozwiązań – jak opisano szczegółowo na stronie [81].

C.4.4 Automatyczny dobór kroku czasowego

Możliwość automatycznego doboru kroku czasowego zaimplementowano już zanim szczegółowe badania na temat oszacowania lokalnego błędu obcięcia zostały wykonane. W obliczeniach początkowych publikacji wykorzystywano jednak wzór empiryczny (podobny do stosowanego przy metodach różnic wstecznych do rozwiązywania zagadnień z pochodnymi całkowitego rzędu). Błąd szacowano na podstawie różnicy pomiędzy wynikami, jakie otrzymano z wyznaczenia pochodnej z dwóch różnych etapów wykorzystujących różne rzędy wielomianu w ostatnim podprzedziale. W publikacji [83] wyprowadzono wzór na aproksymację lokalnego błędu obcięcia (*local truncation error*). W dalszym ciągu wyznaczano różnicę pomiędzy obliczeniami z dwóch etapów (w jednym wykorzystano wielomian rzędu $q-1$ do aproksymacji rozwiązania a w drugim etapie wielomian rzędu q – przykład na rysunku 13), lecz tym razem w wybranym podprzedziale, gdzie wyprowadzono ogólny wzór na różnicę pomiędzy wynikami:

$$e_{\text{stages}} = c_q \Delta t_{\text{now}}^{q-\alpha} + O(\Delta t_{\text{now}}^{q+1-\alpha}), \tag{28}$$

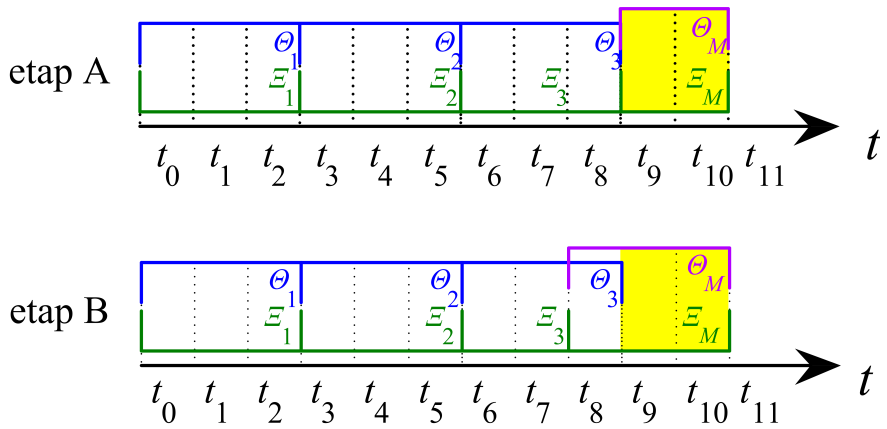
skąd wykorzystano pierwszy wyraz powyższego szeregu do aproksymacji błedu:

$$e_{\text{stages}} \approx c \Delta t_{\text{now}}^{q-\alpha}. \tag{29}$$

Wzór (28) wraz z przykładami parametrów c_q dla różnych rzędów wielomianu wyprowadzono dla publikacji [83] przy wykorzystaniu samodzielnie napisanego programu w języku Python, wykorzystującego bibliotekę do obliczeń symbolicznych SymPy [84]. W celu dopasowania kolejnego kroku czasowego Δt_{new} należy pomnożyć poprzedni krok czasowy Δt_{now} razy wartość η:

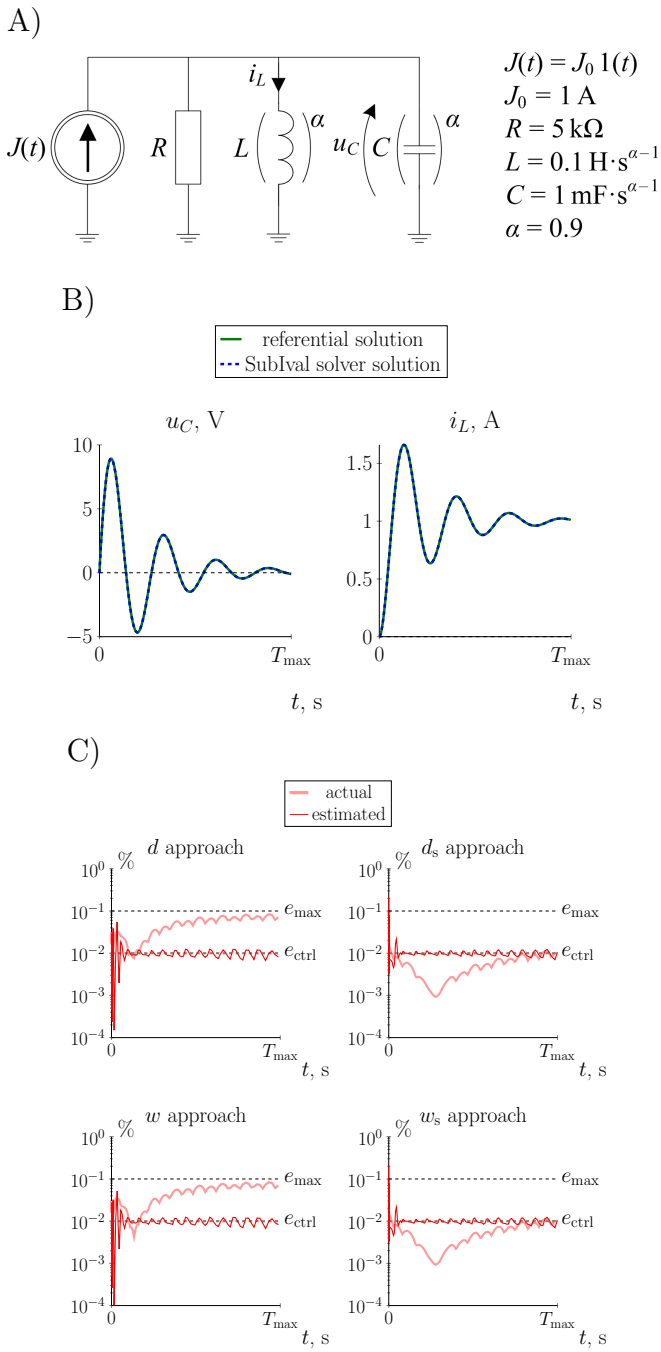
$$\eta = \frac{\Delta t_{\text{new}}}{\Delta t_{\text{now}}} = \sqrt[q-\alpha]{\frac{e_{\text{ctrl}}}{e}}, \tag{30}$$

gdzie e jest wyznaczoną oszacowaną wartością błędu (różnica pomiędzy wynikami z dwóch etapów obliczeń), a e_{ctrl} jest miarą akceptowalnego poziomu błędu. Dla większej ilości zmiennych bierze się pod uwagę najmniejszą wartość wyznaczonych współczynników η.

