SPIS TREŚCI

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

CONTENTS

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1988

Seria: ELEKTRYKA z. 103 Nr kol. 904

Marian PASKO
Lesław TOPOR-KAMIŃSKI

Instytut Podstawowych Problemów
Elektroniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

MODELOWANIE NIELINIOWYCH UKŁADÓW REZYSTANCYJNO-PRZEŁĄCZNIKOWYCH

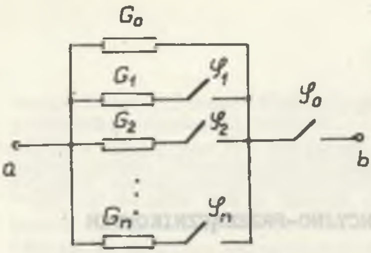
Streszczenie. Przedstawiono zasadę działania sieci rezystancyjno-przełącznikowych modelujących rezystancje sieci nieliniowe. Przebiegi sterujące pracą kluczy są okresowe o stałym lub zmiennym czasie załączania. Zmienny czas zadziałania kluczy uzależniony jest od wartości zewnętrznego sygnału napięciowego. Zmienne zaciskowe układów rozpatruje się jako uśrednione za okres przebiegu sterującego kluczami. Podano przykłady syntezy układów R - przełącznik opierając się na strukturze równoległej gałęzi RS, realizujących funkcje nieliniowe monotoniczne wklęsłe i wypukłe. Syntezę można przeprowadzić dwoma metodami poprzez rozkład funkcji przyrostów konduktancji pionowej i poziomej, otrzymując w każdej z nich inne wartości konduktancji gałęziowych oraz kształty sygnałów sterujących kluczami. Zrealizowany przykładowo dwójnik nieliniowy R - przełącznikowy zastosowano w układzie ze wzmacniaczem operacyjnym w celu otrzymania nieliniowych charakterystyk napięciowo-napięciowych. Otrzymane wyniki przedstawiono w postaci krzywych średniej wartości sygnału wyjścia w funkcji sygnału wejściowego zdjętych za pomocą pisaka X - Y.

1. Wstęp

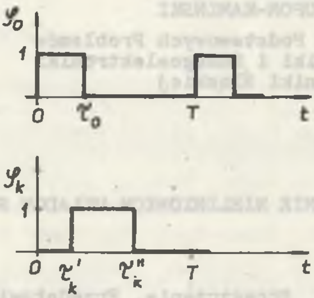
Obwody rezystancyjno-przełącznikowe pozwalają na budowę dwójników, których rezystancja zależna jest od stanu przełączników zmieniających się w czasie [5]. Jeżeli w takim układzie stan pewnych przełączników jest sterowany sygnałem elektrycznym, to zależność między tym sygnałem a wybraną zmienną zaciskową w układzie może być funkcją nieliniową, przyjmując jako zmienne średnie wartości tych wielkości za pewien okres czasu. W układach przełącznikowych można sterować czasem działania przełącznika, przy czym zmieniać się on może w stosunku do pewnego stałego okresu działania będącego okresem uśrednienia [3].

2. Podstawowy dwójnik modelujący

Na rys. 1 przedstawiona jest proponowana struktura dwójnika g(t) rezystancyjno-przełącznikowego złożona z n równoległych gałęzi RS, w których przełączniki włączane są zgodnie z fakcjami φ_k o postaci stałej w stosunku do zadanego okresu T, natomiast funkcja φ_o sterująca kluczem szeregowym względem wszystkich gałęzi jest zmienna sygnałem zewnętrznym x (rys. 2).



Rys. 1



Rys. 2

Kondunktancję dwójnika z rys. 1 między zaciskami ab opisuje relacja:

$$g_{ab}(t) = \varphi_o(G_o + \sum_{k=1}^{n} G_k \varphi_k). \tag{1}$$

Wartość średnia tej konduktancji za okres T wynosi:

$$\overline{G}_{ab} = \frac{1}{T}\int_0^T g_{ab}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi_o(G_o + \sum_{k=1}^{n} G_k \varphi_k)\, dt. \tag{2}$$

Zakładamy, że czas τ_o impulsu φ_o jest wartością zmienną, więc średnia przewodność G_{ab} jest jego funkcją, zatem:

$$\overline{G}_{ab}(\tau_o) = \frac{1}{T}\int_0^{\tau_o} g_{ab}\, dt. \tag{3}$$

Funkcje φ_k są funkcjami o postaci przedstawionej na rys. 2, stąd wyrażenie $\sum_{k=1}^{n} G_k \varphi_k$ jest funkcją schodkową o skokowych zmianach wartości w punktach τ_k' i τ_k''. Punktów tych jest maksimum 2n, gdyż niektóre z nich mogą być równe O lub T. Można je zatem ogólnie nazwać punktami λ_1 do λ_l, przy czym $0 < l \leqslant 2n$. Stąd wartość średnia konduktancji dla $\tau_o = T$ wynosi:

$$\overline{G_{ab}} = \frac{1}{T}\left[\int_0^{1} \sum G_k \varphi_k\, dt + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sum G_k \varphi_k\, dt + \ldots + \int_{\lambda_l}^{T} \sum G_k \varphi_k\, dt\right], \tag{4}$$

gdzie $G_k \varphi_k$ w każdej całce są tylko konduktancjami pewnych wybranych gałęzi (stąd brak wskaźników przy sumach).

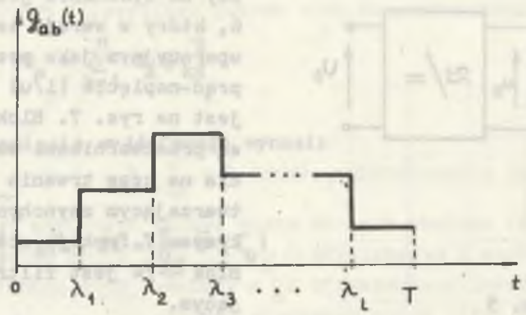
Ostatecznie:

$$\overline{G_{ab}} = \frac{1}{T} \sum_{m=1}^{l+1} \int_{\lambda_{m-1}}^{\lambda_m} (\sum G_k \varphi_k)\, dt) \tag{5}$$

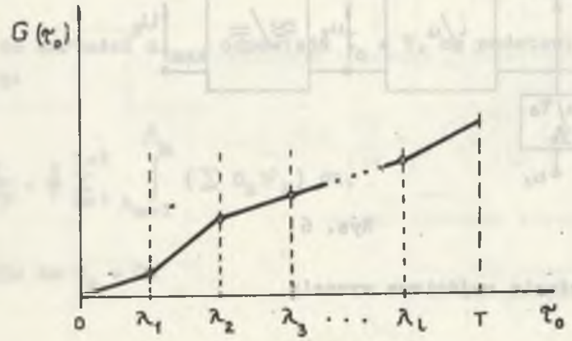
przy czym $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{l+1} = T$.

Dla $\tau_0 < T$, $\overline{G_{ab}}$ przybiera odpowiednio inną wartość zależną od wartości τ_0.

Na rys. 3 przedstawiona jest przykładowa zmiana $g_{ab}(t)$, natomiast na rys. 4 jej wartość średnia w funkcji długości τ_0 impulsu φ_0.



Rys. 3



Rys. 4

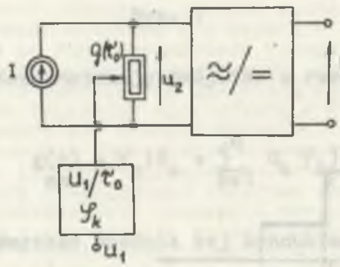
Jak wynika z przytoczonych zależności, na skutek skokowych zmian zmiennej konduktancji g(t) (funkcja schodkowa) można jedynie modelować $\bar{G}$ jako funkcję odcinkami liniową.

3. Praktyczny układ modelujący

W praktyce zachodzi najczęściej konieczność realizacji zależności:

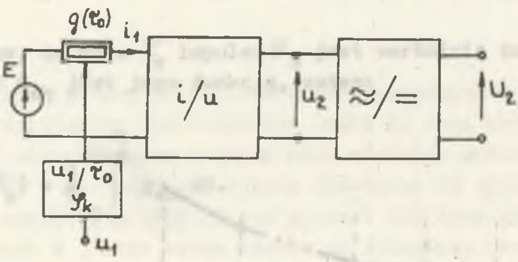
$$u_2 = f\ (u_1) \tag{6}$$

Korzystając z dwójnika przedstawionego na rys. 1 można to osiągnąć w dwu układach przedstawionych blokowo na rysunkach 5 i 6.



Rys. 5

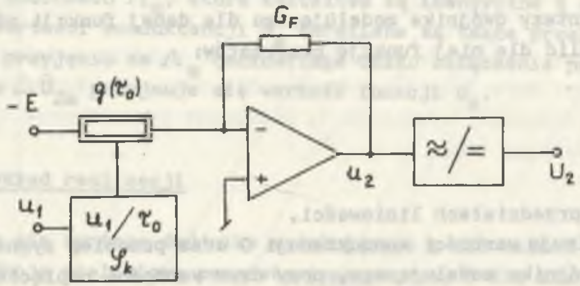
Ze względów praktycznych łatwiejszy do wykonania jest układ z rys. 6, który w wersji ze wzmacniaczem operacyjnym jako przetwornikiem prąd-napięcie (i/u) przedstawiony jest na rys. 7. Bloki $(u_1/\tau_0, \varphi_k)$ są przetwornikami wartości napięcia na czas trwania impulsu wytwarzającym zsynchronizowane z okresem T funkcje sterujące φ_k. Blok ≈/= jest filtrem uśredniającym.



Rys. 6

W układzie tym napięcie wyjściowe wynosi:

$$u_2 = \frac{g(\tau_0)}{G_F}\, E\ . \tag{7}$$



Rys. 7

Uwzględniając wzór (1) mamy:

$$u_2 = \frac{E}{G_F}\left[\varphi_0 \left(G_0 + \sum_{k=1}^{n} G_k \varphi_k\right)\right] . \tag{8}$$

Wartość średnia napięcia wyjściowego wynosi:

$$\overline{U_2} = \frac{E}{G_F}\frac{1}{T}\int_0^{\tau_0} g(t)\, dt = \frac{E}{G_F}\, \overline{G}\,(\tau_0) \tag{9}$$

Uwzględniając, że τ_0 jest funkcją u_1, otrzymujemy

$$\overline{U}_2 = \frac{E}{G_F}\, \overline{G}(u_1). \tag{10}$$

Zakładając, że wartości u_{1max} odpowiada $\tau_0 = T$, na podstawie wzoru (5) otrzymuje się:

$$\overline{U}_2 = \frac{E}{G_F} \cdot \frac{1}{T}\sum_{m=1}^{l+1} \int_{\lambda_{m-1}}^{\lambda_m} \left(\sum G_k \varphi_k\right) dt, \tag{11}$$

przy założeniu że $G_0 = 0$.

4. Synteza dwójnika RS dla danej funkcji nieliniowej

Aby dokonać syntezy dwójnika modelującego dla danej funkcji nieliniowej (6), należy określić dla niej funkcję przyrostów:

$$d = \frac{\Delta U_2}{\Delta U_1} \tag{12}$$

w poszczególnych przedziałach liniowości.
Funkcja ta determinuje wartości konduktancji G oraz przebieg sygnałów sterujących φ dla dwójnika modelującego, przy czym wartości napięcia odpowiadające poszczególnym przedziałom Λ_m określa się przez przetwornik (u_1/τ_0), a zależą one od u_{1max}. Funkcja ta pozwala jednocześnie na wiele różnych realizacji odpowiadających tej samej nieliniowości f.

Poniżej przedstawione są dwie metody realizacji: poprzez rozkład funkcji przyrostów d:

a) pionowy
b) poziomy

na sumę funkcji elementarnych, czyli $d = \sum_{m=1}^{l+1} d_m$.

Dla rozkładu a) zakłada się, że każdy sygnał sterujący φ_m różny jest od zera tylko w jednym z przedziałów $\Lambda_m = \lambda_m - \lambda_{m-1}$, co określa ich kształt, natomiast wartości konduktancji G_m w każdym z tych przedziałów można wyznaczyć z relacji (11), która przyjmuje postać:

$$\bar{U}_2 = \frac{E}{G_F} \cdot \frac{1}{T} \sum_{m=1}^{l+1} \int_{\lambda_{m-1}}^{\lambda_m} G_m \varphi_m \, dt \tag{13}$$

lub w wyniku addytywności wartości średnich:

$$\bar{U}_2 = \frac{E}{G_F} \cdot \frac{1}{T} \sum_{m=1}^{l+1} G_m \Lambda_m = \sum_{m=1}^{l+1} \Delta\bar{U}_{2,m} \ldots \tag{14}$$

W jednym przedziale zachodzi zatem:

$$\Delta\bar{U}_{2,m} = \frac{E}{G_F} G_m \frac{\Lambda_m}{T}, \tag{15}$$

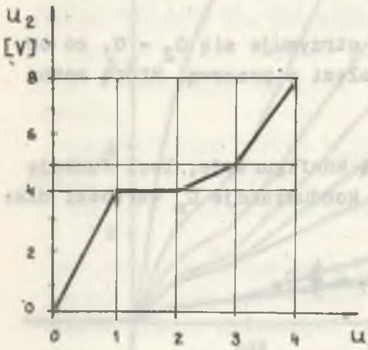
stąd oblicza się:

$$G_m = \frac{\Delta\bar{U}_{2,m}}{E} \cdot \frac{T}{\Lambda_m} G_F. \tag{16}$$

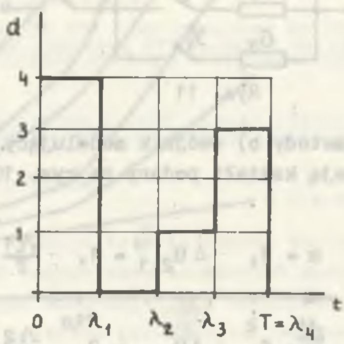
Metoda rozkładu poziomego b) prowadzi do funkcji d_m dwuwartościowych, lecz w różnych odcinkach Λ_m, które kształtem są identyczne z sygnałami sterującymi φ_m. Wartości konduktancji G_m określane są także przez relację (16), lecz przy przyjęciu za Λ_m całkowitego czasu załączenia przebiegu φ_m, natomiast za $\Delta \bar{U}_{2m}$ przyjmuje się wartość funkcji d_m.

5. Przykład realizacji

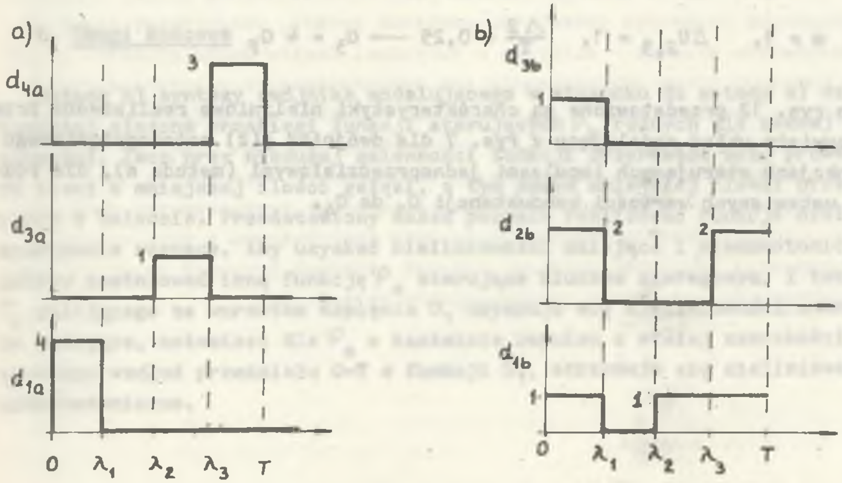
Zakłada się syntezę dwójnika modelującego g dla układu z rys. 7 modelującego funkcję nieliniową przedstawioną na rys. 8 dla zakresu napięć $u_1 = (0 \div 4)$V oraz $u_2 = (0 \div 8)$V o czterech przedziałach liniowych.



Rys. 8



Rys. 9

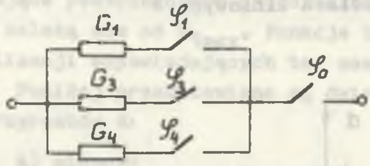


Rys. 10

Na rys. 9 przedstawiona jest funkcja przyrostów d odniesiona do okresu T odpowiadającego wartości u_{1max}, stąd: $\frac{\Delta m}{T} = 0{,}25$.
Rozkłady funkcji d według metody pionowej i poziomej przedstawione są na rys. 10a i rys. 10b.

Zakładając E = 1 V, otrzymuje się dla metody a) dwójnik modelujący pokazany na rys. 11, przy czym funkcje sterujące kluczami mają kształt taki jak d_{ka}, lecz o znmodernizowanej wysokości 1, natomiast konduktancje G_m mają wartości zgodne z relacją (16):

$$G_m = 4\Delta U_{2,m}\, G_F , \tag{17}$$



Rys. 11

czyli:

$G_1 = 16\, G_F$, $G_3 = 4\, G_F$, $G_4 = 12\, G_F$.

Dla m = 2 otrzymuje się $G_2 = 0$, co odpowiada gałęzi z przerwą, którą można pominąć.

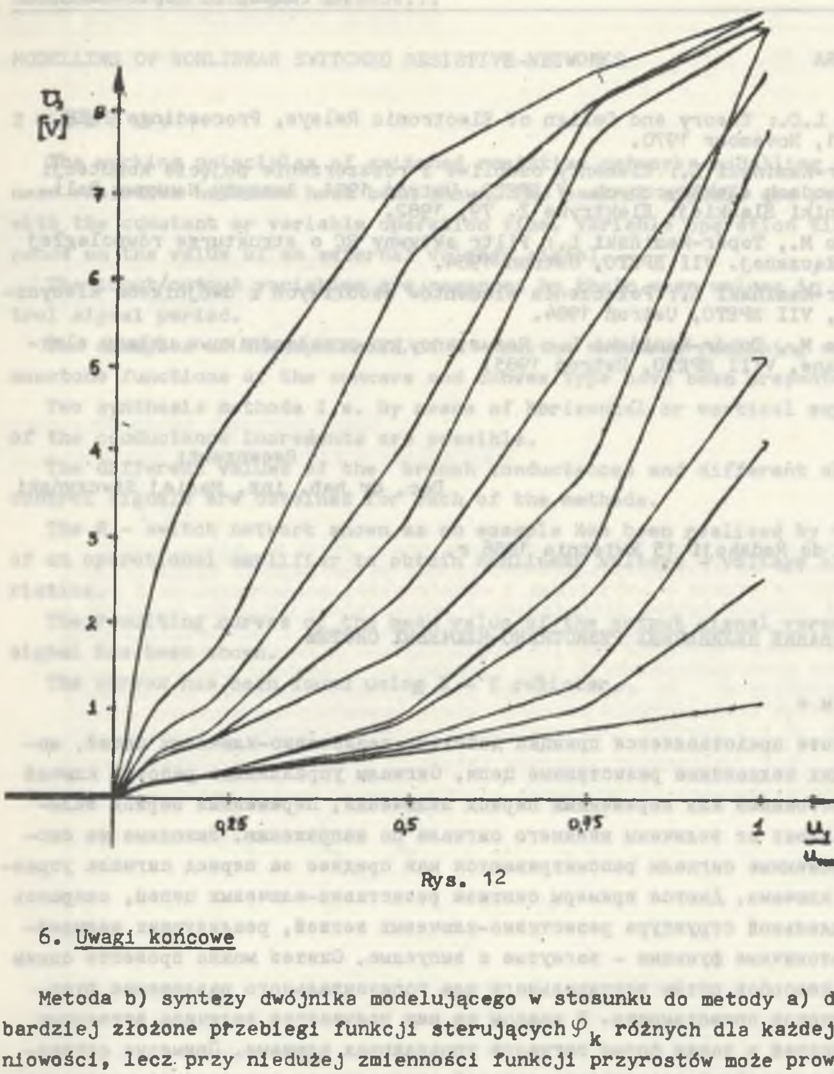
Dla metody b) dwójnik modelujący ma identyczną konfigurację, lecz funkcję φ_k mają kształt podany na rys. 10b, natomiast konduktancje G_m wartości dla:

$$m = 1, \quad \Delta U_{2,1} = 1, \quad \frac{\Delta 1}{T} = 0{,}75 \longrightarrow G_1 = \frac{4}{3}\, G_F$$

$$m = 2, \quad \Delta U_{2,2} = 2, \quad \frac{\Delta 2}{T} = 0{,}5 \longrightarrow G_2 = 4\, G_F$$

$$m = 3, \quad \Delta U_{2,3} = 1, \quad \frac{\Delta 2}{T} = 0{,}25 \longrightarrow G_3 = 4\, G_F$$

Na rys. 12 przedstawione są charakterystyki nieliniowe realizowane przez rzeczywisty układ modelujący z rys. 7 dla dwójnika $g(t)$ czterogałęziowego o funkcjach sterujących impulsami jednoprzedziałowymi (metoda a), dla różnych ustawianych wartości konduktancji G_1 do G_4.



Rys. 12

6. Uwagi końcowe

Metoda b) syntezy dwójnika modelującego w stosunku do metody a) daje bardziej złożone przebiegi funkcji sterujących φ_k różnych dla każdej nieliniowości, lecz przy niedużej zmienności funkcji przyrostów może prowadzić do sieci o mniejszej ilości gałęzi, a tym samym mniejszej ilości przełączników w układzie. Przedstawiony układ pozwala realizować funkcje nieliniowe monotonnie rosnące. Aby uzyskać nieliniowości malejące i niemonotoniczne, należy zastosować inną funkcję φ_o sterujące kluczem szeregowym. I tak dla τ_o malejącego ze wzrostem napięcia U_1 uzyskuje się nieliniowości monotoniczne malejące, natomiast dla φ_o o kształcie impulsu o stałej szerokości, przesuwanego wzdłuż przedziału O-T w funkcji U_1, otrzymuje się nieliniowości niemonotoniczne.

LITERATURA

[1] Chua L.O.: Theory and Design of Electronic Relays, Proceedings IEEE, No 11, November 1970.

[2] Topór-Kamiński L.: Elementy osobliwe i rozszerzenie pojęcia komutacji w obwodach elektrycznych. V SPETO, Ustroń 1981. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Elektryka Z. 79, 1982.

[3] Pasko M., Topór-Kamiński L.: Filtr aktywny RC o strukturze równoległej przełączanej. VII SPETO, Ustroń 1984.

[4] Topór-Kamiński L.: Połączenia elementów osobliwych z dwójnikami klasycznymi, VII SPETO, Ustroń 1984.

[5] Pasko M., Topór-Kamiński L.: Rezystancyjno-przełącznikowe układy elektryczne, VIII SPETO, Ustroń 1985.

Recenzent:
Doc. dr hab. inż. Maciej Siwczyński

Wpłynęło do Redakcji 15 kwietnia 1986 r.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНО-КЛЮЧЕВЫХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В работе представляется принцип действия резистивно-ключевых цепей, моделирующих нелинейные резистивные цепи. Сигналы управляющие работой ключей имеют постоянный или переменный период включения. Переменный период включения зависит от величины внешнего сигнала по напряжению. Выходные из системы переменные сигналы рассматриваются как среднее за период сигнала управляющего ключами. Даются примеры синтеза резистивно-ключевых цепей, опираясь на параллельной структуре резистивно-ключевых ветвей, реализующих нелинейные монотоничные функции - вогнутые и выпуклые. Синтез можно провести одним из двух способов путём вертикального или горизонтального разложения функций приростов проводимости. В каждом из них получается величина ветвенных проводимостей а также форма сигналов управляющих ключами. Примерно осуществлённый нелинейный резистивно-ключевой двухполюсник применяется между операционными усилителями с целью получения нелинейных характеристик типа напряжение - напряжение. Полученные результаты представлены в виде кривой средней величины выходного сигнала, который является функцией входного сигнала, полученного при помощи регистирующего устройства.

