

## SPIS TREŚCI

	Str.
1. Władysław Mizia: Przedmowa .....	7
2. Stefan Węgrzyn: Życie i prace Profesora Stanisława Fryzego w stulecie urodzin .....	9
3. Publikacje Profesora Stanisława Fryzego .....	27
4. Stanisław Fryze: Teoretyczne i fizyczne podstawy definicji mocy czynnej, biernej i pozornej w niesymetrycznych układach wielofazowych o odkształconych przebiegach napięć i prądów .....	29
5. Zygmunt Nowomiejski: Uogólniona teoria mocy .....	47
6. Leszek S. Czarnecki: Wkład Prof. dr inż. Stanisława Fryzego w badania nad teorią mocy obwodów o przebiegach odkształconych ..	65
7. Marek Brodzki: Kilka uwag o matematycznej naturze wielkości fizycznych .....	79
8. Bolesław Glikeman: Egzamin .....	85

Doc. dr hab. inż. Władysław MIZIA

Dziekan Wydziału Elektrycznego  
Politechniki Śląskiej

### PRZEDMOWA

Niniejszy zeszyt naukowy jest wydany dla uczczenia 100-letniej rocznicy urodzin Nestora Polskiej Elektrotechniki, Członka Rzeczywistego PAN, Dr inż. Stanisława Przyego, profesora Politechniki Lwowskiej i Politechniki Śląskiej. Zawiera on materiały, które przybliżą Czytelnikowi postać Profesora - Jego drogę życiową, osiągnięcia naukowe oraz niezwykle cechy charakteru. Cechy te sprawiły, że rozpoczynając pracę jako elektromonter doszedł On do najwyższych godności naukowych i cieszył się ogólnym uznaniem i szacunkiem. Niezwykła osobowość Profesora wpłynęła niewątpliwie na kształtowanie pozytywnych cech charakteru Jego współpracowników i wielu wychowanków inżynierów elektryków, absolwentów Politechniki Lwowskiej i Politechniki Śląskiej.

Prace naukowe Profesora zyskały międzynarodowy rozgłos i uznanie. Najważniejsze z nich dotyczyły teorii mocy i zachowały swą aktualność naukową do dnia dzisiejszego mimo bardzo dużego postępu w rozwoju elektrotechniki. Z tego powodu zamieszczono w zeszycie jedną z prac Profesora mówiącą o teorii mocy oraz niektóre prace Jego wychowanków i kontynuatorów badań w tym zakresie. Zamieszczono również artykuł ujmujący aktualne spojrzenie na sprawę jednostek wielkości elektrycznych i magnetycznych, bowiem Profesor przedkładał w tym zakresie pionierskie propozycje i był rzecznikiem uporządkowania tych spraw w skali międzynarodowej. Ci, którzy mieli szczęście studiować pod kierunkiem Profesora i zdawać egzaminy, na pewno z przyjemnością przeoczytają wiersz pt. "Egzamin", oddający bardzo dobrze emocje z tym związane.

Zeszyt jest przeznaczony dla inżynierów elektryków, głównie absolwentów Politechniki Lwowskiej i Politechniki Śląskiej, w szczególności zaś dla tych spośród nich, którzy studiowali pod kierunkiem Profesora i jest im droga pamięć o Profesorze.

Niniejszy zeszyt niewątpliwie utrwali pamięć o Profesorze Stanisławie Pryzem wśród inżynierów elektryków. Dziękuję serdecznie Tym, którzy przyczynili się do tego - Autorom zamieszczonych prac, w szczególności zaś Profesorowi Stefanowi Węgrzynowi, Członkowi Rzeczywistemu PAN za bardzo szczegółowe i obszerne opracowanie dotyczące życia i działalności Profesora Stanisława Pryzego.



Prof. zw. dr inż. Stefan WĘGRZYN

Członek Rzeczywisty PAN

Instytut Informatyki Politechniki Śląskiej

## ŻYCIE I PRACE PROFESORA STANISŁAWA PRYZEGO W STULECIE URODZIN

Stanisław PRYZE urodził się w Krakowie 1 grudnia 1885 roku.

Cofnijmy się do klimatu tamtych czasów. Kończy się wiek XIX. W Paryżu właśnie odbywa się w 1881 r. Pierwsza Międzynarodowa Wystawa Elektrotechniczna, na której Tomasz Alfa Edison instaluje 1000 elektrycznych żarówek węglowych zasilanych przez największą podówczas "dynamomaszynę Jumbo".

Prawie wszystkie państwa starają się pokazać wszystko, co najlepsze stworzyła ówczesna elektrotechnika; demonstruje się więc pierwsze urządzenia do wytwarzania, transportu i wykorzystywania energii elektrycznej (generatory, transformatory, silniki). Pokazano w ruchu małą kolej elektryczną i łódkę poruszaną silnikiem elektrycznym, a także telegraf i budzący wówczas podziw telefon. Jednocześnie w czasie Wystawy odbywa się Pierwszy Międzynarodowy Kongres Elektryków, na którym są obecni: Helmholtz, Thomson, Clausius, Edison, Siemens i wielu innych sławnych fizyków i elektryków. Kongres wprowadza do nauki dla potrzeb nowej dziedziny, elektrotechniki, nowe jednostki: wolt V, amper A, om  $\Omega$ , kulomb C, farad F, uwieczniając w tych nazwach nazwiska Volta, Ampera, Ohma, Coulomba, Faradaya, a więc nazwiska tych uczonych, tych ludzi, których odkrycia i dzieła wytyczyły pierwsze drogi rozwoju nauki o elektryczności.

Kongres zakończył sędziwy Dumas następującymi słowami:

"Mitologia grecka podporządkowała wiatr, wodę, ogień bóstwom drugorzędny, a tylko piorun wręczyła bogowi - bogów, Zeusowi. Po upływie wieków i tysiącleci człowiek przy pomocy nauki opanował nie tylko wiatr, wodę i ogień. Zdobywa się na ostatni wysiłek i w naszych oczach wyrzywa piorun z rąk Zeusa.

Rozbrojono bogów greckich.

Wstępujemy w wielki wiek elektryczności"

Jakim optymizmem tchną te słowa !

A w Polsce? W Polsce na przełomie 19 i 20 wieku, nie posiadającej wówczas swego niepodległego bytu państwowego i podzielonej między trzy państwa zaborcze, jest to okres Żeromskiego, Sienkiewicza, Prusa, Kraśzewskiego. W Krakowie działa powołana w 1872 roku Akademia Umiejętności i tu właśnie, w tym mieście często z różnych okazji odbywają się patriotyczne zjazdy Polaków z różnych zaborów. Z Katedry Wawelskiej odzywa się wówczas Królewski Dzwon Zygmunta, a z Wieży Mariackiej płyną na miasto i Kraj mariackie hejnały. Społeczeństwo funduje pomnik Mickiewicza, rodzi się Muzeum Narodowe, na scenach teatrów polskich występują Solski i Modrzejewska.

Jak te czasy, czasy jego dzieciństwa i młodości, wspomina Stanisław FRYZE. W jego rękopisach z 1954 roku znalazłem taki zapisek:

"Wielki rozwój elektrotechniki rozpoczął się około 1900 r., a więc już na oczach wielu ludzi tzw. starej generacji. Nasz mistrz Solski miał już wtedy lat 45 i święcił pierwszy jubileusz 25-letniej pracy na scenie, a ja zdekompletowałem ojcu telefon wzięty do naprawy i wyjętym z niego induktorem Siemens'a elektryzowałem domowników i kolegów. Oczywiście to pierwsze doświadczenie elektrotechniczne zakończyło się laniem; mimo to jednak już wówczas postanowiłem, że będę elektrotechnikiem". I tego po-



Rys. 1 Stanisław FRYZE w 1914 r.

stanowienia z dzieciństwa FRYZE dotrzymał, został elektrotechnikiem i to jednym z najwybitniejszych polskich elektrotechników. Ale droga do tego była jeszcze daleka i trudna, wypełniona pracą, wyteżoną, ustawiczną pracą. Najpierw więc uczęszcza w Krakowie do Szkoły Realnej, następnie przenosi się do Szkoły Przemysłowej, gdzie wówczas wykładowcami są ludzie tej miary co Stanisław Anzyc czy Maksymilian Huber. Kończy ją, zdaje Egzamin Główny w 1905 roku, co otwiera mu drogę do pracy zawodowej. Pracuje w firmie Austriackie Zakłady Siemens-Schuckert w oddziałach w Krakowie, w Wiedniu i we Lwowie. Pracę zawodową przerywa mu powołanie do rocznej służby w austriackiej marynarce



wojennej w Poli, w dzisiejszej Jugosławii.

Pracując zawodowo i odbywając roczną służbę wojskową wciąż jednak myśli o dalszej pracy naukowej i nie rezygnuje ze studiów wyższych w jedynej wówczas wyższej szkole technicznej z polskim językiem nauczania - Politechnice Lwowskiej we Lwowie. Ale do tego konieczne jest ukończenie Szkoły Realnej i egzamin dojrzałości. Szkoła Przemysłowa nie dawała bowiem prawa wstępu na wyższe uczelnie. Kończy więc ją i zdaje egzamin dojrzałości jako eksternista nie przerywając swojej pracy zawodowej. Teraz może rozpocząć już studia na Politechnice Lwowskiej, które ze względów bytowych łączy z pracą jako nauczyciel zawodu w Lwowskiej Szkole Przemysłowej. Tam też, do Lwowa przenosi się już na stałe.

Studia na Politechnice Lwowskiej przerywa I Wojna Światowa; Stanisław FRYZE zostaje zmobilizowany i wcielony do austriackiej marynarki wojennej w Poli. Ale utrzymuje kontakt z Politechniką i ze Lwowem. W czasie urlopu z wojska pojmuje za żonę słuchaczkę Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego Uniwersytetu Jana Kazimierza we Lwowie Annę Krypiakiewicz, odtąd do końca życia mu wierną, bez reszty oddaną, mężną i dzielną, tak jak tylko potrafi być mężna i dzielna kobieta, kochająca kobieta. To ona przepisuje mu od kolegów teksty wykładów politechnicznych i posyła do Poli po to, by nawet przed końcem wojny mógł zdać wszystkie egzaminy i uzyskać dyplom. I tak się staje. 16 czerwca 1917 roku Stanisław FRYZE zdaje z odznaczeniem egzamin państwowy na Wydziale Budowy Maszyn, Oddziału Elektrotechnicznego Politechniki Lwowskiej i otrzymuje tytuł inżyniera.

Bramy Politechniki Lwowskiej otwiera mu praca doktorska, pierwsza praca doktorska z elektrotechniki w Polsce pt.: "Nowa teoria ogólnego obwodu elektrycznego" obroniona z odznaczeniem w dniu 11 czerwca 1923 r. i jej publikacje zamieszczone w "Przeglądzie Elektrotechnicznym", w "Revue générale de l'électricité" i w "Elektrotechnische Zeitschrift".

Doktorat i publikacje Stanisława FRYZEGO zwróciły na niego uwagę Senatu Politechniki Lwowskiej, który w 1925 r. (dwa lata po doktoracie) powołuje go w charakterze profesora nadzwyczajnego na Katedrę Elektrotechniki Ogólnej Politechniki Lwowskiej.

Młody profesor zaczyna w 1925 roku swą działalność.

Posłuchajmy co na ten temat mówi Prof. Paweł Nowacki ówczesny student Oddziału Elektrycznego Wydziału Mechanicznego Politechniki Lwowskiej:

"W chwili powołania Dr Stanisława FRYZEGO we wrześniu 1925 roku na profesora nadzwyczajnego i kierownika Katedry Elektrotechniki Ogólnej w Politechnice Lwowskiej, byłem studentem II roku Oddziału Elektrotechnicznego Wydziału Mechanicznego Politechniki Lwowskiej i słuchałem w roku akademickim 1925/1926 pierwszych Jego wykładów jako profesora.

Wykłady profesora FRYZEGO były przygotowane wzorowo, wszelkie sformułowania były niezwykle poprawne, a definicje bardzo precyzyjne. Równocześnie wykład był poprowadzony z niezwykłym temperamentem i często okraszony dowcipnymi przykładami. Ujęcie przedmiotu nacechowane było głębokim

Pole elektryczne  $C = \frac{1}{\epsilon}$   $V = \frac{Q}{\epsilon A}$   
 $A_{nn} = V$

Energja elektryczna  $W = \frac{1}{2} Q \cdot V$  miejsca na nachleptyjoniem  
 przewodnika naboju elektrycznego  $Q$  do potencjalu  $V$  rownie-  
 sz potencjalem elektrycznym tego przewodnika. Potencjal w tym spoci-  
 pole elektryczne w ktorym wyznacza sie dzialanie elektryczne  
 statycznej dynamicznej, indukcyjnej i energii.

Dzialanie dynamiczne pola elektrycznego wyznacza templem um-  
 nioj elektrycznej potrowej  $\epsilon_0$  przewodnicy  $\epsilon_0$  pola dziala pite.  
 Dzialanie dynamiczne pola elektrycznego charakteryzujacy  $\epsilon$  p-  
 wlosci  $K$  rownie nabojem pole elektryczne, dzialanie  $\epsilon$

$$K = \frac{F}{+q} \quad \epsilon \cdot \epsilon_0 = \frac{K \cdot Q}{\epsilon C} \quad \epsilon_0 = \frac{K}{C} ?$$

Wzrost ten ma kierunek pily  $F$ , dzialajacyj w kierunku granicy po-  
 na naboju potrowej dodatni  $+q$ , umiowny w tym granicy.

Jesli w kierunku granicy pole elektrycznego poprowadzimy linii  
 dywergencji do kierunku natężenia pola, otrzymamy linia sił elek-

trycznych to wychodzą z naboju dodatniego a kończą  
 na naboju ujemnym; ich gęstość odpowiada wartości natę-  
 żenia pola  $K$ ; kierunek natężenia  $K$  wskazuje potrow



Fig. 1. Pole pojedynczego  
 ładunku dodatniego.

Fig. 2. Pole pojedynczego  
 ładunku dodatniego  
 w pobliżu przewodnika  
 uziemionego.

Rys. 2a Fragment rękopisu

(mierzony wielkością, symbolowi  $\epsilon$  ...)

jednostki, przykładał mierzony elektryczny ...  
jednostki elektrycznej ... mierzony systemem ...  
a myślał przypisywać prof. Fryzego ... mierzony ...  
mierzony „elektrostatyczny” ...

„Elektrostatyczny” jest to mierzony elektryczny ...  
mierzony elektryczny, ...  
z mte 1 działy”. (Wzrost „Grupa Coulomba”).

Jednostki przykładał mierzony jest kulomb, mte C.  
Kulomb (C) jest to jednostka mierzony obciążenia 3 ...  
mierzony od elektrostatycznego (EC), a 10 razy mniejsze od ...  
mierzony (MC), czyli od jednostki elektrostatycznego, mierzony ...

$$1C = \frac{1}{10} mC = \frac{1}{10} EC$$

(C kulomb, mC magnetyczny kulomb, EC elektrostatyczny  
 $C = 2,9967 \cdot 10^{10} \approx 3 \cdot 10^{10}$  wartości ładunku ...  
mierzony w ... mierzony (SS, ...)

Dzielenie jest:

$$EC \hat{=} \text{cm}^{\frac{3}{2}} \text{g}^{\frac{1}{2}} \text{sek}^{-1}$$

$$mC \hat{=} \text{cm}^{\frac{3}{2}} \text{g}^{\frac{1}{2}}$$

$$C \hat{=} \frac{1}{10} \text{cm}^{\frac{3}{2}} \text{g}^{\frac{1}{2}}$$

Te formuły wyrażają, jak są ...  
jednostki mierzony EC, mC + C od ...  
mierzony, mierzony ...  
mierzony (cm), mierzony (g), ...

1) S. Fryza ...  
mierzony, mierzony.



- Jako data narodzin fizyki elektrycznej, przyjęto 1780  
 w krótkim fragmencie wiersza Aleksandra Volta, poświęconego  
 jego sławnej ogniwie zwanej później ogniwem Volta, w którym  
 pierwszy raz użył słowa "elektryczność". To określenie to bowiem oznaczało  
 i produkcję i przepływ prądów w działaniu oparu galwanicznego,  
 gdzie przelatywał prąd z jednego rodzaju prądu elektrycznego, co  
 umożliwiało dostrzeżenie różnicy między różnymi odległościami  
 i ogniwami w działaniu zjawiska elektrycznego.
- Do rozważań o odległościach w XIX wieku należą:
- a. Odległości działania przepływu prądu, które rozpoznawano  
 różniły budowę różnego rodzaju elektrotechniki.
  - b. Odległości działania chemicznych prądów, które rozpoznawano  
 różniły odległości obrotu działu elektrotechniki.
  - c. Odległości działania magnetycznych prądów, które rozpoznawano  
 różniły budowę różnego rodzaju elektromagnetyzmu.
  - d. Odległości działania dynamicznych prądów, które rozpoznawano  
 różniły elektrodynamiki.
  - e. Odległości działania fizjologicznych prądów, które rozpoznawano  
 różniły elektromedycyny.
- f) Najbardziej interesującą rolę w fizyce odległości XIX wieku było  
 jednakże odległości indukcji elektromagnetycznej, bo  
 rozpoznawano w tej epoce znaczący postęp w produkcji  
 energii elektrycznej na wielkiej skali, w wielkich  
 elektrowniach i wielkich sieciach elektrowniowych, w których  
 i wprost w maszynach i daleko oddalonymi liniami naprzemiennych  
 prądów. Epoka ta cechuje powstanie się 1. i 2. obrotu  
 prądów elektrotechnicznych, lecz także także rozwój różnych  
 przemysłów, do 1. i 2. uogólnienia elektryczności i energii elektrycznej.

Rys. 2c Fragment rękopisu

OJCZYŹNIE NA CHWAŁĘ



WIEDZY NA POŻYTEK

NA MOCY PRAWA USTANOWIONEGO PRZEZ SEJM RZECZYPOSPOLITEJ POLSKIEJ

KADAJE

# POLITECHNIKA LWOWSKA

ZA USZCZEGÓLNIENIA JEGO NAUCZENIEM I WYKONANIEM

PROF. INŻ. JULJANA FABIAŃSKIEGO

ZWYCIĄŻAJĄCĄ PRACĘ W ZAKRESIE WYKONANIA I WYKONANIA NAWY

I ZA USZCZEGÓLNIENIA W ZAKRESIE WYKONANIA I WYKONANIA

PROF. INŻ. EDWARDA TADEUSZA GEISLERA

ZWYCIĄŻAJĄCĄ PRACĘ W ZAKRESIE WYKONANIA I WYKONANIA

## INŻYNIEROWI STANISŁAWOWI FRYZE'EMU

URODZONEMU W ZAKWOWIE

STOPIEN I TYTUŁ, GODNOŚĆ I PRAWA DOKTORA NAUK TECHNICZNYCH

STYBENDYKATY WIEDZĄCZNYCH JEGO NAUCZENIEM I WYKONANIEM NA PODSTAWIE PRZEŁOŻONEJ ROZPRAWY:

„NOWA TEORIA OGÓLNEGO OBWODU ELEKTRYCZNEGO”

ORAZ ZŁOŻONYCH EGZAMINÓW.

WYDANO WE LWOWIE, DZIA 12 STYCZNIĄ 1924 ROKU.

REKTOR

REKTOR

PROMOTOR

Rys. 3. Dyplom doktorski Politechniki Lwowskiej

przygotowaniem, gruntownym opanowaniem tematyki i oryginalnością interpretacji. Każde zjawisko było najpierw opisane, następnie zilustrowane odpowiednią demonstracją, po czym Profesor objaśniał zjawisko plastycznie i zrozumiale i wreszcie ujmował je w odpowiednie wzory matematyczne.

Ćwiczenia odbywały się regularnie, przy czym cały materiał od początku pierwszego wykładu musiał być przez studenta opanowany, to znaczy, że student musiał materiał wyłożony zrozumieć. Bardzo często przerwy przeznaczone były na dyskusję, przy czym każdy student miał prawo do zabierania głosu; profesor FRYZE był nawet rad, jeśli student miał inne poglądy i interpretował omówione na wykładzie zjawiska w odmienny sposób, aniżeli czynił to profesor. Ten stały i żywy kontakt Profesora ze studentami był jedną z wielu zalet Jego wykładów. Materiał był wyłożony przez Profesora w sposób nadzwyczaj plastyczny i wyraźny, to, co w wykładzie było najważniejsze, było przez Niego specjalnie podkreślane żywymi gestami i intonacją głosu. Pierwszych wykładów rocznych Profesor FRYZE oczywiście nie skończył w terminie. Siedzieliśmy aż do 15 lipca 1926 roku na Jego wykładach, ale nikt z nas tego nie żałował, nikt nie protestował, gdyż wykłady były fascynujące, tak że z przyjemnością uczyliśmy się - Profesor wpił w nas, że nie wszystko, co wyłożone zostało w podręcznikach, jest nie naruszalnym dogmatem, zachęcał do samodzielnego i krytycznego myślenia, zachęcał do publikacji własnych prac, uczył nas wiary we własne siły".

A teraz posłuchajmy głosów innych jego słuchaczy z czasów profesury w Politechnice Lwowskiej.

W zapiskach FRYZEGO znalazłem taki fragment listu od jego byłych studentów, którzy w momencie pisania tego listu byli już inżynierami pracującymi w Anglii. "Drogi Profesorze! Odrobił Pan swoją robotę na 101 i dużo roboty za innych. Przypuszczamy, że nasz list nie jest pierwszym tego rodzaju, ale tak na wszelki wypadek piszemy - może Panu będzie przyjemnie wiedzieć, że jesteśmy Panu wdzięczni". I dalej: "Gdybyśmy po drugim roku natrafili na drugiego takiego entuzjastę jak Pan, o tak jasnym sposobie myślenia, to moglibyśmy wypaść znacznie lepiej".

Myślę, że te wspomnienia słuchaczy Stanisława FRYZEGO dobrze oddają klimat tamtych lat - lat profesury FRYZEGO na Politechnice Lwowskiej. Nic dziwnego, że Lwów stał się ukochanym miastem FRYZEGO, tu znalazł to, do czego dążył od czasu dzieciństwa i młodości - możliwość pracy naukowej, dydaktycznej i zawodowej w swej ukochanej elektrotechnice. Tu powstają jego najlepsze prace naukowe, tu powstaje trylogia jego życia: 3-tomowy skrypt "Elektrotechnika ogólna" liczący 2500 stron.

O tym skrypcie FRYZE tak pisze:

"Podręcznik Elektrotechniki ogólnej kosztował mnie niesłychanie wiele trudów i zawiera mnóstwo nowych, nieznanych dotąd tez, wzorów, uproszczeń dotychczasowych metod analizy lub obliczeń. Pewne rozdziały lub ustępy stanowią poważne i oryginalne rozprawy naukowe, dotąd z braku pomocy nie



ogłoszone drukiem".

FRYZE pisze "Z braku pomocy nie ogłoszone drukiem". Należy to rozumieć w najściślejszym tego słowa znaczeniu. FRYZE miał w swojej Katedrze Elektrotechniki Ogólnej Politechniki Lwowskiej tylko jednego asystenta i jednego laboranta! Drugiego asystenta w Katedrze musiał opłacać sam, z własnych poborów.

Mimo to dla potrzeb wykładów opracowuje i buduje 650 demonstracyjnych zestawów, z których każdy eksponuje jakieś prawo czy zjawisko ważne z elektrotechnicznego punktu widzenia. Tak mija 14 lat wszechpochłaniającej Go pracy naukowej, dydaktycznej i zawodowej jako profesora Wyższej Uczelni, pracy nad wykształceniem pokolenia elektryków, pracy, która dla FRYZEGO znaczyła tyle, co samo życie.

W dniu 17 października 1934 roku, a więc po 9 latach pracy w charakterze profesora nadzwyczajnego, zostaje dekretem Prezydenta Rzeczypospolitej mianowany profesorem zwyczajnym Elektrotechniki Ogólnej na Wydziale Mechanicznym Politechniki Lwowskiej.

Wykłada "elektrotechnikę ogólną i teoretyczną" dla elektryków na Wydziale Mechanicznym oraz "zasady elektrotechniki" na Wydziałach: Chemicznym, Inżynierii i Rolniczym.

Oprócz profesorskich wykładów dla studentów Politechniki wygłasza FRYZE specjalne wykłady popularne dla słuchaczy spoza Politechniki - dla dorosłych i na życzenie Kuratorium Okręgu Szkolnego - dla młodzieży szkół średnich. Cieszyły się one zawsze ogromnym powodzeniem i tak liczną frekwencją, że trzeba było je kilkakrotnie powtarzać, mimo że odbywały się w największej amfiteatralnie zbudowanej sali Politechniki Lwowskiej.