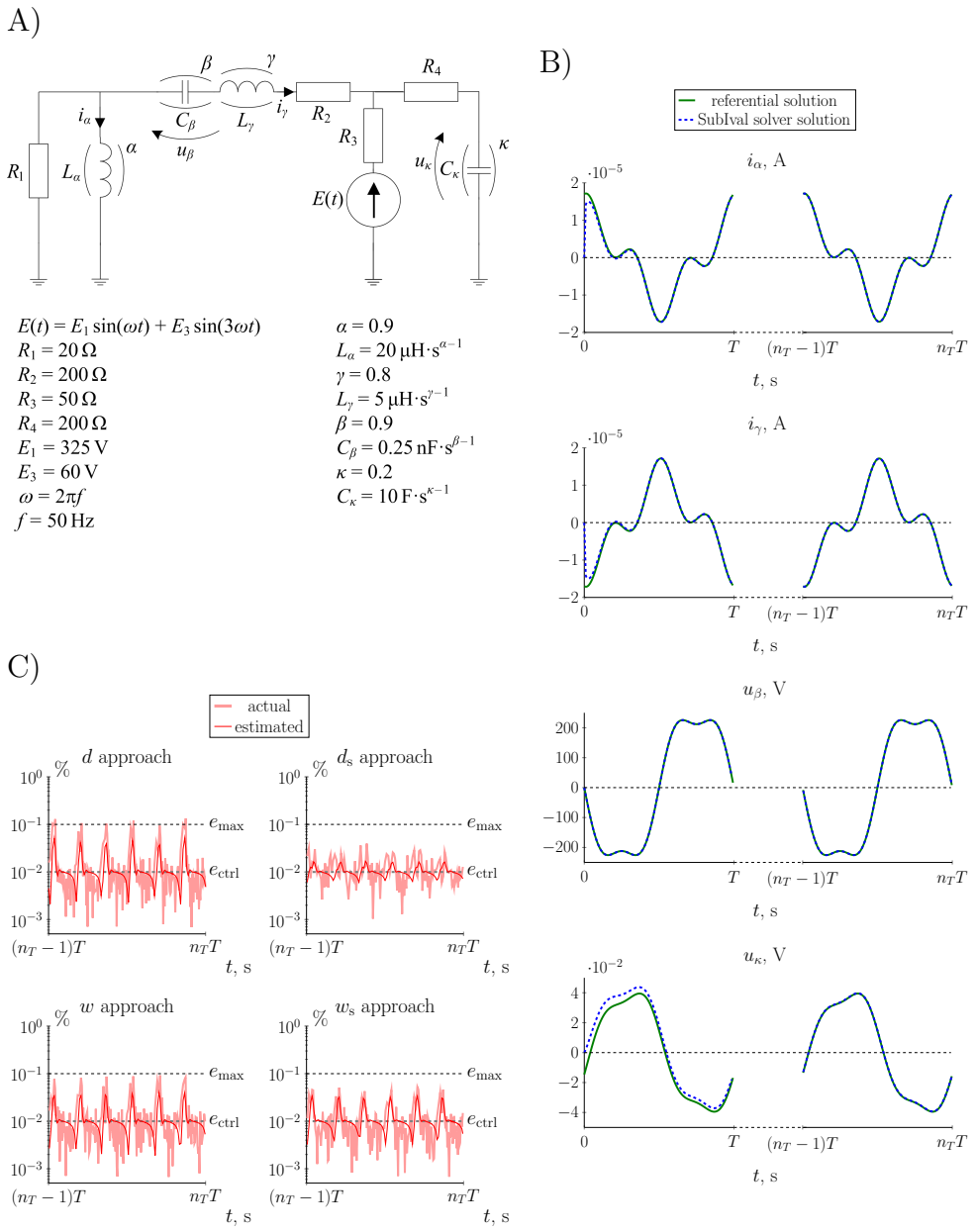


Rysunek 13: Ilustracja porównywanego podprzedziału (zaznaczonego kolorem żółtym) na tle podprzedziałów w metodzie SubIval

Zagadnienia testowe jakimi się posłużono w celu sprawdzenia skuteczności automatycznego doboru kroku czasowego to: zagadnienie, dla którego wyprowadzić (i zaimplementować) można rozwiązanie analityczne oparte na funkcjach Mittag-Lefflera (rysunek 14) oraz zagadnienie poszukiwania stanu ustalonego okresowo zmiennego w czasie, gdzie rozwiązaniem referencyjnym jest otrzymane po zastosowaniu liczb zespolonych (rysunek 15).



Rysunek 14: Test automatycznego doboru kroku czasowego zgodnie z oszacowaniem błędu [83]: A) rozpatrywane zagadnienie, B) rozwiązanie i jego porównanie z rozwiązaniem referencyjnym, C) porównanie oszacowania błędu i faktycznego maksymalnego błędu obliczeń (różne strategie, z czego d_s jest strategią, którą później uznano za najbardziej optymalną)



Rysunek 15: Test automatycznego doboru kroku czasowego zgodnie z oszacowaniem błędu [83]: A) rozpatrywane zagadnienie z wymuszeniem okresowo zmiennym w czasie, B) rozwiązanie i jego porównanie z rozwiązaniem referencyjnym, C) porównanie oszacowania błędu i faktycznego maksymalnego błędu obliczeń (różne strategie, z czego d_s jest strategią, którą uznano za najbardziej optymalną)

W przypadku porównań błędów sprawdzono 4 różne strategie wyznaczania wartości e, z czego wybrano tak zwaną strategię d_s (więcej na ten temat w publikacji [83]), gdzie konieczne było wyznaczenie rozwiązania tylko jeden raz.

⇒ Analiza lokalnego błędu obcięcia dla metody SubIval, w tym między innymi wyprowadzenie jego ogólnego wzoru, jego aproksymację oraz wzór na automatyczny dobór kroku czasowego, wraz z analizą poprawności tego podejścia (przykłady, porównanie różnych podejść) należą do kolejnego oryginalnego dokonania, które przedstawiono w *cyklu publikacji*.

C.4.5 Zastosowanie dla ułamkowych zagadnień nieliniowych

Analogicznie do klasycznych zagadnień elektrotechniki – dla zagadnień z elementami ułamkowymi rozpatrzyć można ogólną formę ułamkowych równań różniczkowo-algebraicznych (w anglojęzycznej literaturze występujących pod nazwą FDAE, od **f**ractional **d**ifferential-**a**lgebraic **e**quations):

$$\begin{aligned} {}_{t_0}\mathbf{D}_t^{\alpha}\boldsymbol{x}(t) &= f(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)) \\ 0 &= g(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)). \end{aligned} \tag{31}$$

Ponieważ badania ukierunkowane były na analizy obwodów – poszukiwano wygodniejszej (dla późniejszych obliczeń) postaci. Do celów analizy ułamkowych obwodów nieliniowych [22, 89] wyprowadzono następującą postać ułamkowych równań różniczkowo-algebraicznych:

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{M}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{v}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_y - n_{\mathrm{NL}}} \\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{w}(t)) \end{bmatrix}, \\ {}_{t_0}\mathbf{D}_t^{\alpha}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{M}_{\mathrm{III}}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{M}_{\mathrm{IV}}\boldsymbol{x}(t) = \mathbf{0}_{n_x}, \end{cases} \tag{32}$$

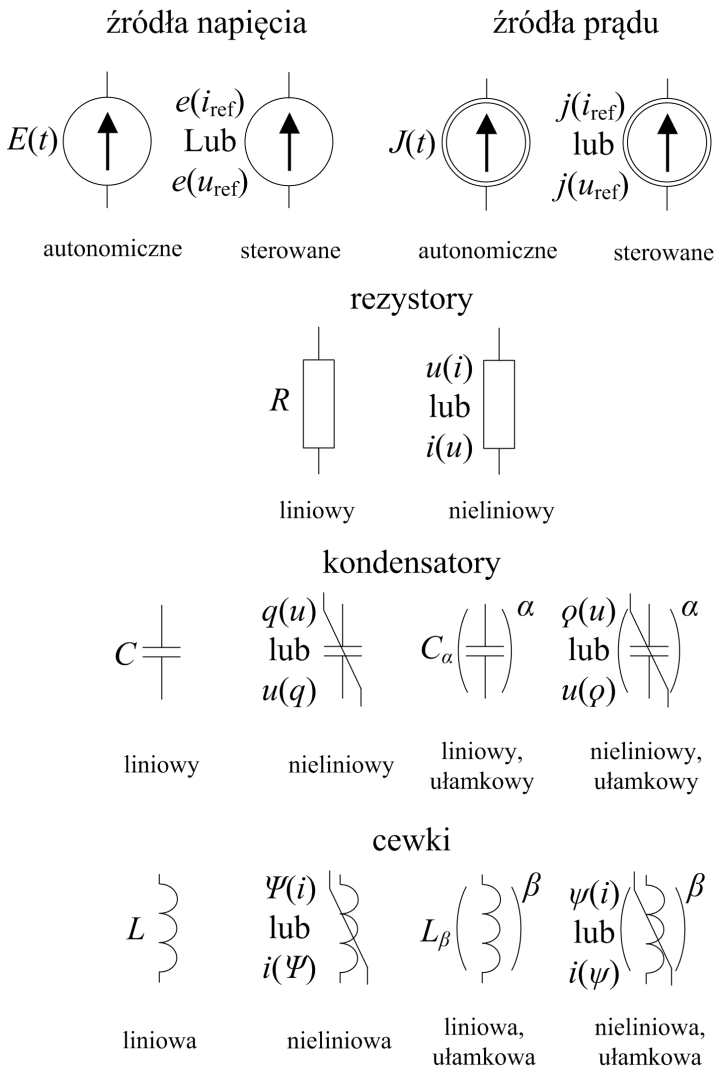
gdzie:

- $\boldsymbol{x}$ jest wektorem zmiennych stanu (długość wektora: n_x),
- $\boldsymbol{y}$ jest wektorem pozostałych zmiennych (jego długość: n_y),
- $\boldsymbol{w}$ łączy w sobie powyższe dwa wektory:

$$\boldsymbol{w}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}(t) \\ \boldsymbol{x}(t) \end{bmatrix}, \tag{33}$$

- $\boldsymbol{v}(t)$ składa się z funkcji reprezentujących funkcje czasu autonomicznych źródeł (długość wektora: n_v),
- notacja $\mathbf{0}_k$ jest wykorzystana do opisu wektora składającego się z k zer.

Dodatkowo, wektor $\boldsymbol{F}_{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{w}(t))$ został wprowadzony (z długością n_{NL}). W równaniu (32) został dosyć ogólnie opisany, podczas gdy faktycznie zawiera w sobie kolejno funkcje tylko pojedynczych zmiennych. Układem (32) opisać można równania obwodu zawierającego elementy przedstawione na rysunku 16.



Rysunek 16: Przykładowe elementy, które może zawierać obwód opisany układem równań (32)

Po zastosowaniu metody SubIval, w każdym kroku czasowym wyprowadzić można układ równań nieliniowych:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{g} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{n_y - n_{\mathrm{NL}}} \\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{w}) \\ \boldsymbol{0}_{n_x} \end{bmatrix}. \tag{34}$$

gdzie $\boldsymbol{w}$ przedstawia rozwiązanie wektora $\boldsymbol{w}(t)$ dla danej chwili czasu, macierz

$\boldsymbol{A}$ skonstruowana jest następująco:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{\mathrm{I}} & \boldsymbol{M}_{\mathrm{II}} \\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{III}} & \boldsymbol{M}_{\mathrm{IV}} + \mathrm{diag}(\boldsymbol{a}) \end{bmatrix}, \tag{35}$$

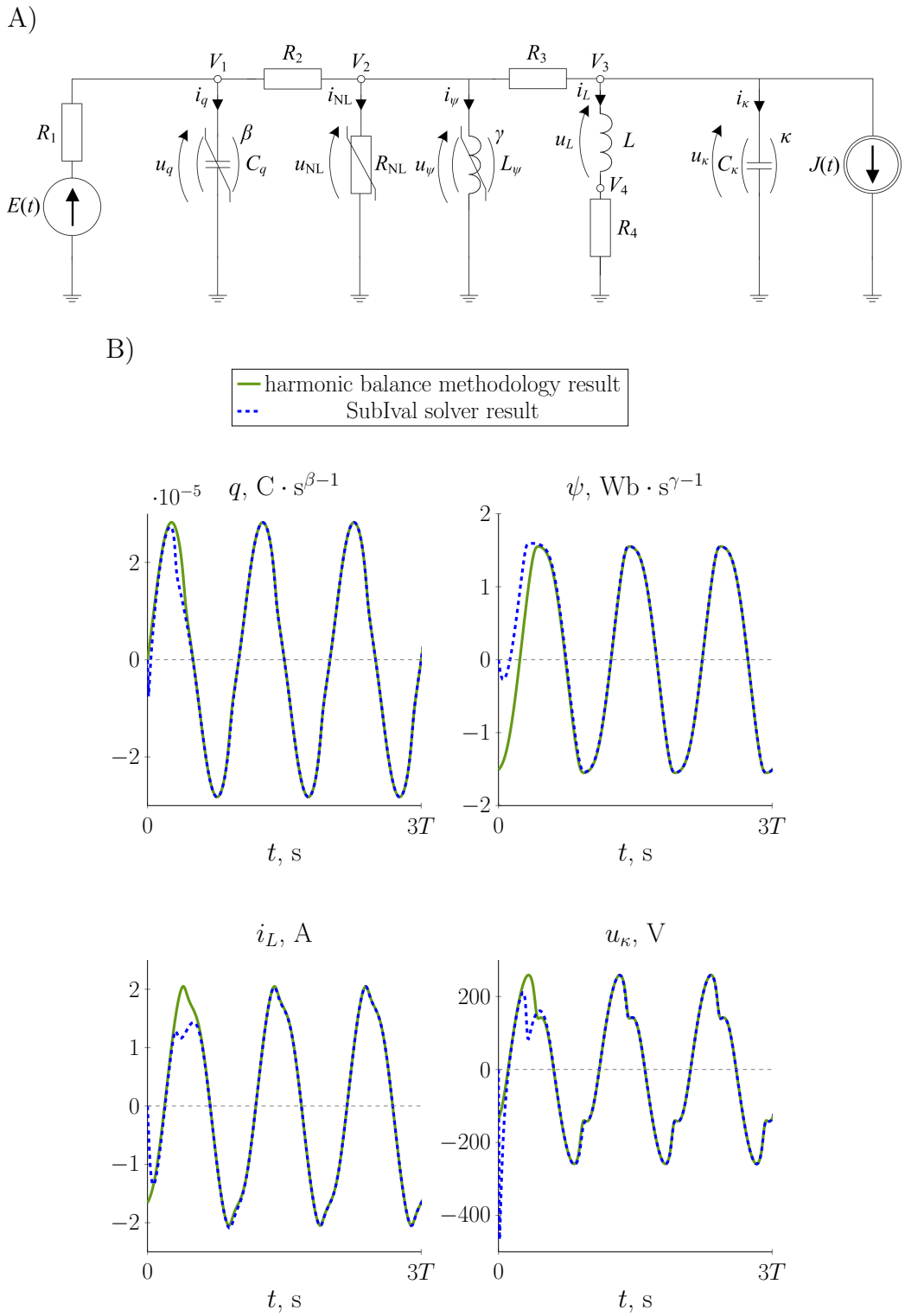
podczas gdy wektor $\boldsymbol{g}$ ma postać:

$$\boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}\boldsymbol{v}(t_{\mathrm{now}}) \\ -\boldsymbol{b} \end{bmatrix}, \tag{36}$$

gdzie wektory $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ składają się ze współczynników a i b dla kolejnych zmiennych wektora $\boldsymbol{x}(t)$ (nawiązując do równania (22)). Układ równań (34) rozwiązać można za pomocą wybranej metody numerycznej.

Postać (32) została celowo wyprowadzona z fragmentem liniowym, ponieważ dla wykorzystanej metody numerycznej uproszczone jest wtedy zadanie wyznaczania macierzy Jacobiego, tzn. początkowo ma ona postać macierzy $\boldsymbol{A}$, a w dalszym ciągu jest jedynie aktualizowana o odpowiednie zmiany w funkcjach wektora $\boldsymbol{F}_{\mathrm{NL}}$.