MODELLING OF NONLINEAR SWITCHED RESISTIVE-NETWORKS

S u m m a r y

The working principles of switched resistive networks modelling nonlinear resistive networks have been shown. The control signals are periodic with the constant or variable operation time. Variable operation time depends on the value of an external voltage signal.

The input/output variables are regarded by their mean walues in the control signal period.

The examples of the synthesis of R - switch networks realising nonlinear monotone functions of the concave and convex type have been presented.

Two synthesis methods i.e. by means of horizontal or vertical expansion of the conductance increments are possible.

The different values of the branch conductances and different shapes of control signals are obtained for each of the methods.

The R - switch network shown as an example has been realised by the use of an operational amplifier to obtain nonlinear voltage - voltage characteristics.

The resulting curves of the mean value of the output signal versus input signal has been shown.

The curves has been found using X - Y register.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1988

Seria: ELEKTRYKA z. 103 Nr kol. 904

Marian PAŚKO
Tadeusz Świętlicki

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

FILTRY AKTYWNE RC DRUGIEGO RZĘDU O ELEKTRONICZNIE PRZESTRAJANYCH PARAMETRACH

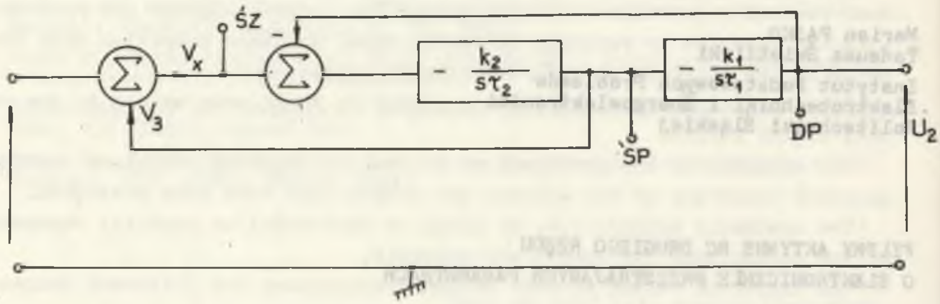
Streszczenie. W pracy przeprowadzono analizę układu aktywnego RC realizującego transmitancję napięciowo-napięciową filtrów drugiego rzędu z wykorzystaniem integratorów i sumatorów. W pracy, korzystając z ogólnego schematu realizowanej transmitancji n-tego stopnia za pomocą integratorów i sumatorów [1], podano jedną z jego modyfikacji umożliwiającą realizację następujących filtrów drugiego rzędu: dolnoprzepustowego, środkowoprzepustowego oraz środkowozaporowego zrealizowanych na czterech wzmacniaczach operacyjnych [2]. Na przykładzie filtru środkowoprzepustowego przeprowadzono elektroniczne przestrajanie pulsacji środkowej ω_0 przy stałej wartości dobroci Q i H_0 oraz przestrajanie dobroci Q przy stałej wartości pulsacji ω_0 i H_0. Dla rozpatrywanego filtru przeprowadzono eksperymenty doświadczalne oraz analizę wrażliwości $S_{x_i}^{Q}$ i $S_{x_i}^{\omega_0}$.

1. Wstęp

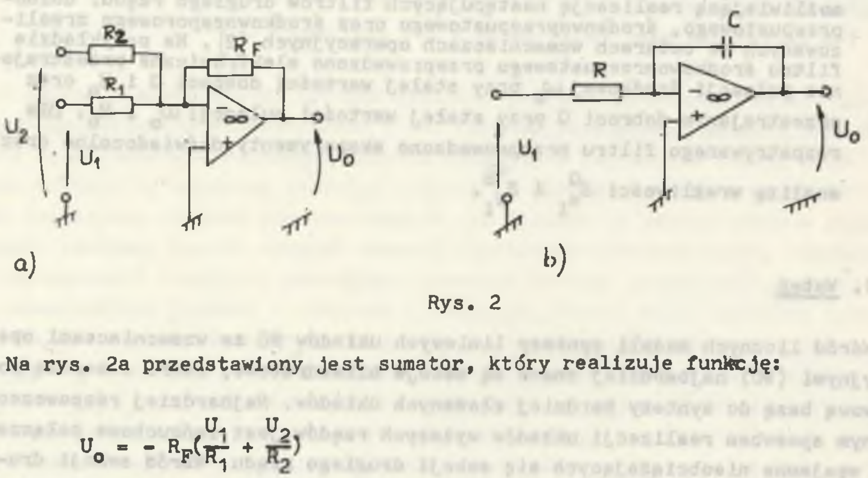
Wśród licznych modeli syntezy liniowych układów RC ze wzmacniaczami operacyjnymi (WO) najbardziej znane są sekcje bikwadratowe, które stanowią podstawową bazę do syntezy bardziej złożonych układów. Najbardziej rozpowszechnionym sposobem realizacji układów wyższych rzędów jest łańcuchowe połączenie wzajemne nieobciążających się sekcji drugiego rzędu. Wśród sekcji drugiego rzędu najlepiej są zbadane realizacje, w których występuje tylko jeden wzmacniacz operacyjny. Dobrze zbadane są również realizacje z dwoma wzmacniaczami operacyjnymi. Stosunkowo mniej miejsca poświęcono realizacjom z trzema i czterema wzmacniaczami operacyjnymi. W literaturze opisano kilka układów tego typu, np. Kerwin - Huelsman - Newcomb (KHN) [9], Aderberg - - Mossberg [6].

W pracy przedstawiono układ z czterema wzmacniaczami operacyjnymi o ogólnym schemacie przedstawionym na rys. 1.

Układ ten zawiera dwa integratory oraz dwa sumatory. Układ ten pozwala realizować sekcję bikwadratową następujących filtrów o łatwo przestrajanych parametrach: dolnoprzepustowego, środkowoprzepustowego oraz środkowozaporowego. W ogólnej strukturze sekcji bikwadratowej przedstawionej na rys. 1 realizacja poszczególnych bloków przedstawiona jest na rys. 2.



Rys. 1



Rys. 2

Na rys. 2a przedstawiony jest sumator, który realizuje funkcję:

$$U_o = -R_F\left(\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2}\right) \tag{1}$$

Natomiast na rys. 2b przedstawiony jest integrator, dla którego transmitancja napięciowo-napięciowa ma postać:

$$K_u = \frac{U_o}{U_1} = -\frac{1}{sCR}\,. \tag{2}$$

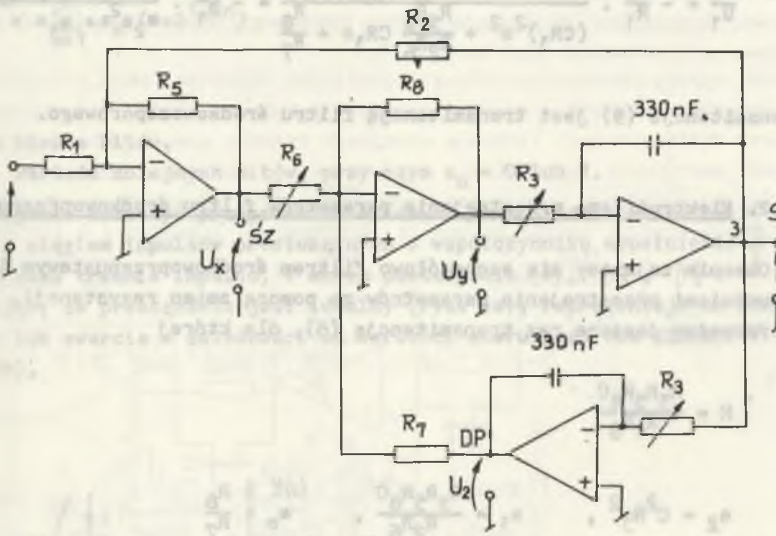
Wykorzystując bloki, przedstawione na rys. 1, otrzymujemy strukturę w postaci pokazanej na rys. 3. Równania opisujące układ z rys. 3, przy założeniu że wzmacniacze operacyjne są idealne, mają postać:

$$U_x = -R_5\left(\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_3}{R_2}\right) \tag{3}$$

$$U_y = -R_8\left(\frac{U_x}{R_6} + \frac{U_2}{U_7}\right) \tag{4}$$

$$U_3 = -\frac{U_y}{sCR} \tag{5}$$

$$U_2 = -\frac{U_3}{sCR_3}\ . \tag{6}$$



Rys. 3

Korzystając z równań (3 - 6) można wyznaczyć kolejne transmitancje napięciowo-napięciowe dla różnych zacisków traktowanych jako wyjściowe

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{R_5R_8}{R_1R_6}}{(CR_3)^2\ s^2 + \frac{R_5R_8}{R_2R_6}\ CR_3s + \frac{R_8}{R_7}} = \frac{H}{a_2s^2 + a_1s + a_0}\ . \tag{7}$$

Transmitancja (7) jest transmitancją filtru dolnoprzepustowego.

$$\frac{U_3}{U_1} = \frac{-\frac{R_5R_8}{R_1R_6}\ s}{(CR_3)^2\ s^2 + \frac{R_5R_8}{R_2R_6}\ CR_3s + \frac{R_8}{R_7}} = \frac{-Hs}{a_2s^2 + a_1s + a_0} = \frac{L(s)}{D(s)}\ . \tag{8}$$

Transmitancja (8) jest transmitancją filtru środkowoprzepustowego.

$$\frac{U_x}{U_1} = -\frac{R_5}{R_1}\cdot\frac{(sCR_3)^2 + \frac{R_8}{R_7}}{(CR_3)^2s^2 + \frac{R_5R_8}{R_2R_6}\ CR_3s + \frac{R_8}{R_7}} = -\frac{R_5}{R_1}\cdot\frac{(sCR_3)^2 + \frac{R_8}{R_7}}{a_2s^2 + a_1s + a_0} \tag{9}$$

Transmitancja (9) jest transmitancją filtru środkowozaporowego.

2. Elektroniczne przestrajanie parametrów filtru środkowoprzepustowego

Obecnie zajmiemy się szczegółowo filtrem środkowoprzepustowym i jego możliwościami przestrajania parametrów za pomocą zmian rezystancji. W tym celu rozważmy jeszcze raz transmitancję (8), dla której

$$H = \frac{R_3R_5R_8C}{R_1R_6}$$

$$a_2 = C^2R_3^{\ 2}\ , \qquad a_1 = \frac{R_3R_5R_8C}{R_2R_6}\ , \qquad a_0 = \frac{R_8}{R_7}$$

Dobroć

$$Q = \frac{\sqrt{a_0a_2}}{a_1} = \frac{R_2R_6}{R_5}\cdot\frac{1}{\sqrt{R_7R_8}}\ , \tag{10}$$

pulsacja środkowa

$$\omega_o = \sqrt{\frac{a_o}{a_2}} = \frac{1}{R_3C}\sqrt{\frac{R_8}{R_7}}, \tag{11}$$

oraz współczynnik wzmocnienia dla pulsacji środkowej

$$H_o = \frac{H}{a_1} = \frac{R_2}{R_1}. \tag{12}$$

Z relacji (10), (11) i (12) wynika, że można niezależnie przestrajać ω_o, Q przy stałej wartości H_o. Zmieniając R_6 lub R_5 można zmieniać dobroć Q przy stałej wartości ω_o i H_o, zmieniając natomiast R_3 można zmieniać ω_o przy stałej wartości dobroci Q i H_o.

Wymienione parametry można przestrajać na wiele sposobów np. za pomocą mnożących przetworników cyfrowo-analogowych MPCA [7], w których to rezystancję można zmieniać wg funkcji:

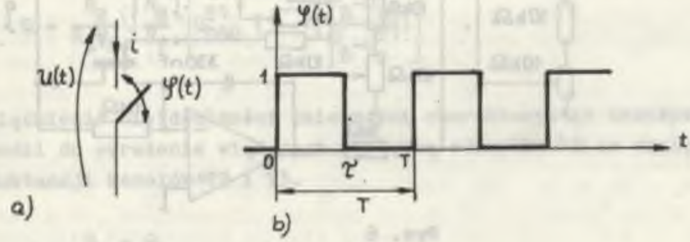
$$r_o = \frac{3\,R}{\sum\limits_{n=1}^{N} a_n\,(1+2^{1-2n})}, \tag{13}$$

gdzie:

N - liczba bitów,

a_n - wartość kolejnych bitów, przy czym a_n = 0 lub 1.

Przestrajanie może być przeprowadzane też za pomocą zmian rezystancji przełączanej ciągiem impulsów prostokątnych o współczynniku wypełnienia $\frac{\tau}{T}$, gdzie τ czas trwania impulsu, T okres powtarzania [8], [10], [11].
Zakładając, że przełącznik jest idealny (rys. 4a), reprezentuje on idealną przerwę lub zwarcie w zależności od wartości sterującej nim funkcji φ (t) (rys. 4b).

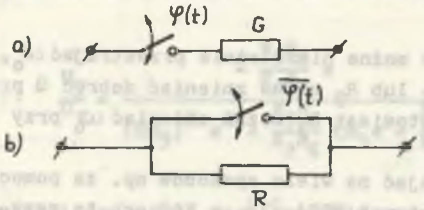


Rys. 4

Najprostsze połączenia klucza i elementów rezystancyjnych prowadzą do uzyskania rezystancji zmiennych w czasie (rys. 5).

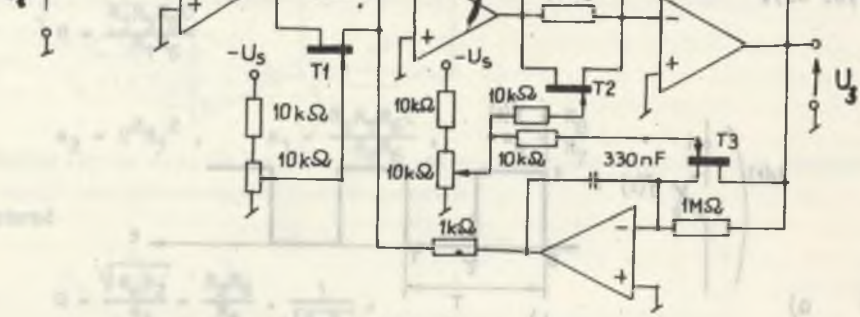
$$g(t) = G.\varphi(t) ,$$

$$r(t) = R.\overline{\varphi}(t),$$



Rys. 5

gdzie:
$\overline{\varphi}(t)$ jest negacją logiczną funkcji $\varphi(t)$ w stosunku do jej wartości 0 lub 1. Jeżeli okres powtarzania T jest znacznie mniejszy od okresu sygnału wejściowego T_s, wówczas wartość średnia za okres $\overline{g(t)} = G \cdot \frac{\tau}{T}$ (rys. 5a). W ogólnym przypadku rezystancje i konduktancje mogą być opisane za pomocą bardziej złożonych funkcji [1]. W pracy wykorzystano ideę tranzystora polowego jako rezystora o wartości przestrajanej napięciem. Praktyczna realizacja filtru wykorzystującego tranzystory polowe złączowe przedstawiona jest na rys. 6.



Rys. 6

Tranzystory pracują w układzie jako sterowane rezystancje. Aby nie wystąpiły efekty związane z nieliniowością charakterystyk tranzystorów, musi być spełniony warunek [3], [5]

$$U_{DS} - U_{GS} \ll U_p \,, \tag{14}$$

gdzie:

U_{DS} - napięcie dren - źródło,

U_{GS} - napięcie bramka - źródło,

U_p - napięcie odcięcia.

Przy spełnionym warunku (14) wyrażenie na konduktancję kanału ma postać [3]:

$$G_{DS} = G_{DSO}\left(1 - \sqrt{\frac{\varphi_B - U_{GS}}{\varphi_B - U_p}}\right), \tag{15}$$

gdzie:

G_{DSO} - konduktancja kanału otwartego,

φ_B - napięcie dyfuzyjne ($\approx 0{,}7$ V dla tranzystorów krzemowych).

Zapewnienie dużej wartości amplitudy sygnału wejściowego wymaga stosowania tranzystorów polowych o dużej wartości odcięcia. Uzyskanie prostej struktury układów stawia również wymaganie symetrii charakterystyk tranzystorów w kierunku normalnym i inwersyjnym. Zakładając identyczne charakterystyki tranzystorów T2 i T3 uzyskujemy następujące wyrażenia na zależność dobroci Q i pulsacji środkowej ω_0 filtru od napięć stałych sterujących tranzystory:

$$\omega_0 = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{R_8}{R_7}}\, G_{DSO}^{T2}\left(1 - \sqrt{\frac{\varphi_B - U_{GS}^{T2}}{\varphi_B - U_p^{T2}}}\right) \tag{16}$$

$$Q = \frac{R_2}{R_5 R_8}\sqrt{\frac{R_8}{R_7}}\left[G_{DSO}^{T1}\left(1 - \sqrt{\frac{\varphi_B - U_{GS}^{T1}}{\varphi_B - U_p^{T1}}}\right)\right]^{-1} . \tag{17}$$

Uwzględnienie nieidealności zbieżności charakterystyk tranzystorów T2 i T3 prowadzi do wyrażenia wiążącego względną odchyłkę δQ ze względną różnicą konduktancji kanałów T2 i T3.

$$\delta Q = \frac{Q_i - Q_r}{Q_i} , \tag{18}$$

gdzie:

Q_i - dobroć dla idealnej zbieżności charakterystyk,

Q_r - dobroć rzeczywista.

I tak

$$\delta Q = 1 - \sqrt{1 - \delta G_{DS}} = 1 - \sqrt{1 - \frac{G_{DS}^{T2} - G_{DS}^{T3}}{G_{DS}^{T2}}} . \tag{19}$$

Indeksy T1, T2, T3 w wyrażeniach (16), (17) i (19) odnoszą się do tranzystorów T1, T2, T3.

Teoretyczny zakres zmian dobroci Q przy określonej pulsacji środkowej jest ograniczony z uwagi na charakterystykę częstotliwościową wzmacniaczy operacyjnych [1].

3. Analiza wrażliwości

Wrażliwość pierwszego rzędu na zmiany parametrów oceniamy wg definicji klasycznej podanej przez Bodego

$$S_{x_i}^{T} = \frac{\partial(\ln T)}{\partial(\ln x_i)} = \frac{\partial T}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{T} . \tag{20}$$

Z definicji wrażliwości pierwszego rzędu wynikają pewne własności [1], [2], dzięki którym wrażliwości $S_{x_i}^{Q}$ i $S_{x_i}^{\omega_o}$ mogą być wyrażone za pomocą wzorów:

$$S_{x_i}^{Q} = \frac{1}{2} (S_{x_i}^{a_o} + S_{x_i}^{a_2} - 2S_{x_i}^{a_1}), \tag{21}$$

$$S_{x_i}^{\omega_o} = \frac{1}{2} (S_{x_i}^{a_o} - S_{x_i}^{a_2}). \tag{22}$$

W rozpatrywanym przez nas modelu z rys. 3

$$S_{R_2}^{Q} = 1, \quad S_{R_6}^{Q} = 1, \quad S_{R_5}^{Q} = -1, \quad S_{R_7}^{Q} = -\frac{1}{2}, \quad S_{R_8}^{Q} = -\frac{1}{2} .$$

Natomiast:

$$S_{R_3}^{\omega_0} = -1, \quad S_{C}^{\omega_0} = -1, \quad S_{R_8}^{\omega_0} = \frac{1}{2}, \quad S_{R_7}^{\omega_0} = -\frac{1}{2}.$$

4. Weryfikacja praktyczna i wnioski

Układ przedstawiony na rys. 6 sprawdzono praktycznie, realizując filtr środkowoprzepustowy.

W układzie modelowym zastosowano wzmacniacze operacyjne ULY 7741 oraz tranzystory polowe BF 245. Ze względu na małą wartość napięcia progowego tranzystorów i wymaganego dużego zakresu regulacji dobroci Q i pulsacji ω_0 (a więc dużych zmian U_{GS}) wartość międzyszczytowa napięcia wejściowego nie powinna przekraczać 100 mV. Dla wartości podanych na rys. 6 uzyskano następujące rezultaty:

Zakres zmian częstotliwości środkowej osiągnięto 2,5 Hz - 2 kHz. Wartości realizowanych dobroci wynosiły od kilkudziesięciu do około 1000. Przy zastosowaniu wewnętrznie skompensowanych wzmaniaczy operacyjnych filtr staje się niestabilny dla częstotliwości kilku kHz przy wymaganej dobroci rzędu kilkuset. Prosta struktura układu oraz łatwość niezależnego przestrajania pulsacji środkowej filtru i dobroci za pomocą napięcia stałego czynią go atrakcyjnym w wielu zastosowaniach. Może być on zastosowany w prostych analizatorach widmowych w zakresie małych i bardzo małych częstotliwości z automatycznym przestrajaniem zakresu i przedziału analizy, w układach pomiarowych.

LITERATURA

[1] Białko M. i inni: Filtry aktywne RC. WNT, Warszawa 1979.

[2] Hruby J., Novak M.: Filtry RC. Academia, Praha 1976.

[3] Marciniak W.: Przyrządy półprzewodnikowe i układy scalone. WNT, Warszawa 1979.

[4] Pawłowski J.: Podstawowe układy elektroniczne-wzmacniacze i generatory. WNT, Warszawa 1980.

[5] Świt A., Pułtorak J.: Przyrządy półprzewodnikowe. WNT, Warszawa 1979.

[6] Akerberg D., Mossberg K.: A versatile active RC bulding block with inherent compensation for the finite bandwidth of the amplifier. IEEE Trans. Circuits and System, vol. CAS-21, 1974.

[7] Czarnul Z., Białko M.: Realizacja filtrów aktywnych RC przestrajanych cyfrowo o zwiększonym zakresie częstotliwości. V KK TO i UE, Łódź 1982.

[8] Guziński A., Matheau J.C.: Projektowanie filtrów R - przełączane. VII KK TO i UE, Kazimierz 1984.

[9] Kerwin W., Huelsman L., Newcomb R.: State variable synthesis for insensitive integrated circuit transfer functions, IEEE J. Solid State Circuits, vol. SC-2, 1967.

[10] Pasko M.: Wszechprzepustowa sekcja drugiego rzędu na bazie ogniwa środkowoprzepustowego z okresowo sterowanymi parametrami. VII-SPETO, Ustroń 1984.

[11] Pasko M., Topór-Kamiński Ł.: Rezystancyjno-przełącznikowe układy elektryczne. VIII - SPETO, Ustroń 1985.

Recenzent:

Doc. dr hab. inż. Maciej Siwczyński

Wpłynęło do Redakcji 15 kwietnia 1986 r.

АКТИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ RC ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЭЛЕКТРОННОЙ ПЕРЕСТРОЙКОЙ ПАРАМЕТРОВ

Р е з ю м е

В статье проведён анализ активной системы RC содержащей сумматоры и интеграторы, реализующей передаточную функцию типа напряжение-напряжение фильтров второго порядка.

Некоторая модификация обобщённой схемы, выполняющей передаточную функцию -н-порядка, пользующейся интеграторами и сумматорами [1] представляет возможность осуществления фильтра низких частот, полосового и полосового задерживающего фильтров, вмешающих четыре операционных усилителя [2]. Для полосового фильтра проведена электронная перестройка пульсации ω_o с постоянными значениями добротности и H_o а также перестройка добротности Q с постоянными значениями пульсации ω_o и H_o.

В статье помещены итоги опытов с вышеуказанными фильтрами. Проведён также анализ чувствительности. S_x^Q и $S_x^{\omega_o}$.