Rok 1939 - II Wojna Światowa przerywa tylko częściowo pracę pedagogiczną FRYZEGO na Politechnice Lwowskiej.

Wysszaja Atiestacjonnaja Komisja Wsiesojuznogo Komitietu po diełam Wys - szej Szkoły potwierdza stanowisko FRYZEGO w charakterze profesora zwyczajnego Katedry Elektrotechniki Lwowskiego Politechnicznego Instytutu.

Rok 1941/42 - Politechnika Lwowska zostaje przemianowana na Staatliche Fachkurse i przechodzi pod Zarząd Komisaryczny, a FRYZE potwierdzony zostaje jako Lehrkraft in den Technischen Fachkursen Lemberg.

I kolejny rok, rok 1944 - FRYZE jest znów profesorem zwyczajnym Lwowskiego Politechnicznego Instytutu i przewodniczącym Komisji Egzaminów Dyplomowych.

W latach 1943/44 i 1944/45 pełni obowiązki Dziekana Wydziału Elektrotechnicznego.

Koniec II Wojny Światowej - okres repatriacji; okres ściągania do Ojczyzny setek tysięcy obywateli polskich, którym wojna nie oszczędziła żadnych trudnych dni.

Nie oszczędziła ich również FRYZEMU.

Otrzymuje propozycję objęcia Katedry z dwóch polskich Wyższych Uczelni: z Politechniki Śląskiej i z Politechniki Wrocławskiej.

Wybiera Politechnikę Śląską i jako repatriant w zorganizowanym transporcie pracowników Politechniki Lwowskiej wysiada na dworcu w Gliwicach w dniu 13 lipca 1946 r., by rozpocząć osiemnastoletni okres pracy w Gliwicach. Powitanie na dworcu było bardzo serdeczne. FRYZEGO i innych profesorów, którzy wtedy przyjechali ze Lwowa do Gliwic, witali owacyjnie pierwsi studenci i pracownicy Politechniki Śląskiej, polskiej uczelni zorganizowanej po wojnie na terenach, na których dotąd nigdy żadnej wyższej szkoły nie było. Nie było więc jeszcze wtedy przygotowanych odpowiednio budynków, sal wykładowych, laboratoriów, bibliotek. Nie było tradycji uniwersyteckich. A FRYZE nie był już młody, miał wówczas 61 lat. We Lwowie zostawił doskonale przez siebie zorganizowaną i wyposażoną w urządzenia i przyrządy demonstracyjne Katedrę. Podziwiać należy hart ducha 61-letniego człowieka, którego to nie załamało. Wprost przeciwnie, zabiera się do pracy z energią i młodzieńczym zapałem.

Przede wszystkim podejmuje wykłady. Wykłada w prowizorycznie urządzonych salach zza katedry zbitej ze starych desek przez laboranta, który przyjechał wraz z nim ze Lwowa. Ale jak dawniej wykłady są porywające, jasne, dobitne, wszechstronne i dzień po dniu coraz obficiejsze okraszane demonstracjami, eksperymentami i tym nie opuszczającym Go nigdy poczuciem humoru, życzliwością i miłością do słuchaczy. I jak dawniej są tłumnie uczęszczane przez studentów, również i z innych wydziałów ze względu na ich atrakcyjność i sławę wykładowcy.

Gdy wspominały Stanisława FRYZEGO, należy zatrzymać się nad problemem stylu Jego wykładów, sposobu omawiania wprowadzonych pojęć, demonstracji i eksperymentów na wykładach.

Prowadząc wykłady FRYZE nie ograniczał się do przedstawienia analizy matematycznej omawianego zjawiska i wyprowadzenia odpowiednich wzorów. Starał się najpierw zademonstrować studentom samo zjawisko, unaocznic im je tak, aby każdy mógł sobie wytworzyć jakiś jego obraz. W ten sposób utrwalał w umyśle studenta pamięć o omawianym problemie, wprowadzanych pojęciach i prawach. Bardzo skuteczna metoda: do dziś wielu z nas pamięta przebieg tych ciekawych demonstracji i eksperymentów. Warto to sobie przypomnieć obecnie, gdy przedmiot "podstawy elektrotechniki" zmienił się w dyscyplinę ściśle teoretyczną, a nawet abstrakcyjną, bliższą matematyce niż fizyce.

Same nazwy: elektryczność, elektryczny, elektrotechnika stały się jakby krępujące i pomija się je jako widocznie coś żenującego.

Nie wypada np. dziś powiedzieć: Teoria Obwodów Elektrycznych, tylko Teoria Obwodów.

I chyba jednak warto zastanowić się, czy wiele niepowodzeń dydaktycznych związanych z tym przedmiotem nie jest wynikiem właśnie całkowitej zmiany stylu wykładania i między innymi braku na wykładach demonstracji, rzeczywistości, pokazania najpierw studentom zjawiska "takim, jakie ono

**SKRYPTY DLA SZKÓŁ WYŻSZYCH**  
**POLITECHNIKA ŚLĄSKA W GLIWICACH**

131

Prof. Dr Inż. **STANISŁAW FRYZE**

# PRĄDY ZMIENNE

Część I

**KRAKÓW**                      **1954**                      **GLIWICE**  
**PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE**

Rys. 4 Strona tytułowa skryptu



naprawę jest", a dopiero później zajęcia się metodami jego analizy, tak jak to robił FRYZE. Dzięki wykładom FRYZE miał dobry kontakt z młodzieżą. Skupiał wokół siebie grupę bardzo zdolnych asystentów, rekrutowanych ze studentów najwyższych lat. Sam kontynuował swoje prace, które rozwinął jeszcze przed wojną. Ale swoich współpracowników kierował już na inne, nowsze, bardziej perspektywiczne tory. Nie zawsze jest to cechą nawet wielkich mistrzów. A rezultaty? Wielu z jego ówczesnych współpracowników zostało profesorami, wybitnymi pracownikami naukowymi.

Oprócz wykładów i organizacji Katedry Podstaw Elektrotechniki FRYZE przyjmuje na siebie dodatkowe obowiązki.

Od 1946 roku jest przewodniczącym Komisji Egzaminów Dyplomowych, a w latach 1946/47 i 1947/48 Dziekanem Wydziału Elektrycznego. FRYZE nie był czystym, zawieszonym w próżni teoretykiem; sam swą pracę zawodową rozpoczął od pracy w przemyśle. Doskonale więc rozumie specyfikę uczelni działającej na terenie Śląska, obszaru wysoce uprzemysłowionego. Śląska z jego licznymi dużymi elektrowniami, rozbudowaną siecią energetyczną, zagęszczoną trakcją kolejową, bardzo wieloma dużymi odbiorcami energii elektrycznej. Rozumiejąc to, przyczynia się jako Dziekan bardzo poważnie do modernizacji programów nauczania i modernizacji egzaminów dyplomowych. To za jego kadencji zaczęto wprowadzać prace dyplomowe zamiast egzaminów klauzurowych, co zdecydowanie przyczyniło się do podniesienia poziomu kształconych inżynierów.

W Gliwicach, podobnie jak niegdyś we Lwowie, FRYZE pracował bez wytchnienia od wczesnego ranka do późnej nocy, nie korzystając ze świąt, urlopów i wakacji. Jego sumienność naukowa była bezprzykładna. Nie zadowalał się teoretycznym rozwiązaniem danego zagadnienia, nie publikował pracy, dopóki nie sprawdził na wielu przykładach jej przydatności praktycznej i poprawności przyjętych założeń teoretycznych. Znany był slogan ułożony przez studentów:

"Wszędzie wlezę, wszystko zgrzyzę, tak jak FRYZE".

Równie wymagający był FRYZE co do strony redakcyjnej swoich prac. Tekst poprawiał i modyfikował wielokrotnie, szukając takiego ujęcia, które byłoby dostatecznie ścisłe i zrozumiałe dla czytelnika. Był bardzo wymagający w stosunku do siebie, wymagał również wiele od swoich asystentów i studentów. Nie był zwolennikiem życia ułatwionego - sam mozolną, ciężką, uczciwą pracą przebijał się z dużymi trudnościami do wiedzy, do prawa wykładania i uważał sumienną pracę za podstawowy obowiązek uczciwego człowieka. Znamienne może być to, że FRYZE, który był bardzo wymagającym przełożonym i egzaminatorem, cieszył się ogólną sympatią i szacunkiem swoich współpracowników i studentów. Był ogólnie znany z dbałości o warunki pracy i życia swoich współpracowników. Znane były na Uczelni Jego bardzo energiczne i uporczywe interwencje na rzecz swoich asystentów, gdy chodziło o ich warunki bytowe czy o uzasadniony awans. Wymagał również dużo

od studentów, ale równocześnie - jako urodzony pedagog i zamiłowany wychowawca młodzieży - rozumiał ich trudności, starał się je usuwać.

Wiele sympatii zjednywało mu jego pogodne usposobienie i poczucie humoru. Bardzo mu to pomagało w czasie nieraz bardzo burzliwych dyskusji i sporów. Był bowiem nonkonformistą i jeśli był przekonany o słuszności swoich poglądów, zwłaszcza gdy chodziło o dobro i rozwój nauki, wypowiadał je otwarcie, śmiało i publicznie na zebraniach czy posiedzeniach. Robił to w okresie, gdy niewiele zdobywało się na taką odwagę. Zjednało Mu to szacunek i uznanie nie tylko Jego przyjaciół.



Rys. 5 Prof. Stanisław Fryze w gronie współpracowników w 1960 r.

Na emeryturę przeszedł w 1960 roku. Był to dość ciężki okres w życiu FRYZEGO. Po przejściu na emeryturę zerwały się wszelkie więzy wiążące Go z macierzystym Wydziałem Elektrycznym.

Na terenie Uczelni nie bywał. Żelazne dotąd zdrowie zaczynało zawodzić.

Mimo to nie ustawał w pracy, pracował nadal uporczywie nad wykończeniem swoich rozpoczętych rozpraw, pracował od wczesnego rana do późnej nocy, mówiąc, że chwali sobie swoje odosobnienie i spokój. Pracował bez wytchnienia aż do dnia, w którym zaczęła się Jego ostatnia, śmiertelna choroba.

Zmarł 3 marca 1964 roku w Gliwicach. Na Jego grobie stanął pomnik ufundowany przez tych, którym poświęcił pracę całego życia, przez Elektryków Polskich.

Napis na pomniku : STANISŁAW FRYZE

Doktor n.t., Członek Rzeczywisty PAN, Profesor Pol. Lwowskiej i Pol. Śląskiej - PIONIER ELEKTROTECHNIKI.



Wspominając postać Stanisława FRYZEGO można o Nim mówić jako o niezaprzeczalnej indywidualności, o prawym, rzetelnym i szlachetnym człowieku, można mówić o Jego niełatwej drodze, którą przeszedł w życiu od elektromontera do zasłużonego Profesora Wyższych Uczelni, niezapomnianego wychowawcy kilku pokoleń polskich elektrotechników, można w końcu również mówić o Jego działalności, jako wybitnego uczonego, jako Członka Rzeczywistego Polskiej Akademii Nauk.

Chciałbym teraz naszkicować naukową działalność FRYZEGO.

Okres Jego twórczej i tak owocnej pracy naukowej to blisko 40-letni przedział czasu. Za początek tego okresu można uznać rok 1924, w tym to roku bowiem w trzech kolejnych zeszytach "Przeglądu Elektrotechnicznego" ukazał się po raz pierwszy cykl Jego artykułów pod wspólnym tytułem: "Nowa teoria ogólnego obwodu elektrycznego". Była to Jego praca doktorska, pierwsza w Polsce praca naukowa z elektrotechniki, w której autor posłużył się metodą symboliczną, stawiającą u nas dopiero wówczas pierwsze kroki.

Aby właściwie ocenić wartość tej pracy, należy cofnąć się do klimatu tamtych czasów. Rok 1924. Teoria obwodów elektrycznych znajduje się dopiero na progu swojego rozwoju. W analizie nie wychodzi się poza najprostsze układy jedno- ewentualnie kilkuobwodowe. Do ich analizy wystarcza zastosowanie praw Kirchhoffa czy Ohma w ich najprymitywniejszej postaci. Ale jednocześnie z drugiej strony stopień skomplikowania układów technicznych, które zaczynają się pojawiać i wchodzić do zastosowań praktycznych, coraz bardziej rośnie. Stosowanie prostych i prymitywnych metod analizy, wystarczających dla obwodów nieskomplikowanych, staje się tu coraz bardziej uciążliwe i nie otwierające żadnych horyzontów. Odczuwa się coraz bardziej potrzebę jakichś generalniejszych ujęć syntetycznych, wychwytyjących cechy i prawidłowości nieistotne przy analizie układów prostych, ale decydujące, gdy zaczyna się przechodzić do analizy układów coraz bardziej skomplikowanych.

I takim właśnie, dziś powiedzielibyśmy, społecznemu zapotrzebowaniu chwili odpowiadała praca doktorska FRYZEGO.

Nic dziwnego, że to właśnie "Przegląd Elektrotechniczny", centralne czasopismo elektrotechników, opublikował ją w trzech kolejnych numerach.

Istota pracy to oparcie analizy obwodów skomplikowanych na ich - zw. przez FRYZEGO - stanach wyróżnionych. Na przykład skombinowane stany zwarcia i biegu jałowego. Dalej, to wprowadzenie do analizy obwodów pojęć oporności krytycznych, jako pewnego inwariantu obwodu i ogólne w ujęciu symbolicznym potraktowanie tak zwanych wykresów sieci, to znaczy zmian dowolnej wielkości elektrycznej (np.  $J$ ,  $U$ ,  $P$ ) w jednym miejscu sieci jako funkcji i jej dowolnego parametru (np.  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ) znajdującego się w dowolnie wybranym innym miejscu sieci.

Tę pierwszą publikację FRYZEGO cechowała więc z jednej strony jak największa aktualność i podstawowość opracowanego problemu, z drugiej -



rzetelność, uczciwość i wyjątkowa staranność opracowania. Każde słowo i sformułowanie było tu dokładnie i wielokrotnie przemyślane. Każde podane twierdzenie gruntownie po wielokroć sprawdzane, każda proponowana metoda skontrolowana uprzednio krytycznie przez przeliczenie za jej pomocą wielu, bardzo wielu przypadków praktycznych. Od tych cech swoich prac naukowych Profesor FRYZE nie odszedł przez całe życie. Nic też dziwnego, że tak szybko i na trwałe zdobył sobie bezwzględne zaufanie czytelników. I to nie tylko polskich. Publikacje prac FRYZEGO zaczynają się bowiem również ukazywać w ówczesnych światowych czasopismach elektrotechnicznych - "Revue générale de l'électricité", "Elektrotechnische Zeitschrift", "Elektrotechnik und Maschinenbau".

W roku 1925, w rok po ogłoszeniu pierwszego cyklu publikacji, ukazuje się znów w "Przeglądzie Elektrotechnicznym", tym razem już w czterech kolejnych zeszytach, następny cykl publikacji pod ogólnym tytułem: "Strzałki kierunkowe w obwodach elektrycznych".

Zagadnienie to, podobnie jak problemy ogólnej teorii obwodu, nie miało przed publikacją FRYZEGO jakiegoś opracowania generalnego. Jak długo zresztą przedmiotem analizy były układy proste, to nie było po temu i specjalnej potrzeby. Zrodziła ją, podobnie jak i potrzebę teorii ogólnego obwodu elektrycznego, praktyka elektrotechniczna przynosząca z roku na rok układy coraz bardziej skomplikowane.

Znów więc dojrzały, przygotowany bardzo starannie i wyczerpująco cykl artykułów FRYZEGO, odpowiada jak najbardziej na aktualne zapotrzebowanie chwili. Nic więc dziwnego, że zwraca ogólną uwagę. Jedni się z Jego propozycjami zgadzają, inni nie, rodzą się dyskusje i polemiki: ale to właśnie potwierdza fakt, że Autor poruszył problem bardzo aktualny, problem widocznie bardzo istotny.

Lata 1931 - 1934 to dalsze konsekwentne kompletowanie zainicjowanej, jednolitej, opartej na dwóch poprzednich cyklach publikacji, ogólnej teorii obwodów.

Są to zawsze prace o istotnym głębokim charakterze podstawowym.

A więc: rok 1931 - uogólnienie praw Kirchhoffa i zasada wyodrębnienia,

rok 1932 - transfiguracja trójkąta na gwiazdę z uwzględnieniem sił elektromotorycznych,

rok 1933 - siła elektromotoryczna zastępcza w obwodach elektrycznych.

I w końcu w 1934 roku FRYZE publikuje pracę najobszerniejszą z dotychczasowych, syntetyzującą i zamykającą w pewnym sensie konsekwentnie rozwijaną od 1924 roku własną ogólną teorię obwodu elektrycznego. Jest to bardzo obszerna praca pod tytułem "Ogólna teoria transfiguracji obwodów elektrycznych" opublikowana w pięciu kolejnych numerach "Przeglądu Elektrotechnicznego".

Przedstawiona tam teoria obejmowała wszystkie wówczas znane wyniki częściowe, znalezione przez różnych badaczy, oraz zawierała nowe tezy, które od tego momentu na trwałe weszły do elektrotechniki. Były nimi: ogólna zasada wyodrębnienia, pojęcie środka ciężkości układów wielofazowych, transfiguracja sił elektromotorycznych.

W 1932 roku, na Międzynarodowym Kongresie Elektrotechnicznym w Paryżu, FRYZE przedstawia pracę o "Mocy rzeczywistej, urojonej i pozornej w obwodach elektrycznych o przebiegach odkształconych napięcia i prądu". Jest to praca, która przyniosła Mu największy rozgłos międzynarodowy. Została opublikowana w Polsce, Francji, Niemczech i Rumunii.

Idea zasadnicza tej pracy to wyodrębnienie z krzywej określającej przebieg prądu składowej geometrycznie podobnej do krzywej napięcia lub z krzywej określającej przebieg napięcia - składowej geometrycznie podobnej do krzywej prądu. Konsekwencją tej tak prostej, a jednocześnie tak celnej koncepcji są wprowadzone przez Profesora FRYZEGO pojęcia składowych czynnych i biernych dwóch dowolnych odkształconych przebiegów - napięciowego i prądowego, oraz podana przez Niego definicja mocy biernej dla takich przebiegów. W wyniku uznania, FRYZE zostaje po ogłoszeniu tych prac zaproszony na członka kilku zagranicznych związków elektrotechnicznych, między innymi związku elektrotechników francuskich, niemieckich i austriackich.

Ta praca chyba też była najbardziej bliska FRYZEMU. Jej rozszerzeniu poświęcał bowiem dosłownie ostatnie dni swego pracowitego życia. Nad nią pracując brał chyba też po raz ostatni do ręki ołówki, którym zawsze się posługiwał pisząc swe rozprawy naukowe.

Od początku swojej działalności naukowej FRYZE formował konsekwentnie własny, fizyczny sposób podejścia, badania i przedstawiania zagadnień elektrotechniki. Przeorywał w twardej codziennej, upartej pracy coraz to nowe obszary rozszerzających się wciąż zakresów elektrotechniki.

Systematycznie przechodził do coraz to głębszych i bardziej podstawowych zagadnień. Jedną z ostatnich dziedzin, nad którą również pracował, to ogólna teoria dymensji. Zapoczątkował ją tradycyjnym można powiedzieć cyklem artykułów w "Przeglądzie Elektrotechnicznym". Tytuł tego cyklu artykułów brzmiał: "Jednostki fizyczne i techniczne". Celem - jak Sam zresztą pisał - było ugruntowanie pewnych podstawowych pojęć zasadniczych oraz ustalenie pewnych narzucających się wniosków w sprawie znakownictwa jednostek i pisowni równań fizycznych.

Do tego zagadnienia wraca jeszcze w 1954 roku publikując w numerze 1 Zeszytów Naukowych Politechniki Śląskiej artykuł pt. "Racjonalizacja fizycznych równań elektromagnetycznych i układów demensyjnych".

Powołany w 1950 r. na członka Polskiego Komitetu Jednostek, przedstawia swój punkt widzenia na sprawę dymensyjnego układu jednostek MKS, podany w krytycznej rozprawie w języku francuskim pt. "Uwagi w sprawie wyboru czwartej jednostki systemu MKS i nowa propozycja rozwiązania tego



problemu" i przesyła ją do Międzynarodowego Biura Wąg i Miar w Paryżu.

Prace naukowe Profesora FRYZEGO przyniosły Mu powszechny szacunek i uznanie. Były to prace zawsze poważne, rzetelne, uczciwe i odpowiedzialne. Przyrównać je można do trwałych, solidnie zbudowanych schodów, na których pewnie i z całym zaufaniem dla pracy poprzednika można się oprzeć, by rozwijać dalej badania naukowe, by dalej rozszerzać naszą wiedzę. Niech więc ci, którzy teraz wyrastają i ci, co w przyszłości wyrastać będą, zdobywając coraz to nowe dziedziny dla elektrotechniki, pamiętają, że początek dziś tak wygodnych i szerokich schodów, po których szybko się wspinają idąc dalej, znaczone jest również stopniami ogólnej teorii obwodu, stopniami, które wykuwał FRYZE w twardym i trudnym znoju rzetelnej i uczciwej pracy całego życia poświęconego nauce.

Nic też dziwnego, że Prezes PAN-u Janusz Groszkowski tak mówił o nim w 1965 roku:

"Pamiętamy Go dziś tak dobrze, jak tylko na to pozwala pamięć ludzka, zdolna zachować obraz człowieka. Jego to zasługa, potrafił bowiem na ludziach i sprawach wyrzec wpływ głęboki, wpływ trudno poddający się niszczącemu działaniu czasu.

Był wybitnym znawcą przedmiotu swej pracy badawczej, praktycznej i dydaktycznej. Był człowiekiem o umyśle niezwykle dociekliwym, krytycznym i dążącym do spożytkowania dla ludzkiego dobra poznanych praw przyrody. Miał w sobie ogrom pasji poznawczej, która udzielała się kolegom i uczniom. I miał tyleż samo zrozumienia dla potrzeb życia wobec nauki. Chyba dlatego właśnie w dziele Jego życia, bogatym i różnorodnym, widzimy przykład pracy dobrego uczonego - badacza i doskonałego praktyka.

Polska Akademia Nauk będzie zawsze dumna, że w składzie jej członków był Stanisław FRYZE".

I dalej:

"Zdobyl swym życiem i dziełem tyle uznania, szacunku i miłości ludzkiej, że będzie długo zachowany w żywej pamięci ludzkiej".

Spełniają się te słowa.

Nasze dzisiejsze zebranie jest tego dowodem. Jest też dowodem na to, że istnieją pewne trwałe i niezmiennie wartości natury ludzkiej, budzące zawsze szacunek u wszystkich, wartości, do których ludzie wracali, wracają i wracać będą.

Wartości wspólne nam wszystkim, których jednym z symboli może być życie i praca Stanisława FRYZEGO.

Niech więc to nasze dzisiejsze wspomnienie o Stanisławie FRYZEM będzie dowodem tego, że nie wszystko jednak na tym świecie umiera i niech nam świadomość tego doda odwagi w pracach i trudach, które każdego z nas jeszcze czekają.



## Publikacje Profesora Stanisława Fryzego

1. *W sprawie metody obliczenia obwodów na zasadzie nakładania stanów równowagi (Dufrené'a)*, Przegląd Elektrotechniczny 6 (1924).
2. *Nowa teoria ogólnego obwodu elektrycznego* (praca doktorska), tamże 11, 12 i 13 (1924).
3. *Neue Theorie des allgemeinen Stromkreises*, Elektrotechnische Zeitschrift 26 (1924).
4. *Nowe drogi w elektrotechnice*, Przegląd Elektrotechniczny 18, 19 i 20 (1924).
5. *Strzałki kierunkowe w obwodach elektrycznych*, tamże 12, 13, 14 i 15 (1925).
6. *Sur le calcul des courants circulant dans les diverses branches d'un réseau de conducteurs*, Révue Générale de l'Electricité, 20. VI. 1925.
7. *Der allgemeine Stromkreis von J. L. La Cour (Kritische Betrachtung)*, Elektrotechnik und Maschinenbau 7 (1927).
8. *Uwagi do artykułu „Nakładanie stanów w obwodzie elektrycznym ogólnym”*, Przegląd Elektrotechniczny 24 (1926).
9. *Szlakiem rozwoju elektrotechniki*, tamże 20 (1929) oraz Czasopismo Techniczne 20 i 22 (1929).
10. *Koncesja Harrimana (w sprawie elektryfikacji Polski)*, tamże 21 (1929).
11. *Tablice wartości funkcji trygonometrycznych 0-360°*, Nakładem Komisji Wydawniczej Towarzystwa Bratniej Pomocy Studentów Politechniki Lwowskiej, Lwów 1930.
12. *Moc rzeczywista, urojona i pozorna w obwodach elektrycznych o przebiegach odkształconych prądu i napięcia*, Przegląd Elektrotechniczny 7 i 8 (1931).
13. *W sprawie określenia mocy w obwodach elektrycznych o przebiegach odkształconych prądu i napięcia*, tamże 22 (1931).
14. *Uogólnienie praw Kirchhoffa i zasada wyodrębnienia*, tamże 10 (1931).
15. *Sila elektromotoryczna zastępcza w obwodach elektrycznych*, tamże 14 (1931).
16. *Tomasz Alva Edison*, tamże 23 (1931).
17. *Erweiterung der Kirchhoffschen Sätze und das Absonderungsprinzip*, Elektrotechnik und Maschinenbau 50 (1931).
18. *Indukcja elektromagnetyczna Faradaya*, Przegląd Elektrotechniczny 24 (1931).
19. *Wirk-, Blind- und Scheinleistung in elektrischen Stromkreisen mit nichtsinusoidalem Verlauf von Strom und Spannung*, Elektrotechnische Zeitschrift 25, 26 i 29 (1932).