Przykładowe zagadnienie (i jego rozwiązanie) jakie zostało sformułowane do celów sprawdzenia poprawności działania solwera numerycznego przedstawiono na rysunku 17. Przy porównaniu wykorzystano metodę opierającą się na zastosowaniu *metodologii bilansu harmonicznych*, która została również opracowana przez autora wniosku (była częścią badań z *cyklu publikacji*, opisaną w kolejnym podrozdziale).



Rysunek 17: Testowe zagadnienie: A) nieliniowy obwód ułamkowy, B) porównanie rozwiązań [89]

⇒ Opracowanie, implementacja i zaprezentowanie możliwości rozwiązywania zagadnień ułamkowych uwzględniających nieliniowości jest bardzo istotnym dokonaniem w badaniach z *cyklu publikacji*. Możliwość symulacji tego typu zagadnień sprawia, że przy modelowaniu elementów rzeczywistych nie występują ograniczenia do elementów liniowych. Przykładowo – biblioteka z zaimplementowaną metodą SubIval wykorzystana była w pracach [38, 39] do modelowania cewki z rdzeniem ferromagnetycznym, gdzie właśnie wykorzystano nieliniową cewkę ułamkową. Opisane badania na obecnym etapie pozwalają już na analizę obwodów zawierających zarówno tradycyjne elementy obwodów nieliniowych jak i liniowe elementy ułamkowe (cewkę ułamkową i kondensator ułamkowy) oraz nieliniowe elementy ułamkowe (nieliniową cewkę ułamkową i nieliniowy kondensator ułamkowy jak opisane w rozdziale C.2)

C.4.6 Alternatywne (autora) metody numeryczne do otrzymywania rozwiązań referencyjnych

W celu testowania solwera wykorzystującego metodę SubIval wykorzystywano rozwiązania referencyjne otrzymane metodami o innych podstawach (tzn. nie były to metody numeryczne, które implementować można w solwerach numerycznych wyznaczających rozwiązanie w wybranych krokach czasowych tj. „time-stepping solvers"). We wcześniejszych publikacjach wykorzystywano zagadnienia o postaci (15) (dla których zaimplementować można rozwiązanie analityczne, np. z pracy [53]), lub zagadnienia trudniejsze, z wymuszeniami okresowo zmiennymi w czasie, natomiast dla których bez większych trudów otrzymać można jedynie rozwiązanie referencyjne w stanie ustalonym.

Po przeglądzie literatury stwierdzono, że:

- ułamkowe zagadnienia liniowe poszukiwania stanu ustalonego okresowo zmiennego – rozwiązać można za pomocą analizy wykorzystującej liczby zespolone – wtedy cewka ułamkowa opisana jest impedancją (9), podczas gdy kondensator ułamkowy można opisać impedancją (11),
- w przypadku ułamkowych zagadnień liniowych w stanie nieustalonym wykorzystać można rozwiązanie analityczne z pracy [55], lecz w tym przypadku konieczna jest implementacja zaawansowanych procedur numerycznych (tak zaimplementowana metoda może być traktowana jako metoda analityczno-numeryczna),
- dla zagadnień nieliniowych (zarówno w stanach ustalonych okresowo zmiennych, jak i w stanach nieustalonych) rozwiązania referencyjne otrzymać można jedynie za pomocą innych metod numerycznych.

W ramach badań opracowano alternatywną metodę otrzymywania rozwiązań referencyjnych dla liniowych zagadnień ułamkowych w stanach nieustalonych. Poza postanowieniem, żeby metoda zawierała szczegółowy opis pozwalający na stosunkowo prostą implementację zdecydowano, żeby wspierała ona zastosowanie różnych typów źródeł (oprócz źródeł stałych, dla których powstało już wiele prac). Zaimplementowaną metodę nazwano *gcdalpha* (ze względu na pewny element w jej podstawowych założeniach, gdzie wykorzystano operację największego wspólnego dzielnika, z angielskiego **g**reatest **c**ommon **d**ivisor – gcd). Opracowana metoda *gcdalpha* jest analityczno-numeryczną metodą, której niektóre istotne cechy można opisać następująco:

- dla małych wartości t (podobnie jak dla ewaluacji wykorzystujących rozwiazanie analityczne opierające się na funkcjach Mittag-Lefflera) występuje możliwość szybkiego otrzymania rozwiązania,
- dla $t \geqslant 1$ i stałych wymuszeń (podobnie jak w przypadku dobrze znanych rozwiązań analitycznych równań (15)) w dalszym ciągu mogą wystąpić problemy numeryczne,
- obecnie metoda ta została opisana dla źródeł stałych i wykładniczych [90], oraz dla źródeł sinusoidalnych [91] (możliwe jest również uwzględnienie innych typów źródeł po wyprowadzeniu i implementacji pewnych ogólnych zależności),
- rozwiązania niekiedy wymagają dłuższego czasu obliczeń, lecz metoda ta została zbudowana głównie do celów otrzymywania rozwiązań referencyjnych, w celu testowania solwerów numerycznych (zatem ich dokładność jest ważniejsza od efektywności pod względem czasu obliczeń).

Kolejną metodę jaką opracowano (o której raz już wspomniano w podrozdziale C.4.5) służyła do rozwiązywania ułamkowych zagadnień nieliniowych w stanach ustalonych okresowo zmiennych. Jest to metoda opierająca się na sformułowaniu układu równań nieliniowych za pomocą *metodologii bilansu harmonicznych* oraz rozwiązaniu tych równań. Metoda ta została opisana ze szczegółami w pracy [22]. Bardzo istotne są następujące jej cechy:

- jest to metoda zbudowana dla zagadnień z dominującą pierwszą harmoniczną,
- ilość harmonicznych branych pod uwagę w obliczeniach silnie wpływa na czas obliczeń.

Obie opracowane metody mogą być uznawane za metody analityczno-numeryczne ze względu na ich podstawę. Zawierają jednak szczegółowo opracowane procedury numeryczne w pracach [22, 90], dlatego mogą ogólnie być również zaliczane do sposobów numerycznego rozwiązywania zagadnień z pochodną ułamkowego rzędu.

Po uwzględnieniu opracowanych przez autora metod, możliwości sprawdzania rozwiązań (w celu testowania solwera numerycznego) w zależności od typu zagadnień zestawić można jak wykazano w tabeli 1.

Tabela 1: Zestawienie możliwości otrzymywania rozwiązań referencyjnych (* – tylko innymi solwerami numerycznymi)

	stan ustalony okresowo zmienny	stan nieustalony
liniowe	zastosowanie liczb zespolonych	metoda *gcdalpha*
nieliniowe	rozwiązanie układu równań otrzymanego po zastosowaniu *metodologii bilansu harmonicznych*	brak*

⇒ Opracowanie i implementacja alternatywnych metod numerycznego rozwiązywania zagadnień obwodów ułamkowych, w celu otrzymywania rozwiązań referencyjnych, to kolejne oryginalne dokonanie opisane w *cyklu publikacji*. Obie zaproponowane metody (*gcdalpha* oraz metoda oparta na *metodologii bilansu harmonicznych*) zostały wykorzystane przy budowaniu solwerów numerycznych (opartych na metodzie SubIval) do ich testowania oraz weryfikacji wyników. Mogą być również wykorzystane przez innych naukowców do rozwiązywania zagadnień testowych przy implementacjach solwerów numerycznych i badaniu ich dokładności.