THE SECOND ORDER ACTIVE RC FILTERS WITH VARIABLE PARAMETERS

S u m m a r y

The paper contains an analysis of active RC filter, which permits realization of the 2^{nd} order voltage - voltage transfer function by the use of integrators and summators. The authors modify the general realization of the n - order transfer function with integrators and summators [1] and obtain the particular realization of 2^{nd} order low band - pass, middle band - - pass and middle band - stop active filters made of four operating ampifiers [2]. On the base of moddle band - pass filter, the authors show the possibility of electronic control of angular middle frequency ω_o, when

the Q factor and the H_o parameter are constant, and of the Q factor, when the ω_o and H_o parameters are constant. The paper also deals with the analysis of the S_x^Q and $S_x^{\omega_o}$ sendistivities. The authors performed an experiment with middle band - pass active - filter.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1988

Seria: ELEKTRYKA z. 103 Nr kol. 904

Maciej SIWCZYŃSKI
Wyższa Szkoła Inżynierska
Zielona Góra

SYNTEZA NIELINIOWYCH WYMIERNYCH UKŁADÓW AUTONOMICZNYCH

Streszczenie. W artykule wprowadzono pojęcie równania różniczkowego wymiernego. Jest to równanie różniczkowe w $\mathbb{R}^n$, którego prawą stroną jest wielowymiarowa funkcja wymierna. Wykazano, że półgrupa wymiernych transformacji współrzędnych przekształca zbiór równań wymiernych w siebie, a każde równanie wymiarne jest realizowane za pomocą integratorów, sumatorów i układów mnożących. Twierdzenie to zastosowano do syntezy dwuwymiarowego układu autonomicznego realizującego z dowolną dokładnością zadany gładki cykl graniczny. Podano też metodę syntezy równania wymiernego, którego rozwiązania spełniają wymierne warunki nieholonomiczne. Zamieszczony przykład nadaje się do syntezy przestrajanych generatorów drgań.

1. Równania różniczkowe wymierne

Niech $x = (x_1,\dots,x_n)$ oznacza wektor w $\mathbb{R}^n$, a $p = (p_1,\dots,p_n)$ będzie multiindeksem o całkowitych, nieujemnych składowych $p_1,\dots,p_n$.
Suma skończonej liczby składników

$$a(x) = \sum_p a_p x^p = \sum_{p_1} \dots \sum_{p_n} a_{p_1\dots p_n} x_1^{p_1}\dots x_n^{p_n}$$

jest wielomianem n-zmiennych. Z wyrażenia

$$ab(x) \triangleq \sum_p a_p x^p \sum_q b_q x^q = \sum_p c_p x^p ,$$

gdzie

$$c_p = \sum_q a_{p-q}\, b_q ,$$

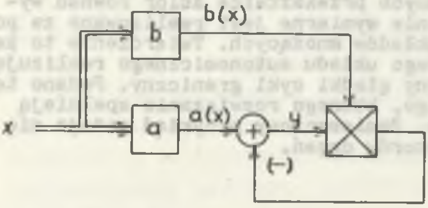
wynika, że iloczyn wielomianów jest wielomianem o współczynnikach danych splotem. Iloraz wielomianów

$$a/b(x) \triangleq \frac{a(x)}{b(x)} = \frac{\sum\limits_p a_p x^p}{\sum\limits_p b_p x^p}$$

jest funkcją wymierną wielu zmiennych.

Kombinacja, iloczyn i iloraz funkcji wymiernych są funkcjami wymiernymi, zatem zbiór funkcji wymiernych tworzy ciało. Wynika stąd, że złożenie funkcji wymirnych jest funkcją wymierną.

Macierz o elementach wymiernych będzie dalej nazywana krótko macierzą wymierną. Kombinacja, iloczyn i odwrotna macierzy wymiernych są macierzami wymiernymi.



Rys. 1. Blok realizacji wielowymiarowej funkcji wymiernej

Fig. 1. The block realising multidimencional rational function

Funkcja wymierna jest realizowalna za pomocą sumatorów i układów mnożących. Aby udowodnić to twierdzenie, trzeba wykazać, że istnieje układ sumująco-mnożący realizujący funkcję wymierną. Dowolny wielomian jest realizowany za pomocą sumatorów i układów mnożących. Na rys. 1 pokazano układ złożony z dwóch bloków realizujących wielomiany a, b, z układu mnożącego i węzła sumacyjnego.

Z analizy schematu wynika równanie wiążące multisygnał wejściowy $x = (x_1, \ldots, x_n)$ z sygnałem wyjściowym y: $[1 + b(x)]\, y = a(x)$. Zatem układ ten realizuje funkcję wymierną $a/(1+b)(x)$.

Z wyrażeń

$$\frac{\partial a}{\partial x_i} = \sum_p p_i\, a_p\, x_1^{p_1} \ldots x_i^{p_i - 1} \ldots x_n^{p_n}$$

$$\frac{\partial a/b}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial a}{\partial x_i}\, b(x) - a\, \frac{\partial b}{\partial x_i}(x)}{[b(x)]^2} = c/d(x)$$

wynika, że pochodna cząstkowa wielomianu jest wielomianem, a pochodna cząstkowa funkcji wymiernej jest funkcją wymierną. Jeżeli f(x) jest funkcją wymierną, to jej gradient

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

jest wektorem wymiernym. Jeżeli

$$F(x) = \left[F_1(x), \dots, F_m(x) \right]$$

jest wektorem wymiernym, to jakobian

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ & \dots & \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

jest macierzą wymierną.

Równaniem różniczkowym wymiernym nazwiemy równanie w R^n z wymierną prawą stroną:

$$\dot{x} = F(x), \tag{1}$$

gdzie

$$F(x) = \left[a_1/b_1(x), \dots, a_n/b_n(x) \right].$$

Nietrudno wykazać, że wymierna zamiana zmiennych

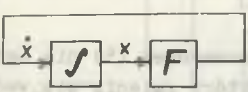
$$x = \phi(y) = \left[\alpha_1/\beta_1(y), \dots, \alpha_n/\beta_n(y) \right] \tag{2}$$

transformuje równanie różniczkowe wymierne w równanie różniczkowe wymierne. Istotnie działając transformacją (2) na równanie (1) otrzymujemy równanie różniczkowe:

$$\dot{y} = \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \right]^{-1} F\left[\phi(y) \right], \tag{3}$$

które na podstawie poprzednio wyprowadzonych twierdzeń o funkcjach wymiernych posiada wymierną prawą stronę.

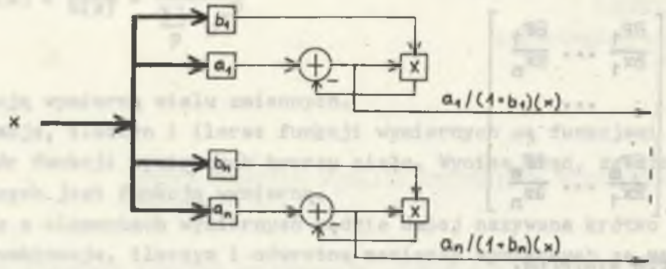
Powyższy rezultat można sformułować za pomocą następującego twierdzenia: Półgrupa wymiernych transformacji zmiennych przekształca zbiór równań różniczkowych wymiernych w siebie.



Rys. 2. Układ realizacji wymiernego równania różniczkowego

Fig. 2. The system realising rational differential

Twierdzenie to ma istotne znaczenie podczas syntezy układów różniczkowych. Każdy taki układ jest realizowany w strukturze widocznej na rys. 2, w której blok wektor - funkcji wymiernej F utworzony jest poprzez multiplikację n-układów pokazanych na rys. 1. Strukturę takiego bloku ilustruje rys. 3.



Rys. 3. Blok realizacji wielowymiarowej wektorowej funkcji wymiernej
Fig. 3. The bloock realising multidimensional rational vector - function

2. Synteza układu wymiernego z pomocniczym wektorem sterowania

Dane jest równanie różniczkowe

$$\dot{x} = F(x,u), \tag{4}$$

gdzie: $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $F : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest funkcją wymierną od x,u. Zadaniem syntezy jest wybór wektora sterowania u w taki sposób, aby rozwiązania równania (4) spełniały warunek:

$$Q(x,\dot{x}) = \theta, \quad \text{dla} \quad t \in (0,\infty), \tag{5}$$

gdzie: $Q : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest funkcją wymierną.

Wykażemy, że postawione zadanie jest z pewną dokładnością realizowane w klasie różniczkowych równań wymiernych. Poszukujemy w tym celu wektora sterowania u, który zapewni spełnienie warunku

$$Q(x,\dot{x}) = \delta, \tag{6}$$

gdzie $\delta \in \mathbb{R}^m$ oraz $\|\delta(t)\|_{\mathbb{R}^m} \rightarrow 0$ przy $t \rightarrow \infty$. Tym samym warunek (5) nie będzie spełniony dokładnie, lecz z pewnym małym błędem δ, który zmienia się według równania różniczkowego liniowego

$$\dot{\delta} = T\delta, \tag{7}$$

gdzie T jest $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ - macierzą o wartościach własnych leżących poza prawą domkniętą półpłaszczyzną. Wstawiając równość (6) do równania (7) otrzymuje się:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial Q}{\partial \dot{x}}\ddot{x} = T\,Q(x,\dot{x}) \tag{8}$$

Równanie (8) musi być spełnione przez rozwiązanie równania (4) dla każdego $t \in [0,\infty)$, zatem wstawiając równanie (4) do (8) otrzymuje się

$$\frac{\partial Q}{\partial \dot{x}}\left[x,F(x,u)\right]\frac{\partial F}{\partial u}\dot{u} = T\,Q\left[x,F(x,u)\right] - \frac{\partial Q}{\partial x}\left[x,F(x,u)\right]F(x,u) -$$

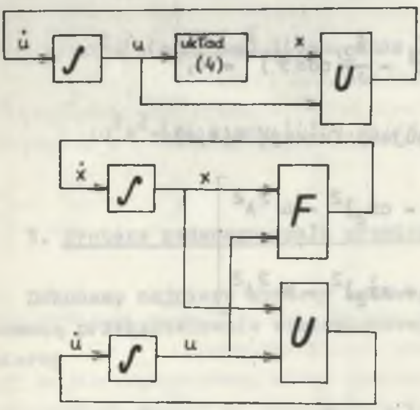
$$- \frac{\partial Q}{\partial \dot{x}}\left[x,F(x,u)\right]\frac{\partial F}{\partial x}F(x,u),$$

skąd

$$\dot{u} = \left(\frac{\partial Q}{\partial \dot{x}}\left[x,F(x,u)\right]\frac{\partial F}{\partial u}\right)^{-1}\left(T\,Q\left[x,F(x,u)\right] - \frac{\partial Q}{\partial x}\left[x,F(x,u)\right]F(x,u)\right) -$$

$$- \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}F(x,u) = U(x,u). \tag{9}$$

Otrzymana funkcja $U : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ jest funkcją wymierną od x,u, gdyż zbiór funkcji wymiernych tworzy ciało. W ten sposób równania (4) i (9) tworzą parę równań różniczkowych wymiernych



Rys. 4. Struktury układów z pomocniczym wektorem sterowania

Fig. 4. The realisable structure of the systems with the auxilary contron vectors

$$\dot{x} = F(x,u) \tag{4}$$

$$\dot{u} = U(x,u) \tag{9}$$

Podczas syntezy struktury realizującej parę równań (4), (9) trzeba rozpatrzyć dwa przypadki. Pierwsza struktura, w przypadku gdy układ (4) jest zadany, zilustrowana jest na rys. 4a, druga gdy układ (4) nie jest zadany, widoczna jest na rys. 4b. W obu przypadkach bloki F i U realizują funkcje wymierne $\mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$.

Przykład

Dokonać syntezy struktury generatora dwóch drgań sinusoidalnych o nastawianej częstotliwości i nastawianym przesunięciu fazowym.

Żądane równania czasowe drgań są następujące:

$$x_1(t) = A\sin(\omega t + \varphi),$$

$$x_2(t) = A\sin(\omega t - \varphi),$$

skąd otrzymuje się tożsamości:

$$\frac{x_1}{A} = \sin\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\sin\varphi$$

$$\frac{x_2}{A} = \sin\omega t\cos\varphi - \cos\omega t\sin\varphi$$

$$\frac{\dot{x}_1}{A} = \cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi$$

$$\frac{\dot{x}_2}{A} = \cos\omega t\cos\varphi + \sin\omega t\sin\varphi.$$

Stąd

$$\left(\frac{x_1}{A}\sin\varphi + \frac{\dot{x}_1}{\omega A}\cos\varphi\right)^2 + \left(\frac{x_2}{A}\cos\varphi + \frac{\dot{x}_2}{\omega A}\sin\varphi\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{x_1}{A}\cos\varphi - \frac{\dot{x}_1}{\omega A}\sin\varphi\right)^2 + \left(\frac{x_2}{A}\sin\varphi - \frac{\dot{x}_2}{\omega A}\cos\varphi\right)^2 = 1.$$

Podstawiając $c = \cos\varphi$, $s = \sin\varphi$ zapisujemy funkcję $Q(x,\dot{x})$:

$$Q(x,\dot{x}) = \begin{bmatrix} (c\omega x_1 - s\dot{x}_1)^2 + (s\omega x_2 - c\dot{x}_2)^2 - \omega^2A^2 \\ (s\omega x_1 + c\dot{x}_1)^2 + (c\omega x_2 + s\dot{x}_2)^2 - \omega^2A^2 \end{bmatrix}$$

Za obiekt sterowania można przyjąć dowolny sterowany układ równań wymiernych, na przykład dwa integratory:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2\end{aligned}\right. \Longrightarrow F(x,u) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Przyjmując

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

otrzymamy

$$U(x,u) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\left[x,F(x,u)\right]\frac{\partial F}{\partial u}\right)^{-1}\left(TQ\left[x,F(x,u)\right] - \frac{\partial Q}{\partial x}\left[x,F(x,u)\right]F(x,u)\right) -$$

$$- \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}(x,u) =$$

$$= \frac{1}{-4sc\omega x_1u_2+4sc\omega x_2u_1+4(s^4-c^4)u_1u_2}\begin{bmatrix} 2s(su_2+c\omega x_2), & 2c(s\omega x_2-cu_2) \\ -2c(cu_1+s\omega x_1), & 2s(su_1-c\omega x_1) \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} \omega^2A^2+(c\omega x_1-su_1)(3su_1-c\omega x_1) + (s\omega x_2-cu_2)(3cu_2-s\omega x_2) \\ \omega^2A^2-(s\omega x_1+cu_1)(3cu_1+s\omega x_1) + (c\omega x_2+su_2)(3su_2+c\omega x_2) \end{bmatrix}$$

3. Synteza zadanego cyklu granicznego

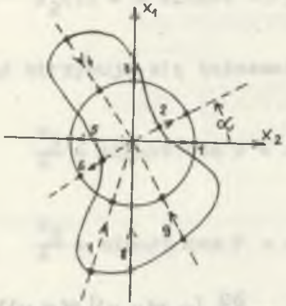
Dokonamy najpierw syntezy kołowego cyklu granicznego, a następnie za pomocą przekształcenia wielomianowego nadamy mu pożądany kształt. Układ wymierny

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \omega\left[x_2 + x_1\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)\right] \\ \dot{x}_2 &= \omega\left[-x_1 + x_2\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)\right]\end{aligned} \qquad (10)$$

posiada globalnie stabilny kołowy cykl graniczny. Istotnie przechodząc do współrzędnych biegunowych $x_1 = r\cos\alpha$, $x_2 = r\sin\alpha$ przekształcony układ równań (10) do postaci:

$$\dot{r} = \omega r(1 - r^2)$$

$$\dot{\alpha} = \omega .$$



Rys. 5. Przekształcenia gładkiego cyklu granicznego

Fig. 5. The smooth limit cycle radial change

Transformację wielomianową

$$x_1 = \sum_{i+j=1}^{i+j=n} a_{ij} y_1^i y_2^j$$

$$x_2 = \sum_{i+j=1}^{i+j=n} b_{ij} y_1^i y_2^j \tag{11}$$

dobieramy tak, aby przekształcała ona radialnie pożądany cykl graniczny na okrąg jednostkowy (rys. 5). Niewiadome współczynniki transformacji wyznaczamy z równań liniowych:

$$\sum_{i+j=1}^{i+j=b} \left[r(\alpha)\right]^{i+j} (\cos\alpha)^i (\sin\alpha)^j a_{ij} = \cos\alpha ,$$

$$\sum_{i+j=1}^{i+j=n} \left[r(\alpha)\right]^{i+j} (\cos\alpha)^i (\sin\alpha)^j b_{ij} = \sin\alpha . \tag{12}$$

Zależność $r(\alpha)$ wyznacza się z rys. 5. Po odpowiednim uporządkowaniu składników układ równań liniowych (12) przyjmuje postać (13).

Każdej parze odwzorowanych punktów - węzłów odpowiadają dwa równania, zatem związek między liczbą odpowiadających sobie par punktów p a stopniem wielomianu n ma postać:

$$p = \frac{n(n+3)}{2} .$$

Stosując transformację (11) do układu równań (10) otrzymamy wymierny układ równań posiadający przybliżony zadany cykl graniczny.

Problem aproksymacji zadanego dwuwymiernego cyklu granicznego nie ma jednoznacznego rozwiązania. Ponadto można go rozwiązywać za pomocą dwuwymiarowej aproksymacji rzeczywistej, jak to przeprowadzono powyżej lub za pomocą jednowymiarowej aproksymacji zespolonej.

$$\begin{bmatrix} r_1c_1 & r_1s_1 & r_1^2c_1^2 & r_1^2c_1s_1 & r_1^2s_1^2 & r_1^3c_1^3 & r_1^3c_1^2s_1 & r_1^3c_1s_1^2 & r_1^3s_1^3 & \dots & r_1^ns_1^n \\ r_2c_2 & r_2s_2 & r_2^2c_2^2 & r_2^2c_2s_2 & r_2^2s_2^2 & r_2^3c_2^3 & r_2^3c_2^2s_2 & r_2^3c_2s_2^2 & r_2^3s_2^3 & \dots & r_2^ns_2^n \\ & & & & & & & & \dots & & \\ r_pc_p & r_ps_p & r_p^2c_p^2 & r_p^2c_ps_p & r_p^2s_p^2 & r_p^3c_p^3 & r_p^3c_p^2s_p & r_p^3c_ps_p^2 & r_p^3s_p^3 & \dots & r_p^ns_p^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{01} \\ a_{11} \\ a_{02} \\ a_{30} \\ a_{21} \\ a_{12} \\ a_{03} \\ a_{40} \\ \vdots \\ a_{0n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{01} \\ b_{20} \\ b_{11} \\ b_{02} \\ b_{30} \\ b_{21} \\ b_{12} \\ b_{03} \\ b_{40} \\ \vdots \\ b_{0n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_p \end{bmatrix} \tag{13}$$

Układ równań liniowych do wyznaczenia współczynników transformacji wielomianowej. Oznaczenia:

$r_k = r(\alpha_k)$

$c_k = \cos\alpha_k$

$s_k = \sin\alpha_k$

LITERATURA

[1] Gauszus E.W.: Issledowanije dinamiczeskich sistiem metodom toczecznych preobrazowanij. Nauka, Moskwa 1976.

[2] Kowalew A.M.: Nieliniejnyje zadaczi uprawlienija i nabludienija w teorii dinamiczeskich sistiem. Naukowa Dumka, Kijew 1980.

[3] Newcomb R.W.: Nonlinear Differential Systems: A Canonic, Multivariable Theory. Proc. IEEE, 6, 1977, pp. 930-936.

[4] Sibirskij K.S.: Algebraiczeskije inwarianty differencjalnych urawnienij i matric: "Sztiinca", Kiszyniew 1976.

[5] Sibirskij K.S.: Wwiedienije w algebraiczeskuju tieoriju inwariantow differencjalnych urawnienij. "Sztiinca", Kiszyniwe 1982.

[6] Siwczyński M.: Synteza pewnej klasy nieliniowych układów autonomicznych w obecności zakłócenia. Zeszyty Naukowe WSI w Opolu, s. Elektryka z. 16, 1981 ss. 149-156.

Recenztent:
Doc. dr inż. Zdzisław Trzaska

Wpłynęło do Redakcji dn. 15 kwietnia 1986 r.

СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В работе введено понятие рационального дифференциального уравнения. Это дифференциальное уравнение в R с многомерной рациональной функцией в правой части. Доказано, что полугруппа рациональных координатных преобразований, переводит множество рациональных уравнений в себя и что произвольное рациональное уравнение можно реализовать в аналоговой схеме с помощью умножителей и интегрирующих и операционных усилителей. Эта теорема применена к синтезу двухмерной автономной системы, которая с произвольной точностью реализует заданный гладкий предельный цикл. Представлен также метод синтеза рационального уравнения, которое имеет траектории на одном неголономном многообразии. Показанный пример можно применить к синтезу генераторов синусоидальных колебаний с частотной и фазовой перестройкой.

NONLINEAR RATIONAL AUTONOMOUS SYSTEMS SYNTHESIS

S u m m a r y:

In the paper the rational differential equation was defined. It is the differential equation, in $\mathbb{R}^n$ with the multidimensional rational function on the right side. The rationals transformations semigroup were proved to map the set of rational equations into inside, and that each rational differential equation can ve formed using integrators, sum amplifiers and multipliers. The theorem was used to design twodimensional autonomous differential system which realizes desirable smooth limit cycle with any accuracy. The method of synthesis of the rational differential equation with solutions on the nonholonomous manifold was given too. An example of synthesis of the oscillator with frequency and phase control was included.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1988

Seria: ELEKTRYKA z. 103 Nr kol. 904

Janusz WALCZAK
Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

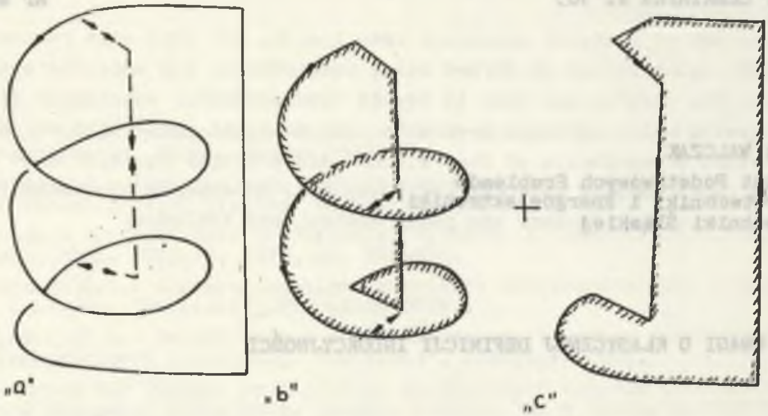
PEWNE UWAGI O KLASYCZNEJ DEFINICJI INDUKCYJNOŚCI

Streszczenie. Klasyczna definicja indukcyjności cewek cienkich wiąże się z pojęciem strumienia przenikającego powierzchnię ograniczoną konturem cewki. Problem rozpinalności powierzchni na cewkach będących dyfeomorficznymi obrazami okręgów jest trywialny, dla cewek zawęźlonych ulega on istotnej komplikacji. Komplikacja ta wiąże się z zagadnieniem możliwości rozpinania orientowalnych pawierzchni na konturach zawęźlonych.
Problem zanurzenia (rozpinalności hiperpowierzchni) rozmaitości M^n w rozmaitości M^{n+1} stanowi aktualne zagadnienie topologii algebraicznej nierozwiązalne w pełni do chwili obecnej.
W pracy opisano dwa sposoby rozpinania powierzchni na zwartych rozmaitościach jednowymiarowych zanurzonych w przestrzeni R^3 wykorzystując metody Brunna i Seifferta. Podano szereg przykładów ilustrujących zastosowanie tych metod.