20. *Transfiguracja trójkąta na gwiazdę z uwzględnieniem SEM-czynnych*, Przegląd Elektrotechniczny 13 i 14 (1932).
21. *Ogólna teoria transfiguracji obwodów elektrycznych*, tamże 4-8 (1934).
22. *Definicje wielkości elektrycznych — studium krytyczne*, Referat dla Związku Elektryków Niemieckich.
23. *Jednostki fizyczne i techniczne*, Przegląd Elektrotechniczny 12, 13 i 14 (1933).
24. *Définitions générales de la puissance active, réactive et apparente dans un système à deux fils*, Referat na Kongresie Elektrotechnicznym w Paryżu 1932, drukowany w Institut National Roumain, Bucarest 1931.
25. *Elektrotechnika ogólna, I. Elektryczność i magnetyzm*, Lwów 1926.
26. *Elektrotechnika ogólna, II. Prądy stałe.*  
Część I. *Teoria prądów stałych*, Lwów 1927.  
Część II. *Działania prądów stałych*, Lwów 1930.
27. *Elektrotechnika ogólna, III. Prądy zmienne.*  
Część I. *Ogólne rozważania o prądach zmiennych*, Lwów 1933.  
Część II. *Prądy sinusoidalne*, Lwów 1934.
28. *Wielkości fizyczne i ich wymiary*, Przegląd Elektrotechniczny 24 (1934).
29. *Remarques au sujet du choix de la 4-me unité du système MKS et nouvelle proposition de la solution du problème*, wysłane do Bureau International des Poids et Mesures, Pavillon de Breteuil, Sevres, 1952.
30. *Racjonalizacja fizycznych równań elektromagnetycznych i układów wymiarowych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, 1954.
31. *Prądy zmienne*, część 1, Gliwice 1954.

Prof. dr inż. Stanisław FRYZE

## TEORETYCZNE I FIZYKALNE PODSTAWY DEFINICYJ MOCY CZYNNEJ, BIERNEJ I POZORNEJ W NIESYMETRYCZNYCH UKŁADACH WIELOFAZOWYCH O ODKSZTAŁCONYCH PRZEBIEGACH NAPIĘĆ I PRĄDÓW\*

### WPROWADZENIE

W teorii obwodów prądu zmiennego o okresowych, lecz niesinusoidalnych przebiegach napięcia i prądu (zwanymi dalej dla krótkości *przebiegami odkształconymi*) napięcie i prąd układu jednofazowego określają funkcje:

$$(1) \quad U(t) = \sqrt{2} \sum_1^m V_k \sin(\hbar\omega t + \alpha_k),$$

$$(2) \quad J(t) = \sqrt{2} \sum_1^m I_k \sin(\hbar\omega t + \beta_k).$$

Budeanu [1] wprowadził dla takiego układu pięć różnych mocy elektrycznych z następującymi nazwami i definicyjnymi wzorami:

1. *moc czynna*  $P_w$  (puissance active; u Budeanu  $P$ )

$$(3) \quad P_w = \sum_1^m V_k I_k \cos \varphi_k;$$

2. *moc reaktywna*  $P_r$  (puissance réactive)

$$(4) \quad P_r = \sum_1^m V_k I_k \sin \varphi_k;$$

---

\* Praca niedokończona z powodu choroby i śmierci autora.



3. moc deformacji  $P_d$  (puissance déformante)

$$(5) \quad P_d^2 = \sum_{k=1}^n [V_k^2 I_k^2 + V_l^2 I_l^2 - 2V_k I_k V_l I_l \cos(\varphi_k - \varphi_l)]$$

$$(6) \quad \varphi_k = \alpha_k - \beta_k, \quad (7) \quad \varphi_l = \alpha_l - \beta_l;$$

4. moc pozorna  $P_o$  (puissance apparente; u Budeanu  $P_{Bd}$ )

$$(8) \quad P_o = UJ,$$

gdzie  $U$  — wartość skuteczna funkcji (1),  $J$  — wartość skuteczna funkcji (2).

Powyższe cztery moce wiąże ze sobą kwadratowe równanie mocy Budeanu

$$P_o^2 = P_w^2 + P_r^2 + P_d^2.$$

W równaniu tym  $P_w$  jest mocą watową, a  $P_r$  i  $P_d$  mocami bezwatowymi; Budeanu wprowadził więc piątą moc  $P_f^2 = P_r^2 + P_d^2$  z nazwą dla  $P_f$  — *puissance fictive* (moc fiktywna).

Antor w swej rozprawie [2] opublikowanej w 1931 roku, przydał tej piątej mocy nazwę

5. moc bierna  $P$  (puissance passive)

$$(9) \quad P_b^2 = P_r^2 + P_d^2.$$

Do powyższych pięciu mocy dołącza autor jeszcze szóstą, z nazwą

6. moc zespolona  $P_s$  (puissance réunie)

$$(10) \quad P_s^2 = P_w^2 + P_r^2.$$

Sześć powyższych mocy elektrycznych  $P_w$ ,  $P_r$ ,  $P_d$ ,  $P_o$ ,  $P_b$ ,  $P_s$  wiąże ze sobą następujące trzy kwadratowe równania mocy:

$$(11) \quad P_o^2 = P_w^2 + P_r^2 + P_d^2,$$

$$(12) \quad P_b^2 = P_r^2 + P_d^2,$$

$$(13) \quad P_s^2 = P_w^2 + P_b^2.$$

Rosenzweig w swej rozprawie doktorskiej [5] okazał, że powyższe sześć mocy można odwzorować graficznie za pomocą 3-wymiarowego czwororościanu mocy (rys. 1). Czwororościan ten zawiera cztery trójkąty prostokątne, a mianowicie:

$$1) \ OAB, \text{ w którym } \overline{OA} = P_w, \quad \overline{AB} = P_r, \quad \text{a} \quad \overline{OB} = P_s;$$

$$2) \ OAC \text{ w którym } \overline{OA} = P_w, \quad \overline{AC} = P_b, \quad \text{a} \quad \overline{OC} = P_o;$$

$$3) \ OBC \text{ w którym } \overline{OB} = P_s, \quad \overline{BC} = P_d, \quad \text{a} \quad \overline{OC} = P_o;$$

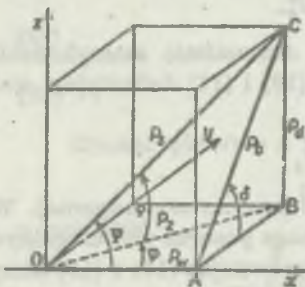
$$4) \ ABC \text{ w którym } \overline{AB} = P_r, \quad \overline{BC} = P_d, \quad \text{a} \quad \overline{AC} = P_b.$$

Powyższe cztery trójkąty prostokątne zawierają następujące główne kąty:  $\varphi$  — kąt fazowy,  $\psi$  — kąt rozchyłu,  $\varrho$  — kąt rozstawu,  $\delta$  — kąt deformacji<sup>(1)</sup>.

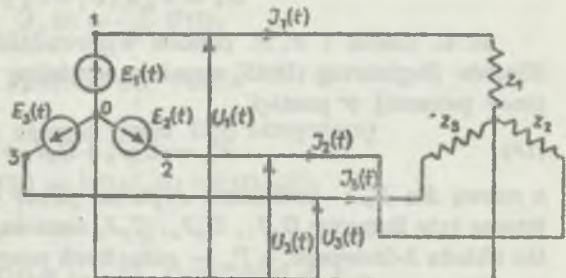
Dla kątów tych obowiązują następujące wzory:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{P_w}{P_s}, & \sin \varphi &= \frac{P_r}{P_s}, & \operatorname{tg} \varphi &= \frac{P_r}{P_w}; \\ \cos \psi &= \frac{P_w}{P_s}, & \sin \psi &= \frac{P_b}{P_s}, & \operatorname{tg} \psi &= \frac{P_b}{P_w}; \\ \cos \varrho &= \frac{P_s}{P_s}, & \sin \varrho &= \frac{P_d}{P_s}, & \operatorname{tg} \varrho &= \frac{P_d}{P_s}; \\ \cos \delta &= \frac{P_r}{P_b}, & \sin \delta &= \frac{P_d}{P_b}, & \operatorname{tg} \delta &= \frac{P_d}{P_r}. \end{aligned}$$

Definicje mocy czynnej  $P_w$ , mocy bierniej  $P_b$  i mocy pozornej  $P_s$  w asymetrycznych układach wielofazowych o okresowych, lecz niesinusoidalnych przebiegach napięć i prądów, zwanych dalej dla krótkości przebiegami odkształ-



Rys. 1. Czworoscian mocy układu jednofazowego o odkształconych przebiegach napięcia i prądu



Rys. 2. Niesymetryczny układ 3-fazowy z przewodem zerowym

conymi, nie zostały dotychczas autorytatywnie ustalone ani przez Międzynarodowy Komitet Elektrotechniczny CEI (Comité Électrique International), ani też przez komitety krajowe.

Ten niekorzystny dla praktyki stan rzeczy istnieje dlatego, ponieważ dotychczas za punkt wyjścia przy określaniu definicji mocy  $P_w$ ,  $P_b$  i  $P_s$  przyjmowano na ogół definicję mocy pozornej  $P_s$ , którą różni autorzy określili różnymi wzorami, co przy ogólnej definicji mocy czynnej według wzoru

$$(14) \quad P_w = \sum_1^n \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t) J_k(t) dt$$

<sup>(1)</sup> Rosenzweig oznaczył  $\psi$  przez  $\varrho$ , a  $\varrho$  przez  $\psi$  i nie wprowadził  $\delta$ , które natomiast wprowadził autor, jako kąt deformacji.

doprowadziło do różnych wartości mocy biernej  $P_b$ . Ogólnie bowiem obowiązuje dla wszelkich układów  $n$ -fazowych równanie kwadratowe mocy

$$(15) \quad P_b^2 = P_w^2 + P_o^2.$$

Tak np. dla asymetrycznego układu 3-fazowego z przewodem zerowym (rys. 2) o skutecznych wartościach napięć fazowych  $U_1, U_2, U_3$  i skutecznych wartościach prądów przewodowych  $J_1, J_2, J_3$ , wprowadził F. Buchholz w czasopiśmie niemieckim *Elektro-Journal* (1924) dla mocy pozornej wzór:

$$(16) \quad N_a = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2} \sqrt{J_0^2 + J_1^2 + J_2^2 + J_3^2},$$

w którym  $J_0$  oznacza skuteczną wartość prądu w przewodzie zerowym, a Rosenzweig w swej pracy doktorskiej [5] wzór

$$(17) \quad P_a = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2} \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}$$

(*Czasopismo Techniczne* 1939), przy czym  $N_a > P_a$ , jest bowiem

$$N_a^2 = P_a^2 + (U_1^2 + U_2^2 + U_3^2) J_0^2.$$

H. L. Curtis i F. B. Silsbec wprowadzili w czasopiśmie amerykańskim *Electric Engineering* (1935) zupełnie odmienny od (16) i (17) definicyjny wzór mocy pozornej w postaci

$$(18) \quad P_p = U_1 J_1 + U_2 J_2 + U_3 J_3$$

z nazwą dla  $P_p$  — *arithmetic apparent power* (moc pozorna arytmetyczna). We wzorze tym iloczyny  $U_1 J_1, U_2 J_2, U_3 J_3$  oznaczają moce pozorne poszczególnych faz układu 3-fazowego, a  $P_p$  — sumę tych mocy. Porównując (17) z (18) otrzymamy

$$(19) \quad P_a^2 = P_p^2 + P_{os}^2,$$

przy czym

$$P_{os}^2 = (U_1 J_2 - U_2 J_1)^2 + (U_1 J_3 - U_3 J_1)^2 + (U_2 J_3 - U_3 J_2)^2.$$

Ponieważ dla tego samego układu 3-fazowego z przewodem zerowym (rys. 2) wypadają ze wzorów (16), (17), (18) trzy różne moce pozorne  $N_a \neq P_a \neq P_p$ , a z wzoru (14) jedna i ta sama moc czynna

$$P_w = U_1 J_1 \cos \varphi_1 + U_2 J_2 \cos \varphi_2 + U_3 J_3 \cos \varphi_3,$$

przeto jasne jest, że podstawowy wzór (15) prowadzi do trzech różnych mocy biernych  $P_{b_1}, P_{b_2}, P_{b_3}$ , przy czym jest

$$P_{b_1} = \sqrt{N_a^2 - P_w^2}, \quad P_{b_2} = \sqrt{P_a^2 - P_w^2}, \quad P_{b_3} = \sqrt{P_p^2 - P_w^2}.$$



Autor zrezygnował wobec tego z apriorycznie ustalonej definicji mocy biernej i w rozprawie niniejszej przedstawia nowe własne rozważania teoretyczne i fizyczne, które bez wprowadzania szeregów Fouriera umożliwiają wyprowadzenie definicji wszystkich trzech głównych mocy  $P_w$ ,  $P_b$  i  $P_s$  w sposób bardzo prosty i przydatny do zastosowań praktycznych i pomiarów technicznych.

## 1. MOC CZYNNA, BIERNA I POZORNA UKŁADU JEDNOFAZOWEGO O ODKSZTAŁCONYCH PRZEBIEGACH NAPIĘĆ I PRĄDÓW

1. *Metoda autora.* W rozprawach [2], [3], [4] okazałem, że moc czynną  $P_w$ , moc bierną  $P_b$  i moc pozorną  $P_s$  układu jednofazowego o okresowych, lecz niesinusoidalnych przebiegach napięcia  $U(t)$  i prądu  $J(t)$ , zwanych dalej dla krótkości przebiegami odkształconymi, można określić bez rozkładu tych przebiegów na szeregi Fouriera, a natomiast przy zastosowaniu metody, polegającej na rozkładzie jednego z tych przebiegów, najdogodniej  $J(t)$ , na dwie składowe:

$$(20) \quad J(t) = J_w(t) + J_b(t),$$

$$(21) \quad J_w(t) = \frac{P_w}{U^2} U(t),$$

$$(22) \quad J_b(t) = J(t) - J_w(t).$$

Mnożąc pierwsze z tych równań przez  $U(t)$  otrzymamy

$$U(t)J(t) = U(t)J_w(t) + U(t)J_b(t),$$

a ponieważ

$$\frac{1}{T} \int_0^T U(t)J(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U(t)J_w(t) dt = P_w,$$

przeto

$$\frac{1}{T} \int_0^T U(t)J_b(t) dt = 0.$$

Podnosząc równanie (20) do kwadratu otrzymamy

$$J^2(t) = J_w^2(t) + J_b^2(t) + 2J_w(t)J_b(t),$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T J^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T J_w^2(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T J_b^2(t) dt + 2 \frac{P_w}{U^2} \frac{1}{T} \int_0^T U(t)J_b(t) dt,$$

a stąd równanie kwadratowe wartości skutecznych prądów

$$(23) \quad J^2 = J_w^2 + J_b^2,$$

które po pomnożeniu przez kwadrat wartości skutecznej napięcia

$$U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U^2(t) dt$$

daje

$$U^2 J^2 = U^2 J_w^2 + U^2 J_B^2$$

i prowadzi do równania kwadratowego mocy o postaci

$$(24) \quad P_S^2 = P_W^2 + P_B^2.$$

Celem niniejszej rozprawy jest ustalenie definicji mocy czynnej  $P_W$ , mocy biernej  $P_B$  i mocy pozornej  $P_S$  w układach o odkształconych przebiegach napięć i prądów, przy zastosowaniu metody autora. W rozdziale I autor podaje symboliczne określenie wszystkich mocy układu jednofazowego, w rozdziale II — określenie wszystkich mocy układu 3-fazowego, a w rozdziale III — określenie wszystkich mocy układu  $n$ -fazowego z przewodem zerowym o odkształconych przebiegach napięć fazowych  $U_1(t), U_2(t), \dots, U_n(t)$  i prądów przewodowych  $J_1(t), J_2(t), \dots, J_n(t)$ , bez rozkładu tych przebiegów na szeregi Fouriera. Metoda autora prowadzi do następujących ogólnych wzorów powyższych trzech mocy:

$$(25) \quad P_w^2 = \sum_1^n U_k^2 \sum_1^n J_{w_k}^2,$$

$$(26) \quad P_B^2 = \sum_1^n U_k^2 \sum_1^n J_{B_k}^2,$$

$$(27) \quad P_S^2 = \sum_1^n U_k^2 \sum_1^n J_k^2,$$

przy czym jest

$$(28) \quad \sum_1^n J_k^2 = \sum_1^n J_{w_k}^2 + \sum_1^n J_{B_k}^2.$$

Po obustronnym pomnożeniu tego równania przez  $\sum_1^n U_k^2$  otrzymamy *równanie kwadratowe mocy*

$$(29) \quad P_S^2 = P_W^2 + P_B^2$$

o postaci analogicznej do równania kwadratowego mocy układu jednofazowego (24).

2. Symboliczne określenie wszystkich mocy układu jednofazowego o odkształconych przebiegach napięcia i prądu. Funkcje rzeczywiste napięcia  $U(t)$  i prądu  $J(t)$  układu jednofazowego określone wzorami:

$$(1') \quad U(t) = \sqrt{2} \sum_1^m V_h \sin(h\omega t + \alpha_h),$$

$$(2') \quad J(t) = \sqrt{2} \sum_1^m I_h \sin(h\omega t + \beta_h),$$

zastępujemy funkcjami symbolicznymi:

$$(30) \quad \sqrt{2} \hat{U}(t) = \sqrt{2} \sum_1^m \hat{V}_h e^{jh\omega t},$$

$$(31) \quad \sqrt{2} \hat{J}(t) = \sqrt{2} \sum_1^m \hat{I}_h e^{jh\omega t},$$

$$(32) \quad \hat{V}_h = V_h e^{j\alpha_h},$$

$$(33) \quad \hat{I}_h = I_h e^{j\beta_h}.$$

Wprowadzamy dla prądu symboliczną funkcję  $\hat{J}(t)$  sprzężoną z funkcją  $\hat{J}(t)$ :

$$(34) \quad \sqrt{2} \hat{J}(t) = \sqrt{2} \sum_1^m \hat{I}_h e^{-jh\omega t},$$

$$(35) \quad \hat{I}_h = I_h e^{-j\beta_h}.$$

Łatwo sprawdzić, że

$$(36) \quad \frac{1}{T} \int_0^T \hat{U}(t) \hat{J}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \sum_1^m \hat{V}_h e^{jh\omega t} \sum_1^m \hat{I}_h e^{-jh\omega t} \right\} dt =$$

$$= \sum_1^m \hat{V}_h \hat{I}_h = \sum_1^m V_h I_h \cos \varphi_h + j \sum_1^m V_h I_h \sin \varphi_h,$$

$$(37) \quad \varphi_h = \alpha_h - \beta_h.$$

Kładąc zgodnie z Budeanu

$$(38) \quad \sum_1^m V_h I_h \cos \varphi_h = P_w.$$

$$(39) \quad \sum_1^m V_h I_h \sin \varphi_h = P_r.$$



otrzymamy symboliczną moc zespoloną  $\dot{P}_s$  określoną wzorem

$$(40) \quad \dot{P}_s = P_w + jP_r.$$

Stąd wynika, iż jest

$$(41) \quad P_s^2 = \dot{P}_s \dot{P}_s = (P_w + jP_r)(P_w - jP_r) = P_w^2 + P_r^2 = \\ = \left( \sum_1^n V_k I_k \cos \varphi_k \right)^2 + \left( \sum_1^n V_k I_k \sin \varphi_k \right)^2.$$

Wprowadzamy teraz symboliczną funkcję prądu zespolonego  $\dot{J}_s(t)$  kładąc

$$(42) \quad \dot{J}_s(t) = \frac{\dot{P}_s}{U^2} \dot{U}(t),$$

$$(43) \quad \check{J}_s(t) = \frac{\dot{P}_s}{U^2} \check{U}(t),$$

i stwierdzamy, że

$$(44) \quad \frac{1}{T} \int_0^T \dot{U}(t) \check{J}_s(t) dt = \frac{\dot{P}_s}{U^2} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{U}(t) \check{U}(t) dt = \dot{P}_s.$$

Rozkładamy wobec tego symboliczną funkcję  $\dot{J}(t)$  na składowe  $\dot{J}_s(t)$  i  $\dot{J}_d(t)$

$$(45) \quad \dot{J}(t) = \dot{J}_s(t) + \dot{J}_d(t),$$

przy czym dla symbolicznej funkcji prądu deformacji  $\dot{J}_d(t)$  kładziemy

$$(46) \quad \dot{J}_d(t) = \dot{J}(t) - \dot{J}_s(t),$$

$$(47) \quad \check{J}_d(t) = \check{J}(t) - \check{J}_s(t).$$

Ponieważ według (36) i (44) jest

$$\frac{1}{T} \int_0^T \dot{U}(t) \dot{J}(t) dt - \frac{1}{T} \int_0^T \dot{U}(t) \check{J}_s(t) dt = 0,$$

przeto musi być

$$(48) \quad \frac{1}{T} \int_0^T \dot{U}(t) \dot{J}_d(t) dt = 0.$$

Ogólnie możemy symboliczną funkcję  $\dot{J}(t)$  rozłożyć w trojaki sposób:

$$1) \quad \dot{J}(t) = \dot{J}_w(t) + \dot{J}_r(t) + \dot{J}_d(t),$$

$$2) \quad \dot{J}(t) = \dot{J}_s(t) + \dot{J}_d(t),$$

$$3) \quad \dot{J}(t) = \dot{J}_w(t) + \dot{J}_d(t).$$

Kładąc dla pierwszego rozkładu:

$$(49) \quad \dot{J}_w(t) = \frac{P_w}{U^2} \dot{U}(t), \quad (50) \quad \dot{J}_w(t) = \frac{P_w}{U^2} \dot{U}(t),$$

$$(51) \quad \dot{J}_r(t) = \frac{\dot{P}_r}{U^2} \dot{U}(t), \quad (52) \quad \dot{J}_r(t) = \frac{\dot{P}_r}{U^2} \dot{U}(t),$$

$$(53) \quad \dot{J}_d(t) = \dot{J}(t) - [\dot{J}_w(t) + \dot{J}_r(t)] = \dot{J}(t) - \dot{J}_d(t),$$

otrzymamy (według nomenklatury autora):

$\dot{J}_w(t)$  — symboliczną funkcję prądu czynnego określoną wzorem (49), przy czym

$$\dot{P}_w(t) = \dot{U}(t)\dot{J}_w(t), \quad \frac{1}{T} \int_0^T \dot{P}_w(t) dt = \dot{P}_w, \quad \frac{1}{T} \int_0^T \dot{P}_w(t)\dot{P}_w(t) dt = P_w^2;$$

$\dot{J}_r(t)$  — symboliczną funkcję prądu reaktywnego, określoną wzorem (51), przy czym

$$\dot{P}_r(t) = \dot{U}(t)\dot{J}_r(t), \quad \frac{1}{T} \int_0^T \dot{P}_r(t) dt = \dot{P}_r, \quad \frac{1}{T} \int_0^T \dot{P}_r(t)\dot{P}_r(t) dt = P_r^2;$$

$\dot{J}_d(t)$  — symboliczną funkcję prądu deformacji, określoną wzorem (53), przy czym

$$\dot{P}_d(t) = \dot{U}(t)\dot{J}_d(t), \quad \frac{1}{T} \int_0^T \dot{P}_d(t) dt = \dot{P}_d, \quad \frac{1}{T} \int_0^T \dot{P}_d(t)\dot{P}_d(t) dt = P_d^2.$$