C.4.7 Solwery dla środowisk Matlab i Octave

Biorąc pod uwagę implementacje autora – dotychczasowe badania pozwalały na zastosowanie metody SubIval w różnych środowiskach obliczeniowych (np. Matlab, Mathematica, FreeMat, Octave). Ze względu na implementację za pomocą języka C# możliwe było jej zastosowanie w oprogramowaniu obsługującym platformę .NET Framework. Po zastosowaniu tzw. wrappera [92] możliwe było również jej zastosowanie w oprogramowaniu napisanym w językach C oraz C++. W ramach dalszych badań stwierdzono, że przydatnym narzędziem byłby również gotowy solwer dla środowisk Matlab i Octave.

Solwery zbudowane na podstawie metody SubIval mogłyby wtedy być wygodnie wykorzystywane przez innych naukowców, gdzie konieczne by było jedynie:

- sformułowanie zagadnienia, tzn. wypełnienie odpowiednich macierzy, wektorów oraz zadanie funkcji nieliniowych,
- zadanie parametrów i opcji dla wewnętrznych numerycznych obliczeń solwera (np. tolerancje błędów).

Pierwsze tego typu badania dotyczyły solwera FDE [93], tzn. równań o postaci:

$$ {}_{t_0}\mathbf{D}_t^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}(t), \tag{37} $$

W dalszych badaniach zaimplementowany został już solwer dla zagadnień nieliniowych o postaci, o której już wcześniej wspomniano:

$$ \begin{cases} \boldsymbol{M}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{M}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{v}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_y - n_{\mathrm{NL}}} \\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{w}(t)) \end{bmatrix}, \\ {}_{t_0}\mathbf{D}_t^{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{M}_{\mathrm{III}}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{M}_{\mathrm{IV}}\boldsymbol{x}(t) = \mathbf{0}_{n_x}. \end{cases} \tag{38} $$

Obecnie solwer dostępny jest już na stronie [81].

Poza solwerem opierającym się na metodzie SubIval – dla środowisk Matlab i Octave odnaleźć można jedynie następujące solwery numeryczne:

- oparte na metodach *PI rule* [72],
- oparte na metodach *FLMM* [71] (te jednak zostały zaimplementowane jedynie z możliwością podania jednego rzędu pochodnej ułamkowej).

W obu powyższych kategoriach wyróżnić można tylko solwery, które pozwalają na zadanie stałego kroku czasowego Δt. Dodatkowo (ze względu na jej częste zastosowanie) zaimplementowano solwer opierający się na definicji Grünwalda-Letnikova. Przykładowe porównanie błędów wykonano w badaniach z publikacji [83]. Porównania rozwiązań numerycznych z rozwiązaniami referencyjnymi odbywało się poprzez wyznaczenie błędów dla każdej wyznaczonej zmiennej (oznaczonej jako $w_i(t)$):

$$ e_i = 100 \cdot \frac{|w_i(t_j) - w_{i\,\mathrm{num}\,j}|}{\max\limits_{j=1,2,\ldots n_t} |w_i(t_j)|}\ \%, \tag{39} $$

gdzie $t_1, t_2, \ldots\ t_{n_t}$ przedstawiają chwile czasu wybrane przez solwer numeryczny, $w_i(t_j)$ jest wartością dla chwili czasu t_j otrzymaną z rozwiązania referencyjnego, podczas gdy $d_{i\,\mathrm{num}\,j}$ jest wartością $w_i(t_j)$ otrzymaną za pomocą solwera numerycznego. Dla porównań solwerów ze wspomnianej publikacji [83] dla solwera wykorzystującego metodę SubIval zadano parametr akceptowalnego oczekiwanego poziomu błędu $e_{\mathrm{ctrl}} = 10^{-2}\,\%$. W przypadku pozostałych solwerów zadano Δt równe $\Delta t_{\min}$ (zadanej minimalnej dopuszczalnej wartości kroku czasowego) zadanej w solwerze SubIval, po czym zmniejszano krok aż rozwiązanie nie ulegało poprawie (niewątpliwie z powodu błędów numerycznych).

Tabela 2: Porównanie solwerów – błędy wyliczone jako średnia z wybranych wartości ze wszystkich punktów czasowych (t.j. wartości maksymalnych dla wszystkich zmiennych dla danych chwil czasu) dla przykładów z Rys. 14 i Rys. 15 (niektóre solwery nie zostały zaimplementowane z możliwością zadania różnych rzędów pochodnej; *w przypadku zaznaczonych solwerów wystąpiły problemy ze stabilnością rozwiązania) [83].

solwer	przykład ze stanem ustalonym okresowo zmiennym	przykład ze stanem nieustalonym
SubIval solver	$1.24 \cdot 10^{-2}$	$7.09 \cdot 10^{-3}$
PI1_Ex solver	próba nieudana*	1.29
PI1_Im solver	$8.02 \cdot 10^{-1}$	$1.34 \cdot 10^{-1}$
PI2_Im solver	$4.66 \cdot 10^{-2}$	$1.10 \cdot 10^{-1}$
PI12_PC solver	próba nieudana*	$1.10 \cdot 10^{-1}$
FLMM_T solver	–	$1.11 \cdot 10^{-1}$
FLMM_NG solver	–	$1.11 \cdot 10^{-1}$
FLMM_BDF2 solver	–	$1.08 \cdot 10^{-1}$
GL solver	$7.23 \cdot 10^{-1}$	$1.24 \cdot 10^{-1}$

Więcej informacji na temat porównań solwerów odnaleźć można w publikacjach [83, 93].

⇒ Implementacja solwerów numerycznych dla środowisk Matlab i Octave jest szczególnie ważnym dokonaniem opisanym w *cyklu publikacji* ze względu na ich przydatność jako wygodnego narzędzia dla innych naukowców i inżynierów wykonujących symulacje obiektów rzeczywistych z modelami ułamkowymi. Jak wspomniano – na stronie [81] dostępny jest już obecnie solwer (z automatycznym doborem kroku czasowego) umożliwiający rozwiązywanie nieliniowych zagadnień ułamkowych.

C.4.8 Możliwość wykorzystania w różnych zagadnieniach

Generalnie metoda SubIval może być wykorzystywana do zagadnień z różnych specjalizacji ze względu na jej ogólne traktowanie poszczególnych pochodnych ułamkowych sformułowanego zagadnienia, t.j. ${}_{t_0}\mathrm{D}_t^{\alpha_1} x_1(t)$, ${}_{t_0}\mathrm{D}_t^{\alpha_2} x_2(t)$, ...

${}_{t_0}\mathrm{D}_t^{\alpha_{n_x}} x_{n_x}(t)$. Postać rozpatrywanych równań może być również inna niż zaprezentowana i zaimplementowana w solwerach metody SubIval (tzn. w postaci FDE (17) lub (38)). Przykładowo za pomocą metody SubIval (np. korzystając z jej implementacji w bibliotece, o której wspomniano w rozdziale C.4.3) rozwiązywać można zagadnienia, gdzie w jednym równaniu występuje kilka pochodnych ułamkowych (w tym nawet pochodne tej samej zmiennej – równania takie to tak zwane "multi-term frational differential equations" [94]). Dla zagadnień, które doprowadzić można do postaci jak w przypadku zagadnień obwodów ((17) lub (38)) możliwe jest zastosowanie bezpośrednio solwerów numerycznych opisanych w rozdziale C.4.7. Badania z *cyklu publikacji* dotyczą zagadnień obwodów; natomiast nie ogranicza to ich zastosowania w innych dziedzinach i specjalizacjach, np. w zagadnieniach automatyki. Metoda SubIval wykorzystana może być też przykładowo w zagadnieniach pola elektromagnetycznego w przypadku zastosowania pochodnej ułamkowej (przykładowo tam gdzie wykorzystano ją do opisu środowisk o pewnych skomplikowanych właściwościach [11,12]). Wtedy w procesie rozwiązywania można ją zastosować w każdym kroku czasowym analogicznie jak stosuje się niejawną metodę różnic wstecznych w przypadku klasycznych zagadnień, tzn. uwzględniających pochodną po czasie rzędu całkowitego (jak np. w środowisku COMSOL Multiphysics [95]). Kluczową kwestią jest zatem odpowiednie sformułowanie równań przy wykorzystaniu zaprezentowanych w poprzednich rozdziałach narzędzi obliczeniowych.