1. Wstęp

W topologii algebraicznej węzłem nazywamy jednowymiarową rozmaitość różniczkowalną zanurzoną w przestrzeni R^3. Jeżeli rozmaitość różniczkowalna jest zwarta, to taki węzeł nazywamy rączkowym.
Mówimy, że dwa węzły W_1, W_2 są tego samego typu, tzn. są sobie równoważne topologicznie, jeśli istnieje homeomorfizm przekształcający węzeł W_1 wraz z pewnym jego otoczeniem trójwymiarowym w węzeł W_2 (wraz z jego otoczeniem trójwymiarowym). Zagadnienie klasyfikacji topologicznej węzłów jest bardzo złożone i z punktu widzenia niniejszego artykułu nieistotne.
W dalszym ciągu artykułu przez słowo "węzeł" rozumiemy węzeł rączkowy określonego typu bez wnikania w problem, jakie niezmienniki topologiczne charakteryzują typ węzła.

Problem rozpilaności powierzchni orientowalnych na węzłach rączkowych wiąże się ściśle ze stosowalnością klasycznej definicji indukcyjności opartej na pojęciu strumienia magnetycznego. Problem ten dla węzłów homeomorficznych (wraz z pewnym otoczeniem) ze sferą S^1 jest stosunkowo prosty, chociaż nawet w tym przypadku mogą wystąpić komplikacje. Klasycznym przykładem jest tu problem rozpinania powierzchni na cewce cylindrycznej (rys. 1).



Rys. 1. Rozpinanie powierzchni na cewce cylindrycznej
Fig. 1. The spanning surface in the cylindrical coil

Jeśli długość cewki jest dostatecznie duża w porównaniu z jej średnicą, a skok linii śrubowej dostatecznie mały (brak ścisłego sprecyzowania tych terminów w literaturze), to każdy zwój cewki można zastąpić prądem pierścieniowym o tym samym natężeniu co prąd cewki pierwotnej. Tym samym cewkę cylindryczną zastępuje się pojedynczym zwojem, w którym płynie prąd o natężeniu równym iloczynowi prądu cewki pierwotnej cylindrycznej i liczby jej zwojów. Przypadek, w którym założenia pozwalające na przyporządkowanie cewce cylinrycznej zwoju kołowego nie są spełnione, jest w literaturze całkowicie pomijany, np. ([1], [2]).

Intuicyjnie można przypuszczać, że operacja polegająca na przyklejaniu dodatkowych dwukrotnie orientowalnych łuków (w celu zapewnienia niezmienności rozpływu prądu w cewce) do węzła powinna pozwolić na pozytywne rozwiązanie problemu rozpinalności orientowalnych powierzchni na węzłach.

Rozpatrzmy następujący przykład:

Przykład 1

Rozpiąć orientalną powierzchnię na cewce cylindrycznej, dla której nie są spełnione założenia umożliwiające przyporządkowanie jej zwoju kołowego (rys. 1).

Wprowadzamy dodatkowe dwukrotnie orientowalne łuki, tak jak to pokazano na rys. 1"a". Powierzchnię rozpiętą na cewce można przedstawić w postaci sumy dwóch orientowalnych powierzchni (rys. 1a, 1b). W celu łatwiejszego zaobserwowania faktu, że powierzchnia przedstawiona na rys. 1b jest orientowalna, można wprowadzić dalsze cięcia tej powierzchni (rys. 1b), co oznaczono na tym rysunku liniami kreskowanymi.

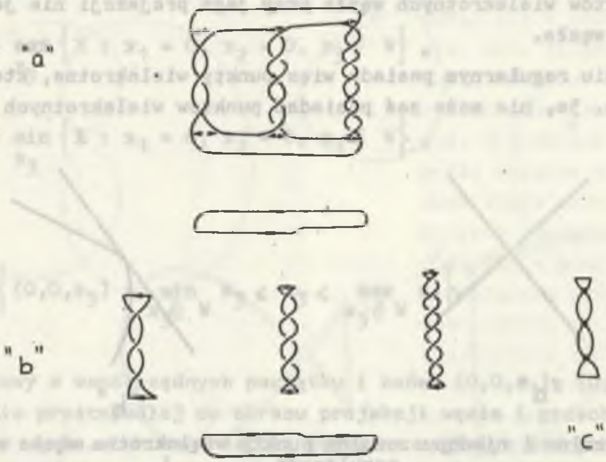
Problem rozpinania orientowalnych powierzchni na węzłach nie będących homeomorficznym obrazem sfery S^1 (wraz z pewnym trójwymiarowym jej otoczeniem) jest o wiele bardziej złożony. W niektórych przypadkach możliwe jest

intuicyjne dołączenie dwukrotnie orientowanych łuków do węzła tak, by można było na nim rozpiąć powierzchnię orientowalną.
Rozpatrzmy następujący przykład:

Przykład 2

Rozpiąć powierzchnię na nieodwracalnym węźle Trottera przedstawionym na rys. 2.

Gdy wprowadzimy pomocnicze dwukrotnie orientowalne łuki, tak jak to pokazano na rys. 2a (za pomocą linii kreskowanych), węzeł Trottera rozpada się na pięć węzłów homeomorficznych ze sferą S^1 (rys. 2b). Chcąc uprościć powierzchnię rozpiętą na zwojach bifilarnych (rys. 2b), można wprowadzić dodatkowe dwukrotnie orientowalne łuki w płaszczyźnie prostopadłej do rysunku (łuki te na rys. 2c oznaczono kropkami).



Rys. 2. Rozpinanie powierzchni na węźle Trottera
Fig. 2. The spanning surface in the Trotter knots

Procedurę dołączania dodatkowych (dwukrotnie orientowalnych) łuków do danego węzła nazywać będziemy cięciem węzła. Przed przystąpieniem do syntezy efektywnych algorytmów umożliwiających proces rozpinania orientowalnych powierzchni na węzłach należy odpowiedzieć na następujące pytania:

1. Czy dla każdego węzła należącego do zbioru węzłów topologicznie równoważnych istnieje postać kanoniczna, wspólna dla całego zbioru.
2. Jeśli odpowiedź na ww. pytanie jest pozytywna, to w jaki sposób należy dołączać dodatkowe łuki do węzła, by ulegał on rozpadowi na węzły elementarne homeomorficzne ze sferą S^1.

Zagadnienia te będą rozpatrzone w dalszej części artykułu.

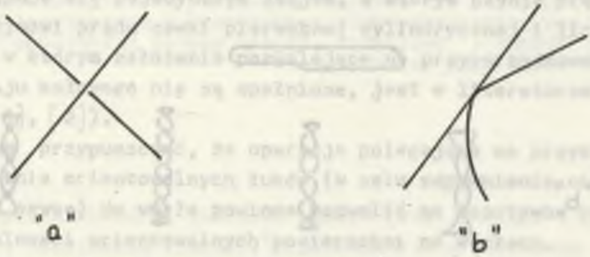
2. Metoda cięć węzła oparta na twierdzeniu Brunna

Przed przystąpieniem do analizy metod cięć węzła wprowadźmy najpierw pewne pojęcia podstawowe:
Projekcją węzła W nazywamy odwzorowanie:

$$Pr : W \subset R^3 \longrightarrow R^2. \tag{1}$$

Punkt p należący do obrazu projekcji węzła nazywamy K-krotnym, jeśli jego przeciw obraz odpowiada k punktom węzła.
Węzeł znajduje się w położeniu regularnym, gdy:
1) wszystkie jego punkty wielokrotne mają krotność równą dwa,
2) liczba punktów wielokrotnych węzła jest skończona,
3) żaden z punktów wielokrotnych węzła przy jego projekcji nie jest obrazem wierzchołka węzła.

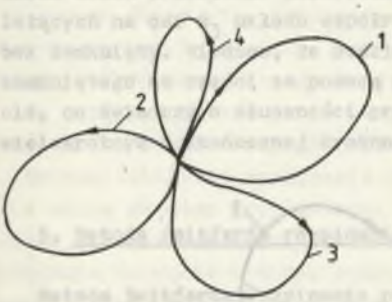
Węzeł w położeniu regularnym posiada więc punkty wielokrotne, których obraz pokazano na rys. 3a, nie może zaś posiadać punktów wielokrotnych pokazanych na rys. 3b.



Rys. 3. Dopuszczalne i niedopuszczalne punkty wielokrotne węzła w położeniu regularnym
Fig. 3. The admissible and non-admissible multiple points for knot in the regulator position

Można wykazać ([3], s. 18), że:
- każdy węzeł rączkowy można przedstawić w położeniu regularnym,
- liczba regularnych położeń węzłów rączkowych jest co najwyżej przeliczalna, tzn. liczba wszystkich typów topologicznie równoważnych węzłów jest co najwyżej przeliczalna.

Mówimy, że węzeł rączkowy znajduje się w zmodyfikowanym położeniu regularnym, jeśli posiada on jeden punkt wielokrotny o skończonej krotności. Można wykazać [4], że każdy węzeł rączkowy znajdujący się w położeniu regularnym można sprawdzić do zmodyfikowanego położenia regularnego. Powyższe stwierdzenie nosi nazwę twierdzenia Brunna [4]. Przykład obrazu węzła znajdującego się w zmodyfikowanym położeniu regularnym przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Obraz węzła rączkowego w zmodyfikowanym położeniu regularnym

Fig. 4. The image of handle knot in the modified regular position

Przeanalizujmy obecnie procedurę rozpinania powierzchni orientowalnych na węźle znajdującym się w położeniu regularnym zmodyfikowanym. W tym położeniu jedynym punktem wspólnym gałęzi węzła (w obrazie projekcji) jest punkt wielokrotny leżący w początku układu współrzędnych. Przyklejmy do węzła dodatkowy łuk (dwukrotnie orientowalny) leżący na osi x_3 (rys. 5). Współrzędne początku i końca łuku oznaczmy przez $(0, 0, z_1)$, $(0, 0, z_2)$. Współrzędne z_1, z_2 początku i końca dodatkowego łuku dobierzmy zgodnie ze wzorami:

$$z_1 = \max_{x_3} \left\{ X : x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 \in W \right\}, \tag{2}$$

$$z_2 = \min_{x_3} \left\{ X : x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 \in W \right\}, \tag{3}$$

gdzie:

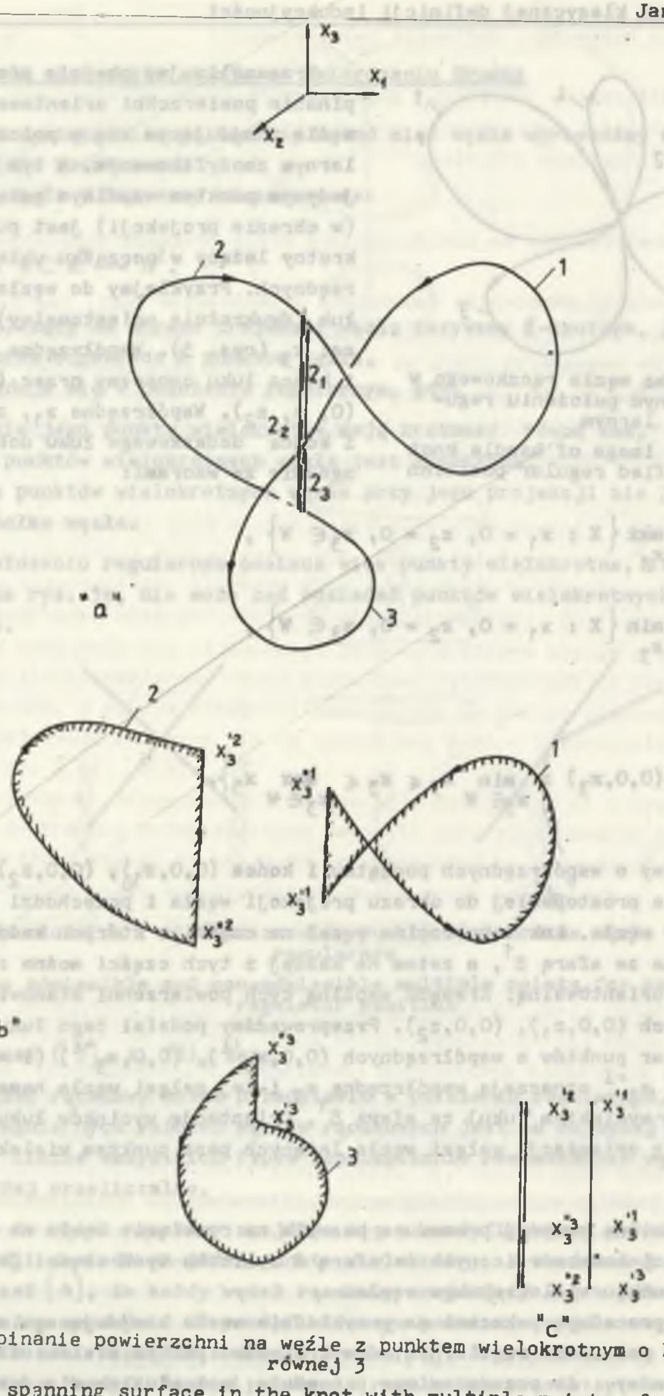
$$X = \left\{ (0,0,x_3) : \min_{x_3 \in W} x_3 \le x_3 \le \max_{x_3 \in W} x_3 \right\}. \tag{4}$$

Łuk dodatkowy o współrzędnych początku i końca $(0,0,z_1)$, $(0,0,z_2)$ leży w płaszczyźnie prostopadłej do obrazu projekcji węzła i przechodzi przez punkt wielokrotny węzła. Łuk ten rozcina węzeł na części, z których każda jest homeomorficzna ze sferą S^1, a zatem na każdej z tych części można rozpiąć powierzchnię orientowalną. Krawędź wspólną tych powierzchni stanowi łuk o współrzędnych $(0,0,z_1)$, $(0,0,z_2)$. Przeprowadźmy podział tego łuku na części za pomocą par punktów o współrzędnych $(0,0,x_3'^{i})$, $(0,0,x_3''^{i})$ $(i = 1..n)$, gdzie $x_3'^{i}$, $x_3''^{i}$ oznaczają współrzędną x_3 i-tej gałęzi węzła homeomorficznej (wraz z tym wycinkiem łuku) ze sferą S^1. Orientację wycinków łuku przyjumemy zgodnie z orientacją gałęzi węzła leżących poza punktem wielokrotnym.

Przykład 3

Przedstawiona powyżej procedura pozwala na rozcięcie węzła na skończoną liczbę części homeomorficznych ze sferą S^1. Liczba tych części jest równa krotności punktu wielokrotnego węzła.

Opisaną procedurę pokazano na przykładzie węzła znajdującego się w zmodyfikowanym położeniu regularnym, dla krotności punktu wielokrotnego równej 3. Zauważmy, że przedstawiona procedura jest słuszna dla dowolnego węzła znajdującego się w położeniu regularnym zmodyfikowanym.



Rys. 5. Rozpinanie powierzchni na węźle z punktem wielokrotnym o krotności równej 3

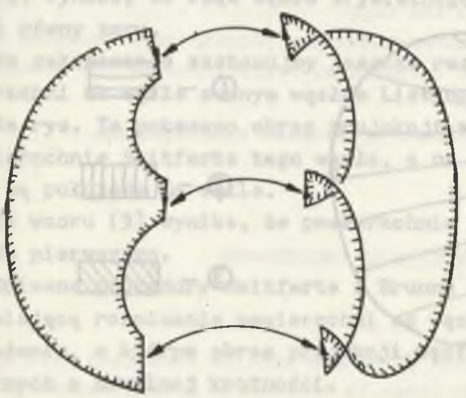
Fig. 5. The spanning surface in the knot with multiple points of multiplication factor equal 3

Dodatkowy łuk wprowadzany w celu rozcięcia węzła można traktować jako układ dwóch przeciwnie skierowanych kolinearnych wektorów o równej długości leżących na osi x_3 układu współrzędnych. Układ tych wektorów tworzy wielobok zamknięty. Wiadomo, że podział wektorów wchodzących wskład wieloboku zamkniętego na części za pomocą par punktów nie może spowodować jego otwarcia, co świadczy o słuszności przedstawionej procedury dla węzła z punktem wielokrotnym o skończonej krotności.

3. Metoda Seitferta rozpinania powierzchni na węzłach

Metoda Seitferta rozpinania powierzchni na węzłach opisana przez Foxta ([5], str. 140) polega na dołączaniu do węzła dodatkowych zorientowanych konturów, w wyniku czego węzeł rozpada się na skończoną liczbę części homeomorficznych ze sferą S^1. Metoda ta wymaga, by węzeł znajdował się w położeniu regularnym, tzn. by obraz projekcji węzła zawierał wyłącznie punkty wielokrotne o krotności równej dwa. W punktach wielokrotnych węzła dołącza się dodatkowe dwukrotnie orientowalne łuki, których początki i końce znajdują się w punktach węzła odpowiadających punktowi wielokrotnemu obrazu projekcji. Przyporządkowanie tych łuków gałęziom węzła przeprowadza się w sposób następujący. Przyjmijmy dowolny punkt węzła nie będący jego punktem wielokrotnym jako "punkt startu". Poruszając się z tego punktu zgodnie z orientacją węzła dochodzimy do punktu wielokrotnego, w którym przeskakujemy na drugą gałąź węzła. Poruszając się po tej gałęzi węzła zgodnie z jej orientacją dochodzimy do następnego punktu wielokrotnego, w którym przeskakujemy na następną gałąź węzła. Procedurę tę powtarzamy tyle razy, aż znajdziemy się w "punkcie startu". Krzywa zamknięta

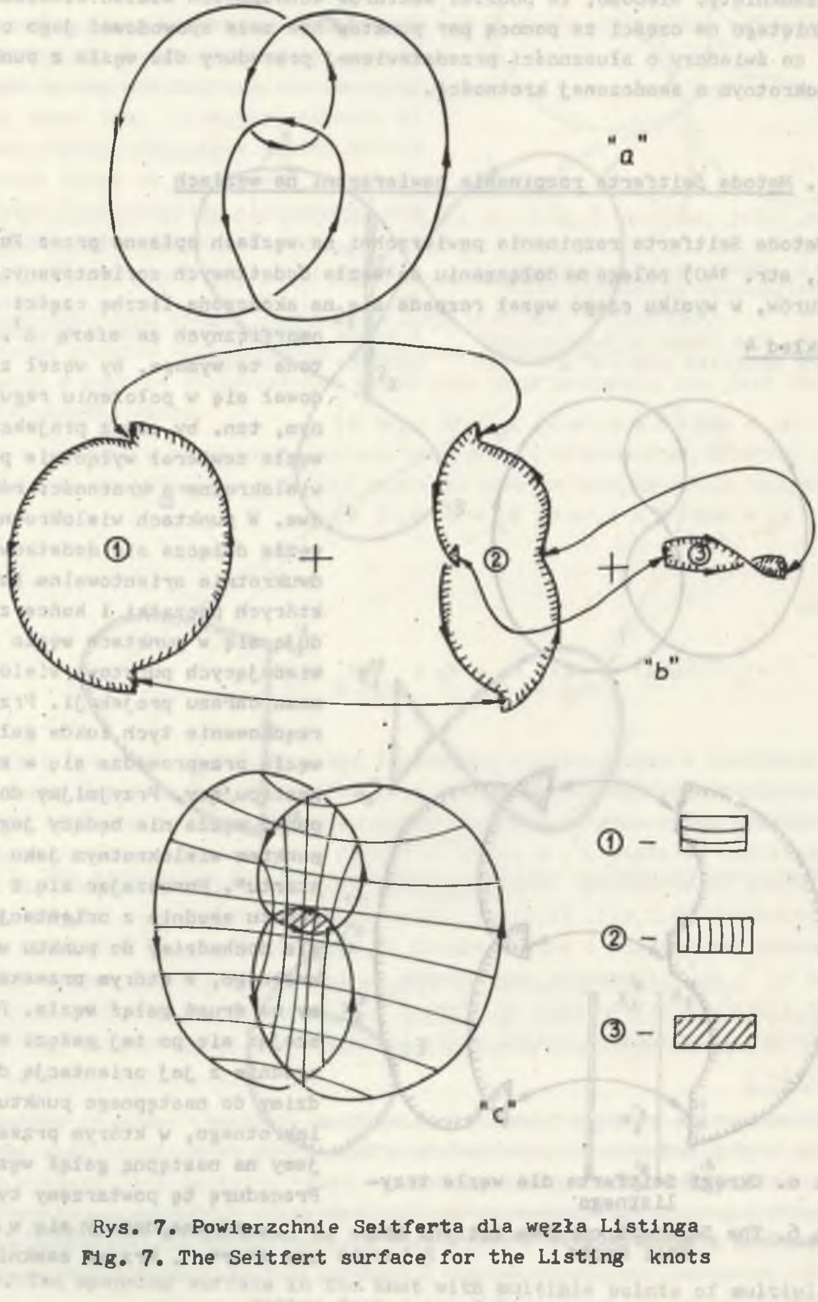
Przykład 4



Rys. 6. Okręgi Seitferta dla węzła trzylistnego

Fig. 6. The Seitfert circles fot the trefoil knots

Przykład 5



Rys. 7. Powierzchnie Seitferta dla węzła Listinga
Fig. 7. The Seitfert surface for the Listing knots

uzyskana opisaną powyżej metodą jest homeomorficzna z okręgiem i nosi nazwę okręgu Seitferta. Dobierając "punkt startu" we wszystkich gałęziach węzła znajdujących się poza jego punktami wielokrotnymi wyznacza się okręgi Seitferta przyporządkowane danemu węzłowi.

Na okręgach Seitferta (z uwagi na to, że są one homeomorficzne z okręgiem) można zawsze rozpiąć powierzchnie orientowalne.

Metodę Seitferta rozpinania powierzchni na węzłach pokazano na przykładzie węzła zwanego trzylistnym, posiadającego w obrazie projekcji trzy punkty wielokrotne (rys. 6). Na tym rysunku odpowiadające sobie łuki (tzn. dołączone do węzła w danym punkcie wielokrotnym) oznaczono strzałkami. Powierzchnie Seitferta nie mogą się ze sobą przecinać, mogą mieć one wspólne części brzegów (odpowiadające dołączanym dwukrotnie i przeciwnie orientowalnym łukom) lub też mogą zawierać się w sobie (w obrazie projekcji). Metoda Seitferta rozpinania powierzchni na węzłach pozwala określić jeden z niezmienników topologicznych określających typ węzła.

Rzędem powierzchni naciągniętej na węzeł a zarazem rzędem węzła nazywamy liczbę określoną przez:

$$\text{rząd}\left\{W\right\} = \frac{1}{2}(d - f + 1), \tag{5}$$

gdzie:

d - liczba punktów wielokrotnych węzła w położeniu regularnym,

f - liczba powierzchni Seitferta wyznaczonych dla danego węzła.

Istnieją ([5], s. 141) efektywne metody wyznaczania rzędu węzła. Ze wzoru (5) wynika, że rząd węzła trywialnego, tzn. homeomorficznego ze sferą S^1, jest równy zeru.

Na zakończenie zastosujmy jeszcze raz metodę Seitferta do rozpięcia powierzchni na węźle zwanym węzłem Listinga (przykład 5).

Na rys. 7a pokazano obraz projekcji węzła Listinga, na rys. 7b pokazano powierzchnie Seitferta tego węzła, a na rys. 7c pokazano, jak te powierzchnie są położone na węźle.

Ze wzoru (5) wynika, że powierzchnia rozpięta na węźle Listinga jest rzędu pierwszego.

Opisane procedury Seitferta i Brunna można łatwo połączyć w jedną umożliwiającą rozpinanie powierzchni na węzłach rączkowych znajdujących się w położeniu, w którym obraz projekcji węzła zawiera skończoną liczbę wielokrotnych o dowolnej krotności.

LITERATURA

1 E.I. Tamm: Podstawy teorii elektryczności. WNT, Warszawa 1967.

2 R.M. Fano, L.J. Chu, R.B. Adler: Electromagnetic Fields, Energy and Forces. J. Wiley N. York. 1963.

3 R.H. Crowell, R.H. Fox: Introduction to Knot Theory. G. C. N. York. 1963.
4 H. Brunn: Topologische Betrachtungen. Z. für Math. und Phys. Bd. 37. 1892. str. 106-116.
5 M.K. Fort: Topology of 3-Manifolds and Related Topics. Engl. Cliffs. N. Jersey. 1952.