Uwzględniając, że dla  $\dot{J}(t) = \dot{J}_w(t) + \dot{J}_r(t) + \dot{J}_d(t)$  przedstawia  $\dot{J}(t) = \dot{J}_w(t) + \dot{J}_r(t) + \dot{J}_d(t)$  funkcje symboliczne sprzężone i mnożąc stronami te dwa równania, otrzymamy:

$$(54) \quad \dot{J}(t)\dot{J}(t) = [\dot{J}_w(t) + \dot{J}_r(t) + \dot{J}_d(t)][\dot{J}_w(t) + \dot{J}_r(t) + \dot{J}_d(t)] = \\ = \dot{J}_w(t)\dot{J}_w(t) + \dot{J}_r(t)\dot{J}_r(t) + \dot{J}_d(t)\dot{J}_d(t) + A(t) + B(t) + C(t),$$

$$(55) \quad A(t) = \dot{J}_w(t)\dot{J}_r(t) + \dot{J}_w(t)\dot{J}_d(t),$$

$$(56) \quad B(t) = \dot{J}_w(t)\dot{J}_d(t) + \dot{J}_w(t)\dot{J}_d(t),$$

$$(57) \quad C(t) = \dot{J}_r(t)\dot{J}_d(t) + \dot{J}_r(t)\dot{J}_d(t).$$

Całkując (54) w granicach od 0 do  $T$  i dzieląc przez  $T$ , otrzymamy kwadratowe równanie prądów

$$(58) \quad J^2 = J_w^2 + J_r^2 + J_d^2,$$

gdz

$$\frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt = 0, \quad \frac{1}{T} \int_0^T B(t) dt = 0, \quad \frac{1}{T} \int_0^T C(t) dt = 0.$$

Podstawiając mianowicie w funkcjach  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$ :

$$\dot{J}_w(t) = \frac{P_w}{U^2} \dot{U}(t), \quad \dot{J}_v(t) = \frac{P_v}{U^2} \dot{U}(t),$$

$$\dot{J}_r(t) = \frac{\dot{P}_r}{U^2} \dot{U}(t), \quad \dot{J}_s(t) = \frac{\dot{P}_s}{U^2} \dot{U}(t),$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt &= \frac{P_w}{U^2} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \dot{U}(t) \dot{J}_r(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \dot{U}(t) \dot{J}_s(t) dt \right\} = \\ &= \frac{P_w}{U^2} (\dot{P}_r + \dot{P}_s) = \frac{P_w}{U^2} \{jP_r + (-jP_r)\} = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T B(t) dt = \frac{P_w}{U^2} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \dot{U}(t) \dot{J}_d(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \dot{U}(t) \dot{J}_a(t) dt \right\} = 0,$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T C(t) dt = \frac{\dot{P}_r}{U^2} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{U}(t) \dot{J}_d(t) dt + \frac{\dot{P}_s}{U^2} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{U}(t) \dot{J}_d(t) dt = 0.$$

Kładąc dla drugiego rozkładu funkcji  $\dot{J}(t)$ , tj. dla równania  $\dot{J}(t) = \dot{J}_s(t) + \dot{J}_d(t)$ ,

$$\dot{J}_s(t) = \frac{\dot{P}_s}{U^2} \dot{U}(t), \quad \dot{J}_d(t) = \frac{\dot{P}_d}{U^2} \dot{U}(t),$$

otrzymamy

$$\dot{J}(t) = \frac{\dot{P}_s}{U^2} \dot{U}(t) + \dot{J}_d(t), \quad \dot{J}(t) = \frac{\dot{P}_s}{U^2} \dot{U}(t) + \dot{J}_d(t),$$

a po wymnożeniu stronami obu tych równań jest

$$(59) \quad \dot{J}(t) \dot{J}(t) = \frac{P_s^2}{U^4} \dot{U}(t) \dot{U}(t) + \dot{J}_d(t) \dot{J}_d(t) + D(t) + E(t),$$

przy czym

$$(60) \quad D(t) = \frac{\dot{P}_s}{U^2} \dot{U}(t) \dot{J}_d(t), \quad (61) \quad E(t) = \frac{\dot{P}_d}{U^2} \dot{U}(t) \dot{J}_d(t).$$

Po scałkowaniu (59) w granicach od 0 do  $T$ , podzieleniu przez  $T$  i uwzględnieniu, że  $P_s^2/U^4 = J_s^2$ , wypada drugie równanie kwadratowe prądów

$$(62) \quad J^2 = J_s^2 + J_d^2,$$



gdzie

$$\frac{1}{T} \int_0^T D(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\dot{P}_w}{U^2} \dot{U}(t) \dot{J}_d(t) dt = 0,$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\dot{P}_b}{U^2} \dot{U}(t) \dot{J}_b(t) dt = 0.$$

Kładąc dla trzeciego rozkładu prądu  $\dot{J}(t)$ , tj. dla równania  $\dot{J}(t) = \dot{J}_w(t) + \dot{J}_b(t)$ ,  $\dot{J}(t) = \dot{J}_w(t) + \dot{J}_b(t)$ ,

$$\dot{J}_w(t) = \frac{P_w}{U^2} \dot{U}(t), \quad \dot{J}_b(t) = \frac{P_b}{U^2} \dot{U}(t);$$

otrzymamy

$$\dot{J}(t) = \frac{P_w}{U^2} \dot{U}(t) + \dot{J}_b(t), \quad \dot{J}(t) = \frac{P_w}{U^2} \dot{U}(t) + \dot{J}_b(t),$$

a po wymnożeniu stronami obu tych równań

$$(63) \quad \dot{J}(t)\dot{J}(t) = \frac{P_w^2}{U^4} \dot{U}(t)\dot{U}(t) + \dot{J}_b(t)\dot{J}_b(t) + F(t) + G(t),$$

przy czym

$$(64) \quad F(t) = \frac{P_w}{U^2} \dot{U}(t)\dot{J}_b(t), \quad (65) \quad G(t) = \frac{P_w}{U^2} \dot{U}(t)\dot{J}_b(t).$$

Po scałkowaniu (63) w granicach od 0 do  $T$ , podzieleniu przez  $T$  i uwzględnieniu, że  $P_w^2/U^2 = J_w^2$  wypada trzecie równanie kwadratowe prądów

$$(66) \quad J^2 = J_w^2 + J_b^2,$$

gdzie

$$\frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{P_w}{U^2} \dot{U}(t)\dot{J}_b(t) dt = 0,$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T G(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{P_w}{U^2} \dot{U}(t)\dot{J}_b(t) dt = 0.$$

Powyższe trzy rozkłady funkcji  $\dot{J}(t)$  doprowadziły więc do zespołu trzech kwadratowych równań, skutecznych wartości prądów:

$$(58') \quad J^2 = J_w^2 + J_r^2 + J_d^2,$$

$$(62') \quad J^2 = J_b^2 + J_d^2,$$

$$(66') \quad J^2 = J_w^2 + J_b^2,$$

przy czym

$$(67) \quad J_b^2 = J_w^2 + J_r^2,$$

$$(68) \quad J_b^2 = J_r^2 + J_d^2.$$

Mnożąc stronami każde z powyższych równań przez  $U^3$  otrzymamy:  
 $U^3 J^2 = U^3 J_w^2 + U^3 J_r^2 + U^3 J_s^2, \quad U^2 J^3 = U^2 J_w^3 + U^2 J_r^3, \quad U^1 J^3 = U^1 J_w^3 + U^1 J_r^3.$

Skąd wynikają równania kwadratowe mocy:

$$P_s^2 = P_w^2 + P_r^2 + P_s^2, \quad P_s^3 = P_w^3 + P_r^3, \quad P_s^3 = P_w^3 + P_r^3,$$

przy czym jest  $P_s^2 = P_w^2 + P_r^2, P_s^3 = P_w^3 + P_r^3.$

## 2. MOC CZYNNĄ, BIERNĄ I POZORNĄ UKŁADU 3-FAZOWEGO O ODKSZTAŁCONYCH PRZEBIEGACH NAPIĘĆ FAZOWYCH I PRĄDÓW PRZEWODOWYCH

Zastosowanie metody autora. Na rys. 2 przedstawiony jest schemat układu 3-fazowego z nieuziemiionym przewodem zerowym, o odkształconych napięciach fazowych  $U_1(t), U_2(t), U_3(t)$  i odkształconych prądach przewodowych  $J_1(t), J_2(t), J_3(t)$  z jednakowym okresem  $T$  dla wszystkich tych okresowych przebiegów.

Zakładając, że jest to układ *niesymetryczny i nierównomiernie obciążony* i że znajduje się w stanie ustalonym (stacjonarnym) stawiamy pytanie:

Jak należy zastosować metodę autora do tego układu. celem uzyskania wzorów określających jego moc czynną  $P_W$  moc bierną  $P_B$  i moc pozorną  $P_S$  przy danych napięciach fazowych  $U_1(t), U_2(t), U_3(t)$  i danych prądach przewodowych  $J_1(t), J_2(t), J_3(t).$

Odpowiedź. Analogicznie jak dla układu jednofazowego mamy tu odnośnie do układu 3-fazowego *dwie możliwości*, prowadzące do tych samych wielkości  $P_W, P_B$  i  $P_S$ :

I. Rozkład *prawidłowy* każdego z prądów  $J_1(t), J_2(t), J_3(t)$  na składowe czynne i bierne przy zachowaniu danych napięć fazowych  $U_1(t), U_2(t), U_3(t).$

II. Rozkład *prawidłowy* każdego z napięć  $U_1(t), U_2(t), U_3(t)$  na składowe czynne i bierne, przy zachowaniu danych prądów przewodowych  $J_1(t), J_2(t), J_3(t).$

Jakkolwiek oba te rozkłady prowadzą do tych samych mocy  $P_W, P_B$  i  $P_S$ , to jednak wprowadzamy rozkład I jako dogodniejszy dla praktyki i pozostawiając napięcia  $U_1(t), U_2(t), U_3(t)$  nie zmienione, rozkładamy prądy  $J_1(t), J_2(t), J_3(t)$  według następujących równań:

$$(69) \quad J_1(t) = J_{w_1}(t) + J_{b_1}(t), \quad J_2(t) = J_{w_2}(t) + J_{b_2}(t), \quad J_3(t) = J_{w_3}(t) + J_{b_3}(t).$$

Rozkład ten jest *prawidłowy* tylko w tym jednym przypadku, gdy spełnia następujące dwa kardynalne warunki:

1. Moc czynną  $P_w$  określona dla układu 3-fazowego podstawowym wzorem

$$(70) \quad P_w = \sum_1^3 \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t) J_k(t) dt$$

i moc czynna  $P_w$  określona za pomocą prądów czynnych — wzorem

$$(71) \quad P_w = \sum_1^3 \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t) J_{w_k}(t) dt$$

mają wartości te same.

2. Gdy

$$(72) \quad \sum_1^3 \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t) J_{b_k}(t) dt = 0.$$

Łatwo sprawdzić, że oba te warunki będą spełnione, gdy wprowadzimy do określeń prądów czynnych  $J_{w_1}(t)$ ,  $J_{w_2}(t)$ ,  $J_{w_3}(t)$  przewodność czynną

$$(73) \quad G_w = \frac{P_w}{\sum_1^3 U_k^2}$$

jak to uwidacznia następujący zespół wzorów:

$$(74) \quad J_{w_1}(t) = G_w U_1(t), \quad J_{w_2}(t) = G_w U_2(t), \quad J_{w_3}(t) = G_w U_3(t).$$

Mnożąc mianowicie powyższe równania kolejno przez  $U_1(t)$ ,  $U_2(t)$ ,  $U_3(t)$ , otrzymamy

$$(75) \quad U_1(t) J_{w_1}(t) = G_w U_1^2(t), \quad U_2(t) J_{w_2}(t) = G_w U_2^2(t), \quad U_3(t) J_{w_3}(t) = G_w U_3^2(t),$$

a stąd po scałkowaniu w granicach od 0 do  $T$  i podzieleniu przez  $T$  każdego równania zespołu (75) i zsumowaniu obustronnym otrzymanych wyrażeń jest

$$\sum_1^3 \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t) J_{w_k}(t) dt = G_w \sum_1^3 \frac{1}{T} \int_0^T U_k^2(t) dt = \frac{P_w}{\sum_1^3 \Sigma_k^2} \sum_1^3 U_k^2 = P_w.$$

Ponieważ zaś odnośnie do równań

$$(76) \quad \begin{cases} U_1(t) J_1(t) = U_1(t) J_{w_1}(t) + U_1(t) J_{b_1}(t), \\ U_2(t) J_2(t) = U_2(t) J_{w_2}(t) + U_2(t) J_{b_2}(t), \\ U_3(t) J_3(t) = U_3(t) J_{w_3}(t) + U_3(t) J_{b_3}(t), \end{cases}$$

zachodzi według pierwszego warunku równość

$$\sum_1^3 \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t) J_k(t) dt = \sum_1^3 \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t) J_{w_k}(t) dt = P_w,$$

przeto zgodnie z drugim warunkiem jest

$$\sum_1^3 \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t) J_{b_k}(t) dt = 0.$$



Uwaga. Warto zaznaczyć, że powyższy rozkład prądów  $J_1(t)$ ,  $J_2(t)$ ,  $J_3(t)$  na prądy czynne  $J_{w_1}(t)$ ,  $J_{w_2}(t)$ ,  $J_{w_3}(t)$ , określone wzorami (74), i prądy bierno  $J_{b_1}(t)$ ,  $J_{b_2}(t)$ ,  $J_{b_3}(t)$ , określone wzorami

$$(77) \quad J_{b_1}(t) = J_1(t) - J_{w_1}(t), \quad J_{b_2}(t) = J_2(t) - J_{w_2}(t), \quad J_{b_3}(t) = J_3(t) - J_{w_3}(t),$$

jest jedynym, jaki spełnia podane powyżej dwa warunki.

Podnosząc każde z równań zespołu (74) do kwadratu, uzyskamy równania kwadratowe o postaci:

$$(78) \quad J_{w_1}^2(t) = G_w^2 U_1^2(t), \quad J_{w_2}^2(t) = G_w^2 U_2^2(t), \quad J_{w_3}^2(t) = G_w^2 U_3^2(t).$$

Stąd po scałkowaniu w granicach od 0 do T i podzieleniu przez T uzyskujemy określenia kwadratów prądów czynnych w postaci wzorów:

$$(79) \quad J_{w_1}^2 = G_w^2 U_1^2, \quad J_{w_2}^2 = G_w^2 U_2^2, \quad J_{w_3}^2 = G_w^2 U_3^2.$$

W równaniach tych jest

$$G_w^2 = \frac{P_w^2}{\left(\sum_1^3 U_k^2\right)^2},$$

a  $U_1^2$ ,  $U_2^2$ ,  $U_3^2$  są to kwadraty wartości skutecznych napięć fazowych, uzyskane z ogólnego wzoru

$$(80) \quad U_k^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U_k^2(t) dt \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 3.$$

Zespół równań (79) prowadzi do równania zespolowego

$$\sum_1^3 J_{w_k}^2 = \frac{P_w^2}{\left(\sum_1^3 U_k^2\right)^2} \sum_1^3 U_k^2 = \frac{P_w^2}{\sum_1^3 U_k^2},$$

z którego wynika, że moc czynną w kwadracie  $P_w^2$  określa wzór

$$(81) \quad P_w^2 = \sum_1^3 U_k^2 \sum_1^3 J_{w_k}^2.$$

Dla mocy czynnej mamy przeto trzy wzory:

$$(70') \quad P_w = \sum_1^3 \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t) J_k(t) dt \quad (\text{wzór podstawowy}),$$

$$(71') \quad P_w = \sum_1^3 \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t) J_{w_k}(t) dt,$$

$$(82) \quad P_w = \sqrt{\sum_1^3 U_k^2 \sum_1^3 J_{w_k}^2}$$

Celem znalezienia wzoru dla mocy biernej  $P_b$  podnosimy równania (69) do kwadratu, co prowadzi do następujących równań kwadratowych prądów:

$$\begin{aligned} J_1^2(t) &= J_{w_1}^2(t) + J_{b_1}^2(t) + 2J_{w_1}(t)J_{b_1}(t), \\ J_2^2(t) &= J_{w_2}^2(t) + J_{b_2}^2(t) + 2J_{w_2}(t)J_{b_2}(t), \\ J_3^2(t) &= J_{w_3}^2(t) + J_{b_3}^2(t) + 2J_{w_3}(t)J_{b_3}(t). \end{aligned}$$

Po scałkowaniu tych równań w granicach od 0 do  $T$  i podzieleniu przez  $T$  otrzymujemy podstawowe równanie zespolone dla wartości skutecznych prądów w kwadracie:

$$(83) \quad \sum_1^3 J_i^2 = \sum_1^3 J_{w_k}^2 + \sum_1^3 J_{b_k}^2,$$

gdzież

$$2 \sum_1^3 \frac{1}{T} \int_0^T J_{w_k}(t)J_{b_k}(t) dt = 2 \sum_1^3 \frac{P_w}{\sum_1^3 U_k^2} \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t)J_{b_k}(t) dt = 0.$$

Mnożąc obustronnie równanie kwadratowe prądów (83) przez  $\sum_1^3 U_i^2$  otrzymamy równanie zespolone formy

$$\sum_1^3 U_k^2 \sum_1^3 J_k^2 = \sum_1^3 U_k^2 \sum_1^3 J_{w_k}^2 + \sum_1^3 U_k^2 \sum_1^3 J_{b_k}^2,$$

skąd wynika równanie kwadratowe mocy o postaci

$$(84) \quad P_S^2 = P_w^2 + P_b^2.$$

W równaniu tym oznaczają:

$$(85) \quad P_w^2 = \sum_1^3 U_k^2 \sum_1^3 J_{w_k}^2 \quad - \text{moc czynną (w kwadracie),}$$

$$(86) \quad P_b^2 = \sum_1^3 U_k^2 \sum_1^3 J_{b_k}^2 \quad - \text{moc bierną (w kwadracie),}$$

$$(87) \quad P_S^2 = \sum_1^3 U_k^2 \sum_1^3 J_k^2 \quad - \text{moc pozorną (w kwadracie)}$$

układu 3-fazowego *niesymetrycznego i nierównomiernie obciążonego* z przewodem zerowym nieuziemiającym, jak podano na rys. 2, i przy założeniu, że straty mocy w przewodach łączących odbiornik z końcówkami 1, 2, 3, 0 urządzenia zasilającego są znikomo małe.

Uwaga. Ze wzoru (84) wynika, że

$$P_B^2 = P_S^2 - P_W^2,$$

co wobec prostoty wzoru dla  $P_S^2 = (U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2)$  i możliwości wymierzenia wartości skutecznych napięć fazowych i prądów przewodowych oraz mocy czynnej  $P_W$  może służyć do pomiarowego sprawdzenia wartości  $P_B$ , gdyż powinno być

$$P_B = \sqrt{\sum_1^3 U_k^2 \sum_1^3 J_{b_k}^2} = \sqrt{P_S^2 - P_W^2}$$

(patrz dalej *Pomiary i przykłady obliczeń*).

### 3. MOC CZYNNA, BIERNA I POZORNA UKŁADU $n$ -FAZOWEGO O ODKSZTAŁCONYCH PRZEBIEGACH NAPIĘĆ I PRĄDÓW

**Założenie.** Zakładamy, że w układzie  $n$ -fazowym z przewodem zerowym nieuziemionym dane są okresowe napięcia fazowe  $U_1(t), U_2(t), \dots, U_n(t)$  i okresowe prądy przewodowe  $J_1(t), J_2(t), \dots, J_n(t)$  o *jednakowym okresie  $T$*  tych wszystkich przebiegów, które ogólnie mogą być *odkształcone*.

Zakładając, że jest to układ *niesymetryczny* tak odnośnie do napięć jako też i prądów i że jest obciążony *nierównomiernie* w poszczególnych fazach, stawiamy pytanie:

Jak należy do tego układu  $n$ -fazowego zastosować metodę rozkładu podaną w rozdziale I celem uzyskania definicji: mocy czynnej  $P_w$ , reaktywnej  $P_r$  i mocy deformacji  $P_d$  oraz mocy biernej  $P_b$  i mocy pozornej  $P_o$ ?

Odpowiedź. Przy założeniu, że napięcia fazowe mają być zachowane, a rozkładowi mają być poddane prądy przewodowe, tok postępowania jest następujący:

1) Wymierzamy lub obliczamy wartości skuteczne  $U_1, U_2, \dots, U_n$  danych napięć fazowych  $U_1(t), U_2(t), \dots, U_n(t)$  i wartości skuteczne  $J_1, J_2, \dots, J_n$  danych prądów przewodowych  $J_1(t), J_2(t), \dots, J_n(t)$  według wzorów

$$(88) \quad U_k = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_k^2(t) dt}, \quad (89) \quad J_k = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T J_k^2(t) dt}.$$

2) Wymierzamy lub obliczamy moc czynną  $P_w$  według wzoru

$$(90) \quad P_w = \sum_1^n \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t) J_k(t) dt.$$

3) Rozkładamy prądy przewodowe  $J_1(t), J_2(t), \dots, J_n(t)$  na składowe czynne  $J_{w_1}(t), J_{w_2}(t), \dots, J_{w_n}(t)$  i składowe bierne  $J_{b_1}(t), J_{b_2}(t), \dots, J_{b_n}(t)$  według wzorów:



$$(91) \quad J_{w_k}(t) = \frac{P_w}{\sum_1^n U_k^2} U_k(t),$$

$$(92) \quad J_{b_k}(t) = J_k(t) - J_{w_k}(t),$$

przy czym

$$(93) \quad \begin{cases} J_1(t) = J_{w_1}(t) + J_{b_1}(t), \\ J_2(t) = J_{w_2}(t) + J_{b_2}(t), \\ \dots \dots \dots \\ J_n(t) = J_{w_n}(t) + J_{b_n}(t). \end{cases}$$

Ponieważ według (90) i (91) jest

$$(94) \quad P_w = \sum_1^n \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t) J_k(t) dt = \sum_1^n \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t) J_{w_k}(t) dt,$$

przeto

$$(95) \quad \sum_1^n \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t) J_{b_k}(t) dt = 0.$$

4) Podnosimy równania (93) do kwadratu:

$$(96) \quad \begin{cases} J_1^2(t) = J_{w_1}^2(t) + J_{b_1}^2(t) + 2J_{w_1}(t)J_{b_1}(t), \\ J_2^2(t) = J_{w_2}^2(t) + J_{b_2}^2(t) + 2J_{w_2}(t)J_{b_2}(t), \\ \dots \dots \dots \\ J_n^2(t) = J_{w_n}^2(t) + J_{b_n}^2(t) + 2J_{w_n}(t)J_{b_n}(t). \end{cases}$$

5) Całkując zespół (96) w granicach od 0 do  $T$  i dzieląc przez  $T$ , otrzymamy zespolone równanie kwadratowe wartości skutecznych prądów

$$(97) \quad \sum_1^n J_k^2 = \sum_1^n J_{w_k}^2 + \sum_1^n J_{b_k}^2,$$

gdź według (91) i (95) jest

$$2 \sum_1^n \frac{1}{T} \int_0^T J_{w_k}(t) J_{b_k}(t) dt = 2 \frac{P_w}{\sum_1^n U_k^2} \sum_1^n \frac{1}{T} \int_0^T U_k(t) J_{b_k}(t) dt = 0.$$

6) Mnożąc równanie (97) przez  $\sum_1^n U_k^2$ , otrzymamy równanie kwadratowe mocy

$$(98) \quad \sum_1^n U_k^2 \sum_1^n J_k^2 = \sum_1^n U_k^2 \sum_1^n J_{w_k}^2 + \sum_1^n U_k^2 \sum_1^n J_{b_k}^2.$$

7) Stąd przy określeniach:

$$(25') \quad P_W^2 = \sum_1^n U_k^2 \sum_1^n J_{w_k}^2 \quad \text{-- dla mocy czynnej,}$$

$$(26') \quad P_B^2 = \sum_1^n U_k^2 \sum_1^n J_{b_k}^2 \quad \text{-- dla mocy biernej,}$$

$$(27') \quad P_S^2 = \sum_1^n U_k^2 \sum_1^n J_k^2 \quad \text{-- dla mocy pozornej,}$$

8) równanie kwadratowe mocy omawianego układu  $n$ -fazowego w postaci

$$(29') \quad P_S^2 = P_W^2 + P_B^2.$$

#### Literatura

[1] C. I. Budeanu, *Puissances réactives et fictives*, Publication de l'Institut National Roumain pour l'Étude de l'Aménagement et de l'Utilisation des Sources d'Énergie, Bucarest 1927.

[2] S. Fryze, *Moc rzeczywista, urojona i pozorna w obwodach elektrycznych o przebiegach odkształconych prądu i napięcia*, Przegląd Elektrotechniczny 7-8 (1931).

[3] — *W sprawie określenia mocy w obwodach elektrycznych o przebiegach odkształconych prądu i napięcia*, ibidem 22 (1931).

[4] — *Wirk-, Blind- und Scheinleistung in elektrischen Stromkreisen mit nichtsinusoidalem Verlauf von Strom und Spannung*, Elektrotechnische Zeitschrift 25, 26, 29 (1932).