Literatura

[1] G.W. Leibniz, Letter From Hanover, Germany to G.F.A. L'Hospital, September 30, 1695, in "Mathematische Schriften 1849", reprinted 1962, Hidesheim, Germany (Olms Verlag) 2, pp. 301–202.

[2] B. Ross: "The development of fractional calculus 1695–1900", Historia Mathematica 4 (1977), pp. 75–89.

[3] K.B. Oldham, J. Spanier, The Fractional Calculus. Academic Press, New York (1974).

[4] K.S. Miller, B. Ross, An Introduction fo the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York, NY (1993).

[5] K. Nishimoto, Fractional Calculus, Descartess Press, Koriama, (1984).

[6] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, CA (1999).

[7] M. Caputo: "Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent – II", Geophysical Journal International 13 (5), (1967) pp. 529–539.

[8] J.D. Munkhammar, "Riemann-Liouville fractional derivatives and the Taylor-Riemann series", *UUDM Project Report* 7, (2004) pp. 1–18.

[9] P.W. Ostalczyk, P. Duch, D.W. Brzeziński, D. Sankowski: "Order Functions Selection in the Variable-, Fractional-Order PID Controller", Advances in Modelling and Control of Non-integer-Order Systems, Springer (2015) pp. 159–170.

[10] D. Spałek: "Synchronous Generator Model with Fractional Order Voltage Regulator $\mathrm{PI}^b\mathrm{D}^a$", Acta Energetica 2/23, (2015) pp. 78–84.

[11] R. Garrappa, G. Maione: "Fractional Prabhakar Derivative and Applications in Anomalous Dielectrics: A Numerical Approach", Theory and Applications of Non-Integer Order Systems, Springer, (2017) pp. 429–439.

[12] L. Mescia, P. Bia, D. Caratelli: "Fractional Derivative Based FDTD Modeling of Transient Wave Propagation in Havriliak-Negami media", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques 62 (9), (2014) pp. 1920–1929.

[13] M. Faraji Oskouie, R. Ansari, "Linear and nonlinear vibrations of fractional viscoelastic Timoshenko nanobeams considering surface energy effects", Applied Mathematical Modelling 43, (2017) pp. 337–350.

[14] M.A. Ezzat, A.S. El-Karamany, A.A. El-Bary, "Thermo-viscoelastic materials with fractional relaxation operators", Applied Mathematical Modelling 39, 23–24, (2015) pp. 7499–7512.

[15] W. Bauer, A. Kawala-Janik, "Implementation of Bi-fractional Filtering on the Arduino Uno Hardware Platform", Theory and Applications of Non-Integer Order Systems, Springer, (2017) pp. 419–428.
[16] A. Kawala-Janik, M. Podpora, A. Gardecki, W. Czuczwara, J. Baranowski, W. Bauer: "Game controller based on biomedical signals", Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR) 2015 20th International Conference, (2015) pp. 934–939.
[17] R. Brociek, D. Słota and R. Wituła: "Reconstruction Robin Boundary Condition in the Heat Conduction Inverse Problem of Fractional Order", Theory and Applications of Non-Integer Order Systems, Springer, (2017) pp. 147–156.
[18] D. Sierociuk, T. Skovranek, M. Macias, I. Podlubny, I. Petras, A. Dzielinski, P. Ziubinski, "Diffusion process modeling by using fractional-order models", Applied Mathematics and Computation 257, (2015) pp. 2–11.
[19] R. Sikora: "Fractional-order derivatives in theory of electric circuits, critical remarks (in Polish)," Electr. Eng. Rev. R.92, no. 10, (2016) pp. 274-276.
[20] K.J. Latawiec, R. Stanisławski, M. Łukaniszyn, W. Czuczwara, M. Rydel: "Fractional-order modeling of electric circuits: modem empiricism vs. classical science", 2017 Progress in Applied Electrical Engineering (PAEE), 25-30 June 2017, pp. 1–4.
[21] P. Ostalczyk: "And yet: 'The differential-integral calculus of non integer orders'. A riposte to the paper of Ryszard Sikora on "Fractional-order derivatives in theory of electric circuits, critical remarks (in Polish), Electrical Engineering Review, R.92, no. 10/2016,", Electr. Eng. Rev. R.93, vol. I, no. 3, (2017) pp. 175–180.
[22] M. Sowa: "A Harmonic Balance Methodology for Circuits with Fractional and Nonlinear Elements", Circuits Syst Signal Process, Vol. 37, Issue 11, (2018) pp. 4695–4727.
[23] M. Sowa, A. Jakubowska-Ciszek: "DAQ-based measurements and study of supercapacitor frequency characteristics", Poznan Univerisity of Technology Academic Journals (in print) (2019).
[24] M. Sowa: "Ferromagnetic coil modeling with fractional elements", (awaiting for review in Applied Mathematics and Computation) (2019).
[25] M. Sowa, E. Piotrowska: "Parameter estimation for a fractional model of a supercapacitor", (in review for IIPhDW 2019 Proceedings) (2019).
[26] M. Sowa: "DAQ-based measurements for ferromagnetic coil modeling using fractional derivatives", 2018 International Interdisciplinary PhD Workshop (IIPhDW), (2018), pp. 91–95.
[27] "GW Instek Arbitrary Function Generator Specification,", https://www.gwinstek.com/en-global/products/detail/AFG-2100_AFG-2000
[28] "NI-9239 (C Series Voltage Input Module)", http://www.ni.com/plpl/support/model.ni-9239.html
[29] "cDAQ-9174 (CompactDAQ Chassis)", http://www.ni.com/plpl/support/model.cdaq-9174.html
[30] "Options for Programming NI-DAQmx or NI-DAQ in Visual C#.NET", http://www.ni.com/product-documentation/54391/en/
[31] https://www.murata.com/support/faqs/products/capacitor/edlc/conf/0002
[32] http://www.cooperindustries.com/content/dam/public/bussmann/Electronics/Resources/product-datasheets/bus-elx-ds-10510-xlr-supercapacitor-module.pdf
[33] http://www.bigcap.net/en/article/389.html
[34] M. Fouda, A. Elwakil, A. Radwan, A. Allagui: "Power and energy analysis of fractional-order electrical energy storage devices", Energy, vol. 111, (2016) pp. 785–792.
[35] A. Elwakil, A. Radwan, T. Freeborn, A. Allagui, B. Maundy, M. Fouda: "Low-Voltage Commercial Super-Capacitor Response to Periodic Linear-With-Time Current Excitation: A Case Study", IET Circuits, Devices & Systems, (2016) pp. 189–195.
[36] W. Mitkowski, P. Skruch: "Fractional-order models of the supercapacitors in the form of RC ladder networks", Bull. Pol. Ac.: Tech. 61 (3), (2013) pp. 580–587.
[37] Schäfer, I., Krüger, K.: "Modelling of lossy coils using fractional derivatives", Phys. D: Appl. Phys. 41, (2008) pp. 1–8.
[38] Ł. Majka: "Applying a fractional coil model for power system ferroresonance analysis", Bull. Pol. Ac.: Tech 66 (4), (2018), pp. 467–474.
[39] Ł. Majka: "Fractional derivative approach in modeling of a nonlinear coil for ferroresonance analyses", in Non-integer order calculus and its applications, pp. 135–147, eds. P. Ostalczyk, D. Sankowski, J. Nowakowski, 9th International Conference on Non-integer Order Calculus and its Applications, Łódź, Poland, Springer International Publishing, Cham, 2019.
[40] https://www.mathworks.com/help/matlab/math/solve-differential-algebraic-equations-daes.html
[41] J. Walczak, M. Pasko, Elementy dynamiki liniowych obwodów elektrycznych, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, (2011).
[42] B. Baron, J. Kolańska-Płuska, Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych w języku C#, Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, (2015).