Recenzent:
Doc. dr hab. inż. Stanisław K. Krzemiński

Wpłynęło do Redakcji 15 kwietnia 1986 r.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О КЛАССИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ИНДУКТИВНОСТИ

Р е з ю м е

Классическая дефиниция индуктивности линейных катушек связана с понятием потока, проникающего поверхность ограниченную контуром катушки. Проблема растягивания поверхности на катушках будущих диффеоморфичными образами округов, очень тривиальна.

Для катушек защеплённых, проблема подвергается существенному сложнению. Осложнение связано с вопросом возможности растягивания орнентированных поверхностей на контурах защепления.

Проблема погружения (растягивания гиперповерхности) многообразия M^n в многообразие M^{n+1} предотавляет собой актуальный вопрос алгебранческой топологии неразрешённый полностью до сих пор.

В работе описаны два способа растягивания поверхности на компактных многообразиях, имеющих одно измерение погружённых в пространстве при помощи методов Брунна и Сейтферта.

Представлен ряд примеров, поясняющих применение этих методов.

SOME REMARKS ABOUT CLASSICAL DEFINITION OF INDUCTANCE

S u m m a r y:

Classical definition of inductance of linear coil is connected with an idea of a flux penetrating surface (that is limited of a coil contour). The problem of surface spanning on the coils, with are diffeomorfic images of circles is trival. For the linking coils, this problem is much more complicated, thet complication concerns a problem of possibility of the spanning oriented surface on the linking contours.

The problem of immersion (of the spanning hypersurface) of manifold M^n in manifold M^{n+1} is very for algebraic topology, not quite solvable till now.

In this paper two kinds of surface spanning on the one dimensional compact manifolds immersioned in a space R^3 by the use of Brunn's and Seifert's methods are described. There are many illustrating examples for the application of these methods.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1988

Seria: ELEKTRYKA z. 103 Nr kol. 904

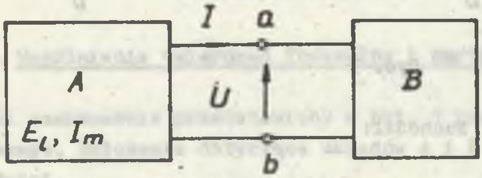
Zofia CICHOWSKA
Instytut Podstawowych Problemów
Elektroniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

TWIERDZENIA THÉVENINA I NORTONA DLA UKŁADU n-ZACISKOWEGO

Streszczenie. Korzystając z zasady wyodrębnienia i zasady superpozycji wykazano słuszność twierdzenia o zastępczym generatorze dla układu 2-zaciskowego. Następnie powtórzono tok rozumowania dla układu n-zaciskowego i uzyskano opis macierzowy tego układu w dwóch równoważnych postaciach. Przedstawiono dwie możliwe struktury układu zastępczego wynikające bezpośrednio z tych równań macierzowych. Przedstawione układy zbudowane są n-1 źródeł autonomicznych, n-1 dwójników o zadanych impedancjach (admitancjach) oraz n-1 źródeł sterowanych.

1. Twierdzenia Thévenina i Nortona dla układu 2-zaciskowego

Uzasadnienie twierdzeń Thevenina i Nortona o zastępczym generatorze można przeprowadzić w sposób odmienny od powszechnie stosowanego. Rozpatrzmy układ aktywny A zawarty między zaciskami ab współpracujący z układem B (rys. 1). Załóżmy, że układy A i B są to układy SLS, a więc stacjonarne, liniowe, skupione, złożone z elementów RLCM, źródeł autonomicznych i źródeł sterowanych. Układy te będziemy analizować metodą symboliczną[1] dla przebiegów sinusoidalnych w stanie ustalonym dla wspólnej częstotliwości sił elektromotorycznych i wydajności prądowych źródeł autonomicznych. Załóżmy, że układ A zawiera L autonomicznych źródeł napięciowych E_l i M autonomicznych źródeł prądowych I_m ($l \in \{1,\ldots,L\}$, $m \in \{1,\ldots,M\}$).

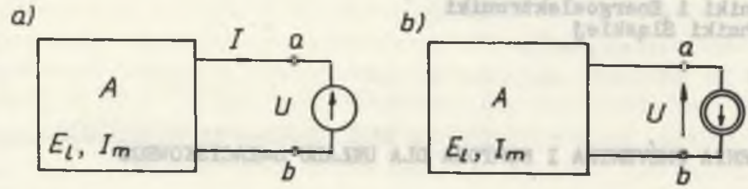


Rys. 1

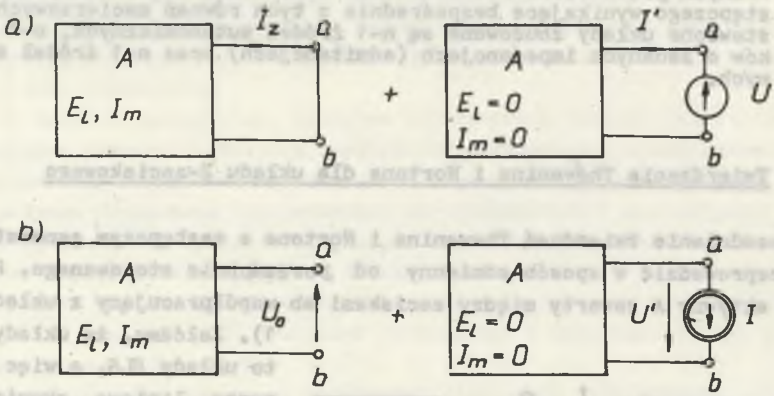
Poszukujemy aktywnego dwójnika równoważnego układowi A ze względu na zaciski ab. W tym celu zastąpmy zgodnie z zasadą wyodrębnienia układ B idealnym źródłem napięciowym lub prądowym o wartościach napięcia U lub prądu I

[1] Rozważania można uogólnić na układy SLS o dowolnych przebiegach wymuszeń badane w stanie nieustalonym przy użyciu przekształcenia Laplace'a.

w przekroju ab (rys. 2). Obliczymy w układzie z rys. 2a prąd I, a w układzie z rys. 2b napięcie U za pomocą zasady superpozycji. W tym celu każdy z układów rozbijamy na dwa układy grupując w pierwszym wszystkie źródła układu A przy zwartej sile elektromotorycznej U lub rozwartej wydajności prądowej I, a w drugim siłę elektromotoryczną U lub wydajność prądową I przy zwartych wszystkich siłach elektromotorycznych E_l i rozwartych wszystkich wydajnościach prądowych I_m, czyli przy $E_l = 0$, $l \in \{1,...,L\}$ oraz $I_m = 0$, $m \in \{1,...M\}$ (rys. 3).



Rys. 2



Rys. 3

Zgodnie z zasadą superpozycji zachodzi:

$$I = I_z - I' = I_z - Y_o U \tag{1}$$

oraz

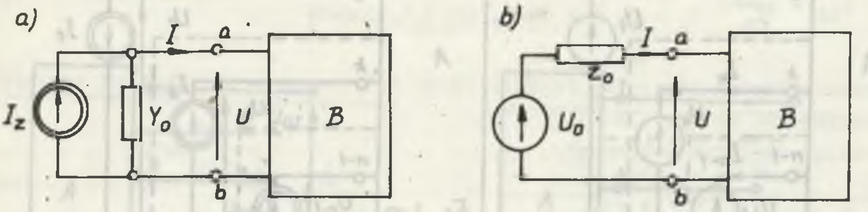
$$U = U_o - U' = U_o - Z_o I. \tag{2}$$

Równania (1) i (2) są równoważnym opisem tego samego układu. Opisy te istnieją równocześnie z wyjątkiem przypadków granicznych, tj. $Y_0 = 0$ lub $Z_0 = 0$, a więc przypadków, gdy układ A jest idealnym źródłem prądowym lub napięciowym.

Warunki równoważności można wyrazić w postaci:

$$Z_0 = \frac{1}{Y_0} = \frac{U_0}{I_z} . \tag{3}$$

Wzory (3) podają możliwość pomiarowego lub obliczeniowego wyznaczenia impedancji Z_0 (konduktancji Y_0) dla układu A zawierającego źródła sterowane. Przy braku źródeł sterowanych w układzie A Z_0 można również wyznaczyć metodą transfiguracji. Sposób obliczania parametrów dwójników równoważnych na podstawie zmodyfikowanej metody węzłowej podano w pracy [3].



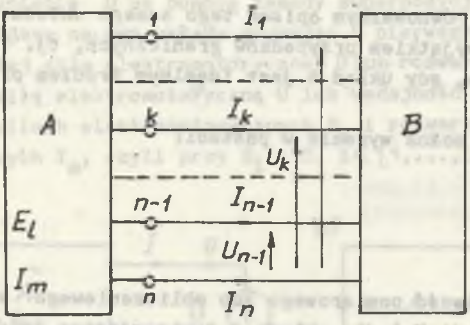
Rys. 4

Opisowi wyrażonemu wzorami (1) i (2) można przyporządkować obwody o prostych strukturach przedstawionych na rys. 4. Części zawarte na lewo od zacisków ab nazywane są dwójnikiem Nortona (rys. 4a) i dwójnikiem Thévenina (rys. 4b).

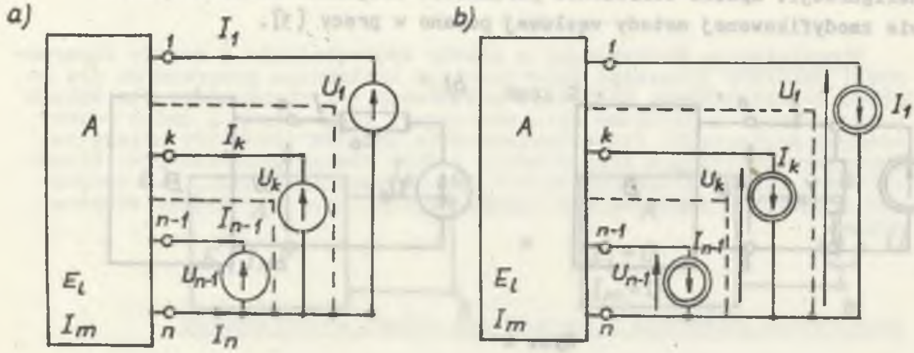
2. Uogólnienie twierdzeń Thévenina i Nortona dla układu n-zaciskowego

Tok rozumowania przedstawiony w pkt. 1 powtórzmy teraz dla układu n-zaciskowego. Założenia dotyczące układów A i B (rys. 5) są identyczne z poprzednimi.

Układ B zastępujemy w myśl zasady wyodrębnienia zespołem n-1 sił elektromotorycznych lub n-1 wydajności prądowych o wartościach napięć i prądów w przekroju 1...n. Wybór przewodu odniesienia jest dowolny, a więc układ źródeł zastępczych może być zrealizowany na n sposobów. Na rys. 6 przedstawiono te układy dla n-tego przewodu przyjętego jako przewód odniesienia. Obliczmy $J_1 \ldots J_{n-1}$ w układzie z rys. 6a oraz napięcia $U_1 \ldots U_{n-1}$ w układzie z rys. 6b za pomocą zasady superpozycji. Każdy z tych układów rozbijamy na



Rys. 5



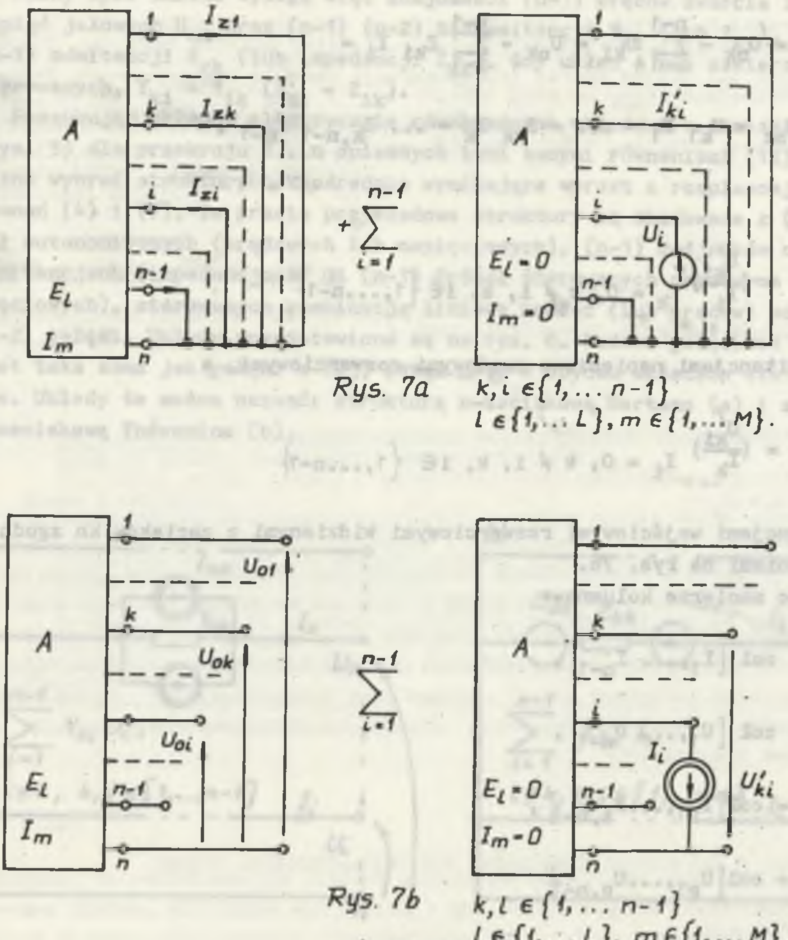
Rys. 6

n układów grupując w pierwszym wszystkie źródła autonomiczne części A, a w pozostałych kolejno n-1 źródeł napięciowych lub prądowych (rys. 7). Prąd płynący przez k-ty zacisk

$$I_k = I_{zk} - \sum_{i=1}^{n-1} I'_{ki} = I_{zk} - \sum_{i=1}^{n-1} Y_{ki} U_i =$$
$$= I_{zk} - Y_{k1} U_1 - \ldots - Y_{kk} U_k - \ldots - Y_{k,n-1} U_{n-1}, \tag{4}$$

gdzie:

$$Y_{ki} = \left(\frac{I'_{ki}}{U_i}\right)_{U_k = 0,\ k \neq i,\ k,\ i \in \{1,\ldots n-1\}} \tag{5}$$



Rys. 7

są transmitancjami prądowo-napięciowymi zwarciowymi, a

$$Y_{kk} = \left(\frac{I'_{ki}}{U_k}\right) U_i = 0,\ k \neq i,\ k,\ i \in \left\{1, \dots n-1\right\} \tag{6}$$

są admitancjami wejściowymi zwarciowymi widzianymi z zacisków kn zgodnie z oznaczeniami na rys. 7a.

Analogicznie napięcie między zaciskami k-tym i n-tym

$$U_k = U_{ok} - \sum_{i=1}^{n-1} U'_{ki} = U_{ok} - \sum_{i=1}^{n-1} Z_{ki}\, I_i =$$
$$= U_{ok} - U_{k1}\, I_1 - \ldots - Z_{kk}\, I_k - \ldots Z_{k,n-1}\, I_{n-1}\,, \tag{7}$$

gdzie:

$$Z_{ki} = \left(\frac{U'_{ki}}{I_i}\right)_{I_k = 0},\; k \neq i,\; k,\; i \in \{1,\ldots n-1\} \tag{8}$$

są transmitancjami napięciowo prądowymi rozwarciowymi, a

$$Z_{kk} = \left(\frac{U'_{ki}}{I_k}\right)_{I_i = 0},\; k \neq i,\; k,\; i \in \{1,\ldots n-1\} \tag{9}$$

są impedancjami wejściowymi rozwarciowymi widzianymi z zacisków kn zgodnie z oznaczeniami na rys. 7b.
Oznaczając macierze kolumnowe

$$\mathbf{I} = \mathrm{col}\left[I_1,\ldots I_{n-1}\right],$$
$$\mathbf{U} = \mathrm{col}\left[U_1,\ldots U_{n-1}\right],$$
$$\mathbf{I}_z = \mathrm{col}\left[I_{z1},\ldots I_{z,n-1}\right],$$
$$\mathbf{U}_o = \mathrm{col}\left[U_{o1},\ldots U_{o,n-1}\right] \tag{10}$$

oraz macierze kwadratowe o wymiarze (n-1)

$$\mathbf{Y} = \left[Y_{ki}\right]$$
$$\mathbf{Z} = \left[Z_{ki}\right] \tag{11}$$

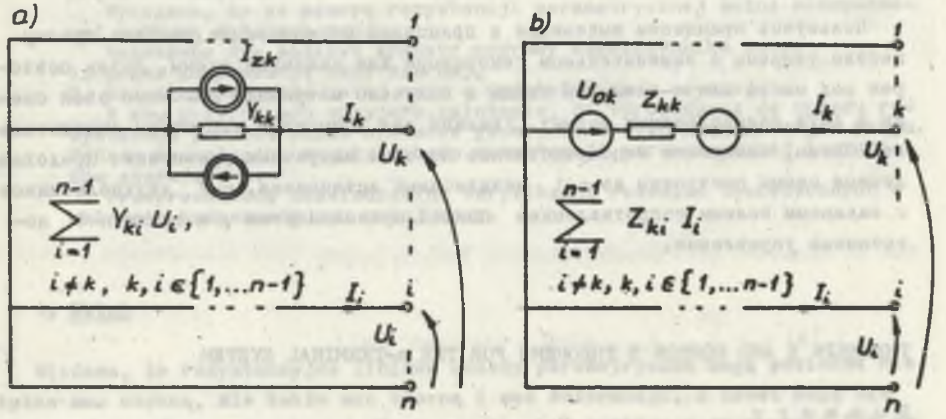
można układ z rys. 5 opisać równaniami macierzowymi

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_z - \mathbf{Y}\,\mathbf{U} \tag{12}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_o - \mathbf{Z}\,\mathbf{I}\,. \tag{13}$$

Pełny opis układu wymaga więc znajomości (n-1) prądów zwarcia I_{zk} lub napięć jałowych U_{ok} oraz (n-1) (n-2) transmitancji Y_{ki} (lub Z_{ki}), oraz (n-1) admitancji Y_{kk} (lub impedancji Z_{kk}). Gdy układ A nie zawiera źródeł sterowanych, $Y_{ki} = Y_{ik}$ $(Z_{ki} = Z_{ik})$.

Poszukując układów elektrycznie równoważnych układowi n-zaciskowemu A (rys. 5) dla przekroju 1...n opisanych tymi samymi równaniami (12) lub (13) można wybrać struktury bezpośrednie wynikające wprost z rozpisanej postaci równań (4) i (7). Te proste przykładowe struktury są zbudowane z (n-1) źródeł autonomicznych (prądowych lub napięciowych), (n-1) dwójników o zadanych admitancjach (impedancjach) i (n-1) źródeł sterowanych prądowych (lub napięciowych), sterowanych kombinacją liniową napięć (lub prądów) pozostałych (n-2) gałęzi. Układy przedstawione są na rys. 8. Budowa gałęzi od 1 do n-1 jest taka sama jak gałęzi k-tej, gałąź n-ta w obydwu układach stanowi zwarcie. Układy te można nazwać: strukturą n-zaciskową Nortona (a) i strukturą n-zaciskową Thévenina (b).



Rys. 8

Istnienie obydwu opisów układu A wyrażonych równaniami (12) i (13) wymaga spełnienia warunku:

$$\det \mathbf{Y} \neq 0 \quad \text{lub} \quad \det \mathbf{Z} \neq 0 \tag{14}$$

Zachodzą wtedy warunki równoważności

$$\mathbf{U}_o = \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{I}_z \tag{15}$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1} . \tag{16}$$

LITERATURA

[1] Brodzki M.: Wstęp do teorii liniowych obwodów elektrycznych w ujęciu geometrycznym. Skrypt Politechniki Śląskiej Gliwice 1979, ss. 71-76.

[2] Fryze S.: Ogólna teoria transfiguracji obwodów elektrycznych. Przegląd elektrotechniczny nr 4-8, 1934.

[3] Haji I.N.: Computation of Thévenin and Norton equivalents. Electronics Letters, 27th May 1976, vol 12, nr 11.

Recenzent:
Doc. dr inż. Zdzisław Trzaska

Wpłynęło do Redakcji 15 kwietnia 1986 r.

ТЕОРИЯ ТЕВЕНИНА И НОРТОНА ДЛЯ n-ЗАЖИМНОЙ СХЕМЫ

Р е з ю м е

Пользуясь принципом выделения и принципом суперпозиции указано преимущество теоремы о заменительном генераторе для зажимной схемы. Затем повторен ход мысли для n-зажимной схемы и получено матричное описание этой схемы в двух эквивалентных формах. Указаны две возможные структуры заменительной схемы, следующие непосредственно из этих матричных уравнений. Представленные схемы построены из n-1 независимых источиков, n-1 двухполюсников с заданным полным сопротивлением полной проводимостью , а также n-1 источников управлеиия.

THEVENIN'S AND NORTON S THEOREMS FOR THE n-TERMINAL SYSTEM

S u m m a r y

On the basis of the principles of isolation and of superposition it has been proved that the equivalent generator theorem (Thévenin's theorem) is true for the 2 - terminal system.
Then, the proces of argumentation has been repeated for the n-terminal system.
As a result of this the system has been described as a matrix in two equivalent forms.
Two possible structures of the equivalent circuit resulting directly from the above matrix equations are presented. The presented systems incorporate n - 1 independent sources, n - 1 two - terminal networks with preset impedances (admittances) and n - 1 controlled sources.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1988

Seria: ELEKTRYKA z. 103 Nr kol. 904

Krystyna STEC
Lesław TOPÓR-KAMIŃSKI

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

ZASTOSOWANIE REZYSTANCJI PARAMETRYCZNYCH DO POPRAWY WSPÓŁCZYNNIKA MOCY

Streszczenie. W pracy rozpatrzono możliwość poprawy współczynnika mocy za pomocą rezystancji parametrycznych.

Pod uwagę wzięto układy z okresowymi niesinusoidalnymi przebiegami prądu i napięcia.

Wykazano, że za pomocą rezystancji parametrycznej można skompensować wybraną składową prądu.

Rozważane dwa możliwe sposoby poprawy współczynnika mocy:
1. przez kompensację mocy biernej,
2. przez kompensację całej mocy z wyjątkiem mocy czynnej.

W obu przypadkach przyjęto założenie, że wprowadzona do układu rezystancja parametryczna nie może generować nowych harmonicznych prądu. Podano teoretyczne reguły doboru rezystancji parametrycznej i sygnałów sterujących.

Przeprowadzono doświadczalną weryfikację rozważań teoretycznych w układzie kompensacyjnym małej mocy.

1. Wstęp

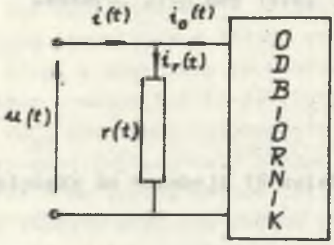
Wiadomo, że rezystancyjne liniowe układy parametryczne mogą pobierać nie tylko moc czynną, ale także moc bierną i moc deformacji, a nawet mogą nie pobierać w ogóle mocy czynnej. Powinno więc być możliwe zastosowanie ich do poprawy współczynnika mocy układu.

W ogólnym jednak przypadku [2] włączenie dwójnika o rezystancji $r(t) = R\,x(t)$ (gdzie $x(t)$ - parametr sterujący R - stała) powoduje pojawienie się w układzie dodatkowych harmonicznych, co może spowodować pogorszenie współczynnika mocy.