[5] I. Rosenzweig, *Symboliczny wielowymiarowy rachunek wektorowy jako metoda analizy układów wielofazowych*, Czasopismo Techniczne 56 (1939).

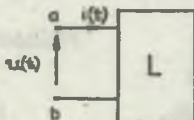
Prof. dr hab. inż. Zygmunt NOWOMIEJSKI

Instytut Podstawowych Problemów  
Elektrotechniki i Energoelektroniki  
Politechniki Śląskiej

### 3. UOGÓLNIONA TEORIA MOCY (POR. [4])<sup>1)</sup>

#### 3.1. Moc czynna, bierna i pozorne

Niech  $L$  jest dowolnym<sup>2)</sup> układem elektrycznym między zaciskami którego występują przebiegi o skończonej mocy. Oznacza to, że między zaciskami (a,b) układu  $L$  (por. rys. 1) określone są wartości skuteczne:



Rys. 1

$$U = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u^2(\tau) d\tau} \quad (3.01)$$

$$I = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T i^2(\tau) d\tau}$$

oraz moc modulowa:

$$P_m = U I. \quad (3.02)$$

Podstawowymi mocami przebiegów są moc czynna  $P$  i bierna  $Q$ . Na podstawie definicji mamy:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(\tau) i(\tau) d\tau. \quad (3.03)$$

$$Q = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(\tau) H\{i(\tau)\} d\tau. \quad (3.04)$$

1) Jest to fragment monografii opublikowanej w Zeszytach Naukowych Politechniki Śląskiej serii Elektryka nr 49, 1977 r. pt. Teoria mocy układów elektrycznych autorów Zygmunt Nowomiejski i Ewa Sowa stanowiący 3 rozdział tej monografii autorstwa Zygmunta Nowomiejskiego.

2) W pracy ograniczymy się do dwójników. Jednak biorąc ogólnie  $L$  może być złożonym obiektem aktywnym zawierającym parametry skupione i rozłożone elementy liniowe i nieliniowe oraz elementy odwzorowujące procesy stochastyczne.



Przykładowo, gdy:  $i(t) = G u(t)$ , gdzie  $G$  jest wielkością stałą, otrzymamy:

$$P = G U^2; \quad Q = 0$$

wykorzystując, że  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) H\{f(t)\} dt = 0$ .

oraz, gdy:  $i(t) = B H\{u(t)\}$ .

wówczas:

$$P = 0; \quad Q = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T i(t) H\{u(t)\} dt = - B U^2$$

Pozostaj:

$$\mathcal{V}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) i(t-\tau) dt. \quad (3.05)$$

$$\Theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (3.06)$$

Funkcja  $\mathcal{V}(\tau)$  jest funkcją korelacji wzajemnej przebiegów napięcia i prądu. (Można ją nazwać korelacją napięciowo-prądową układu  $L$ ). Na podstawie relacji

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(\omega) d\omega$$

oraz

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) d\omega$$

szachodsi:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(\omega) d\omega. \quad (3.07)$$

$$Q = (-j) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} \omega \Theta(\omega) d\omega. \quad (3.08)$$

Stąd:

$$P + jQ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(\omega) (1 + \operatorname{sgn}\omega) d\omega. \quad (3.09)$$

Relacja (3.09) ma znaczenie podstawowe. Wynika z niej, że jeżeli występujące na zaciskach układu L przebiegi napięcia i prądu posiadają zerową korelację wzajemną (są nieskorelowane) to moce: czynna  $P$  i bierna  $Q$  są równe zero. (Np. dwa przebiegi sinusoidalne o różnych pulsacjach są przebiegami nieskorelowanymi).

W praktycznych obliczeniach bardziej specyficzna postać zależności (3.09) może okazać się przydatniejsza. Aby to pokazać załóżmy, że:  $u(t) = U_0 = \text{constans}$ ;  $i(t) = I_0 = \text{constans}$ . Otrzymamy:

$$\Psi(z) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U_0 I_0 dt = U_0 I_0.$$

Natomiast

$$\Theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_0 I_0 e^{-j\omega t} dt = U_0 I_0 2\pi \delta(\omega)$$

i stąd:

$$P = U_0 I_0; \quad Q = 0.$$

Ogólnie więc, jeżeli w transformacji  $\Theta(\omega)$  występuje impuls Diraca dla  $\omega = 0$ , tzn. jeżeli:

$$\Theta(\omega) = \Theta_0 2\pi \delta(\omega) + \Theta_1(\omega), \quad (3.10)$$

to:

$$P + jQ = \Theta_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \Theta_1(\omega) d\omega \quad (3.11)$$

Moc pozorną  $S$  definiujemy za pomocą relacji:

$$S = |P + jQ| = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (3.12)$$

Transformatę  $\Theta(\omega)$  możemy przedstawić w postaci amplitudowo-fazowej. Kładziemy:

$$\Theta(\omega) = A(\omega) e^{j\psi(\omega)}, \quad \cos\psi = \frac{P}{S}, \quad \sin\psi = \frac{Q}{S}. \quad (3.13)$$

Otrzymamy:

$$S e^{j\varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{j\phi(\omega)} (1 + \operatorname{sgn}\omega) d\omega \quad (3.14)$$

Moc pozorna  $S$  jest wielkością rzeczywistą. Stąd:

$$S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \left\{ \cos[\phi(\omega) - \varphi] (1 + \operatorname{sgn}\omega) \right\} d\omega \quad (3.15)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \left\{ \sin[\phi(\omega) - \varphi] (1 + \operatorname{sgn}\omega) \right\} d\omega \quad (3.16)$$

Zauważmy, że w przypadku szczególnym, gdy:  $\phi(\omega) = \text{constans} = \varphi$  relacja (3.16) jest spełniona dla dowolnej amplitudy  $A(\omega)$  i wtedy:

$$S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)| (1 + \operatorname{sgn}\omega) d\omega \quad (3.17)$$

Teoria mocy - biorąc najogólniej, dotyczy związków zachodzących między mocami rozważanych przebiegów. W zastosowaniach - aby jej nadać określone znaczenie techniczne i ekonomiczne odnosimy ją do wyróżnionego obiektu lub układu. Jeżeli dynamiczne zachowanie się układu pozwala na przeprowadzenie efektywnej analizy, to znaczy prowadzącej do znalezienia zależności zachodzących między przebiegami, teoria mocy staje się składową częścią tej analizy a występujące moce możemy wyrazić w zależności od dynamicznych charakterystyk układu.

Najprostszym tego przykładem jest układ liniowy czasowo niezmienniczy. Założymy, że  $L$  jest układem liniowym pasywnym lub aktywnym czasowo niezmienniczym i niech  $y(t)$  będzie odpowiedzią tego układu na napięciowy impuls Diraca  $\delta(t)$  a  $\varphi(t)$  funkcją autokorelacji przyłożonego napięcia  $u(t)$ .

Na podstawie zasady superpozycji:

$$i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) u(t-\tau) d\tau \quad (3.18)$$

Stąd

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega) |Y(\omega)|^2 d\omega \quad (3.19)$$



ponadto korzystając z relacji (3.09) oraz z zależności pomiędzy przebiegiem  $h(t)$  o skończonej energii a  $f(t)$  przebiegiem o skończonej mocy, oraz przebiegiem  $g(t)$  o skończonej mocy zachodzi relacja  $\Theta(\omega) = \hat{\phi}(\omega) H^*(\omega)$  otrzymujemy:

$$P + jQ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega) \cdot Y^*(\omega) (1 + j\text{sgn}\omega) d\omega, \quad (3.20)$$

gdzie  $\hat{\phi}(\omega)$  i  $Y(\omega)$  są transformacjami Fouriera odpowiednio funkcji  $\phi(t)$  i  $y(t)$ .

Jeżeli występujące przebiegi nie zawierają składowych stałych to (3.20) redukuje się do postaci:

$$P + jQ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{\phi}(\omega) Y^*(\omega) d\omega, \quad (3.21)$$

Ważną cechą uzyskanych relacji jest fakt, że nie są one zależne bezpośrednio od przebiegów lecz (dla danego układu) od transformaty Fouriera funkcji autokorelacji przyłożonego napięcia. Transformata  $\hat{\phi}(\omega)$  jest funkcją rzeczywistą i dodatnią co oznacza, że jest ona niezależna od kąta fazowego i dlatego różne przebiegi mogą posiadać taką samą funkcję autokorelacji. Tym samym dla różnych przebiegów napięć przyłożonych do zacisków (a,b) układu L (posiadających równą funkcję autokorelacji) pobór mocy  $P$  i  $Q$  oraz wartość skuteczna  $I$  prądu  $i(t)$  będą takie same.

Korzystając, że: 
$$F_{\xi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin \xi t}{t} \cdot f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \xi \neq 0. \quad (3.21a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin \xi t}{t} \cdot f(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \approx F_{\xi}(\omega) e^{-j\omega \tau}. \quad (3.21b)$$

$$i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) u(t-\tau) d\tau.$$

mamy:

$$\begin{aligned} F_i(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin \xi t}{t} e^{-j\omega t} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) u(t-\tau) d\tau \right\} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin \xi t}{t} u(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right\} d\tau \\ &\approx U_{\xi}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau. \end{aligned}$$

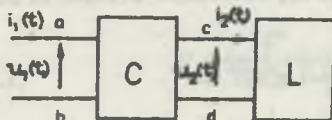
Stąd, dla wystarczająco małego  $\epsilon$ :

$$I_z(\omega) \approx Y(\omega)U_z(\omega), \quad (3.22)$$

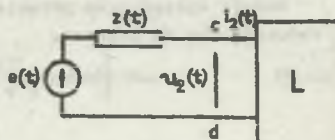
gdzie  $U_z(\omega)$  jest uogólnioną transformatą Fouriera przebiegu napięcia  $u(t)$ .

### 3.2. Przenoszenie mocy przez czwórnik liniowy

Rozważmy układ składający się z czwornika liniowego "C" zawartego między parą zacisków (a,b) i (c,d) oraz dowolnego obciążenia L (rys. 2).



Rys. 2



Rys. 3

Stosując twierdzenie Thevenina do liniowej części układu otrzymamy kolejno (por. rys. 3):

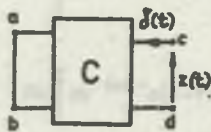
$$e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k_u(\tau) u_2(t-\tau) d\tau, \quad (3.23)$$

gdzie  $k_u(t)$  jest napięciową transmitancją czwornika ( $e(t)$  jest napięciem występującym między zaciskami (c,d) przy odłączeniu tych zacisków od obciążenia).

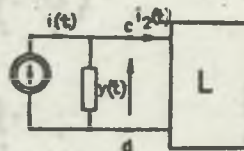
$$u_2(t) = e(t) - \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) i_2(t-\tau) d\tau, \quad (3.24)$$

gdzie (por. rys. 4)  $z(t)$  jest odpowiedzią czwornika zwartą między zaciskami (c,d) przy wymuszeniu prądowym impulsem Diraca i zwartych końcówkach (a,b)

$$u_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k_u(\tau) u_2(t-\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) i_2(t-\tau) d\tau. \quad (3.25)$$



Rys. 4



Rys. 5

Na podstawie (3.21a) oraz (3.21b) dla uogólnionych transformat Fouriera zachodzi:

$$U_{\mathcal{E}2}(\omega) \approx K_u(\omega)U_{\mathcal{E}1}(\omega) - Z(\omega)I_{\mathcal{E}2}(\omega). \quad (3.26)$$

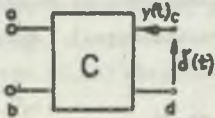
Podobnie, stosując twierdzenie Nortona, otrzymamy (por. rys 5):

$$i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k_1(\tau) i_1(t-\tau) d\tau, \quad (3.27)$$

gdzie  $k_1(t)$  jest prądową transmitancją czwórnik.

$i(t)$  jest prądem płynącym między zaciskami (c,d) przy ich zwarciu)

$$i_2(t) = i(t) - \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) u_2(t-\tau) d\tau. \quad (3.28)$$



Rys. 6

gdzie (por. rys. 6)  $y(t)$  jest odpowiedzią czwórnik zawartą między zaciskami (c,d) przy wymuszeniu napięciowym impulsem Diraca i otwartych końcówkach (a,b).

Czyli:

$$i_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k_1(\tau) i_1(t-\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) u_2(t-\tau) d\tau. \quad (3.29)$$

Dla uogólnionych transformat Fouriera, zachodzi:

$$I_{\mathcal{E}2}(\omega) \approx K_1(\omega)I_{\mathcal{E}1}(\omega) - Y(\omega)U_{\mathcal{E}2}(\omega). \quad (3.30)$$

Wykorzystując (3.26) oraz (3.30), otrzymamy:

$$U_{\mathcal{E}2}(\omega) \approx \frac{K_u(\omega)U_{\mathcal{E}1}(\omega) - K_1(\omega)Z(\omega)I_{\mathcal{E}1}(\omega)}{1 - Z(\omega)Y(\omega)} \quad (3.31)$$

$$I_{\mathcal{E}2}(\omega) \approx \frac{K_1(\omega)I_{\mathcal{E}1}(\omega) - K_u(\omega)Y(\omega)U_{\mathcal{E}1}(\omega)}{1 - Z(\omega)Y(\omega)}. \quad (3.32)$$

Naszy:

$$\Theta_2(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{U_{\mathcal{E}2}(\omega)I_{\mathcal{E}2}^*(\omega)}{4\epsilon\epsilon}.$$

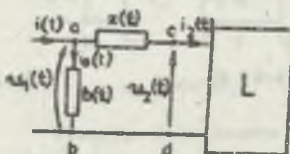


Stąd:

$$\Theta_2(\omega) = \frac{1}{|1-Z(\omega)Y(\omega)|^2} \left\{ K_U(\omega)K_1(\omega)\Theta_1(\omega) + Z(\omega)Y^*(\omega)K_1(\omega)K_U(\omega)\Theta_1^*(\omega) - \left[ Y^*(\omega)|K_U(\omega)|^2\Phi_1(\omega) + Z(\omega)|K_1(\omega)|^2V_1(\omega) \right] \right\}, \quad (3.33)$$

gdzie  $V_1(\omega)$  jest transformacją Fouriera funkcji autokorelacji przebiegu prądu  $i_1(t)$ .

Zagadnieniem dualnym do przedstawionego jest obliczenie mocy przebiegów występujących między zaciskami (a,b).



Rys. 7

Załóżmy, że czwórnik "C" jest dany w układzie  $\Gamma$  (por. rys. 7) a funkcje przejścia jego elementów  $x(t)$  oraz  $b(t)$  są funkcjami nieparzystymi. (Założenie to określa obydwie elementy jako reaktancyjne). Otrzymamy:

$$u_1(t) = u_2(t) + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) i_2(t-\tau) d\tau, \quad (3.34)$$

$$i_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} b(\tau) u_1(t-\tau) d\tau + i_2(t).$$

Stąd:

$$U_{E1}(\omega) = U_{E2}(\omega) + j X(\omega) I_{E2}(\omega), \quad (3.35)$$

$$I_{E1}(\omega) = j B(\omega) U_{E1}(\omega) + I_{E2}(\omega).$$

Czyli:

$$U_{E1}(\omega) = U_{E2}(\omega) + j X(\omega) I_{E2}(\omega), \quad (3.36)$$

$$I_{E1}(\omega) = j B(\omega) U_{E2}(\omega) + [1 - X(\omega)B(\omega)] I_{E2}(\omega).$$

Pamiętając o definicji  $\Theta(\omega)$  oraz  $\Phi(\omega)$ , a mianowicie:

$$\Theta(\omega) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{F_{\xi}(\omega) G_{\xi}^*(\omega)}{4 \pi \xi}.$$

$$\phi(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|F_{\epsilon}(\omega)|^2}{4\pi\epsilon}$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned} \theta_1(\omega) = & -jB(\omega)\phi_2(\omega) + jX(\omega)[1 - X(\omega)B(\omega)]V_2(\omega) + \\ & + \theta_2(\omega)[1 - X(\omega)B(\omega)] + \theta_2^*(\omega)X(\omega)B(\omega). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Kładziemy:

$$\begin{aligned} \theta_{1r}(\omega) = & \theta_{1r}(\omega) + j\theta_{1u}(\omega), \\ \theta_{2r}(\omega) = & \theta_{2r}(\omega) + j\theta_{2u}(\omega). \end{aligned} \quad (3.38)$$

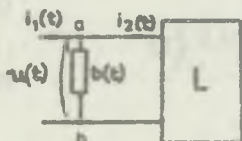
Stąd:

$$\theta_{1r}(\omega) = \theta_{2r}(\omega). \quad (3.39)$$

$$\theta_{1u}(\omega) = \theta_{2u}(\omega)[1 - 2X(\omega)B(\omega)] - B(\omega)\phi_2(\omega) + X(\omega)[1 - X(\omega)B(\omega)]V_2(\omega) \quad (3.40)$$

Relacja (3.39) wyraża oczywistą własność układu, a mianowicie fakt, że:  $P_1 = P_2$ .

Relacja (3.40) określa wpływ parametrów czwórniko na pobór mocy biernej  $Q_1$ .



Rys. 8

W szczególnym przypadku, gdy  $X(\omega) = 0$  ( $F = B$ ), otrzymamy:

$$\phi_1(\omega) = \phi_2(\omega) = \phi(\omega), \quad (3.41)$$

$$V_1(\omega) = V_2(\omega) + B(\omega)[B(\omega)\phi(\omega) - 2\theta_{2u}(\omega)], \quad (3.42)$$

$$\theta_{1u}(\omega) = \theta_{2u}(\omega) - B(\omega)\phi(\omega). \quad (3.43)$$

### 3.3. Moc dystorsji

Ogólnie, dla każdej skończonej wartości  $T$  prawdziwa jest tożsamość:

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T u(\tau)^2 d\tau + \int_{-T}^T i(\tau)^2 d\tau = & \left| \int_{-T}^T u(\tau)i(\tau) d\tau \right|^2 + \\ & + \int_{-T}^T \int_{-T}^T \frac{1}{2} |u(\tau)i(\tau) - u(\tau')i(\tau')|^2 d\tau d\tau', \end{aligned} \quad (3.44)$$

a ponieważ granice:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u^2(\tau) d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T i^2(\tau) d\tau = P_n^2$$

istnieje - określona jest także wielkość  $D$  zdefiniowana za pomocą relacji:

$$D = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \frac{1}{2} |u(\tau) i(\tau) - u(\tau) i(t)|^2 dt d\tau}, \quad (3.45)$$

$D$  nazwiemy mocą dystorsji przebiegów  $u(t)$  i  $i(t)$ .  
Na podstawie (3.44) zachodzi:

$$P_{\Sigma}^2 = P^2 + D^2. \quad (3.46)$$

Zauważmy, że gdy:

$$i(t) = \lambda u(t), \quad (3.47)$$

gdzie  $\lambda$  jest wielkością stałą, to moc  $D$  jest równa zero. Jak pokażemy wielkość  $D$  odgrywa istotną rolę w rozważeniach prowadzących do poprawy współczynnika mocy układu.

### 3.4. Rozkład ortogonalny przebiegów<sup>1)</sup>

Położmy

$$i(t) = \lambda u(t) + i_{\psi}(t) \quad (3.48)$$

$$\lambda = \frac{P}{U^2} \quad (\text{por. [5]}). \quad (3.49)$$

Zachodzi:

$$\Theta(\omega) = \lambda \Phi(\omega) + \Phi_{\psi}(\omega), \quad (3.50)$$

$$V(\omega) = \lambda^2 \Phi(\omega) + V_{\psi}(\omega) + 2\lambda \Theta_{\psi}(\omega), \quad (3.51)$$

gdzie  $\Theta_{\psi}(\omega)$  jest transformatą Fouriera funkcji korelacji wzajemnej:

$$\Theta_{\psi}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) i_{\psi}(t-\tau) dt, \quad (3.52)$$

a  $V_{\psi}(\omega)$  jest transformatą Fouriera funkcji autokorelacji przegięgu  $i_{\psi}(t)$ .  
Na podstawie (3.07) oraz (3.49), otrzymamy:

$$P = P + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_{\psi}(\omega) d\omega$$

1) Ze względu na zastosowania praktyczne rozkład przeprowadzono przyjmując przebieg napięcia za wielkość odniesienia.



Czyli:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\theta}_V(\omega) d\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) i_V(t) dt = 0. \quad (3.53)$$

Wynika stąd, że przebieg  $i_V(t)$  jest ortogonalny do przebiegu napięcia  $u(t)$ .

Z drugiej strony:

$$\begin{aligned} (-j) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{egn}\omega \theta(\omega) d\omega &= (-j)\lambda \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{egn}\omega \phi(\omega) d\omega + \\ &+ (-j) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{egn}\omega \theta_V(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Stąd (por. (3.6)):

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{egn}\omega \theta_V(\omega) d\omega \quad (3.54)$$

Naszy (por. (3.51)):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{V}(\omega) d\omega &= \left(\frac{P}{U^2}\right)^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\phi}(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{V}_V(\omega) d\omega + \\ &+ 2\lambda \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\theta}_V(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Stąd:

$$I^2 = \frac{P^2}{U^2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{V}_V(\omega) d\omega \quad (3.55)$$

Leż:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{V}_V(\omega) d\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T i_V^2(t) dt = I_V^2 \quad (3.56)$$

Czyli:

$$I^2 = \frac{P^2}{U^2} + I_V^2 \quad (3.57)$$

$$P_a^2 = P^2 + (U I_V)^2.$$

Podstawiając (3.57) z (3.46), otrzymamy:

$$D = U I_{\Psi} \quad (3.58)$$

gdzie  $I_{\Psi}$  jest wartością skuteczną przebiegu  $i_{\Psi}(t)$ .

Bezpośrednio relację (3.58) możemy uzyskać wstawiając (3.48) i (3.49) do (3.45). Istotnie, wykonując zaznaczone działania, otrzymamy:

$$D = U \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T i_{\Psi}^2(t) dt} \quad (3.59)$$

### 3.5. Poprawa współczynnika mocy

Współczynnikiem mocy nazwiemy stosunek (por. rys. 9):

$$\frac{P}{S} = \cos \varphi \quad (3.60)$$



Rys. 9

Jak widać współczynnik ten określa sprawność wykorzystania mocy dostarczonej do układu i jest równy jedności wtedy i tylko wtedy, gdy moc dystorsji  $D = 0$ .

Interesuje nas poprawa współczynnika mocy, tzn. minimalizacja mocy dystorsji układu. Jest oczywiste, że minimalizację taką można w różny sposób przeprowadzić.

Jednak z punktu widzenia wykorzystania w praktyce można przyjąć, że wartość skuteczną  $U$  napięcia wzbudzenia jest dana i różna od zera. Przyjęcie takiej redukuje problem minimalizacji mocy  $D$  do minimalizacji wartości skutecznej  $I_{\Psi}$  przebiegu  $i_{\Psi}(t)$  (por. (3.59)). Z definicji wartości skutecznej wynika, że będzie ona równa zero wtedy i tylko wtedy, gdy przebieg  $i_{\Psi}(t)$  będzie przebiegiem o skończonej energii. Tak więc warunkiem koniecznym i równocześnie wystarczającym, aby moc dystorsji  $D$  układu była równa zero jest spełnienie nierówności:

$$\int_{-\infty}^{\infty} i_{\Psi}^2(t) dt < \infty \quad (3.61)$$

Założmy, że spełnienie warunku (3.61) spodziewamy się uzyskać przez wprowadzenie między zaciski (a,b) układu L elementu reaktancyjnego, którego funkcję przejścia jest  $b(\omega)$ , (por. rys. 8). Zachodzi (por. (3.47), (3.42)):

$$\dot{\Phi}_1(\omega) = \dot{\Phi}_2(\omega) = \dot{\Phi}(\omega).$$

$$\mathcal{V}_1(\omega) = \mathcal{V}_2(\omega) + B(\omega) [B(\omega) \dot{\Phi}(\omega) - 2\theta_{2u}(\omega)].$$

Stąd (por. (3.51)):

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \dot{\phi}(\omega) + Y_{\Psi_1}(\omega) + 2\lambda \theta_{T-1}(\omega) = \\ & -Y_2(\omega) + B(\omega) [B(\omega)\dot{\phi}(\omega) - 2\theta_{2U}(\omega)], \\ & \frac{P^2}{U^2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y_{\Psi_1}(\omega) d\omega = \\ & -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y_2(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) [B(\omega)\dot{\phi}(\omega) - 2\theta_{2U}(\omega)] d\omega. \end{aligned}$$

Przyjmując:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y_{\Psi_1}(\omega) d\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T i_{\Psi_1}^2(t) dt = 0.$$

(warunek równoważny nierówności (3.61)),  
otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{P^2}{U^2} - \frac{P^2}{U^2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) [2\theta_{2U}(\omega) - B(\omega)\dot{\phi}(\omega)] d\omega \\ I_{\Psi_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) [2\theta_{2U}(\omega) - B(\omega)\dot{\phi}(\omega)] d\omega. \end{aligned} \tag{3.62}$$

W równaniu (3.62) szukaną funkcją jest  $B(\omega)$ .  $I_{\Psi_2}$  oraz pozostałe funkcje są znane.