[43] E. Hairer, S.P. Nørsett, G. Wanner, Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems (1993).

[44] E. Hairer, G. Wanner, Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems (1996).

[45] N.S. Kaisare, Computational Techniques for Process Simulation and Analysis Using MATLAB®, CRC Press, Taylor & Francis Group, New York (2018).

[46] C. Studer, R. Leine, C. Glocker: "Step size adjustment and extrapolation for time-stepping schemes in non-smooth dynamics". International Journal for Numerical Methods in Engineering 76 (11), Wiley, (2008), 35 pages.

[47] https://octave.org/doc/v4.2.2/Differential_002dAlgebraic-Equations.html

[48] M. Włodarczyk, A. Zawadzki: "Obwody RLC w aspekcie pochodnych niecałkowitych rzędów dodatnich", Elektryka 217 (1), (2011) pp. 75–88.

[49] A. Alsaedi, J.J. Nieto, V. Venktesh: "Fractional electrical circuits", Advances in Mechanical Engineering 7(12), (2015) pp. 1–7.

[50] A. Jakubowska-Ciszek, J. Walczak: "Analysis of the transient state in a parallel circuit of the class $RL_\beta C_\alpha$", Applied Mathematics and Computation 319, (2018) pp. 287-300.

[51] E. Piotrowska: "Analiza obwodów w aspekcie pochodnych ułamkowego rzędu i układów dodatnich", Poznan University of Technology Academic Journals. Electrical Engineering 89, (2017) pp. 25–34.

[52] J.F. Gómez-Aguilar, V.F. Morales-Delgado, M.A. Taneco-Hernández, D. Baleanu, R.F. Escobar-Jimenéz, M.M. Al Qurashi: "Analytical Solutions of the Electrical RLC Circuit via Liouville–Caputo Operators with Local and Non-Local Kernels", Entropy 18, 402, (2016) 12 pages.

[53] T. Kaczorek, Selected problems of Fractional Systems Theory, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, (2011).

[54] R. Garrappa: "Numerical Evaluation of Two and Three Parameter Mittag-Leffler Functions", SIAM Journal on Numerical Analysis, 53(3), (2015) pp. 1350–1369.

[55] T. Kaczorek: "Positive Linear Systems Consisting of n Subsystems With Different Fractional Orders", IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Regular Papers, Volume 58, Number 6, (2011) pp. 1203–1210.

[56] M. Alaroud, M. Al-Smadi, R. Rozita Ahmad, S. Din, U. Khair: "An Analytical Numerical Method for Solving Fuzzy Fractional Volterra Integro-Differential Equations", Symmetry 11 (2), (2019), 19 pages.

[57] R. Caponetto, S. Fazzino: "A semi-analytical method for the computation of the Lyapunov exponents of fractional-order systems", Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 18, (2013) pp. 22–27.

[58] A. Arikoglu, I. Ozkol: "Solution of fractional integro-differential equations by using fractional differential transform method", Chaos, Solitons and Fractals 40, (2009), pp. 521–529.

[59] S. Momani, M.A. Noor: "Numerical methods for fourth order fractional integro-differential equations", Appl. Math. Comput. 182, (2006), pp. 754–760.

[60] D. Nazari, S. Shahmorad: "Application of the fractional differential transform method to fractional-order integro-differential equations with nonlocal boundary conditions", Journal of Computational and Applied Mathematics 234 (3), (2010), pp. 883-891.

[61] H. Saeedi, M. Mohseni Moghadam: "Numerical solution of nonlinear Volterra integrodifferential equations of arbitrary order by CAS wavelets". Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 16, (2011) pp. 1216–1226.

[62] L. Huang, L. Xian-Fang, Y. Zhao, X.-Y. Duan: "Approximate solution of fractional integrodifferential equations by Taylor expansion method". Comput.Math. Appl. 62, (2011) pp. 1127–1134.

[63] W.-H. Luo, T.-Z. Huang, G.-C. Wu, X.-M. Gu: "Quadratic spline collocation method for the time fractional subdiffusion equation", Applied Mathematics and Computation 276, (2016) pp. 252–265.

[64] A. Pirkhedri, H.H.S. Javadi: "Solving the time-fractional diffusion equation via Sinc–Haar collocation method", Applied Mathematics and Computation 257, (2015) pp. 317–326.

[65] R. Garrappa, M. Popolizio: "On accurate product integration rules for linear fractional differential equations", Journal of Computational and Applied Mathematics 235, (2011) pp. 1085–1097.

[66] C. Lubich: "Fractional linear multistep methods for Abel-Volterra integral equations of the second kind", Math. Comput. 45, (1985) pp. 463–469.

[67] M.D. Ortigueira, F. Cotto: "From differences to derivatives", Fractional Calculus and Applied Analysis 7 (4), (2004) pp. 459–471.

[68] S. Yadav, R. K. Pandey, A. K. Shukla: "Numerical approximations of Atangana–Baleanu Caputo derivative and its application", Chaos, Solitons and Fractals 118, (2019) pp. 58–64.

[69] B.S.T. Alkahtani: "Numerical analysis of dissipative system with noise model with the Atangana-Baleanu fractional derivative", Chaos, Solitons and Fractals 116, (2018) pp. 239–248.

[70] R. Garrappa: "Software for Fractional Differential Equations and related problems", https://www.dm.uniba.it/Members/garrappa/Software

[71] R. Garrappa: "Trapezoidal methods for fractional differential equations: Theoretical and computational aspects", Mathematics and Computers in Simulation 110, (2015) pp. 96–112.
[72] R. Garrappa: "Numerical Solutions of Fractional Differential Equations: A Survey and a Software Tutorial", Mathematics 6 (2), (2018) 16 pages.
[73] M. Sowa: "A subinterval-based method for circuits with fractional order elements", Bull. Pol. Ac.: Tech. 62 (3), (2014) pp. 449–454.
[74] M. Sowa: "Simple C# classes for fast multivariate polynomial symbolic computation – Part I: Implementation details", Prace Naukowe Politechniki Śląskiej. Prace Naukowe Politechniki Śląskiej. Elektryka Z.1 (237), (2016) pp. 67–77.
[75] M. Sowa: "Simple C# classes for fast multivariate polynomial symbolic computation – Part II: Analysis of numerical efficiency", Prace Naukowe Politechniki Śląskiej. Prace Naukowe Politechniki Śląskiej. Elektryka Z.1 (237), (2016) pp. 79–89.
[76] M. Sowa: "Simple C# classes for fast multivariate polynomial symbolic computation – Part III: Polynomial multiplication algorithm and its efficiency", Prace Naukowe Politechniki Śląskiej. Prace Naukowe Politechniki Śląskiej. Elektryka Z.1 (237), (2016) pp. 93–103.
[77] M. Sowa: "The subinterval-based ("SubIval") method and its potential improvements", XXXIX International Conference IC-SPETO 2016, Gliwice – Ustroń, 18-21.05.2016 (2016).
[78] M. Sowa: "SubIval computation time assessment", Proceedings of International Interdisciplinary PhD Workshop 2017. IIPhDW 2017, September 9-11, 2017, Łódź (2017).
[79] M. Sowa: "Application of SubIval, a method for fractional-order derivative computations in IVPs" in Theory and applications of non-integer order systems. Springer International Publishing, 2017, pp. 489–499 in series: Lecture Notes in Electrical Engineering vol. 407 (2017).
[80] M. Sowa: "Application of SubIval in solving initial value problems with fractional derivatives", Applied Mathematics and Computation 319, (2018) pp. 86–103.
[81] http://msowascience.com
[82] M. Sowa: "Numerical computations of the fractional derivative in IVPS, examples in MATLAB and Mathematica" Informat. Autom. Pomiary Gosp. Ochr. Środ. t. 7 z. 3, (2017) pp. 19-22.
[83] M. Sowa: "A local truncation error estimation for a SubIval solver", Bull. Pol. Ac.: Tech. 64 (4), (2018) pp. 475–484.
[84] http://www.sympy.org
[85] https://www.mathworks.com/products/matlab.html
[86] http://freemat.sourceforge.net
[87] http://www.wolfram.com/mathematica/
[88] https://www.gnu.org/software/octave/
[89] M. Sowa: "Solutions of Circuits with Fractional, Nonlinear Elements by Means of a SubIval Solver", in Non-Integer Order Calculus and its Applications. RRNR 2017. Springer, 2019, in series: Lecture Notes in Electrical Engineering, vol 496 (2019) pp. 217-228.
[90] M. Sowa: "gcdAlpha – a semi-analytical method for solving fractional state equations", Poznan University of Technology Academic Journals. Electrical Engineering 96, (2018) pp. 231–242.
[91] M. Sowa: "Solving fractional circuits with sinusoidal sources by using the gcdAlpha method", ITM Web of Conferences 19, 01008 ZKwE'2018 (2018).
[92] http://msowascience.com/instructions-part-ii-subival-dll-functions/
[93] M.Sowa, A.Kawala-Janik, W.Bauer: "Fractional Differential Equation Solvers in Octave/Matlab", 2018 23rd International Conference on Methods & Models in Automation & Robotics (MMAR), (2018) pp. 628–633.
[94] H.A.H. Salem: "Multi-term fractional differential equation in reflexive Banach space", Mathematical and Computer Modelling 49, (2009) pp. 829–834.
[95] https://www.comsol.com/

D Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

W przypadku pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych warto wspomnieć o wspomnianych już (rozdział C.2) rozpoczętych badaniach dotyczących modelowania superkondensatorów i cewek z rdzeniami ferromagnetycznymi za pomoca modeli wykorzystujących elementy ułamkowe. Z tych badań trzy prace jeszcze nie

zostały opublikowane (jedna w druku, dwie w recenzji); podczas gdy publikacji doczekała się praca:

[m1] M. Sowa: "DAQ-based measurements for ferromagnetic coil modeling using fractional derivatives", 2018 International Interdisciplinary PhD Workshop (IIPhDW) (2018), pp. 91-95.
(materiały konferencyjne indeksowane w bazie Scopus)
Udział procentowy: 100 %

Do innych badań (nie dotyczących zastosowań pochodnej ułamkowego rzędu w zagadnieniach elektrotechniki) zaliczyć można badania dotyczące metod *implicit BDF* (niejawnych metod różnic wstecznych) w analizach pola elektromagnetycznego:

[b1] M. Sowa: "Influence of BDF order on FEM computation". Computational problems of electrical engineering and advanced methods of the theory of electrical engineering. CPEE-AMTEE 2013. Joint conference, Roztoky u Krivoklatu, Czech Republic, 4-6.09.2013. pp. I-9 (2013).
(artykuł w materiałach konferencyjnych)
Udział procentowy: 100 %

[b2] M. Sowa: "Analysis of numerical efficiency of transient FEM computation with BDF". Innowacyjność w elektroenergetyce. Invention'13, Szczyrk, 23-25.10.2013, (2013), p. 40.
(artykuł w materiałach konferencyjnych)

[b3] M. Sowa: "Analysis of numerical efficiency of TD-FEM computation with BDF". Prz. Elektrot. 2014 R. 90 nr 3, (2014) pp. 107-110.
Punktacja MNiSW: 14
Udział procentowy: 100 %

[b4] M. Sowa, D. Typańska: "Comparison of time-stepping methods for transient magnetic field computations in COMSOL Multiphysics". Pozn. Univ. Technol. Acad. J., Electr. Eng. 2014 no. 77, (2014) pp. 141-147.
Punktacja MNiSW: 9 (/N (podzielona przez liczbę autorów): 4.5)
Udział procentowy: 70 %

Badania, które niewątpliwie w przyszłości okażą się bardzo przydatne ze względu na możliwość ich implementacji w aplikacjach obliczeniowych to badania dotyczące automatycznego formułowania równań obwodu. Prace, które powstały na ten temat to:

[a1] M.Sowa: "Application of stamps in the automatic formulation of circuit equations. Part I. Basics". Pr. Nauk. P.Śl. – Elektryka 2013, R. 59, z.I, (2013) pp. 43-52.
Punktacja MNiSW: 6
Udział procentowy: 100 %

[a2] M.Sowa: "Application of stamps in the automatic formulation of circuit equations. Part II. Nonlinear system formulation". Pr. Nauk. P.Śl. – Elektryka 2013, R. 59, z.I, (2013) pp. 53-61.
Punktacja MNiSW: 6
Udział procentowy: 100 %

W międzyczasie powstała też publikacja dotycząca odnajdywania błędnych konfiguracji w połączeniach obwodu:

[d1] M.Sowa, D.Typańska: "Detection of erroneous configurations in a circuit topology". (Short Conference Paper) XXXVII International Conference ICSPETO 2014, Gliwice – Ustroń, 21-24.05.2014, (2014) p. 36.
(artykuł w materiałach konferencyjnych)
Udział procentowy: 70 %

Kolejne badania, których prace nie są zaliczane do *cyklu publikacji* dotyczyły implementacji biblioteki do szybkich obliczeń symbolicznych na wielomianach wielu zmiennych:

[s1] M.Sowa: "Simple C# classes for fast multivariate polynomial symbolic computation Pt. 1, Implementation details". Pr. Nauk. PŚl., Elektr. R. 62 z. 1, (2016) pp. 67-77.
Punktacja MNiSW: 6
Udział procentowy: 100 %

[s2] M.Sowa: "Simple C# classes for fast multivariate polynomial symbolic computation Pt. 2: Analysis of numerical efficiency". Pr. Nauk. PŚl., Elektr. R. 62 z. 1, (2016) pp. 79-89.
Punktacja MNiSW: 6
Udział procentowy: 100 %

[s3] M.Sowa: "Simple C# classes for fast multivariate polynomial symbolic computation Pt. 3: Polynomial multiplication algorithm and its efficiency". Pr. Nauk. PŚl., Elektr. R. 62 z. 1, (2016) pp. 93-103.
Punktacja MNiSW: 6
Udział procentowy: 100 %

Pozostałe badania dotyczyły tzw. metodyki *pre-assembly* – przydatnego podejścia wspomagającego formułowanie równań przy wykorzystaniu metody elementów skończonych. Prace jakie opublikowano na ten temat to:

[p1] M.Sowa, D.Typańska: "Pre-assembly of FEM n-th order triangular elements". Pozn. Univ. Technol. Acad. J., Electr. Eng. 2014 no. 77, pp. 133-140 (2014).
Punktacja MNiSW: 9 (/N: 4.5)
Udział procentowy: 75 %

[p2] M.Sowa, D.Typańska: "Pre-assembly for FEM 2D non-curvilinear quadrilateral Lagrangian elements". Comput. Appl. Electr. Eng. 2014 vol. 12, (2014) pp. 106-119.
Punktacja MNiSW: 6 (/N: 3)
Udział procentowy: 75 %

Sumaryczna ilość punktów MNiSW uzyskanych z publikacji spoza *cyklu* wynosi 68, przy czym przy podziale na liczbę autorów liczba ta wynosi 56.

Załącznik 3 Autoreferat

podpis wnioskodawcy