Celem niniejszej pracy jest wykazanie, że możliwe jest poprawienie współczynnika mocy układu za pomocą liniowych rezystancji sterowanych oraz podanie zasad doboru tych rezystancji.

2. Ogólne zasady poprawy współczynnika mocy za pomocą rezystancji sterowanej r(t)

Układ do poprawy współczynnika mocy pokazany jest na rys. 1. Przyjęte założenie, że napięcie i prąd odbiornika są przebiegami okresowymi niesinusoidalnymi i mogą być przedstawione za pomocą szeregu Fouriera



Rys. 1. Ogólny układ kompensacyjny

Fig. 1. General compensation network

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \sin(n\omega t + \alpha_n) \tag{1}$$

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{mn} \sin(n\omega t + \alpha_n - \varphi_n). \tag{2}$$

W układzie takim stosowane są dwa sposoby podejścia do sprawy poprawy współczynnika mocy.

2.1. Kompensacja mocy biernej

Pierwszy z nich to kompensacja mocy biernej Q określonej wzorem [1]

$$Q = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\mathcal{H}\{i(t)\}\, dt. \tag{3}$$

Moc ta wywołana jest przez składową bierną prądu

$$i_p(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} I_{mn} \sin\varphi_n \cos(n\omega t + \alpha_n) \tag{4}$$

a prąd odbiornika określony jest jako suma dwóch składowych $i_c(t)$ i $i_p(t)$

$$i_o(t) = i_c(t) + i_p(t). \tag{5}$$

Kompensację mocy biernej uzyskuje się przez równoległe dołączenie do zacisków odbiornika takiego elementu, który pobiera prąd

$$i_r(t) = -i_p(t), \tag{6}$$

tzn. rezystancji

$$r(t) = -\frac{u(t)}{i_p(t)} \tag{7a}$$

lub konduktancji

$$g(t) = -\frac{i_p(t)}{u(t)} \ . \qquad (7b)$$

Przy kompensacji kilku wybranych harmonicznych np. k, l, m

$$i_r(t) = -\left[i_{pk}(t) + i_{pl}(t) + i_{pm}(t)\right] , \qquad (8)$$

gdzie

$$i_{pn} = \left| I_{nm} \right| \sin\varphi_n \cos n\omega t$$

$$n = k,\ l,\ m,$$

a rezystancja (konduktancja) powinna wyrażać się wzorem:

$$r(t) = -\frac{u(t)}{i_{pk}(t) + i_{pl}(t) + i_{pm}(t)} \qquad (9a)$$

lub

$$g(t) = -\frac{i_{pk}(t) + i_{pl}(t) + i_{pm}(t)}{u(t)} \ . \qquad (9b)$$

Jak widać, rezystancja r(t) musi być sterowana dwiema funkcjami

$$x(t) = k_1\ u(t)$$

$$y(t) = k_2\ \left[-\ i_p(t)\right]$$

lub funkcją proporcjonalną do ilorazu tych funkcji.

2.2. Kompensacja zadanego prądu zależnego od przyjętego rozkładu prądu odbiornika

Drugi sposób poprawy współczynnika mocy oparty jest na przyjęciu innego rozkładu prądu na składowe [6]. Prąd odbiornika przedstawiony jest jako suma

$$i_e(t) = i_a(t) + i_b(t), \qquad (10)$$

w której wyłącznie składowa

$$i_a(t) = G\, u(t) \tag{11}$$

jest odpowiedzialna za pobór mocy czynnej, a konduktancja G dobrana jest tak, że

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\, i_e(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\, i_a(t)\, dt, \tag{12}$$

a więc

$$G = \frac{P}{|U|^2}\,. \tag{13}$$

Zakładamy tutaj całkowitą kompensację składowej $i_b(t)$ tak, że ze źródła pobierana będzie wyłącznie moc czynna.
Wymaga to zastosowania rezystancji

$$r(t) = \frac{u(t)}{-i_b(t)} = -\frac{u(t)}{i_o(t) - i_a(t)} \tag{14a}$$

lub konduktancji

$$g(t) = -\frac{i_b(t)}{u(t)} = -\frac{i_o(t) - i_a(t)}{u(t)} \tag{14b}$$

ewentualnie dwóch konduktancji połączonych równolegle

$$g_1(t) = \frac{-i_e(t)}{u(t)} \tag{15a}$$

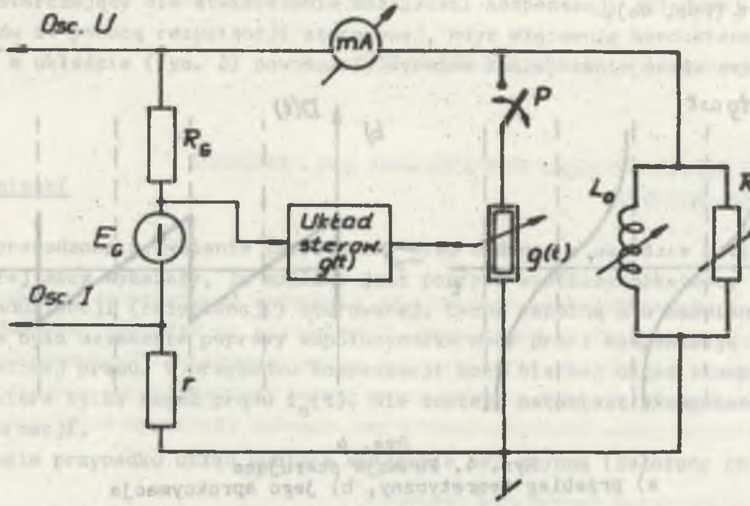
i

$$g_2(t) = \frac{i_a(t)}{u(t)} = G = \frac{P}{|U|^2}\,. \tag{15b}$$

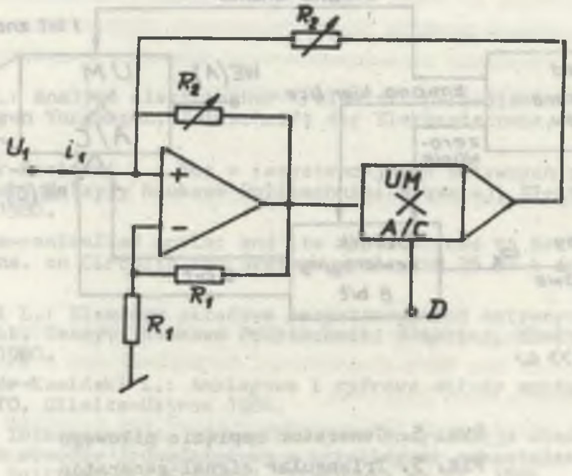
Tak jak w poprzednio omówionym sposobie konduktancje te muszą być sterowane dwiema funkcjami lub funkcją proporcjonalną do ich ilorazu.
Konduktancje (rezystancje) takie można realizować za pomocą układów aktywnych zawierających elementy sterowane [3], [4], [5].

3. Doświadczalna weryfikacja zjawiska rezystancyjnej parametrycznej kompensacji

Działanie kompensacji sprawdzono w układzie małej mocy zasilanym z rzeczywistego źródła sinusoidalnego (rys. 2).Założono tu kompensację składowej biernej prądu.



Rys. 2. Doświadczalny układ małej mocy
Fig. 2. Experimental low power network



Rys. 3. Konduktancja sterowana
Fig. 3. Time varying conductance

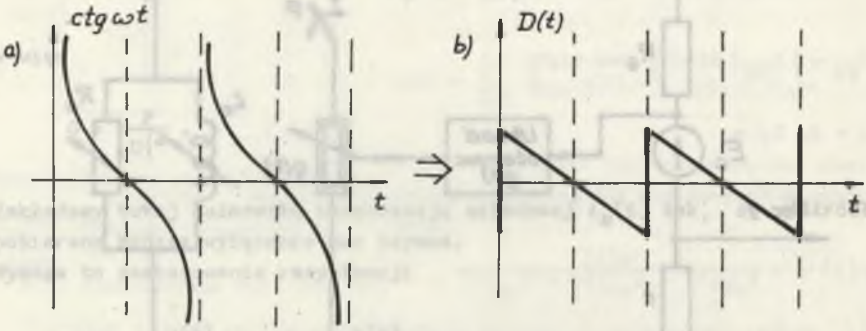
Jako element kompensujący zastosowano konduktancję zmienną z analogowo-cyfrowym układem mnożącym sterowanym sygnałem cyfrowym (rys. 3).

Konduktancja ta winna być równa:

$$g(t) = |Y| \sin\varphi \operatorname{ctg}\omega t, \tag{16}$$

gdzie $Y = |Y|\, e^{-j\varphi}$ jest admitancją odbiornika typu RL.

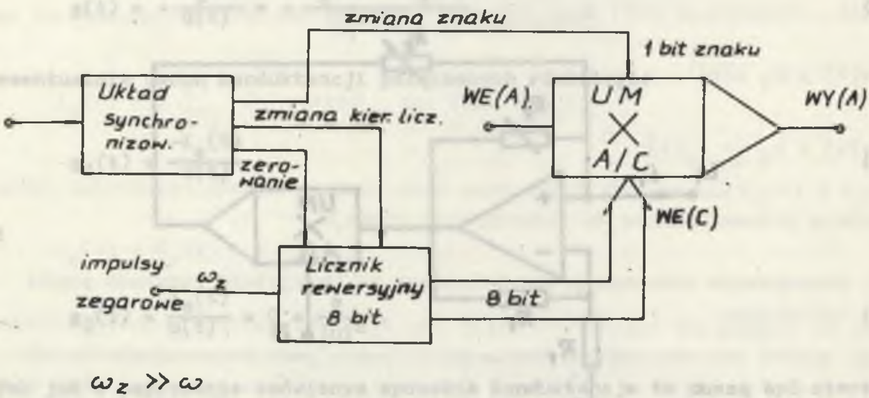
Z relacji (13) widać, że przebiegiem sterującym winna być funkcja $f(t) = \operatorname{ct}\omega t$ (rys. 4a).



Rys. 4

Rys. 4. Funkcja sterująca
a) przebieg teoretyczny, b) jego aprokcymacja

Fig. 4. Control function
a) theoretical, b) its approximation



Rys. 5. Generator napięcia piłowego

Fig. 5. Triangular signal generator

Ze względu na możliwości realizacyjne przebieg ten został przybliżony przebiegiem piłowym (rys. 4b) łatwym do uzyskania w układzie cyfrowym. Układ do otrzymywania cyfrowego piłowego przebiegu zsynchronizowanego z napięciem generatora pokazano na rys. 5. Przy wprowadzeniu takiego przybliżonego przebiegu sterującego uzyskano efekt kompensacyjny wprawdzie niepełny, lecz wystarczający dla stwierdzenia możliwości kompensacji składowej biernej prądu za pomocą rezystancji sterowanej, gdyż włączenie konduktancji sterowanej w układzie (rys. 2) powodowało wyraźne zmniejszenie prądu generatora.

4. Wnioski

Przeprowadzone rozważanie teoretyczne oraz badanie w układzie rzeczywistym małej mocy wykazały, że możliwa jest poprawa współczynnika mocy za pomocą konduktancji (rezystancji) sterowanej. Cechą wspólną obu omówionych sposobów było uzyskanie poprawy współczynnika mocy przez kompensację zadanej składowej prądu. W przypadku kompensacji mocy biernej układ skompensowany pobiera tylko część prądu $i_0(t)$. Nie zostaje natomiast skompensowana moc deformacji.

W drugim przypadku układ pobiera wyłącznie moc czynną (założony prąd $i_a(t)$).

Praktyczna realizacja proponowanych sposobów poprawy współczynnika mocy wymaga zbudowania konduktancji (rezystancji) sterowanych dużej mocy.

LITERATURA

[1] Nowowiejski Z.: Analyse elektrischer Kreise mit periodischen nicht sinusoidalförmigen Vorgangen, Zeitschrift der Elektrotechnik, No 8, 1967, ss. 244-254.

[2] Stec K., Topór-Kamiński L.: Moc w rezystancyjnych aktywnych obwodach parametrycznych, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka nr 68, ss. 115-122. 1980.

[3] Goras L. The x-controlled scalor and its applications to Netwok Synthesis, IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. CAS 26 No 4 April 1979 pp. 288-290.

[4] Topór-Kamiński L.: Elementy składowe rezystancyjnych aktywnych obwodów parametrycznych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka nr 68, ss. 103-114. 1980.

[5] Frycz S., Topór-Kamiński L.: Analogowe i cyfrowe układy mnożące. Materiały VII SPETO, Gliwice-Ustroń 1984.

[6] Czarnecki L.: Interpretacja, identyfikacja i modyfikacja właściwości energetycznych obwodów jednofazowych z przebiegami odkształconymi. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka nr 91, 1984.

[7] Stec K., Kamiński L.: Projekt patentu. Sposób kompensacji prądu i lub mocy biernej całkowitej i lub wybranych harmonicznych, nr P-254442, 1985.

Recenzent:
Doc. dr hab. inż. Maciej Siwczyński

Wpłynęło do Redakcji dn. 15 kwietnia 1986 r.

ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СОПРОТИВЛЕНИЙ ДЛЯ УЛУЧШЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА МОЩНОСТИ

Р е з ю м е

В статье рассматривается возможность улучшения коэффициента мощности при помощи параметрических сопротивлений. Принимаются во внимание системы, в которых токи и напряжения периодические несинусоидальные. Указывается, что при помощи параметрической резистивности можно компенсировать избранную составную часть тока. Рассматриваются два способа улучшения коэффициента мощности:

1. путём компенсации реактивной мощности,
2. путём компенсации всей мощности, за исключением активной мощности.

В обоих случаях принято предложение, что введённое в систему параметрическое сопротивление не может вырабатывать новые гаомоники в токе. Даются теоретические правила подбора параметрического сопротивления и управляющих сигналов. Была проведена экспериментальная проверка теоретических рассуждений в компенсационной системе малой мощности.

THE USE OF TIME - VARYING LINEAR RESISTANCES FOR THE IMPROVEMENT OF POWER FACTOR

S u m m a r y

A problem of the improvement of power factor by the use of time - varying linear resistances has been elaborated. Periodical non - sinusoidal voltage and current signals were regarded.

It has been proved that the compensation of any required component of power circuit current by means of time - varying linear resistances is possible.

The two possibilities have been concerned:

1. compensation of reactive power
2. compensation of whole power except of its active component

Both possibilities have been elaborated under assumption that time - varying linear resistances cannot generate any new current harmonics.
The teoretical rules of determination of the time - varying resistance functions and their control signals have been given. The experimental low-power system has been used to verify theoretic considerations.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1988
Seria: ELEKTRYKA z. 103 Nr kol. 904

Zygmunt GARCZARCZYK
Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki

O DŁUGOŚCI KROKU W DYSKRETNEJ METODZIE KONTYNUACJI

Streszczenie. W artykule przedstawiono teoretyczne oszacowanie maksymalnej długości kroku w dyskretnej metodzie kontynuacji związanej z algorytmem rozwiązywania układu równań węzłowych opisujących nieliniowy obwód rezystancyjny. Pokazano, że w praktyce numerycznej wielkość ta winna być korygowana. Wskazano na możliwość dalszego zwiększenia wartości uzyskanego oszacowania.

1. Wstęp

Celem rozważań jest przedstawienie oszacowania długości kroku w dyskretnej metodzie kontynuacji związanej z algorytmem rozwiązywania układu równań nieliniowych postaci

$$f(t) = Ag(A^t x+E) - AJ = 0. \tag{1}$$

Układ (1) dla n+1 węzłowego obwodu o m gałęziach stanowi układ n równań węzłowych z niewiadomymi potencjałami węzłowymi x_i, $i = 1,2,\ldots,n$. W równaniu tym A - oznacza zredukowaną macierz incydencji, E - wektor stałych wymuszeń napięciowych, J - wektor stałych wymuszeń prądowych, a $g(u) = [g_1(u_1), g_2(u_2),\ldots,g_m(u_m)]^t$ wektor charakterystyk prądowo-napięciowych rezystorów nieliniowych (liniowych). Przy tym $u = A^t x + E$ oznacza wektor napięć na rezystorach.

Jeżeli każda gałąź rozważanego obwodu zostanie zmodyfikowana tak, że rezystor o charakterystyce $i_k = g_k(u_k)$, $k = 1,2,\ldots,m$ zostanie zastąpiony równoległym połączeniem rezystora liniowego o konduktancji $(1-\lambda)G_k$ oraz rezystora o charakterystyce $i_k = \lambda g_k(u_k)$, to można pokazać [3], że dla $\lambda \in \langle 0,1\rangle$ równanie węzłowe tego obwodu ma postać:

$$H(x,\lambda) = \lambda f(x) + (1-\lambda)\left\{AGA^t x - A(J-GE)\right\} = 0, \tag{2}$$

gdzie $G = \mathrm{diag}\,[G_1, G_2,\ldots,G_m]$.

Można zauważyć, że równanie (2) ma następujące własności:

a) Rozwiązanie układu dla wartości początkowej $\lambda_0 = 0$ jest łatwe do uzyskania, gdyż równanie

$$H(x,0) = AGA^t x - A(J-GE) = 0 \tag{3}$$

stanowi układ równań liniowych.

b) Dla wartości parametru $\lambda_N = 1$ redukuje się do równania (1), tzn.

$$H(x,1) = f(x) = 0. \tag{4}$$

Stosując metodę kontynuacji przyjmuje się, że H jest homotopią [2], tzn., że istnieje ciągłe odwzorowanie $x(\lambda)$ takie, że

$$H(x(\lambda), \lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \langle 0,1 \rangle. \tag{5}$$

Oznacza to, że rozwiązania $x(\lambda)$ równań (2) wyznaczane dla rosnącego ciągu wartości $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N = 1$ opisują pewną krzywą łączącą punkt $x(0)$ z zerem $x^* = x(1)$ funkcji $f(x)$.

Do rozwiązywania kolejnych równań

$$H(x, \lambda_i) = 0 \qquad i = 0,1,2,\ldots,N \tag{6}$$

wybrano metodę Newtona z przybliżeniem początkowym

$$x(\lambda_i)^{(0)} = x(\lambda_{i-1}), \tag{7}$$

wtedy

$$x(\lambda_i)^{(j+1)} = x(\lambda_i)^{(j)} - H_x(x(\lambda_i)^{(j)}, \lambda_i)^{-1} H(x(\lambda_i)^{(j)}, \lambda_i) \tag{8}$$

$$j = 0,1,2,\ldots$$

Równania (2) i (8) pozwoliły uzyskać zmodyfikowaną postać równań węzłowych tzw. dyskretnego obwodu równoważnego [1,3]:

$$A\left[\lambda G^{(j)} + (1-\lambda)G\right]A^t x^{(j+1)} = A\left[J^{(j)} - \lambda G^{(j)}E + (1-\lambda)(J-GE)\right] \tag{9}$$

$$\forall \lambda \in \langle 0,1 \rangle$$

gdzie:

$G^{(j)}$ - diagonalna macierz dynamicznych konduktancji rezystorów nieliniowych dla napięć w j-tej iteracji

$$J^{(j)} = \lambda\left[J - J_Q^{(j)} + G^{(j)}\, U_Q^{(j)}\right]$$

$$U_Q^{(j)} = A^t\, x^{(j)} + E$$

$$J_Q^{(j)} = g(U_Q^{(j)}).$$

Rozwiązanie ciągu równań (9) będzie zbieżne do rozwiązania równania (1), jeżeli długość kroku

$$\bar{\lambda}_i = \lambda_{i+1} - \lambda_i\,, \qquad i = 1,2,\ldots,N-1 \tag{10}$$

będzie odpowiednio dobrana. Winna ona być tak duża, by zapewniała minimalny czas obliczeń konieczny do uzyskania x^*, a jednocześnie "dostatecznie mała" by zapewnić zbieżność metody iteracyjnej.

2. Oszacowanie długości kroku

Niech $x(\lambda)$ oznaczą krzywą spełniającą zależność (5) nazywaną dalej ścieżką homotopii, natomiast $\hat{x}(\lambda)$ niech oznacza krzywą utworzoną przez kolejne przybliżenia początkowe $x(\lambda_i)^{(o)}$ nazywają dalej ścieżką predykcji. Błąd predykcji $\|\hat{x}(\lambda) - x(\lambda)\|$ jest ściśle związany z długością kroku homotopii. Ponieważ w omawianym algorytmie

$$\hat{x}(\lambda) = x(0) = x^{(o)} \qquad \forall \lambda \in \langle 0,\bar{\lambda}\rangle\,,$$

więc, jeżeli x jest jedyną ścieżką w pewnej dziedzinie D, to

$$\|\hat{x}(\lambda) - x(\lambda)\| = \|x(\lambda) - x(0)\| = \tag{11}$$

$$= \left\|\int_0^{\lambda} \dot{x}(t)dt\right\| \leqslant \lambda \cdot \sup_{t\in\langle 0,\bar{\lambda}\rangle} \|\dot{x}(t)\| = \lambda \cdot \eta\,.$$

Na podstawie twierdzenia o wartości średniej [2] otrzymuje się:

$$H(\hat{x}(\lambda),\lambda) = H(x(\lambda),\lambda) + \int_0^1 H_x(\alpha(\lambda,t),\lambda)\beta(\lambda,t)\,dt = \int_0^1 H_x(\alpha(\lambda,t),\lambda)\beta(\lambda,t)\,dt, \tag{12}$$

gdzie:

$$\alpha(\lambda,t) = x(\lambda) + t(\hat{x}(\lambda) - x(\lambda))$$

$$\beta(\lambda,t) = \hat{x}(\lambda) - x(\lambda)$$

$H_x(x,\lambda)$ oznacza macierz Jacobiego.

Wynika stąd następujące oszacowanie członu korekcji we wzorze (8)

$$\left\|H_x(\hat{x}(\lambda),\lambda)^{-1}H(\hat{x}(\lambda),\lambda)\right\|$$

$$= \left\|\int_0^1 \left[H_x(\hat{x}(\lambda),\lambda)^{-1} H_x(\alpha(\lambda,t),\lambda)\beta(\lambda,t)\right]dt\right\|$$

$$= \left\|\int_0^1 \left[H_x(\hat{x}(\lambda),\lambda)^{-1}(H_x(\alpha(\lambda,t),\lambda)-H_x(\hat{x}(\lambda),\lambda))+I\right] (\hat{x}(\lambda)-x(\lambda))\,dt\right\|$$

$$\leqslant \left\|\hat{x}(\lambda)-x(\lambda)\right\| \cdot \left\|\int_0^1 \left[H_x(\hat{x}(\lambda),\lambda)^{-1}(H_x(\alpha(\lambda,t),\lambda)-H_x(\hat{x}(\lambda),\lambda))+ I\right]dt\right\| .$$

Jeżeli przyjąć, że $\forall\ y,z\in D,\quad \lambda\in \langle 0,1\rangle$ zachodzi

$$\left\|H_x(\hat{x}(\lambda),\lambda)^{-1}(H_x(y,t) - H_x(z,t))\right\| \leqslant \omega\left\|y-z\right\|, \tag{13}$$

te

$$\left\| H_x(\hat{x}(\lambda),\lambda)^{-1} H(\hat{x}(\lambda),\lambda)\right\| \leq \left\|\hat{x}(\lambda)-x(\lambda)\right\| \int_0^1 \left[1+\omega\left\|\alpha(\lambda,t)-\hat{x}(\lambda)\right\|\right] dt$$

$$= \left\|\hat{x}(\lambda)-x(\lambda)\right\| \int_0^1 \left[1+\omega(1-t)\left\|\hat{x}(\lambda)-x(\lambda)\right\|\right] dt$$

$$= \left\|\hat{x}(\lambda)-x(\lambda)\right\| \left[1+\tfrac{1}{2}\omega\left\|\hat{x}(\lambda)-x(\lambda)\right\|\right].$$

Uwzględniając oszacowanie (11) błędu predykcji otrzymuje się

$$\left\| H_x(\hat{x}(\lambda),\lambda)^{-1} H(\hat{x}(\lambda),\lambda)\right\| \leq \eta\lambda\left(1+\tfrac{1}{2}\omega\eta\lambda\right). \tag{14}$$

Twierdzenie Newtona-Kantorowicza [2] zapewnia zbieżność metody Newtona, jeżeli

$$\omega\left\| H_x(\hat{x}(\lambda),\lambda)^{-1} H(\hat{x}(\lambda),\lambda)\right\| \leq \tfrac{1}{2}. \tag{15}$$

Uwzględniając wzory (14) i (15) otrzymamy:

$$\omega\eta\lambda\left(1+\tfrac{1}{2}\omega\eta\lambda\right) \leq \tfrac{1}{2}.$$

A stąd wynika, że metoda będzie zbieżna, jeśli $\bar{\lambda} \in \langle 0, \lambda_{max} \rangle$, gdzie

$$\lambda_{max} = \frac{\sqrt{2}-1}{\omega\eta}. \tag{16}$$

Uzyskany wynik może stanowić podstawę doboru kroku homotopii, jeżeli globalne wielkości ω i η zostaną zastąpione przez ich lokalne estymatory $\tilde{\omega}_i$, $\tilde{\eta}_i$ szacowane w czasie obliczeń dla $\lambda = \lambda_i$.