Łatwo można zauważyć, że gdy  $\theta_{2U}(\omega) \equiv 0$  to równanie (3.62) nie może być spełnione dla żadnej funkcji  $B(\omega)$  a z relacji (3.43) wynika, że gdy  $\theta_{1U}(\omega) \equiv 0$  to prawa strona równania (3.62) jest niezależna od  $I_{\Psi_2}$ . Ogólniej: ponieważ wprowadzenie elementu  $B(\omega)$  nie wpływa na przebieg prądu  $i_2(t)$  proponowane rozwiązanie ma tylko ograniczony wpływ na poprawę współczynnika mocy. Na ogół (w zależności od funkcji przebiegów) bardziej złożona struktura czwórnik "C" (por. rys. 2) będzie konieczna do uzyskania efektywnej poprawy współczynnika mocy.

W literaturze problem poprawy współczynnika mocy sprowadza się często do zagadnienia kompensacji mocy biernej układu. Takie ustawienie problemu nie jest ogólnie biorąc prawidłowe, pozwala jednak dla niektórych klas przebiegów uzyskać pewne informacje mogące być użyteczne. W rozważanym przypadku, na podstawie (3.37), otrzymamy:



$$(-j) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_1(\omega) \operatorname{sgn} \omega d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) B(\omega) \operatorname{sgn} \omega d\omega + (-j) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_2(\omega) \operatorname{sgn} \omega d\omega.$$

Stąd:

$$Q_1 - Q_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} \omega B(\omega) \phi(\omega) d\omega. \quad (3.63)$$

Przyjmując:

$$Q_1 = 0 \quad (\text{kompensacja zupełna}).$$

otrzymamy:

$$Q_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} \omega B(\omega) \phi(\omega) d\omega. \quad (3.64)$$

Równanie (3.64) da się uprościć. Jeżeli napięcie zasilania  $u(t)$  nie zawiera składowej stałej to przyjmuje ono postać:

$$Q_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \phi(\omega) d\omega. \quad (3.65)$$

W przypadku, gdy  $u(t)$  zawiera składową stałą  $U_0$  to transformację jego funkcji autokorelacji możemy przedstawić w postaci:

$$\phi(\omega) = U_0^2 \cdot 2\pi \delta(\omega) + \phi_0(\omega). \quad (3.66)$$

Wstawiając (3.66) do (3.64), otrzymamy:

$$Q_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\omega) \phi_0(\omega) d\omega. \quad (3.67)$$

W równaniu (3.65) lub (3.67) szukaną funkcję jest  $B(\omega)$ . Pozostałe wielkości są znane.

### 3.6. Przebiegi zespolone (por. [6], [7])

Bardzo często w praktycznych obliczeniach mocy mamy do czynienia z przebiegami, dla których wygodniej zamiast operować przebiegami rzeczywistymi rozważyć zależności zachodzące między przebiegami zespolonymi stowarzyszonymi z przebiegami rzeczywistymi. Dotyczy to przede wszystkim przebiegów okresowych, prawie okresowych oraz przebiegów posiadających obwiednie o znanym kształcie.

DEFINICJA: Niech  $f(t)$  będzie przebiegiem rzeczywistym o skończonej mocy a  $H\{f(t)\}$  jego transformatę Hilberta.  
Przebieg zespolony:

$$F(t) = f(t) - j H\{f(t)\} \quad (3.68)$$

nazywany przebiegiem stowarzyszonym z przebiegiem rzeczywistym  $f(t)$ .  
Dla przebiegu tego, zachodzi:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |F(t)|^2 dt &= \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^2(t) dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [H\{f(t)\}]^2 dt \right\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^2(t) dt. \end{aligned}$$

Czyli, dla wartości skutecznej  $F$  przebiegu rzeczywistego  $f(t)$ , otrzymamy:

$$F = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |F(t)|^2 dt} \quad (3.69)$$

Uwaga. Jeżeli  $f(t)$  zawiera składową stałą  $F_0$ , to w zależności (3.69) zamiast  $F_0^2$  wystąpi  $\frac{1}{2} F_0^2$ . Należy to uwzględnić w obliczeniach.

Przykładowo, niech:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{n=N} C_{n1} \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (3.70)$$

Stąd korzystając, że zachodzi  $H\{e^{j\omega_0 t}\} = j e^{j\omega_0 t}$ ,  $\omega > 0$  mamy:

$$H\{f(t)\} = - \sum_{n=1}^{n=N} C_{nn} \sin(\omega_n t + \varphi_n). \quad (3.71)$$

$$F(t) = \sum_{n=1}^{n=N} C_{nn} e^{j\varphi_n} e^{j\omega_n t}. \quad (3.72)$$

$$|F(t)|^2 = \sum_{n,r=1}^N C_{nn} C_{rr} e^{j(\varphi_n - \varphi_r)} e^{j(\omega_n - \omega_r)t}. \quad (3.73)$$

Gdy  $r \neq n$ , otrzymamy:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{j(\omega_n - \omega_r)t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin(\omega_n - \omega_r)T}{2T(\omega_n - \omega_r)} = 0.$$

Z drugiej strony, gdy  $r = n$ :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt = \frac{1}{2}.$$

Ostatecznie więc:

$$F^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=N} C_{nn}^2 = \sum_{n=1}^{n=N} \left(\frac{C_{nn}}{\sqrt{2}}\right)^2. \quad (3.74)$$

Położmy:

$$u(t) = u(t) - j H\{u(t)\}; \quad i(t) = i(t) - j H\{i(t)\} \quad (3.75)$$

Na podstawie (3.03), (3.04) oraz korzystając z zależności

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) H\{g(t)\} dt = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(t) H\{f(t)\} dt.$$

otrzymamy:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) i^*(t) dt = P + jQ. \quad (3.76)$$



$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T u(t) i^*(t) dt \right| = S. \quad (3.77)$$

Przyjmijmy, że przebiegi  $u(t)$  i  $i(t)$  posiadają postać (3.70) to znaczy, niech:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{n=N} U_{nn} \cos(\omega_n t + \beta_n); \quad i(t) = \sum_{n=1}^{n=N} I_{nn} \cos(\omega_n t + \alpha_n).$$

Otrzymany:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{n=N} U_{nn} e^{j\beta_n} \cdot e^{j\omega_n t}; \quad i(t) = \sum_{n=1}^{n=N} I_{nn} e^{j\alpha_n} \cdot e^{j\omega_n t}.$$

$$u(t) i^*(t) = \sum_{n,r=1}^N U_{nn} I_{rr} e^{j(\beta_n - \alpha_r)} \cdot e^{j(\omega_n - \omega_r)t}.$$

$$P + jQ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) i^*(t) dt = \sum_{n=1}^{n=N} |U_n| |I_n| e^{j\varphi_n}.$$

gdzie:

$$|U_n| = \frac{U_{nn}}{\sqrt{2}}; \quad |I_n| = \frac{I_{nn}}{\sqrt{2}}; \quad \varphi_n = \beta_n - \alpha_n.$$

Tożsamość (3.44) można także zastosować do przebiegów zespolonych (3.68). Otrzymany:

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T |u(t)|^2 dt - \int_{-T}^T |i(t)|^2 dt - \left| \int_{-T}^T u(t) i^*(t) dt \right|^2 + \\ + \int_{-T}^T \int_{-T}^T \frac{1}{2} |u(\tau) i(\tau) - u(\tau) i^*(\tau)|^2 dt d\tau. \end{aligned} \quad (3.79)$$

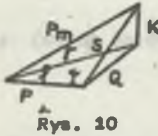
Z (3.79) wynika, że określona jest wielkość  $K$  zdefiniowana za pomocą relacji:

$$K = \sqrt{\lim_{T, T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2T} \right)^2 \int_{-T}^T \int_{-T}^T \frac{1}{2} |u(\tau) i(\tau) - u(\tau) i^*(\tau)|^2 dt d\tau} \quad (3.80)$$

$K$  nazywamy mocą deformacji.

Na podstawie (3.79) zachodzi:

$$P_m^2 = P^2 + Q^2 + K^2. \quad (3.81)$$



Rys. 10

Geometryczna interpretacja zależności (3.81) podana jest na rys. 10.

Położymy:

$$\cos \varphi = \frac{P}{P_m}; \quad \cos \psi = \frac{P}{S}; \quad \cos \gamma = \frac{S}{P_m}. \quad (3.82)$$

Otrzymamy:

$$\cos \varphi = \cos \psi \cos \gamma. \quad (3.83)$$

Jak wiemy współczynnik  $\cos \varphi$  nazywamy współczynnikiem mocy. Współczynnik  $\cos \psi$  nazwiemy współczynnikiem obciążenia a  $\cos \gamma$  współczynnikiem deformacji.

Wszystkie wprowadzone współczynniki posiadają określone znaczenie przy czym współczynnik obciążenia jest w istotny sposób zależny od mocy biernej  $Q$ , a współczynnik deformacji od mocy deformacji  $K$ . Relacja (3.83) wskazuje na zależność współczynnika mocy tak od poboru mocy biernej przez układ jak i od wielkości mocy deformacji  $K$ . W szczególnym przypadku, gdy  $K = 0$ ,  $\cos \gamma = 1$  i otrzymamy:  $\cos \varphi = \cos \psi$ .

#### LITERATURA

- [1] Titchmarsh E.C.: Theory of Fourier Integrals. Oxford at the Clarendon Press second Edition 1948.
- [2] Wiener N.: The Fourier Integral and Certain of Its Applications. Cambridge University Press, N. York, 1933.
- [3] Papoulis A.: The Fourier Integral and Its Applications. McGraw-Hill Book Comp. INC. 1962.
- [4] Nowomiejski Z.: Uogólniona teoria mocy. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Elektryka z. 46, 1975.
- [5] Fryze S.: Moc rzeczywista, urojona i pozorna w obwodach elektrycznych o przebiegach odkształconych prądu i napięcia. P.E. 1931, Nr 7 i 8.
- [6] Gabor D.: Theory of Communications. Inst. Electr. Engra. 93, 1946, 429.
- [7] Nowomiejski Z.: Analyse elektrischer Kreise mit periodischen nicht sinusoidalformigen Vorgangen. Wissenschaftliche Zeitschrift der Elektrotechnik, 8, s. 244-254. 1967.
- [8] Denidowicz B.P.: Matematyczna teoria stabilności, WNT 1972.
- [9] Mikusiński J., Sikoreki R.: Elementarna teoria dystrybucji. PWN, Warszawa 1964.

Przyjęto do druku w czerwcu 1976 r.

Recenzent: prof. dr inż. Tadeusz Puchałka - Politechnika Poznańska

Dr hab. inż. Leszek S. CZARNECKI

Instytut Podstawowych Problemów  
Elektrotechniki i Energoelektroniki

WKŁAD PROF. DR INŻ. STANISŁAWA FRYZEGO W BADANIA  
NAD TEORIĄ MOCY OBWODÓW O PRZEBIEGACH ODKSZTAŁCONYCH

Geneza powstania artykułu wymaga wyjaśnienia. W związku ze zbliżającą się 100 rocznicą urodzin prof. Fryzego, jak również moją wieloletnią pracą naukową dotyczącą teorii mocy obwodów o przebiegach odkształconych zaproponowano mi napisanie artykułu na temat wkładu prof. Fryzego w badania nad sformułowaniem teorii mocy obwodów o przebiegach odkształconych.

Propozycji tej nie mogłem przyjąć bez obawy, że nie znając atmosfery i realiów elektrotechniki lat trzydziestych, lat w których prof. St. Fryze tworzył swoją wizję teorii mocy, nie będę umiał przedstawić Jego wyników w proporcjach właściwych elektrotechnice tamtych lat. Dlatego artykuł ten będzie tylko zbiorem subiektywnych refleksji nad meandrami rozwoju teorii mocy obwodów o przebiegach odkształconych i piętnem wyciśniętym na nim myślami prof. Fryzego.

Jedną z cech odróżniających elektrotechnikę przemysłową lat dwudziestych i trzydziestych od jej obecnego stanu był niewątpliwie sinusoidalny charakter przebiegów prądu i napięcia. Nie było bowiem innych, przemysłowych źródeł zniekształceń, poza zniekształceniami pasożytniczymi, towarzyszącymi generacji i transformacji energii elektrycznej, jak tylko łuk/elektryczny, czy to w lampach łukowych, czy też w prostownikach rtęciowych. Dlatego też wydaje się, że podjęcie przez szereg czołowych elektryków, a wśród nich i przez prof. Fryzego, problemu opisu właściwości energetycznych obwodu wtedy, gdy przebiegi w nim nie mogą być uznane za sinusoidalne, wynikało raczej z własnych potrzeb samej nauki niż z potrzeb praktycznych. Rok 1927 zamyka wczesny okres tych prób obszerną pracą prof. C. I. Budeanu [1]. Właściwości energetyczne obwodów z przebiegami sinusoidalnymi były już wtedy dobrze rozpoznane. Wiedzano od dawna, że fizyczne wymiary generatorów, transformatorów i urządzeń rozdzielczych o napięciu i prądzie

$$u \stackrel{\Delta}{=} \sqrt{2} U \cos(\omega t + \alpha), \quad i \stackrel{\Delta}{=} \sqrt{2} I \cos(\omega t + \alpha - \varphi) \quad (1)$$



nie mogą być odnoszone do wytwarzanej czy przenoszonej mocy czynnej

$$P \triangleq \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = UI \cos \varphi, \quad (2)$$

lecz są związane z wartością skuteczną prądu i napięcia,  $I$ ,  $U$  oraz przyjęto, że ich wielkość wyrażać się będzie poprzez iloczyn

$$U I \triangleq S,$$

nazwany mocą pozorną i który jest zwykle większy od mocy czynnej, lecz nigdy nie mniejszy od niej.

Wszystkie ekonomicznie niepożądane skutki nierówności  $P < S$ , takie jak nadmierne koszty inwestycyjne, nadmierne prądy, zwiększające spadki napięć i straty energii, a także moc urządzeń redukujących moc pozorną źródeł do poziomu ich mocy czynnej można było w obwodach z przebiegami sinusoidalnymi wyrażać za pomocą dodatkowej wielkości fizycznej

$$Q \triangleq U I \sin \varphi \quad (3)$$

nazwanej mocą bierną i spełniającej relację

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad (4)$$

Prof. C. I. Budeanu oparł swoją koncepcję teorii mocy obwodów z przebiegami odkształconymi na częstotliwościowej reprezentacji przebiegów okresowych, dla której pierwszą przesłanką była okoliczność, że wtedy, gdy napięcie i prąd źródła mogą być wyrażone jako szeregi Fouriera

$$u \triangleq \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \underline{U}_n \exp \{jn\omega_1 t\}; \quad i \triangleq \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \underline{I}_n \exp \{jn\omega_1 t\}, \quad (5)$$

to moc czynna źródła

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} P_n; \quad \varphi_n \triangleq \operatorname{Arg} \underline{U}_n - \operatorname{Arg} \underline{I}_n \quad (6)$$

jest równa sumie mocy czynnych  $P_n$  wszystkich harmonicznnych.

Podstawą koncepcji prof. Budeanu było przyjęcie, że również moc bierna  $Q_B$  źródła jest równa sumie mocy biernych  $Q_n$  wszystkich harmonicznnych, tj.

$$Q_B = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \sin \varphi_n \quad (7)$$

Jeśli jednak moc pozorną źródła zdefiniowana jest tak jak poprzednio, tzn. jako iloczyn wartości skutecznych prądu i napięcia

$$\|u\| \triangleq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} U_n^2}, \quad \|i\| \triangleq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} I_n^2}, \quad (8)$$

$$S \triangleq \|u\| \|i\|, \quad (9)$$

to dla tak zdefiniowanej mocy biernej nie jest spełnione równanie (4),  
gdyż

$$P^2 + Q_B^2 \ll S, \quad (10)$$

co zmusiło prof. C.I. Budeanu do wprowadzenia do swej teorii dodatkowej wielkości

$$T_B \triangleq \sqrt{S^2 - (P^2 + Q_B^2)} \quad (11)$$

nazwanej mocą deformacji.

Prof. St. Fryze przedstawia wyniki swoich badań trzy lata później (19 listopada 1930 r.) na odczycie dla członków Towarzystwa Politechnicznego i Lwowskiego Koła Elektryków publikując je następnie w Przeglądzie Elektrotechnicznym [2] oraz w Elektrotechnische Zeitschrift [3].

Myślą przewodnią Jego koncepcji jest dążenie do takiego uogólnienia opisu właściwości energetycznych obwodu z przebiegami sinusoidalnymi na obwody z przebiegami odkształconymi, aby zachować funkcjonalność tego opisu. Jedną z tych zasadniczych właściwości jest możliwość rozkładu prądu sinusoidalnego na składową czynną  $i_a$  oraz na ortogonalną do niej składową bierną  $i_b$ , tj.

$$i = i_a + i_b, \quad (12)$$

pozwalające wyrazić moc czynną i moc bierną źródła bezpośrednio poprzez ich wartości skuteczne,  $I_a$ ,  $I_b$ . Mianowicie

$$P = U I_a; \quad Q = \pm U I_b, \quad (13)$$

przy czym sposób wyboru znaku mocy biernej jest ustalony konwencją Międzynarodowej Komisji Elektrotechnicznej (IEC).

Prof. Fryze dowodzi, że rozkład o takich właściwościach jest możliwy także dla prądów odkształconych; co więcej, nie wymaga on użycia szeregów Fouriera. Mianowicie, jeśli zdefiniuje się składową czynną prądu jako

$$i_a \triangleq \frac{P}{\|u\|^2} u, \quad (14)$$

to reszta

$$i_b \triangleq i - i_a \quad (15)$$

jest ortogonalna do składowej czynnej, tj. ich iloczyn skalarny

$$(i_a, i_b) \triangleq \frac{1}{T} \int_0^T i_a i_b dt = 0, \quad (16)$$

a więc ich wartości skuteczne  $\|i_a\|$ ,  $\|i_b\|$  spełniają relację

$$\|i\|^2 = \|i_a\|^2 + \|i_b\|^2. \quad (17)$$

Knożąc zatem ostatecznie równanie przez kwadrat wartości skutecznej napięcia  $\|u\|$ , otrzymuje się równanie mocy

$$S^2 = P^2 + Q_B^2, \quad (18)$$

gdzie

$$P = \|u\| \|i_a\|, \quad Q_B = \|u\| \|i_b\| \quad (19)$$

Większa funkcjonalność idei Fryzego w porównaniu z Budeanu tkwi w tym, że wyodrębnia ona składową użyteczną i bezużyteczną ze znacznie bardziej pierwotnej wielkości obwodu, jaką jest prąd źródła, niż jak w przypadku teorii Budeanu z jego mocy pozornej, która jest tylko pewną umowną cechą źródła. W sytuacji gdy wartości skuteczne napięć źródeł i innych urządzeń energetycznych są podyktowane określonymi względami technicznymi i w zasadzie stałe, wszystkie zagadnienia odnoszące się do mocy biernej wynikają w istocie z istnienia bezużytecznej składowej prądu i mogą być analizowane czy rozwiązywane z korzyścią dla przejrzystości już na "poziomie" prądów. Teoria prof. Fryzego wyraża w bardzo matematycznie jasny sposób jakościową ideę istnienia w prądzie składowej użytecznej i bezużytecznej oraz czyni to w sposób elegancki w tym sensie, że nie wymaga użycia dodatkowego aparatu matematycznego, jakim są szeregi Fouriera.

Na tle koncepcji Fryzego logiczna konstrukcja teorii prof. Budeanu nie jest już tak elegancka, gdyż wprowadza moc bierną  $Q_B$  w sposób arbitralny tak, aby wyrażała się wzorem podobnym do wzoru określającego moc czynną, zaś moc deformacji  $T_B$  jest jedynie czymś, co wypełnia powstałą w ten sposób lukę między kwadratem mocy pozornej a sumą kwadratów mocy czynnej i biernej  $Q_B$ .

Prof. Fryze oponował [4] przeciwko takiemu formułowaniu teorii mocy, w szczególności przeciwko opieraniu definicji mocy na szeregach Fouriera, wskazując między innymi na brak ich zbieżności do funkcji aproksymowanej w otoczeniu punktów nieciągłości, ujawniający się w efekcie Gibbssa.

O tym, która z tych koncepcji miała zdobyć prawo obywatelstwa w elektrotechnice, a która miała pójść w zapomnienie, zadecydowała, jak się wydaje, zasada bilansu energetycznego, spełniana jedynie przez moc bierną wg definicji Budeanu, w czym dopatrywano się potwierdzenia jakiejś "fizycznej realności" tej mocy. Spowodowało to, że pomimo wszystkich zalet koncepcji Fryzego bardziej rozprzestrzeniła się w elektrotechnice, także i w polskiej, teoria prof. Budeanu, stając się niemal klasyczną, podawaną w podręcznikach akademickich interpretacją zjawisk energetycznych w obwodach o przebiegach odkształconych. Do pełnego sukcesu idei Budeanu brakowało już tylko rozwiązania zagadnienia minimalizacji mocy pozornej oraz znalezienie metod pomiaru mocy biernej i mocy deformacji.

Usilne próby rozwiązania zagadnień pomiarowych prowadzone były przez szereg lat m.in. przez prof. S. I. Antoniu [5, 6], prof. H. Facka [7], prof. J. Sawickiego [8, 9] i autora [10-12], natomiast badania nad mini-



malizacją mocy pozornej w oparciu o aparat pojęciowy teorii Budeanu prowadzone były m. in. przez prof. Z. Nowomiejskiego [13 - 18] i prof. A. E. Emanuela [19, 20]. Idea prof. Fryzego żyła w tym czasie w pewnym stopniu tylko w próbach zdefiniowania wielkości występujących w teorii Budeanu bez użycia szeregów Fouriera, tj. w dziedzinie czasowej, prowadzonych przez Z. Nowomiejskiego [13-18] H. Facka [7] i H. D. Fischera [21]. Przyjęcie koncepcji Budeanu wystawiło jednak elektrotechnikę na ciężką próbę. Trzeba było niemal 50 lat, aby rozwiązać zagadnienia pomiarowe [22, 8-12, 23], zaś próby minimalizacji mocy pozornej w oparciu o tę teorię okazały się daremne i to w zupełnie nowej sytuacji, gdy wskutek wzrostu mocy pieców łukowych oraz pojawienia się i rozwoju urządzeń tyrystorowych zagadnienie poprawnego opisu i optymalizacji właściwości energetycznych obwodów z przebiegami odkształconymi przestało być zagadnieniem czysto teoretycznym, stając się konkretnym problemem technicznym.

Powód bezużyteczności koncepcji Budeanu dla minimalizacji mocy pozornej jest prosty, niestety, nie został on w porę dostrzeżony. Mianowicie, przy określonej wartości skutecznej napięcia urządzeń wymaga ona minimalizacji wartości skutecznej ich prądu równej

$$\| i \| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{P_n}{U_n} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{Q_n}{U_n} \right)^2} . \quad (20)$$

Lecz przy określonych mocach czynnych  $P_n$  harmonicznych, wartość ta jest minimalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $n \in \mathcal{N}$ ,  $Q_n = 0$ , nie zaś wtedy, gdy suma tych mocy, tj. moc bierna Budeanu jest równa zeru. Tak więc zerowa wartość mocy biernej Budeanu jest tylko warunkiem koniecznym, nie zaś wystarczającym do tego, aby wartość skuteczna prądu źródła, a więc jego moc pozorna miała minimalną wartość.

Nie ma także bezpośredniego związku między wartością skuteczną prądu źródła a mocą deformacji  $T_B$ . Może być ona wyrażona w postaci

$$T_B = \sqrt{\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} A_{rs}} , \quad (21)$$

gdzie

$$A_{rs} = \frac{1}{2} (U_r I_s - U_s I_r)^2 + 2U_r U_s I_r I_s [1 - \cos(\varphi_r - \varphi_s)] \geq 0 . \quad (22)$$

Ponieważ wielkości  $A_{rs}$  nie są ujemne, moc deformacji może być równa zeru wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $r, s \in \mathcal{N}$ ,  $A_{rs} = 0$ .

Jeśli  $\mathcal{M}$  jest zbiorem numerów harmonicznych napięcia, zaś  $Y_n$  oznacza admittancję odbiornika dla  $n$ -tej harmonicznej, to moc deformacji  $T_B = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $r, s \in \mathcal{M}$

$$Y_r = Y_s . \quad (23)$$

Warunek (23) spełniają na przykład obciążniki rezystancyjne, dla których współczynnik mocy  $\lambda \triangleq P/S = 1$ , lecz także dwójniki ortonormalne [24], dla których  $\lambda = 0$ .

Oznacza to, że z wartości samej tylko mocy deformacji nie można wyciągać wniosków co do wartości współczynnika mocy.

Tak więc, kompensacja osobno mocy biernej  $Q_B$  lub mocy deformacji  $T_B$ , zaniedbująca pozostałą z nich, do poprawy współczynnika mocy ogólnie nie prowadzi. Niestety, sposób redukcji obu mocy, zapewniający minimalizację mocy pozornej źródła, nie został w oparciu o teorię Budeanu do chwili obecnej znaleziony.

Idea prof. Fryzego, jakkolwiek pozwala łatwo wyodrębnić zarówno analitycznie, jak i pomiarowo [25], bezużyteczną składową bierną prądu, nie ujawnia jednak zupełnie ani przyczyn jej istnienia, ani zależności jej wartości skutecznej od właściwości obwodu, a tym samym nie dostarcza żadnych informacji odnośnie do możliwości i sposobu jej redukcji. Być może, dałoby się tę składową zredukować prądem źródła sterowanego, wprowadzającego do obwodu ujemny prąd bierny,  $-i_b$ , nie troszcząc się o przyczyny istnienia w obwodzie tego prądu. Takie podejście jednak nie wydaje się racjonalne, gdyż pozostawia bez odpowiedzi ważne pytanie: czy nie można tej składowej kompensować prostszymi środkami, lecz przede wszystkim, dlaczego jest różna od zera.

Świadomość braku teorii wyjaśniającej właściwości energetyczne obwodów o przebiegach odkształconych oraz umożliwiającej poprawę tych właściwości zaczyna narastać w elektrotechnice z początkiem lat siedemdziesiątych, wraz z pojawieniem się i szybkim rozwojem urządzeń tyrystorowych. Ponieważ przebiegi w obwodach z takimi urządzeniami zbyt mocno odbiegają kształtem od przebiegów sinusoidalnych, aby można było jeszcze do ich opisu stosować teorię mocy obwodów z przebiegami sinusoidalnymi, poszukiwania za teorią mocy takich obwodów zaczęły być coraz bardziej gorączkowe.

W 1971 r. E. W. Kimbark [26] proponuje przyjąć moc bierną podstawowej harmonicznej

$$Q_k \triangleq Q_1 = U_1 I_1 \sin \varphi_1 \quad (24)$$

jako moc bierną źródła o napięciu odkształconym, zaś resztę

$$T_k = \sqrt{S^2 - P^2 - Q_k^2} \quad (25)$$

uznać za moc deformacji. Lecz jest to oczywiście tylko umowa nie teoria mocy. W 1972 r. W. Shepherd i P. Zakikhani [27] proponują rozkład prądu odkształconego na składowe

$$i_R \triangleq \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos \varphi_n \cos (n\omega_1 t + \alpha_n), \quad (26)$$

$$i_r \triangleq \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} I_n \sin \psi_n \sin(n \omega_1 t + \alpha_n). \quad (27)$$

( $c_n = \text{Arg}\{U_n\}$ ), wzajemnie ortogonalne, gdyż  $(i_R, i_r) = 0$ , a więc składowe, których wartości skuteczne spełniają relację

$$\|i\|^2 = \|i_R\|^2 + \|i_r\|^2 \quad (28)$$

prowadzącą do równania mocy

$$S^2 = S_R^2 + Q_r^2, \quad (29)$$

gdzie  $S_R \triangleq \|u\| \|i_R\|$ ,  $Q_r = \|u\| \|i_r\|$ . (30)

Uważają oni, że wielkość  $Q_r$  powinna być uznana za moc bierną w obwodach o przebiegach odkształconych, jednak brak w równaniu mocy [29] mocy czynnej  $P$  pozbawiał tę koncepcję atrakcyjności.

Obserwuje się w tym okresie także powrót do pewnych elementów idei prof. Fryzego, przy czym jej ponowne odkrywanie odbywa się poprzez Niemcy, gdzie jest najbardziej znana dzięki oryginalnej publikacji w ETZ [3] oraz cytowaniu jego definicji w normie DIN 40110/Oct., 1975 pt. "Wechselstromgrößen".

Elementy koncepcji prof. Fryzego widoczne są wyraźnie w teorii M. Depenbrocka [28], opublikowanej w 1979 r w której wyodrębnia on z napięcia harmoniczną podstawową.

$$u_g \triangleq u_1 = U_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \quad (31)$$

i resztę

$$u_k \triangleq u - u_g, \quad (32)$$

a następnie rozkłada prąd źródła na sześć składowych, definiowanych względem napięć  $u_g$  i  $u_k$  w sposób podobny do definicji prof. Fryzego.

Mianowicie

$$i = i_{ga} + i_{ka} + i_Q + i_{gV} + i_{kV} + i_N, \quad (33)$$

gdzie

$$i_{ga} \triangleq \frac{(u, i)}{\|u\|^2} u_g, \quad i_{ka} \triangleq \frac{(u, i)}{\|u\|^2} u_k, \quad (34)$$

$$i_Q \triangleq \frac{(i, u_g(t - T/4))}{\|u_g\|^2} u_g(t - \frac{T}{4}), \quad (35)$$

$$i_{gV} \triangleq \Delta G_g u_g, \quad i_{kV} \triangleq \Delta G_k u_k, \quad (36)$$



przy czym

$$\Delta G_g \triangleq \frac{(u_g, i)}{\|u_g\|^2} - \frac{(u, i)}{\|u\|^2}; \quad \Delta G_k \triangleq \frac{(u_k, i)}{\|u_k\|^2} - \frac{(u, i)}{\|u\|^2} \quad (37)$$

oraz

$$i_N \triangleq i - (i_{ga} + i_{kp} + i_Q + i_{gV} + i_{kV}). \quad (38)$$

Rozkład powyższy prowadzi do równania mocy

$$S^2 = P^2 + Q_D^2 + V^2 + N^2, \quad (39)$$

gdzie

$$P \triangleq (u_g, i) + (u_k, i); \quad Q_D \triangleq \|u\| \|i_Q\|, \quad (40)$$

$$V \triangleq \|u\| \sqrt{\|i_{gV}\|^2 + \|i_{kV}\|^2}; \quad N \triangleq \|u\| \|i_N\|. \quad (41)$$

Niestety, wykorzystując pewne idee prof. Fryzego, Depenbrock nie sięgnął do być może najważniejszej z nich, mianowicie do uzasadnienia motywów konkretnego rozkładu. Obszerna praca Depenbrocka pokazuje jedynie, że można prąd źródła i jego moc pozorną w proponowany sposób rozłożyć, nie wyjaśnia natomiast dlaczego należy to czynić w ten właśnie sposób. Rozkład ten został tu zresztą przedstawiony w znacznie uproszczonej postaci. Analizując tę teorię trudno się oprzeć analogii z traktowaniem zabawek przez dzieci w pewnym wieku, gdy nie umiejąc jeszcze tworzyć, starają się rozłożyć je na możliwie dużą liczbę części, niekiedy połamać. Należy tylko liczyć na to, że w przypadku Depenbrocka mamy do czynienia z pierwszą, bardziej optymistyczną sytuacją. W jeszcze czystszej postaci odnajdujemy ideę prof. Fryzego w teorii mocy opracowanej w 1980 r. przez N. L. Kustersa i W. J. M. Moore'a [29]. Ma ona dwa warianty. W przypadku odbiorników rezystancyjno - indukcyjnych prąd źródła może być rozłożony na trzy składowe, mianowicie

$$i = i_a + i_{qC} + i_{qCr}, \quad (42)$$

przy czym składowa  $i_a$  jest składową czynną wg definicji prof. Fryzego, natomiast

$$i_{qC} \triangleq \frac{(\dot{u}, i)}{\|\dot{u}\|^2} \dot{u}, \quad (43)$$

gdzie  $\dot{u} \triangleq du/dt$ , zaś

$$i_{qCr} \triangleq i - (i_a + i_{qC}). \quad (44)$$

Składowe te są wzajemnie ortogonalne,

zatem

$$\|i\|^2 = \|i_a\|^2 + \|i_{qC}\|^2 + \|i_{qCr}\|^2. \quad (45)$$

Równanie mocy wg Kustersa i Moore'a ma postać:

$$S^2 = P^2 + Q_C^2 + Q_{Cr}^2, \quad (46)$$

gdzie

$$Q_C \triangleq \|u\| \|i_{qC}\| \operatorname{sgn}\{(\dot{u}, i)\}, \quad (47)$$

$$Q_{Cr} \triangleq \|u\| \|i_{qCr}\|. \quad (48)$$

Jak widać, poszczególne wielkości zostały zdefiniowane w dziedzinie czasowej, a ponadto miała ona, wg autorów, rozwiązywać zagadnienie minimalizacji mocy pozornej źródła i być łatwa do instrumentalizacji. Można więc było sądzić, że ten już nieco wstydlivy problem elektrotechniki został wreszcie rozwiązany, w związku z czym IEC zaleciła [30] stosowanie teorii Kustersa i Moore'a, zaś prof. G. Podor i G. Tevan sformułowali ją [31] w nieco bardziej matematycznie eleganckiej postaci. Okazało się jednak niebawem [32], że wnioski wyciągnięte z tej teorii odnośnie do minimalizacji mocy pozornej źródła są poprawne tylko wtedy, gdy źródło jest idealne, ponadto [33] nawet w takim przypadku teoria ta pozwala rozwiązać problem jedynie pojemnościowej, niekiedy bardzo mało skutecznej minimalizacji mocy pozornej.

Autor niniejszego artykułu w swojej próbie opisu właściwości energetycznych obwodów o przebiegach odkształconych poszedł w przeciwnym kierunku w stosunku do tych jego poprzedników, którzy z koncepcji prof. Budeanu brali sposób definiowania mocy biernej, zaś z koncepcji prof. Fryzego ideę formułowania teorii mocy w dziedzinie czasowej.

Odrzucając obie te idee, autor przejął z koncepcji prof. Budeanu ideę podejścia częstotliwościowego, zaś z koncepcji prof. Fryzego ideę wyodrębnienia prądu czynnego, rozkład ortogonalny oraz nacisk na motywację określonego rozkładu i jego funkcjonalność.

Powodem rezygnacji z usiłowań formułowania teorii mocy w dziedzinie czasowej był pogląd autora, że właściwości energetyczne obwodu nie mogą być niezależne od jego właściwości częstotliwościowych, a więc widmo częstotliwościowe przebiegu jest dla opisu właściwości energetycznych nieodzowne. Ponadto, aby mógł być wykorzystany w celu modyfikacji tych właściwości znany obecnie aparat matematyczny syntezy obwodów, sformułowany niemal wyłącznie w dziedzinie częstotliwości, właściwości energetyczne obwodu muszą być wyrażone poprzez jego właściwości częstotliwościowe. Gdy prof. Fryze opracowywał swoją koncepcję teorii mocy, fakty te nie były jeszcze znane. Elektrotechnika była w zasadzie elektrotechniką obwodów o jednej, stałej częstotliwości; pojawiały się dopiero pierwsze twierdzenia dotyczące syntezy obwodów.

Nie można też nawet porównywać dostępności widm przebiegów. Szybkie przetworniki analogowo - cyfrowe współpracujące z systemem mikroprocesorowym realizującym algorytm FFT umożliwiającą wyznaczenie widma modułowego i fazowego z opóźnieniem rzędu jednego okresu zmienności przebiegu; w czasach prof. Fryzego były one praktycznie poza zasięgiem możliwości metrologicznych.

Trzecim źródłem do którego sięgnął autor była koncepcja Shepherd'a i Zakikhani'ego bardzo obca koncepcji Budeanu i Fryzego. W 1974 r. prof. Emanuel zauważył [34], że zdefiniowana przez nich moc bierna  $Q_T$  jest całkowicie kompensowalna dwójnikiem reaktacyjnym. Początkowo nie przywiązywano do tego większego znaczenia ze względu na dużą złożoność dwójnika kompensującego. Mianowicie, wtedy gdy napięcie źródła ma  $M$  harmonicznych, to dwójnik kompensujący moc bierną  $Q_T$  musi wg Emanuela mieć

$$N = M(2M-1) \quad (49)$$

elementów reaktacyjnych. W pracy [35] autor wykazał jednak, że złożoność ta jest istotnie mniejsza. Mianowicie [36], wymagana liczba elementów reaktacyjnych  $N$  ograniczona jest nierównością.

$$M \ll N \ll 2M-1 \quad (50)$$

i kompensacja taka może już być z technicznego punktu widzenia brana pod uwagę.

Proponowany opis właściwości energetycznych jednofazowych obwodów liniowych ma następującą postać. Jeśli liniowy i stacjonarny odbiornik zasilany ze źródła przemiennego, okresowego napięcia  $u$  ma moc czynną  $P$  oraz admitancję dla częstotliwości harmonicznych

$$\underline{Y}_n \triangleq G_n + jB_n, \quad (51)$$

to jeśli zdefiniuje się konduktancję tego odbiornika jako

$$G_e \triangleq \frac{P}{\|u\|^2}, \quad (52)$$

wówczas prąd źródła można przedstawić jako sumę trzech składowych:

$$i = i_a + i_g + i_r, \quad (53)$$

przy czym składowa  $i_a$  jest składową czynną prądu wg definicji prof. Fryzego

$$i_a = G_e u, \quad (54)$$

natomiast

$$i_g \triangleq \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (G_n - G_e) \underline{u}_n \exp \{jn\omega_1 t\} \right\} \quad (55)$$



$$i_r \triangleq \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} j B_n U_n \exp \{jn\omega_1 t\}. \quad (56)$$

Tak zdefiniowane składowe prądu są wzajemnie ortogonalne, gdyż ich iloczyny skalarne

$$(i_a, i_s) \quad (i_s, i_r) \quad (i_r, i_a)$$

są równe zeru, a więc wartości skuteczne tych składowych spełniają równanie:

$$\|i\|^2 = \|i_a\|^2 + \|i_s\|^2 + \|i_r\|^2, \quad (57)$$

$$\text{gdzie} \quad \|i_a\| = G_e \|u\| \quad ; \quad \|i_s\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (G_n - G_e)^2 U_n^2} \quad ; \quad \|i_r\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} B_n^2 U_n^2} \quad (58)$$

prowadzące do równania mocy

$$S^2 = P^2 + D_s^2 + Q_r^2, \quad (59)$$

gdzie

$$D_s \triangleq \|u\| \|i_s\| \quad , \quad Q_r \triangleq \|u\| \|i_r\|. \quad (60)$$

Ponieważ przedmiotem niniejszego artykułu nie jest omówienie obecnego stanu teorii mocy obwodów o przebiegach odkształconych, lecz przedstawienie wkładu prof. Fryzego w jej rozwój, dlatego propozycja autora nie będzie tu dalej omawiana. Dalsze szczegóły dotyczące tej koncepcji oraz jej konsekwencje dla zagadnienia minimalizacji mocy pozornej źródeł może Czytelnik znaleźć w pracach [36] oraz [37], zaś jej uogólnienie na obwody nieliniowe w pracy [38].

Przedstawiony w niniejszym artykule zarys rozwoju teorii mocy obwodów o przebiegach odkształconych pokazuje jak bardzo kontrowersyjnemu zagadnieniu poświęcił prof. Fryze swoją uwagę, a mimo to, jak wiele z jego wniosków pozostało słusznymi do chwili obecnej. Budowa gmachu teorii mocy obwodów o przebiegach odkształconych daleka jest jeszcze od jej zakończenia, lecz o ile tylko znajomość tego co zostało już stworzone, pozwala autorowi pogląd taki wyrazić, nikt spośród tych, którzy brali w tym udział nie oddziaływał nań w sposób tak wyraźny jak prof. St. Fryze.

#### LITERATURA

- [1] C.I. Budeanu: Puissances reactives et fictives. Institut Romain de L'Energie, Bucarest 1927.
- [2] St. Fryze: Moc czynna, bierna i pozorna w obwodach o przebiegach odkształconych prądu i napięcia. Przegląd Elektrotechniczny, nr 7, 8; 1931.

- [3] St. Fryze: Wirk-, Blind-, und Scheinleistung in Elektrisch Stromkreisen mit nichtsinusförmigen Verlauf von Strom und Spannung. ETZ, Bd. 53, 1932.
- [4] St. Fryze: W sprawie określenia mocy w obwodach elektrycznych o przebiegach odkształconych prądu i napięcia. Przegląd Elektrotechniczny nr 22, 1932.
- [5] S.I. Antoniu, M. Leon: Linear electronic model for the determination of active and reactive powers in nonsinusoidal state, Acta IMEKO, Budapest 1967.
- [6] S.I. Antoniu, M. Leon, R. Tuduce: P, Q, D - metre apparait pour la mesure des puissances et energies actives, reactives et deformantes dans un energetique deformant. Congres MESUGORA, Paris 1973.
- [7] H. Päck: Grundblindleistung und Verzerrungsleistungs für stationären Verlauf von Spannung, PTB-E-1, Juni 1974.
- [8] J. Sawicki: Urządzenie do pomiaru mocy reaktywnej  $\sum U_k I_k \sin \varphi_k$  Patent PRL nr 111781, 1977.
- [9] J. Sawicki: The measurement of reactive power  $\sum UI \sin \varphi$ , Acta IMEKO, Budapest 1977.
- [10] L. S. Czarnecki: Miernik mocy biernej dla układów z przebiegami odkształconymi, Patent PRL 75834, 1972; Patent PRL 85524, 1974.
- [11] L.S. Czarnecki: Measurement principle of a reactive power meter for nonsinusoidal systems, IEEE Trans. Instr. Meas., Vol. IM-30, No 30, 1981.
- [12] L.S. Czarnecki: Metoda pomiaru mocy biernej obwodów o przebiegach odkształconych wykorzystująca modulację jednowstęgową, Z.N. Pol. Śl. "ELEKTRYKA" z.88, Gliwice 1984.
- [13] Z. Nowomiejski: Filtry mocy, Zesz. Nauk. Pol. Śl. "ELEKTRYKA", z.18, Gliwice 1964.
- [14] Z. Nowomiejski: O pewnych zagadnieniach dotyczących mocy deformacji w układach o przebiegach odkształconych, Z.N. Pol. Śl. "ELEKTRYKA", z.22, Gliwice 1967.
- [15] Z. Nowomiejski: Teoria kompensacji mocy biernej. Z.N. Pol. Śl., "ELEKTRYKA", z.42, Gliwice 1973.
- [16] Z. Nowomiejski: Uogólniona teoria mocy, Z.N. Pol. Śl., "ELEKTRYKA", z.46, Gliwice 1974.
- [17] Z. Nowomiejski, F. Sowa: Teoria mocy układów elektrycznych, Z.N. Pol. Śl., "ELEKTRYKA", z.49, Gliwice 1977.
- [18] Z. Nowomiejski: Generalized theory of electric power, Archiv für Elektrotechnik, 63/1981.
- [19] M.S. Erlicki, A. Emanuel - Bigels: New aspects of power factor improvement. IEEE Trans. on Ind. and Gen Appl., Vol IGA-4, No 4 July/Aug. 1968.
- [20] A.E. Emanuel: Energetical factors in power systems with nonlinear loads, Archiv für Elektrotechnik, 59/1977.
- [21] H.D. Fischer: Bemerkungen zu Leistungsbegriffen bei Strömen und Spannungen mit Oberschwingungen, Archiv für Elektrotechnik, 64/1982.
- [22] R. A. Lopez, J.C.M. Asquerino, G. Rodrigex - Izquierde: Reactive power meter for nonsinusoidal systems, IEEE Trans. Instr. Meas., Vol. IM-26, No 3, 1977.
- [23] P. Filipski: The measurement of distortion current and distortion power, IEEE Trans. Instr. Meas., Vol. IM-33, No 1, 1984.
- [24] L.S. Czarnecki: 1-parts with orthonormal properties, Int. Journ. on Circuit Theory and Appl., Vol. 6, 1978.
- [25] P. Filipski: A new approach to reactive current and reactive power measurement in nonsinusoidal systems, IEEE Trans. Instr. Meas., Vol. IM-29, No 4, Dec. 1980.

- [26] E. W. Kimbark: Direct current transmission, Vol. 1, Wiley - Interscience, 1971.
- [27] W. Shepherd, P. Zakikhani: Suggested definition of reactive power for nonsinusoidal systems, Proc IEE, Vol. 119, No 9, Sept. 1972.
- [28] M. Depenbrock: Wirk - und Blindleistung. ETG - Fachtagung "BLINDLEISTUNG", Aachen, October, 1979.
- [29] N. L. Kusters, W.J.M. Moore: On the definition of reactive power under nonsinusoidal conditions, IEEE Trans. Power Appl. Syst., Vol. PAS-99, Sept. 1980.
- [30] International Electrotechnical Commission (IEC), Technical Committee No 25, Working Group 7, Report: Reactive power and distortion power, document 25 (Secr.) 113, grudzień 1979.
- [31] G. Fodor, G. Tevan: Powers and compensation in networks in periodic state, Archiv für Elektrotechnik, (65), 1982.
- [32] L. S. Czarnecki: Additional discussion on "Reactive power under nonsinusoidal conditions", IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-102, No 4, April 1983.
- [33] L. S. Czarnecki: Some comments on capacitive and residual reactive powers in nonsinusoidal systems, Proc. of Int. Conf. on Harmonics in Power Systems, Worcester, USA, 1984.
- [34] A. E. Emanuel: Suggested definition of reactive power in nonsinusoidal systems, Proc. IEE, Vol. 121, No 7, July 1974.
- [35] L. S. Czarnecki: Minimisation of distortion power of nonsinusoidal systems, IEE Proc., Vol 128, Pt. C, No 4, 1981.
- [36] L. S. Czarnecki: Interpretacja, identyfikacja i modyfikacja właściwości energetycznych obwodów jednofazowych z przebiegami odkształconymi, Zesz. Nauk. Pol. Śl. "ELEKTRYKA", z. 91 1984.
- [37] L. S. Czarnecki: Consideration on the reactive power in nonsinusoidal situations, IEEE Trans. Instr. Meas., Nov. 1985.
- [38] L. S. Czarnecki: An orthogonal decompositions of the current of nonsinusoidal voltage source applied to nonlinear loads, Int. Journ. on Circuit Theory and Appl., Vol. 11, No 2, 1983.



Doc. dr hab. inż. Marek BRODZKI  
Instytut Podstawowych Problemów  
Elektrotechniki i Energoelektroniki

#### KILKA UWAG O MATEMATYCZNEJ NATURZE WIELKOŚCI FIZYKALNYCH

Profesor Stanisław Fryze w artykule pt. "Jednostki fizykalne i techniczne. Studium krytyczne oraz nowy system oznaczania jednostek" zamieszczonym w "Przeglądzie Elektrotechnicznym" 12 - 14 (1933) ([3], s. 260) pisze na temat wielkości fizykalnej: "Co to jest wielkość, wszyscy pojmujemy, jakkolwiek każdy z nas mógłby tu za św. Augustynem powiedzieć "Dopoki mnie nikt nie pyta - wiem, gdy pytającego mam objaśnić - nie wiem"."

Nie zamierzam pokusić się o pekniejszą odpowiedź na pytanie, czym są wielkości fizykalne, bowiem jest to trudne zagadnienie filozofii fizyki. O tym, co chcemy uważać za taką wielkość, decyduje pomiar. Jest on bardzo różny w przypadku rozmaitych wielkości fizycznych. Decyduje tu również kultura matematyczna sprawiająca, że wyniki pomiaru ujmujemy z pomocą takiego lub innego pojęcia matematycznego. Chodzi mi o rzecz znacznie prostszą. Jeśli już zgadzamy się co do kwestii wprowadzenia pewnej konkretnej wielkości fizykalnej, to jak matematycznie ująć kwestię posiadania przez nią pewnego wymiaru fizykalnego? Następnie, czy wielkościami fizykalnymi można "rachować" i jeśli tak, to na ile powyższe "rachunki" są podobne do tych, które dokonujemy na wartościach bezwymiarowych przyporządkowanych danym wielkościom fizykalnym? Odpowiedź na te pytania jest ważna, ponieważ podręczniki fizyki zamieszczają aneksy zawierające różne systemy jednostek oraz ich porównania, lecz sformułowane wyżej zagadnienie pomijają milczeniem.