Wtedy

$$\left[\bar{\lambda}_{max}\right]_i = \frac{\sqrt{2}-1}{\tilde{\omega}_i \cdot \tilde{\eta}_i}. \tag{17}$$

Ze względu na globalny charakter ω i η winny być spełnione nierówności:

$$\tilde{\omega}_i < \omega \quad , \quad \tilde{\eta}_i \leq \eta \quad . \tag{18}$$

Wynika stąd, że

$$[\bar{\lambda}\max]_{i} \geqslant \lambda\max = \frac{\sqrt{2}-1}{\omega\eta}, \tag{19}$$

to znaczy, że dobierany krok może okazać się większy od oszacowanego teoretycznie. Zatem metoda doboru kroku w praktyce winna zawierać etap przewidywania i ewentualnej korekcji (redukcji) jego wielkości.

Wartość λ_{max}, a tym samym kroku homotopii, może zostać zwiększona, jeśli przybliżenia początkowe wybiera się według wzoru

$$\hat{x}(\lambda) = x^{(o)} + \lambda\dot{x}(0) = x^{(o)} - \lambda H_x(x^{(o)},0)H_\lambda(x^{(o)},0). \tag{20}$$

Błąd predykcji można wtedy oszacować, przy założeniu że

$$\|\dot{x}(\lambda) - x(0)\| \leqslant L.\lambda \qquad \forall\in\langle 0,\bar{\lambda}\rangle,$$

następująco:

$$\|\hat{x}(\lambda) - x(\lambda)\| = \|x(0) + \lambda\dot{x}(0) - x(\lambda)\| = \left\|\int_0^\lambda \dot{x}(t)dt - \lambda\dot{x}(0)\right\| =$$

$$= \left\|\int_0^\lambda (\dot{x}(t) - \dot{x}(0))dt\right\| \leqslant \int_0^\lambda \|\dot{x}(t) - \dot{x}(0)\|\, dt \leqslant L.\int_0^\lambda t\, dt = \tag{21}$$

$$= \frac{L}{2}\lambda^2 = \eta_2\lambda^2.$$

Uwzględnienie tego oszacowania w zależnościach (14) i (15) prowadzi do rezultatu

$$\lambda_{max} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\omega\eta_2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

Jeżeli przyjąć, że $\eta_1 = \eta_2$, to widać, że λ_{max} ulega zwiększeniu.

LITERATURA

[1] Chua L.O., Lin P.M.: Komputerowa analiza układów elektronicznych. WNT, Warszawa 1981.

[2] Ortega J.M., Rheinboldt W.C.: Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Academic Press, New York 1970.

[3] Garczarczyk Z.: Metoda kontynuacji a dyskretne obwody równoważne w analizie nieliniowych obwodów rezystancyjnych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 98, 1986.

Recenzent:
Doc. dr hab. inż. Maciej Siwczyński

Wpłynęło do Redakcji 15 kwietnia 1986 r.

О ДЛИНЕ ШАГА В ДИСКРЕТНОМ МЕТОДЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

Р е з ю м е

В статье представлена параметрическая оценка максимальной длины шага в дискретном методе продолжения решения по параметру, связанным с алгоритмом решения системы узловых уравнений, описывающих нелинейную резистивную цепь. Показано, что в расчётной практике это увеличение нужно корректировать. Указано на возможность увеличения длины шага.

ABOUT STEPSIZE IN THE DISCRETE CONTINUATION METHOD

S u m m a r y

In the paper a stepsize estimate for discrete contimation method related to the algorithm of the solution of node equations for nonlinear resistive networks is presented on a theoretical basis. It is shown that in numerical practice a stepsize quantity should be corrected. A further possibility to increase the estimate is shown.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1988

Seria: ELEKTRYKA z. 103 Nr kol. 904

Andrzej DRYGAJŁO
Instytut Elektroniki
Politechniki Śląskiej

SPECJALNE UKŁADY ORTOGONALNE DO FILTRACJI SYGNAŁÓW DYSKRETNYCH

Streszczenie: W pracy przedstawiono metodę generowania ortogonalnych macierzy transformujących i sposób bezpośredniego wykorzystania ich do budowy układów dyskretnych służących do pasmowo-przepustowej i pasmowo-zaporowej filtracji sygnałów. Podano opis czasowy i widmowy tych układów.

1. Wprowadzenie

W przetwarzaniu widmowym sygnałów dyskretnych najczęściej wykorzystywanym ortogonalnym układem ciągów bazowych, także ze względu na istnienie efektywnych algorytmów szybkiej transformacji Fouriera (FFT), jest układ zespolonych ciągów wykładniczych [1].

Obecny rozwój technologii elektronicznych układów cyfrowych sprawia, że coraz częściej można zaobserwować dążenie do zastosowania innych układów ortogonalnych, przede wszystkim rzeczywistych, dla których można zbudować algorytmy szybkich transformacji [2]. W ostatnich latach można zauważyć również tendencję do eliminowania z algorytmów przetwarzania sygnałów dyskretnych operacji mnożenia [3] i projektowania filtrów w przestrzeniach wartości całkowitych [4].

Przeprowadzone w niniejszej pracy rozważania stanowią próbę uogólnienia wyników bądań z zakresu generowania układów ortogonalnych ciągów, przyjmujących jedynie wartości 1, -1 i 0 w przedziale określoności, jako ciągów bazowych w widmowym przetwarzaniu sygnałów [5]. Uogólnienie obejmuje układy ortogonalne nie zawierające ciągu stałego. Brak ciągu stałego sugeruje zastosowanie tego typu układów ortogonalnych do budowy dyskretnych diadycznych układów liniowych [6] służących do pasmowo-przepustowej i pasmowo-zaporowej filtracji sekwencyjnościowej sygnałów [7].

2. Specjalne układy ortogonalne ciągów trójwartościowych

Dogodne przedstawienie układów ortogonalnych dla bezpośredniego wykorzystania w przetwarzaniu sygnałów dyskretnych daje ujęcie macierzowe [1]. Zbiór N pierwszych ciągów podaje macierz ortogonalna o wymiarach N×N, w której m-ty wiersz zawiera wyrazy m-tego ciągu dla n = 0,1,2,...,N-1, gdzie $N = 2^p$ (p = 0,1,2,...). Tak zbudowana macierz stanowi macierz transformującą w zapisie dyskretnej transformacji względem danego układu ortogonalnego.

Elementy ortogonalne macierzy transformujących zawierających ciągi trójwartościowe mogą być zdefiniowane przy wykorzystaniu binarnego zapisu wskaźnika wierszy m i wskaźnika kolumn n. Szczególne macierze ortogonalne, dla których istnieje zwięzły zapis definiujący elementy macierzy, to macierz Hadamarda $\underline{H}$ i macierz jednostkowa $\underline{I}$. Macierz Hadamarda zawiera ortogonalne ciągi Walsha w uporządkowaniu naturalnym, natomiast macierz jednostkowa będąca macierzą transformującą tożsamościowo stanowi układ ortogonalny ciągów impulsowych.

Elementy macierzy Hadamarda $\underline{H}$ i macierzy jednostkowej $\underline{I}$ o wymiarach NxN definiują wzory:

$$h(m,n) = \prod_{i=0}^{p-1} (-1)^{m_i n_i}, \tag{1}$$

$$j(m,n) = \prod_{i=0}^{p-1} \delta_{m_i n_i}, \tag{2}$$

gdzie h(m,n), j(m,n) - elementy odpowiednio macierzy $\underline{H}$ i $\underline{I}$ w m-tym wierszu i n-tej kolumnie, m_i, n_i - współczynniki binarnego rozwinięcia liczb m i n, $\delta_{m_i n_i}$ - symbol Kroneckera.

Dla N=8 macierze $\underline{H}$ i $\underline{I}$ mają postać:

$$\begin{array}{cc}
\begin{matrix} 0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&0&1&1&0&0&1&1 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1 \end{matrix} & \begin{matrix} n_2 \\ n_1 \\ n_0 \end{matrix} \\
\underline{H} = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 1&-1&1&-1&1&-1&1&-1 \\ 1&1&-1&-1&1&1&-1&-1 \\ 1&-1&-1&1&1&-1&-1&1 \\ 1&1&1&1&-1&-1&-1&-1 \\ 1&-1&1&-1&-1&1&-1&1 \\ 1&1&-1&-1&-1&-1&1&1 \\ 1&-1&-1&1&-1&1&1&-1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0\,0\,0 \\ 0\,0\,1 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,1\,1 \\ 1\,0\,0 \\ 1\,0\,1 \\ 1\,1\,0 \\ 1\,1\,1 \end{matrix} \\
 & m_2 m_1 m_0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
\begin{matrix} 0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&0&1&1&0&0&1&1 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1 \end{matrix} & \begin{matrix} n_2 \\ n_1 \\ n_0 \end{matrix} \\
\underline{I} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0\,0\,0 \\ 0\,0\,1 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,1\,1 \\ 1\,0\,0 \\ 1\,0\,1 \\ 1\,1\,0 \\ 1\,1\,1 \end{matrix} \\
 & m_2 m_1 m_0
\end{array}$$

Dokonując faktoryzacji macierzy $\underline{H}$ o wymiarach NxN, $N = 2^p$ otrzymuje się iloczyn p macierzy rzadkich, z których każda jest macierzą ortogonalną, o elementach, które mogą być definiowane wykorzystując zapisy (1) i (2). Dalsze rozważania będą ilustrowane przykładami macierzy o wymiarach 8x8. W wyniku faktoryzacji macierzy $\underline{H}$ otrzymuje się:

$$
\underline{H} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix} \cdot
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1
\end{bmatrix} \cdot
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{bmatrix}
$$

$$\underline{H} = \underline{H}_3 \cdot \underline{H}_2 \cdot \underline{H}_1 .$$

Elementy macierzy $\underline{H}_1$, $\underline{H}_2$, $\underline{H}_3$ mogą być definiowane następująco:

$$h_1(m,n) = \prod_{i=1,2} \delta_{m_i n_i} \cdot (-1)^{m_0 n_0}$$

$$h_2(m,n) = \prod_{i=0,2} \delta_{m_i n_i} \cdot (-1)^{m_1 n_1}$$

$$h_3(m,n) = \prod_{i=0,1} \delta_{m_i n_i} \cdot (-1)^{m_2 n_2} .$$

Z kolei każda z macierzy będąca iloczynem macierzy powyższych $\underline{H}_4 = \underline{H}_2 \underline{H}_1$, $\underline{H}_5 = \underline{H}_1 \underline{H}_3$, $\underline{H}_6 = \underline{H}_2 \underline{H}_3$ jest również macierzą ortogonalną:

$$
\underline{H}_4 = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1
\end{bmatrix}
\quad
\underline{H}_5 = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1\\
1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0\\
1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1\\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{bmatrix}
\quad
H_6 = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1\\
1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1\\
1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

Elementy tych macierzy definiują wzory:

$$h_4(m,n) = \delta_{m_2 n_2} \prod_{i=0,1} (-1)^{m_i n_i}$$

$$h_5(m,n) = \delta_{m_1 n_1} \prod_{i=0,2} (-1)^{m_i n_i}$$

$$h_6(m,n) = \delta_{m_0 n_0} \prod_{i=1,2} (-1)^{m_i n_i}$$

Ciągi trójwartościowe otrzymane w macierzach typu $\underline{H}$ oraz $\underline{H}_1 \div \underline{H}_6$ stanowią podstawę budowy specjalnych układów ortogonalnych. Dozwolone są takie kombinacje tych ciągów, dla których utworzoną z nich macierz ortogonalną N-wymiarową można rozłożyć na iloczyn p macierzy rzadkich ortogonalnych N-wymiarowych. Przykładowe dwie macierze dla N=8 utworzone w powyższy sposób mają postać:

$$\underline{D1} = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&0&0&0&0\\ 1&-1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&-1&-1&1&1&-1&-1\\ 0&0&1&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&-1&0&0\\ 1&1&-1&-1&-1&-1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&-1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D2} = \begin{bmatrix} 1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&-1&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\ 1&-1&1&-1&-1&1&-1&1\\ 0&0&0&0&1&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&-1 \end{bmatrix}$$

W powyższy sposób można otrzymać układy ortogonalne nie zawierające ciągu stałego złożonego z jedności, jak to miało miejsce dla układów ortogonalnych klasycznych. Zatem przedstawiona w niniejszej pracy metoda rozszerza klasę układów ortogonalnych złożonych z ciągów trójwartościowych, przyjmujących wartości 1,-1 i 0 w przedziale określoności [5].

3. Zastosowanie specjalnych układów ortogonalnych w algorytmach filtracji sygnałów dyskretnych

Wykorzystując macierzową postać utworzonych w niniejszej pracy układów ortogalnych jako macierzy transformujących, można sformułować definicje dyskretnych transformacji prostej i odwrotnej względem tych układów w postaci równań macierzowych:

$$\underline{X}_D = \frac{1}{N}\underline{D}\,\underline{x}\,, \tag{3}$$

$$\underline{x} = N\,\underline{D}^{-1}\,\underline{X}_D\,, \tag{4}$$

gdzie:

$\underline{X}_D$ - wektor dyskretnego widma o elementach $\underline{X}_D(m)$,
$\underline{x}$ - wektor dyskretnego sygnału o elementach $x(n)$,
$\underline{D}$ - ortogonalna macierz transformująca o wymiarach NxN,
$\underline{D}^{-1}$ - macierz odwrotna do macierzy $\underline{D}$.

Praktyczna przydatność transformacji (3) i (4) wynika z możliwości budowy uniwersalnego algorytmu szybkich transformacji zarówno względem wykorzystywanych dotychczas układów hybrydowych ciągów Hadamarda-Haara [8], jak i względem układów bazowych otrzymanych w niniejszej pracy.

Transformacja sygnału dyskretnego danego w punktach $n = 0,1,2,\ldots,N-1$, gdzie $N = 2^p$, $p = 0,1,2,\ldots$ do przestrzeni danego układu ortogonalnego $\underline{D}$ wymaga jedynie wykonania od $2(N-1)$ do $N\log_2 N - N/2$ operacji dodawania i odejmowania liczb rzeczywistych przy wykorzystaniu algorytmu szybkich transformacji.

W pracy [7] przedstawiono zasadę budowy dyskretnych układów liniowych niezmiennych względem przesunięcia diadycznego wykorzystującą algorytmy szybkich transformacji bazujące na układach ortogonalnych ciągów trójwartościowych. Macierze ortogonalne przedstawione w niniejszej pracy mogą być również użyte do budowy tego typu układów liniowych. Proces przetwarzania opisany jest wtedy równaniami macierzowymi:

$$\underline{y} = \frac{1}{N}\underline{D}^T\,\underline{D}\,\underline{x}\,, \tag{5}$$

$$\underline{y} = \frac{1}{N}\underline{D}_1^T \ldots \underline{D}_p^T\,\underline{D}_p \ldots \underline{D}_1\,\underline{x}\,, \tag{6}$$

gdzie:

$\underline{x}$, $\underline{y}$ - wektory dyskretnych sygnałów odpowiednio wejściowego i wyjściowego,
$\underline{D}$ - ortogonalna macierz transformująca o wymiarach NxN,

$\underline{D}_i$ - ortogonalne macierze rzadkie,

$\underline{D}^T$, $\underline{D}_i^T$ - macierze transponowane względem macierzy $\underline{D}$, $\underline{D}_i$.

Tak skonstruowane układy diadyczne opisują algorytm ortogonalnej sekwencyjnościowej filtracji cyfrowej w przestrzeni ciągów Walsha, dla którego elementy diagonalne macierzy filtrującej $\underline{G}^W$ przyjmują wartości będące całkowitymi ujemnymi potęgami liczby 2 [8]. Ponadto pozwalają one na tłumienie składowej stałej, co nie było dotychczas możliwe przy wykorzystaniu jedynie hybrydowych ciągów Hadamarda-Haara. Przykładowe 8-punktowe algorytmy wykorzystujące macierze $\underline{D1}$ i $\underline{D2}$ realizują dwie charakterystyki widmowe filtrów sekwencyjnościowych odpowiednio o charakterze środkowo-przepustowym i środkowo-zaporowym.

$$\underline{G1}^W = \mathrm{diag}\ [1/2, 1/2, 1, 1, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4]$$

$$\underline{G2}^W = \mathrm{diag}\ [1/2, 1, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4, 1, 1/2] .$$

Układy te mogą być opisane również w dziedzinie czasowej za pomocą odpowiedzi impulsowej układu [6]:

$$\underline{g1}' = [1/2, 1/4, -1/8, -1/8, 0, 0, 0, 0]$$

$$\underline{g2}' = [1/2, 0, 1/4, 0, -1/8, 0, -1/8, 0]$$

Złożoność obliczeniowa takich realizacji wynosi jedynie od 4(N-1) do $2N\log_2 N - N$ operacji dodawania i odejmowania liczb rzeczywistych.

4. Podsumowanie

W pracy rozszerzono metodę wyznaczania układów ortogonalnych ciągów trójwartościowych o sposób generowania układów ortogonalnych nie zawierających ciągu stałego. Pozwoliło to na znaczne rozszerzenie możliwości budowy dyskretnych diadycznych układów liniowych, wykorzystujących do realizacji bezpośrednio algorytmy szybkich transformacji. Rozwiązanie to prowadzi do realizacji układów filtrujących o charakterze pasmowo-przepustowym i pasmowo-zaporowym aproksymujących charakterystyki sekwencyjnościowe za pomocą elementów z przestrzeni całkowitych potęg liczby 2 przy jednoczesnym zmniejszeniu złożoności obliczeniowej.

Metodę przedstawioną w niniejszej pracy można zastosować do budowy cyfrowych filtrów 2-D w sposób podany w pracach [9, 10].

LITERATURA

[1] Ahmed N., Rao K.R.: Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing. Springer-Verlag, Berlin 1975.

[2] Elliott D.F., Rao K.R.: Fast Transforms - Algorithms, Analyses, Applications. Academic Press, New York 1982.

[3] Lüder E., Höfer K.: Fast Digital Filters without Multipliers. AEÜ, Band 36, Heft 7/8, 1982, ss. 275-278.

[4] Lim Y.C., Parker S.R., Constantinides A.G.: Finite Wordlength FIR Filter Design Using Integer Programming Over Discrete Coefficient Space. IEEE Trans. ASSP-30, August 1982, ss. 661-664.

[5] Drygajło A.: Zastosowanie ortogonalnych funkcji trójwartościowych do analizy widmowej sygnałów dyskretnych. VI SPETO, Gliwice-Ustroń 1983, ss. 53-62.

[6] Drygajło A.: Dyskretne diadyczne układy liniowe. VII SPETO, Gliwice--Ustroń 1984, ss. 207-215.

[7] Drygajło A.: Ortogonalne filtry cyfrowe. VII KK TOiUE, Kazimierz Dolny 1984, ss. 306-311.

[8] Drygajło A.: Zastosowanie szybkich transformacji bazujących na funkcjach schodkowych do przetwarzania sygnałów cyfrowych jedno- i dwuwymiarowych. Praca doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1983.

[9] Drygajło A., Ihnatowicz J.: On the Construction of Two-Dimensional Digital Filters by Fast Hadamard-Haar Hybrid Transforms. ECCTD 83, Stuttgart 1983, ss. 450-453.

[10] Drygajło A.: Dyadic Sequency Filters in Image Processing. Proc. of the First Image Symposium, Biarritz, 1984, tom 1, ss. 519-523.

Recenzent:
Doc. dr hab. inż. Karol Rumatowski

Wpłynęło do Redakcji 15 czerwca 1985 r.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ДЛЯ ФИЛЬТРАЦИИ
ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Р е з ю м е

В работе представлен метод генерации ортогональных матриц преобразований и их прямого применения в строении дискретных систем для полосовой и полосно-заграждающей фильтрации сигналов. Системы описаны во временной и спектральной областях.

SPECIAL ORTHOGONAL SYSTEMS FOR DISCRETE SIGNAL FILTERING

S u m m a r y

In the paper a method of generating of orthogonal transform matrices and their application to discrete system construction for bandpass and bandstop signal filtering is presented. Systems are described in time and spectral domain.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1988

Seria: ELEKTRYKA z. 103 Nr kol. 904

Andrzej DRYGAJŁO

Instytut Elektroniki
Politechnika Śląska

DECYMACJA SYGNAŁÓW DYSKRETNYCH

Streszczenie. W pracy rozważono zagadnienia związane z konwersją częstotliwości próbkowania sygnałów dyskretnych. Zwrócono szczególną uwagę na problemy filtracji cyfrowej związane ze zmniejszeniem częstotliwości próbkowania, które wynikają z potrzeby eliminacji zjawiska stroboskopowego. Na początku omówiono teoretyczny model układów służących do decymacji, a następnie przedstawiono szereg struktur, które mogą być efektywnie użyte do budowy decymatorów. Rozważono metody projektowania antystroboskopowych cyfrowych filtrów SOI, a na końcu pracy wykazano, że istnieje możliwość budowy filtrów cyfrowych SOI o strukturze kaskadowej zwiększającej efektywność przetwarzania filtrów antystroboskopowych.

1. Wprowadzenie

W wielu zastosowaniach cyfrowego przetwarzania sygnałów zachodzi potrzeba zwiększenia częstotliwości próbkowania sygnału dyskretnego (interpolacja) lub zmniejszenia (decymacja). Oba procesy są całkowicie dyskretne i dotyczą zarówno sygnałów dolnopasmowych, jak i pasmowych. Z procesem konwersji częstotliwości próbkowania jest ściśle związany proces filtracji, mający na celu wyeliminowanie efektu stroboskopowego. W pracy rozpatrzono problemy liniowej nierekursywnej filtracji cyfrowej związane przede wszystkim z procesem decymacji. Dąży się do otrzymania struktury filtru o liniowej fazie dającej jednocześnie możliwości efektywnej zmiany częstotliwości odcięcia.

2. Konwersja częstotliwości próbkowania

Konwersja częstotliwości próbkowania jest cyfrowym procesem zmiany częstotliwości próbkowania $F = 1/T$ na częstotliwość próbkowania $F' = 1/T'$, gdzie T, T' są okresami próbkowania.