Wielkości mogą być przedstawione z pomocą pojęć logicznych rozmaitych typów ([6], R.VIII). Zajmiemy się na początku najprostszymi, tzn. takimi, którym w sensie bezwymiarowym przypisuje się liczby rzeczywiste. Jest naturalne za wielkość odpowiadającą takiej liczbie  $x \in \mathbb{R}$  uważać uporządkowaną parę  $(x, m)$ , gdzie  $m$  jest pewną stałą symbolizującą np. jednostkę odległości lub też czasu, masy itp. Oznaczmy zbiór wszystkich takich par znakiem  $\underline{X}$ . Jest równie naturalne wyposażyć go w strukturę przestrzeni liniowej nad ciałem liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}_0$ , tzn. utworzyć uporządkowaną czwórkę  $(\underline{X}, \mathbb{R}_0, +, \cdot)$ , gdzie działania  $+$ ,  $\cdot$  definiujemy poniżej:

$$(x_1, m) + (x_2, m) = (x_1 + x_2, m), \quad (1)$$

$$c \cdot (x, m) = (cx, m) \quad (2)$$

dla dowolnych liczb  $x_1, x_2, x, c \in R$ .

Uporządkowaną parę  $(x, m)$  będziemy oznaczać tłustą literą  $\underline{x}$  - podobnie dla innych zmiennych. Jest oczywiste, że dla czwórki  $(\underline{X}, R, +, \cdot)$  spełnionych jest siedem aksjomatów przestrzeni liniowych ([1], s.44). W ramach takiej przestrzeni liniowej  $\underline{X}$  wiemy już, co to znaczy dodawać wielkości i mnożyć je przez liczby rzeczywiste. Jednostkę stanowi uporządkowana para  $(1, m)$ , będąca jednym elementem bazy  $\{(1, m)\}$  jednowymiarowej przestrzeni liniowej  $\underline{X}$ .

Ponieważ jednocześnie występują w fizyce odwzorowania z jednej takiej przestrzeni liniowej do drugiej, które chcemy różniczkować, więc struktura przestrzeni liniowej nadana zbiorowi  $\underline{X}$  nie wystarcza. Trzeba uczynić z niego przestrzeń Banacha. Normę  $\| \cdot \| : \underline{X} \rightarrow R$  w przestrzeni  $\underline{X}$  zadajemy wzorem

$$\|x\| = \|(x, m)\| = |x| \quad \text{dla dowolnego elementu } x \in \underline{X}. \quad (3)$$

Łatwo sprawdzić, że trzy aksjomaty przestrzeni unormowanych są wówczas spełnione ([1], s.118). Metrykę  $\rho: \underline{X} \times \underline{X} \rightarrow R$  określamy w standardowy sposób z pomocą normy

$$\rho(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\| \quad \text{dla dowolnych elementów } x_1, x_2 \in \underline{X}. \quad (4)$$

Trzy aksjomaty metryki są też spełnione ([1], s.30).

Zauważmy, że z zupełności przestrzeni arytmetycznej  $R$  wynika zupełność przestrzeni liniowej unormowanej  $(\underline{X}, \| \cdot \|)$  ([1], s.32), czyli przestrzeń  $(\underline{X}, \| \cdot \|)$  jest przestrzenią Banacha ([1], s.118).

O podobnym sposobie ujęcia wielkości fizycznych mowa jest w pracy ([2], s.10,11).

Przypuśćmy teraz, że mamy dwa zbiory  $\underline{X}, \underline{Y}$  (na razie nie musimy zapamiętywać je w żadne dodatkowe struktury) złożone odpowiednio ze wszystkich uporządkowanych par  $(x, m), (y, n)$ ,  $x, y \in R$  oraz odwzorowanie  $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ . Zbudujemy dwie bijekcje  $\varphi_1: R \rightarrow \underline{X}$ ,  $\varphi_2: R \rightarrow \underline{Y}$

$$\varphi_1(x) = (x, m) = \underline{x}, \quad (5)$$

$$\varphi_2(y) = (y, n) = \underline{y} \quad \text{dla dowolnych liczb } x, y \in R. \quad (6)$$

Bijekcje  $\varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1}$  można nazwać bijekcjami zapominania wymiarów fizycznych wielkości.

Powiemy, że odwzorowania  $f: R \rightarrow R$  oraz  $\underline{f}: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$  są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek:

$$\varphi_2 \circ f = \underline{f} \circ \varphi_1. \quad (7)$$

Wzór (7) może być oczywiście użyty do zdefiniowania odwzorowania  $f$  z pomocą odwzorowań  $f, \varphi_1, \varphi_2$ . Wzór ten można zapisać w postaci przemiennego diagramu

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & R \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ \underline{X} & \xrightarrow{f} & \underline{Y} \end{array} \quad (7a)$$

Definicję tę można uogólnić na przypadek  $n$ -argumentowych ( $n \in \mathbb{N}$ ) relacji  $S$  i  $S$ .

Mianowicie (np. dla  $n = 2$ ) relacje te są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy ze spełnienia warunków (5) i (6) wynika równoważność

$$xSy = xSy \quad \text{dla dowolnych liczb } x, y \in R. \quad (8)$$

Ten wzór również może służyć do zdefiniowania relacji  $S$  z pomocą relacji  $S$  i odwzorowań  $\varphi_1, \varphi_2$ .

Wprowadźmy z kolei dowolną funkcję zdaniową  $\Phi(S_1, \dots, S_k, x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k)$  pewnej teorii fizykალnej posiadającą jako argumenty wolne zmienne relacyjne  $S_1, \dots, S_k$  i indywidualowe (rzeczywiste)  $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ . Jest ona zbudowana z atomicznych funkcji zdaniowych typu  $x_i S_j y_i$  połączonych funktorami zdaniotwórczymi (spójnikami), np. takimi jak negacja czy implikacja oraz poprzedzonych kwantyfikatorami wiążącymi zmienne indywidualowe ([6], s.215; [4], s.114, 115).

Jeśli utoaśamić relację (dwuargumentową) ze zbiorem par uporządkowanych elementów spełniających ją, to zakładamy  $S_1, \dots, S_k \subset R^2$ . Rozumowanie powyższe dotyczące konstrukcji funkcji zdaniowych, można powtórzyć dla relacji  $n$ -argumentowych - dla dwuargumentowych zapis jest prostszy. W dalszym ciągu niech będzie dana funkcja zdaniowa  $\Phi(S_1, \dots, S_k, x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k)$  o tej samej budowie co poprzednia, gdzie wolne zmienne relacyjne  $S_i$  zastąpiono zmiennymi relacyjnymi  $S_i$  i odpowiednio wolne argumenty  $x_i, y_i$  argumentami (wolnymi)  $x_i, y_i, i \in \{1, \dots, k\}$  oraz mamy  $S_i \subset \underline{X}_i \times \underline{Y}_i, x_i \in \underline{X}_i, y_i \in \underline{Y}_i$ .

Indywidualowe zmienne związane (rzeczywiste) zastąpiono również indywidualowymi zmiennymi związanymi (pisanymi tłusto) o tym samym numerze. W obu funkcjach zdaniowych liczba wolnych zmiennych indywidualowych może być jednocześnie inna niż  $2k$ . Dla uproszczenia zapisu ustalono po jednej zmiennej wolnej należącej do każdego ze zbiorów  $\underline{X}_i, \underline{Y}_i$ . Zaznaczamy, że pierwsza funkcja zdaniowa nie zawiera żadnych zmiennych pisanych tłusto. Oprócz tego obie funkcje zdaniowe, o tej samej budowie, mogą posiadać jednocześnie pewne zmienne (tak wolne, jak i związane) oraz stałe nie wymienione poprzednio. Jeśli uznamy, że rzędy typów logicznych zmiennych  $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$  oraz stałych  $m_1, \dots, m_k, n_1, \dots, n_k$ , wymienionych poniżej są jednakowe (rzęd zerowy), to zmienne  $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$  będą typu takiego jak uporządkowane pary  $(x_i, m_i), (y_i, n_i)$ , czyli typu rzędu pierw-



szego. Wobec tego pierwsza z naszych funkcji zdaniowych jest formułą języka pewnej teorii fizykalnej pierwszego rzędu, druga - jest formułą języka drugiego rzędu (o ile oczywiście nie występują w nich inne zmienne lub stałe wyższych rzędów) ([6], s.217; [4], s.117, 142). Teraz możemy dla dowolnych powyżej podanych funkcji zdaniowych wypowiedzieć twierdzenie:

Jeśli dla dowolnych elementów  $x_i, y_i \in R$  z równości

$$\varphi_i(x_i) = (x_i, n_i) = x_i, \quad (9)$$

$$\psi_i(y_i) = (y_i, n_i) = y_i, \quad i \in \{1, \dots, k\},$$

wynika równoważność

$$x_i S_i y_i \equiv x_i S_i y_i, \quad (10)$$

to dla zmiennych indywidualnych  $x_i, y_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$  i relacyjnych  $S_i, \mathbf{S}_i$  powiązanych wzorami (9), (10) zachodzi równoważność:

$$\begin{aligned} \Phi(S_1, \dots, S_k, x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k) &\equiv \\ &\equiv \Phi(\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_k, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k). \end{aligned} \quad (11)$$

Dowód można uzyskać poprzez niewielką modyfikację zasadniczego twierdzenia o izomorfizmie ([6], s.(199-202)). Różnica polega na tym, że w książce [6] wszystkie zmienne indywidualne  $x_i, y_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$  należą do tego samego zbioru oznaczonego znakiem 1 i wszystkie relacje  $S_i, \mathbf{S}_i$  są zawarte w zbiorze  $1 \times 1$  oraz w związku z tym występuje tam jedna bijekcja  $\varphi$ . Dowód ten (indukcyjny) opiera się na przejściu od wykazania słuszności twierdzenia dla formuł atomicznych typu (10) do wykazania go dla dowolnej opisanej formuły poprzez kolejne zastosowanie operacji negacji, koniunkcji i dołączania kwantyfikatora szczegółowego (ponieważ każda taka formuła da się uzyskać z atomicznych poprzez stosowanie skończoną liczbę razy powyższych operacji). Analogiczne twierdzenie można uzyskać dla funkcji zdaniowych w logikach predykatów (teoriach) rzędów wyższych ([6], s.200, 307).

Sens powyższego twierdzenia jest jasny. Mianowicie, to co da się wypowiedzieć w ramach naszej teorii, z pomocą odpowiednich funkcji zdaniowych, o danych wielkościach fizycznych opisywanych indywidualami i relacjami z uwzględnieniem wymiarów fizykalnych (pisanych tłusto) - da się również wypowiedzieć o nich w sensie bezwymiarowym (druk "chudy"), i odwrotnie.

Widzimy jednocześnie, że działania  $+$ ,  $\cdot$ , wyprowadzone we wzorach (1), (2), wyprowadzone są tak jak we wzorze (8), tylko trzeba użyć relacji trójczłonowych.

Wypowiedź zawartą w poprzednio sformułowanym twierdzeniu można wzmocnić. Biorąc pod uwagę definicję dowodów twierdzeń w naszej teorii ([6], s.227; [4], s.138, 143) zauważamy, że wychodząc z aksjomatów teorii za -

pisanych w postaciach równoważnych - raz bezwymiarowo, drugi raz z użyciem wymiarów i stosując analogiczne kroki dowodowe (reguły inferencji) w obu przypadkach otrzymujemy ciągi formuł kończące się na naszym twierdzeniu wypowiedzianym raz w postaci bezwymiarowej - drugi z użyciem wymiarów. Ciągi te mają wyrazy o jednakowych numerach powiązane relacjami równoważności typu (11), gdzie spełnione są warunki typu (9), (10).

Stąd wniosek, że zapisy bezwymiarowe i z użyciem wymiarów są nie tylko "równie dobre", jeśli chodzi o treść wypowiadanego twierdzenia, lecz także są "równie dobre", gdy chodzi o ich dowody. Sformułowanie "równie dobre" należy rozumieć w wyjaśnionym powyżej sensie, bowiem jak ok. że się na przykładzie, operowanie wielkościami bezwymiarowymi wymaga użycia tej części aparatu matematycznego, związanego na ogół z funkcjami rzeczywistymi zmiennej rzeczywistej, który lepiej znamy. Oczywiście, używając zapisu bezwymiarowego trzeba pamiętać (również stosując regułę podstawiania ([6], s.53)), by dla różnych wielkości fizycznych stosować różne zmienne.

Przykład dotyczyć będzie równań różniczkowych. Rzecz jasna, nie trzeba podkreślać jego wagi, bowiem znana jest rola równań różniczkowych zwyczajnych lub cząstkowych w fizyce. Dla prostoty ograniczmy się do jednego równania cząstkowego pierwszego rzędu.

Niech dane będą dwa odwzorowania  $F: R^n \times R \times R^n \rightarrow R$ ,  $F: \underline{X}^n \times \underline{Y} \times \underline{Y}^n \rightarrow Z$ ,  $n \in N$ . Oprócz tego mamy bijekcje  $\varphi: R \rightarrow \underline{X}$ ,  $\psi: R \rightarrow \underline{Y}$ ,  $\omega: R \rightarrow \underline{Z}$ :

$$\varphi(x) = (x, m) = \underline{x} \quad \text{dla dowolnej liczby } x \in R, \quad (12)$$

$$\psi(y) = (y, n) = \underline{y} \quad \text{dla dowolnej liczby } y \in R, \quad (13)$$

$$\omega(z) = (z, k) = \underline{z} \quad \text{dla dowolnej liczby } z \in R. \quad (14)$$

Dla dowolnych liczb  $x_1, \dots, x_n, y, y_1, \dots, y_n \in R$  zachodzi warunek

$$\omega(F(x_1, \dots, x_n, y, y_1, \dots, y_n)) = F(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n), \psi(y), \psi(y_1), \dots, \psi(y_n)), \quad (15)$$

stanowiący o równoważności odwzorowań  $F$  oraz  $F$ .

Przypuśćmy teraz, że uporządkowane pary  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  stanowią przestrzenie Banacha. Wówczas zbiorowi  $\underline{X}^n \times \underline{Y} \times \underline{Y}^n$  można też nadać strukturę przestrzeni Banacha ([1] s.55, 136, 137; [5] s.138, 139). O przestrzeni  $Z$  zakładamy, że jest liniowa.

Bijekcje  $\varphi, \psi, \omega$  są wówczas liniowe. Dla uproszczenia zakładamy, że argumenty  $x_1, \dots, x_n$  należą do tego samego zbioru  $\underline{X}$ . Wprowadzmy odwzorowanie  $u: R^n \rightarrow R$  klasy  $C_1$  oraz  $u: \underline{X}^n \rightarrow \underline{Y}$  różniczkowalne w sposób ciągły na  $\underline{X}^n$  ([5], s.125, 126, 139). (O odwzorowaniach  $F, F$  możemy dodatkowo założyć, że są ciągłe - lecz wówczas operujemy uporządkowaną parą  $(Z, \|\cdot\|_Z)$  stanowiącą przestrzeń Banacha.) Niech dla dowolnych liczb  $x_1, \dots, x_n \in R$  zachodzi warunek:

$$\psi(u(x_1, \dots, x_n)) = u(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)), \quad (16)$$

oznaczający z kolei równoważność odwzorowań  $u$  oraz  $\mathbf{u}$ .

Wówczas łatwo zauważyć, że odwzorowanie  $u$  spełnia równanie różniczkowe cząstkowe

$$F(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n)) = 0 \quad (17)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie  $\mathbf{u}$  spełnia równanie różniczkowe cząstkowe (dla  $n = 1$  są to równania różniczkowe zwyczajne)

$$F(x_1, \dots, x_n, \mathbf{u}(x_1, \dots, x_n), \nabla_{\mathbf{e}_1} \mathbf{u}(x_1, \dots, x_n), \dots, \nabla_{\mathbf{e}_n} \mathbf{u}(x_1, \dots, x_n)) = 0, \quad (18)$$

gdzie wyrażenie  $\nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{u}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  jest pochodną kierunkową odwzorowania  $\mathbf{u}$  w kierunku wektora  $\mathbf{e}_i = ((0, m), \dots, (1, m), \dots, (0, m))$ , para  $(1, m)$  występuje w ciągu na  $i$ -tym miejscu), ([5], s. 126, 165), "0" jest elementem zerowym przestrzeni liniowej  $Z$ .

W celu udowodnienia tego faktu wystarczy wykazać proste twierdzenie (dowód pomijam) mówiące, że z równoważności odwzorowań  $u$  oraz  $\mathbf{u}$  wynika równoważność odwzorowań:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{oraz} \quad \nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{u} : \underline{X}^n \rightarrow \underline{Y}, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

przy czym w obu przypadkach bijekcjami ustalającymi równoważność są odwzorowania  $\Psi, \Psi$  (ustalające również równoważność odwzorowań  $F$  oraz  $\mathbf{F}$ ).

Widzimy więc, że równania (17), (18) spełniają rolę funkcji zdaniowych występujących w ogólnym zapisie (11) (czy też raczej pewnych ich fragmentów, ponieważ całość powinna obejmować założenia uczynione odnośnie do odwzorowań  $F$ ,  $u$  lub  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{u}$ ). Stwierdzamy również, że wygodniej jest operować równaniem (17), bowiem nie trzeba do tego znać rachunku różniczkowego uprawianego w przestrzeniach Banacha.

#### LITERATURA

- [1] Alexiewicz A. : Analiza funkcjonalna. PWN, Warszawa 1969.
- [2] Brodzki M. : Wstęp do teorii liniowych obwodów elektrycznych w ujęciu geometrycznym. Skrypty Uczelniane Politechniki Śląskiej nr 847, Gliwice 1979.
- [3] Fryze S. : Jednostki fizyczne i techniczne. Studium krytyczne oraz nowy system oznaczania jednostek. Wybrane zagadnienia teoretycznych podstaw elektrotechniki. PWN, Warszawa - Wrocław 1966.
- [4] Hunter G. : Metalogika. PWN, Warszawa 1982.
- [5] Maurin K. : Analiza, cz. I. PWN, Warszawa 1971.
- [6] Mostowski A. : Logika matematyczna. Monografie matematyczne, Warszawa - Wrocław 1948.



mgr inż. Bolesław GLIKSMAN

Zakład Elektronicznej Techniki

Obliczeniowej w Katowicach.

#### EGZAMIN

W małym mieście Gliwice,  
Na Ziemiach, gdzieś, Odzyskanych,  
Przy Katowickiej ulicy  
Jest plac niezabudowany.

Obok gmach szary stoi  
A w mrocznym jego wnętrzu  
Jest dużo, dużo pokoi  
I jeden, na drugim piętrze.

Nic w tym na pozór dziwnego,  
Boże! Grzesznemu błogosław,  
Spokojnie czytasz kolego  
Ten napis: "Katedra Podstaw"

Zgola podobny do innych,  
Do "Termo" lub "Części Maszyn",  
Ct! Taki szyldzik niewinny,  
Niczym nie grozi, nie straszy.

Lecz kła zakręci się w oku,  
Gdy wspomnę sobie czasami,  
Ileż to razy w tym roku  
Czekałem przed tymi drzwiami.

Jeśliś ciekawy, opowiem  
Ci o studencie, kolego,  
Który miał pecha, albowiem  
Nigdy nie umiał niczego.

Akt pierwszy. W górę kurtyna  
I chwila oczekiwania,  
Potem profesor zaczyna  
Zadawać krótkie pytania.

Profesor, doktor, inżynier,  
Tyle tytułów, mój Boże,  
Cześć! Wiwat! Zdrastuj! Niech żyje!  
Dziś przyszedł w świetnym humorze,

Sekretek zdradzę ci mały  
Kolego, jeśliś ciekawy,  
Aż pięciu wczoraj oblało,  
Toteż profesor łaskawy.

Cóż wam tak zbladły oblicza?  
 Wszyscy rysują zadanie,  
 Trzy kreski, zygzak, tablica.  
 Nic pan nie umie, mój panie.

Cóż to, nikt jeszcze nie gotów?  
 Spieszże się, kto w Boga wierzy,  
 Tyle z tym gżupstwem kłopotu?  
 Ach prawda, dodać należy,

Że kąć pomiędzy fazami ...  
 Brak kilku głównych promieni,  
 Panie, miej litość nad nami,  
 Poza tym nic się nie zmieni.

Przez dwie okienne oprawy  
 Wtargnął promyczek słońca,  
 Wysłuchaj Panie łaskawy  
 Mojej modlitwy gorącej.

By skończyć w porę zadanie,  
 Wytrwać do końca tej męki,  
 Wtem ktoś nieoczekiwanie  
 Wrywa ci papier z ręki.

I pada krótkie pytanie,  
 A ty odpowiadasz grzecznie,  
 Profesor: koniec, mój panie,  
 Gdzie indeks? Niedostatecznie.

Posępnie zachodzi słońce,  
 Powoli spada kurtyna,  
 Antrakt trwa dwa miesiące  
 I drugi akt się zaczyna.

I znowu studentów grono,  
 W tymże pokoju u góry,  
 Z miną poważną, skupioną,  
 Czeka. Wtem wchodzi ponury,

Milczący, groźny na twarzy,  
 Płaszcz w rękę, bez kapelusza,  
 Biała ci, kto się odważy  
 Uśmiechnąć się, lub poruszyć.

Ledwo wszedł, pewno już wiecie,  
 Że znalazł wnet delikwenta,  
 Lecz ten się nie dał, bo przecież  
 Choć raz u każdego jest święto.

Więc siadł profesor zmartwiony,  
 Za biurkiem spokojnie czeka,  
 Roztoczył dymną zaskonę,  
 Jakby tu oblać człowieka?

I tylko słysząc tykanie  
 Zegarków pięciu, czy sześciu  
 Studenci robią zadanie,  
 No skończył już ktoś nareszcie?

A dym powoli opada  
 I tylko oczy się świecą,  
 Dziś będzie sukces nielada,  
 Bo dzisiaj wszyscy wylecą.

Z daleka widzę po minie:  
Złe! Mam to stale w pamięci,  
Może mnie dzisiaj ominie,  
Może się uda wykręcić.

Ołówkiem piszę czerwonym,  
Zielonym też i niebieskim  
Poemat na cztery strony,  
Kropeczki, kółka i kreski.

Strzałki! Pamiętaj o strzałkach!  
Profesor znów się pochylił,  
Chciałbym zobaczyć dziś śmiałka,  
Który by strzałki pomylił.

Nikt nie namyślał się długo,  
Studenci strzałki zmienili,  
Było pięć minut przed drugą.  
Wszyscy egzamin skończyli.

Wynik? Kto pyta o wynik?  
Jeżeli wszyscy, to znaczy,  
Że tylko laik lub cynik  
Mógłby pomyśleć inaczej.

Wyszedł, lecz ciągle go słyszę,  
Jak rzuca zdanie ponure,  
Niech się pan prędko zapisze  
Na chemię lub architekturę.

Ktoś zabrał płaszcz i kalosze,  
Pogaszy światła na scenie,  
Akt drugi skończył się, proszę  
Przyjść znowu na zakończenie.

Minęło kilka tygodni.  
Jak kiedyś, w tej samej sali  
Trwożni, lecz zawsze pogodni  
Znów się studenci zebrali.

I znów kurtyna do góry,  
Jak dawniej mknie bezszelestnie,  
Ja wiem, że chciałby tu któryś  
Uśmiechnąć się, ale nie śmie.

Nie śmie, bo wie, co go czeka,  
Nie śmie, bo wie, co go boli,  
Głowa do góry, człowieku  
I towarzyszowi niedoli.

Niech wejdzie ktoś i zawoła,  
Że skończy się twe cierpienie!  
Patrz, oto Święty Mikołaj  
I Boże wnet Narodzenie.

Patrz, wchodzi ktoś z siwą brodą  
I niesie śliczne prezenty,  
Kij w rękę, lecz duszę ma młodą,  
Radosny i uśmiechnięty.

I pierzchła gdzieś groźna mina,  
Po chwili oczekowania  
Wraz z prezentami zaczyna  
Zadawać krótkie pytania.



Nie pyta o potencjale,  
Ani o zmiennej wartości,  
Nie potrzebujesz mu wcale  
Rysować środków ciężkości.

Wystarczy tylko wymienić  
Słynne jednostki rzetelne,  
Których nikt nigdy nie zmieni,  
Nigdy! Bo są nieśmiertelne!

A potem pióro wyjmuje,  
Studenci płaczą jak bobry,  
Ze szczęścia, oto wpisuje  
Egzamin, dnia ... bardzo dobry.

I oczom wierzyć się nie chce,  
To sen, to złuda co pryska,  
Lecz podpis został w indeksie,  
Profesor doktor Stanisław.

Szczęściem pijana kurtyna  
Ślub bierze z budką suflera,  
A wieść o cudzie zaczyna  
Do całej Polski docierać.

Humor mam dzisiaj szampański  
I nie ma czemu się dziwić,  
Że biorę urlop dziekański,  
A jutro wyjeżdżam z Gliwic.

Na trasę W-2 do Warszawy,  
Albo do portu w Szczecinie.  
Na zakończenie ciekawy  
List wyślę swojej dziewczynie.

Do listu wiersz ten załączę,  
Położ go, proszę, na stole.  
Przeczytaj sobie. Już kończę.  
Sciskam, całuję. Twój Bolek.