Zmniejszenie częstotliwości próbkowania zachodzi, gdy spełnione są nierówności:

$$F' < F \tag{1}$$

lub

$$T' > T . \tag{2}$$

Jeżeli stosunek

$$\frac{T'}{T} = \frac{F}{F'} = D \tag{3}$$

określony jest za pomocą współczynnika D, który jest liczbą całkowitą, to proces konwersji jest procesem decymacji [1]. Analiza procesu decymacji w dziedzinie częstotliwości pozwala na określenie zależności, jakie muszą być spełnione, aby nie wystąpił efekt stroboskopowy. Z twierdzenia o próbkowaniu wiadomo, że sygnał ciągły x(t) o ograniczonym widmie, dla którego X(f) = = 0 dla $|f| > F_M$, jest jednoznacznie określony przez swoje próbki x(iT), i 0, ± 1, ± 2,..., jeżeli

$$F > 2 F_M . \tag{4}$$

Częstotliwość

$$F_N = F/2 \tag{5}$$

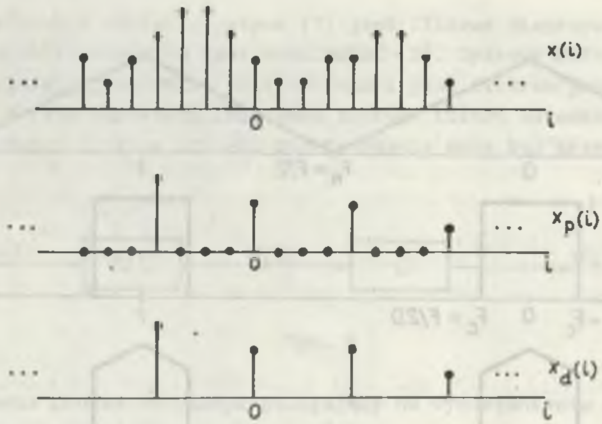
jest częstotliwością Nyquista.

W dziedzinie czasu proces decymacji ilustruje rys. 1.

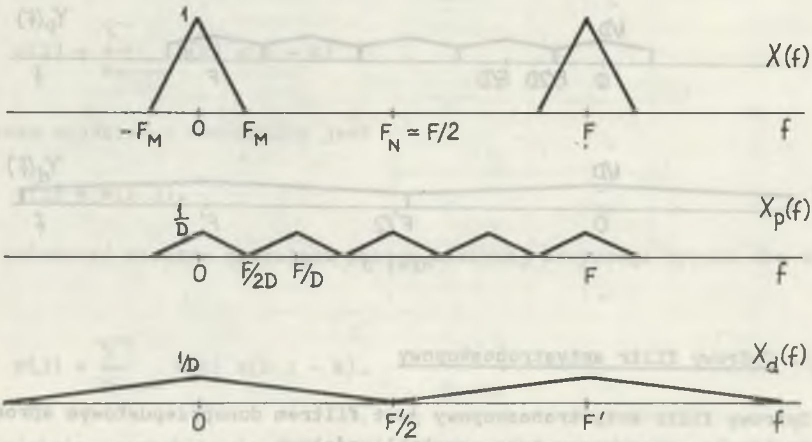
Sygnał x(i) powstaje w wyniku próbkowania sygnału ciągłego z częstotliwością próbkowania F. $x_p(i)$ powstaje w wyniku próbkowania sygnału x(i) z częstotliwością F/D, a $x_d(i)$ w wyniku procesu decymacji. Sygnał $x_d(i)$ powstaje w wyniku D-krotnego zmniejszenia częstotliwości próbkowania.

W dziedzinie częstotliwości proces decymacji ilustruje rys. 2. X(f), $X_p(f)$ i $X_d(f)$ są widmami częstotliwościowymi sygnałów x(i), $x_p(i)$ i $x_d(i)$. Z rys. 2 można wywnioskować, że przy D-krotnym zmniejszeniu częstotliwości próbkowania efekt stroboskopowy nie wystąpi, jeżeli

$$F/D > 2 F_M . \tag{6}$$

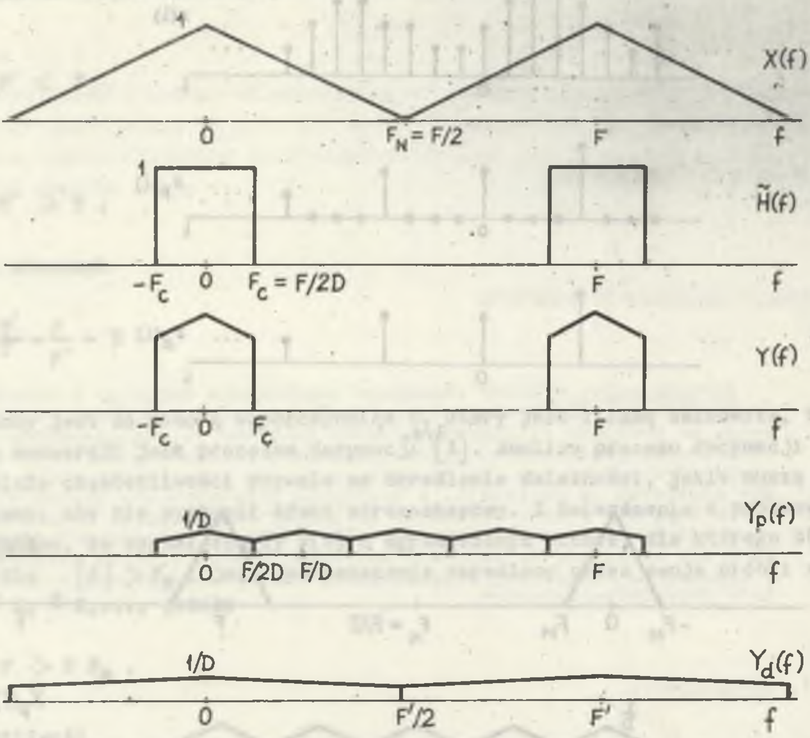


Rys. 1



Rys. 2

Przy założeniu, że częstotliwość próbkowania F jest tak dobrana, że $F = 2 F_M$, proces decymacji prowadzi do pojawienia się efektu stroboskopowego. Aby tego uniknąć, należy przed D-krotną zmianą częstotliwości próbkowania zastosować idealny filtr dolnoprzepustowy o częstotliwości odcięcia F/2D. Ilustruje to rys. 3.



Rys. 3

3. Cyfrowy filtr antystroboskopowy

Cyfrowy filtr antystroboskopowy jest filtrem donoprzepustowym aproksymującym idealną charakterystykę częstotliwościową

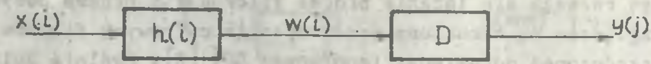
$$\tilde{H}(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leqslant F/2D \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} \tag{7}$$

Odpowiedź impulsowa $\tilde{h}(i)$ odpowiadająca charakterystyce $\tilde{H}(f)$ wyraża się wzorem

$$\tilde{h}(i) = \frac{\sin(\pi i/D)}{(\pi i/D)} \tag{8}$$

dla $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty$.

Filtr cyfrowy o charakterystyce (7) jest filtrem nieprzyczynowym, a tym samym nie spełnia warunków realizowalności [2]. Cyfrowy filtr antystroboskopowy spełniający warunki realizowalności jest filtrem przyczynowym i stabilnym. Jeżeli odpowiedź impulsowa takiego filtru oznaczona jest przez h(i), to schemat blokowy procesu przetwarzania może być przedstawiony jak na rys. 4.



Rys. 4

D oznacza proces decymacji polegający na wyodrębnieniu każdej D-tej próbki z sygnału wyjściowego filtru w(i).

Zakładając, że filtr antystroboskopowy jest filtrem liniowym niezmiennym względem przesunięcia, otrzymuje się zależność

$$w(i) = \sum_{k=-\infty} h(k)\, x(i - k) \tag{9}$$

Sygnałem wyjściowym decymatora jest

$$y(j) = w(D\, j). \tag{10}$$

Stąd zależność czasowa opisująca proces liniowej decymacji wyraża się wzorem

$$y(j) = \sum_{k=-\infty} h(k)\, x(D\, j - k). \tag{11}$$

W dziedzinie częstotliwościowej proces liniowej decymacji opisuje zależność:

$$Y(f') = \frac{1}{D}\left(H(f'/D)\, X(f'/D) + H((f' - F')/D) X((f' - F')/D) + \ldots\right) \tag{12}$$

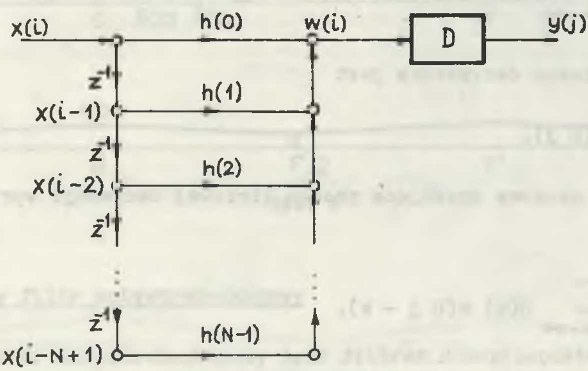
Cyfrowy filtr antystroboskopowy powinien w maksymalnym stopniu zapewnić spełnienie zależności

$$Y(f') \cong \frac{1}{D}\, X(f'/D). \tag{13}$$

Bezpośrednie zastosowanie schematu przetwarzania z rys. 4 wymaga obliczania próbek sygnału w(i) z częstotliwością próbkowania F sygnału wejściowego x(i), gdy sygnał wyjściowy y(j) składa się z próbek powtarzających się częstotliwością F' D-krotnie mniejszą. Próbki y(j) powstają przez pozostawienie co D-tej próbki przebiegu w(i). Pozostałe obliczone próbki sygnału w(i) są najczęściej nie wykorzystane. Podejście takie jest uzasadnione jedynie w przypadku konieczności sygnalizacji stopnia spełnienia warunku Shannona-Kotielnikowa. Z punktu widzenia procesu decymacji podejście powyższe jest nieefektywne. W celu zwiększenia efektywności przetwarzania filtru antystroboskopowego rozważa się łącznie proces filtracji i proces decymacji. Dogodne w tym względzie są struktury przetwarzania cyfrowych filtrów nierekursywnych o skończonej odpowiedzi impulsowej SOI [3]. Ogólnie opisane są one za pomocą równania różnicowego

$$w(i) = h(0)\,x(i) + h(1)\,x(i-1) + \ldots + h(N-1)\,x(i-N+1). \qquad (14)$$

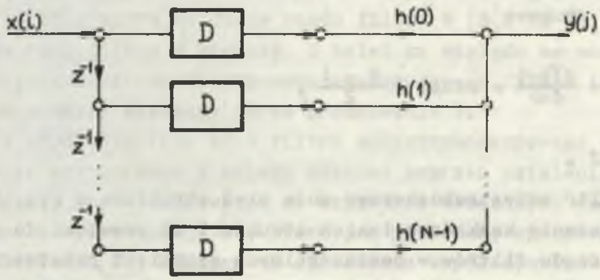
Filtry SOI są filtrami przyczynowymi i absolutnie stabilnymi dla dowolnych skończonych wartości współczynników odpowiedzi impulsowej h(i). Decymator wykorzystujący filtr SOI ma strukturę opisaną grafem przepływu sygnału z rys. 5.



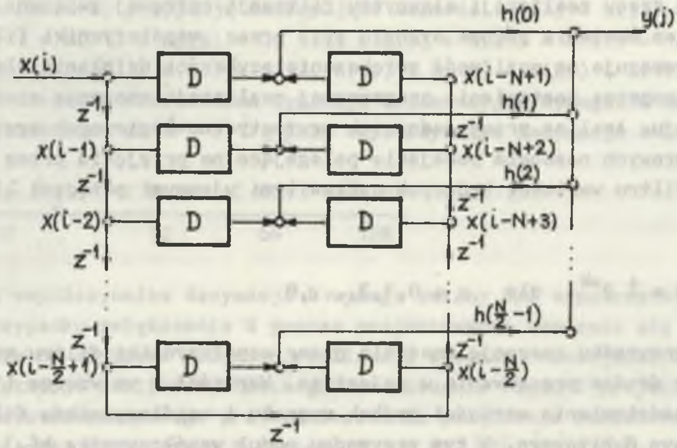
Rys. 5

Dla obliczenia jednej próbki sygnału w(i) trzeba wykonać w czasie okresu T N operacji mnożenia przez współczynniki h(0), h(1), ..., h(N - 1) oraz N operacji dodawania. Wymagana szybkość obliczeń może być zmniejszona dzięki możliwej modyfikacji grafu z rys. 5 w sposób przedstawiony na rys. 6 [4]. W przypadku zastosowania struktury z rys. 6 szybkość przetwarzania jest zmniejszona D-krotnie, tzn. N operacji mnożenia i dodawania potrzebnych do obliczenia jednej próbki y(j) musi być wykonanych w czasie $D.T = T'$. W celu dalszego zwiększenia efektywności przetwarzania można wykorzystać strukturę filtrów SOI o liniowej fazie. Są to filtry, dla których

$$h(i) = h(N-1-i). \qquad (15)$$



Rys. 6



Rys. 7

Strukturę przetwarzania dla decymatora z filtrem SOI o liniowej fazie przedstawia rys. 7.

Realizacja struktury z rys. 7 wymaga dwa razy mniej operacji mnożenia oraz dwa razy mniejszego obszaru pamięci dla współczynników h(.) niż realizacja struktury z rys. 6. Z punktu widzenia procesu decymacji korzystna jest również właściwość liniowości fazy. W tym przypadku, jeżeli charakterystyka częstotliwościowa filtru jest określona wzorem

$$H(\omega) = \left|H(\omega)\right| \, e^{j\varphi(\omega)} \,, \tag{16}$$

to opóźnienie grupowe

$$\tau(\omega) = - \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \text{const} = \frac{N-1}{2}, \tag{17}$$

gdzie $\omega = 2\pi f$.

Cyfrowy filtr antystroboskopowy może mieć strukturę z rys. 5 ÷ 7 lub stanowić połączenie kaskadowe takich struktur, co prowadzi do znacznego zmniejszenia rzędu filtrów w poszczególnych stopniach przetwarzania [5][6].

Analizując algorytmy filtrów antystroboskopowych o strukturach z rys. 5 ÷ 7, można stwierdzić, że stosując klasyczne podejście do realizacji filtru cyfrowego najszybsze algorytmy otrzymuje się przy stosowaniu arytmetyki stałoprzecinkowej. Z analizy tych algorytmów wynika również, że przeważająca część czasu realizacji algorytmu filtracji cyfrowej związana jest z wykonywaniem mnożenia próbek sygnału x(i) przez współczynniki filtru h(.). Fakt ten wskazuje na możliwość zwiększenia szybkości działania algorytmu filtracji poprzez zastąpienie programowej realizacji mnożenia operacją innego rodzaju. Analiza pracy jednostek arytmetyczno-logicznych systemów mikroprocesorowych nasunęła podejście polegające na przyjęciu przez współczynniki filtru wartości będących całkowitymi ujemnymi potęgami liczby 2 [7].

$$h(i) = \pm 2^{-k} \quad \text{dla} \quad k = 0,1,2,\ldots,8 \tag{18}$$

W tym przypadku operację mnożenia przez współczynniki filtru można realizować na drodze przesuwania w rejestrze. Wartości k we wzorze (18) wynikają z przedstawienia wartości próbek sygnału i współczynników filtru za pomocą słowa 8-bitowego. W tym przypadku moduł współczynnika h(.) może przyjmować 9 różnych wartości 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/128, 0, gdzie wartość 0 odpowiada przesunięciu o 8 pozycji w prawo.

Proces syntezy i projektowania filtrów antystroboskopowych o przedstawionych strukturach może być łatwo kontrolowany, ponieważ istnieje twierdzenie o optymalności dla filtrów SOI w sensie minimalnej wartości maksymalnego błędu w pasmach zaporowym i przepustowym [8]. W przypadku stosowania tego twierdzenia wymagania dla filtru doplnoprzepustowego przyjmują postać przedziałów tolerancji, jakie powinien spełniać pożądany filtr cyfrowy. Oznaczają one, że chcemy aproksymować wartość 1 w pasmie przepustowym $0 \leqslant f \leqslant f_1$ z błędem mniejszym niż δ_1, a także wartość 0 w pasmie zaporowym $f_2 \leqslant |f| \leqslant 0.5$. Ponieważ w większości metod projektowych częstotliwość próbkowania nie odgrywa żadnej roli w procedurach aproksymacyjnych, sposób polegający na określeniu wymagań filtru cyfrowego w wartościach częstotliwości znormalizowanej f/F w zakresie [0 - 0.5] jest najmniej kłopotliwy.

W przypadku filtru antystroboskopowego pożądane jest uzyskanie zadanych wartości δ_1 i δ_2 przy możliwie małej szerokości pasma przejściowego

$\Delta f = f_2 - f_1$. Należy przy tym zdawać sobie sprawę z tego, że dobór δ_1, δ_2 i Δf ma istotny wpływ na dobór rzędu filtru N [8]. Im δ_1, δ_2 i Δf mniejsze, tym rząd filtru N większy. Z kolei ze względu na możliwości czasowe danego systemu mikroprocesorowego realizującego filtr im większy rząd filtru N, tym większy wymagany okres próbkowania T.

Obliczenia współczynników h(.) filtru antystroboskopowego o zadanych δ_1 i δ_2 i wstępnie wyznaczonym N należy dokonać poprzez ustalenie $f_2 = F/2D$ i taką zmianę f_1, która doprowadzi do uzyskania założonych wartości δ_1 i δ_2. Do tego celu wykorzystuje się itercyjną procedurę opracowaną przez Parksa i McClellana [9], służącą do określenia współczynników o nieskończonej precyzji. W celu wyznaczenia współczynników będących całkowitymi ujemnymi potęgami liczby 2 można wykorzystać zmodyfikowane programy opracowane przez Bajserta [10].

Przykładowo, dla N = 32, $f_2 = 0.05$ (D = 10), $\delta_1 = 0.15$, $\delta_2 = 0.15$, współczynniki h(i) przyjmują następujące wartości: h(1) = h(32) = - 1/128, h(2) ÷ h(4) = h(31) ÷ h(29) = 0, h(5) = h(6) = h(28) = h(27) = 1/64, h(7) ÷ h(9) = h(26) ÷ h(24) = 1/32, h(10) ÷ h(16) = h(23) ÷ h(17) = 1/16. Z przeprowadzonych doświadczeń wynikają orientacyjne wymagania na rząd filtru N w zależności od δ_1 i δ_2 przy współczynniku decymacji $D \leqslant 10$:

δ_1, δ_2	< 0.15	< 0.1	< 0.01
N	32	64	128

Zmiana współczynnika decymacji D wymaga zmiany N/2 współczynników filtru. W przypadku zwiększenia N proces projektowania znacznie się wydłuża, a wymagania na szybkość obliczeń realizacji w czasie rzeczywistym zwiększają się. Istnieje możliwość znacznego zredukowania rzędu N projektowanego filtru antystroboskopowego przy zastosowaniu połączenia kaskadowego podfiltrów o liniowej fazie rzędu N równego 9 lub 11 [11] [12].

W przypadku metody pierwszej [11] wykorzystuje się w połączeniu kaskadowym dodatkowo operację dodawania i mnożenia przez współczynniki będące liczbami całkowitymi. Przykładowo, w ten sposób można uzyskać transmitancję filtru $H_0(f)$ używając do tego celu połączenia trzech podfiltrów $H_I(f)$ realizującego równanie

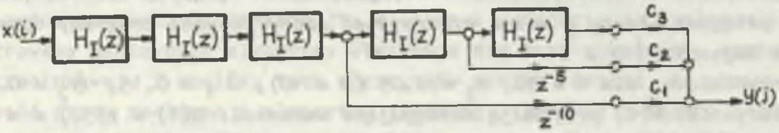
$$H_0(f) = H_I^2(f)\,(3 - 2\,H_I(f)). \tag{19}$$

Dzięki takiej metodzie konstrukcji filtru antystroboskopowego uzyskuje się wygładzenie charakterystyki amplitudowej w pasmie przepustowym i zaporowym przy jednoczesnym zwiększeniu stromości charakterystyki w pasmie przejściowym.

Metoda druga [12] opiera się na ogólnej zależności

$$H_0(f) = \sum_{i=1}^{N} c_i \, H_I^{n+1}(f) \tag{20}$$

dla której współczynniki c_i wyznacza się przyrównując do zera pochodne do n-tej włącznie względem c_i wyrażenia (20) w jedności. Jedną z przykładowych realizacji tego typu filtru przedstawia rys. 8.



Rys. 8

Kaskadowe filtry antystroboskopowe zaprojektowane metodą pierwszą pozwalają na zmianę częstotliwości odcięcia filtru za pomocą współczynników podfiltru, natomiast za pomocą drugiej metody można również zmieniać częstotliwość odcięcia za pomocą dodatkowych współczynników c_i przy zmianie współczynnika decymacji D w zakresie $2 \leqslant D \leqslant 6$.

LITERATURA

[1] Crochiere R.E., Rabiner L.R.: Interpolation and Decimation of Digital Signals - A Tutorial Review. Proc. IEEE, vol. 69, no. 3, March 1981, ss. 300-331.

[2] Wojtkiewicz A.: Elementy syntezy filtrów cyfrowych. WNT, Warszawa 1984.

[3] Oppenheim A.V., Schafer R.W.: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. WKŁ, Warszawa 1979.

[4] Crochiere R.E., Rabiner L.R.: Optimum FIR Digital Filter Implementations for Decimation, Interpolation, and Narrow-Band Filtering. IEEE Trans. Acoust., Speecj, Signal Proc., vol. ASSP-23, no. 5, October 1975, ss. 444-456.

[5] Crochiere R.E., Rabiner L.R.: Further Considerations in the Design of Decimators and Interpolators. IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc., vol. ASSP-24, August 1976, ss. 296-311.

[6] Crochiere R.E., Rabiner L.R.: A Program for Multistage Decimation, Interpolation, and Narrow-Band Filtering. (w) Programs for Digital Signal Processing. IEEE Press, New York 1979, ss. 8.3-1 - 8.3-14.

[7] Lim Y.C., Parker S.R.: FIR Filter Design Over a Discrete Powers - of--Two Coefficient Space. IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc., vol. ASSP-31, no. 3, June 1983, ss. 583-591.

[8] Herrman O., Rabiner L.R., Chan D.S.K.: Practical Design Rules for Optimum Finite Impulse Response Low-Pass Digital Filters. Bell System Technical Journal, vol. 52, no. 6, July-August 1973, ss. 769-799.

[9] McClellan J.H., Parks T.W., Rabiner L.R.: A Computer Program for Designing Optimum FIR Linear Phase Digital Filters. IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU-21, December 1973, ss. 506-525.

[10] Bajsert W.: Synteza mikroprocesorowych filtrów cyfrowych. Rozprawa doktorska, Politechnika Poznańska, Poznań 1982.

[11] Kaiser J.F., Hamming R.W.: Sharpening the Response of Symmetric Nonrecursive Filter by Multiple Use of the Same Filter. IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc., vol. ASSP-25, October 1977, ss. 415-422.

[12] Nakamura S., Yasuda S., Mitra S.K.: An Approach to the Realization of a Programmable FIR Digital Filter. IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc., vol. ASSP-33, no. 3, June 1985. ss. 741-744.

Recenzent:
Doc. dr inż. Zdzisław Trzaska

Wpłynęło do Redakcji 15 kwietnia 1986 r.

ДЕЦИМАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Р е з ю м е

В работе рассмотрены проблемы связанные с конверсией частоты дискретизации дискретных сигналов. Особенное внимание сосредоточено на проблемы цифровой фильтрации, связанные с уменьшением числа выборок, которые возникают из-за необходимости исключения эффекта наложения. В начале обсуждена теоретическая модель систем децимации а после этого представлены структуры, которые могут быть использованы в строении этих систем. Рассмотрены методы синтеза цифровых КИХ - фильтров исключающих искажения из-за наложения частот, и наконец представлены возможности строения каскадной формы цепи цифровых КИХ - фильтров для улучшения эффективности этих фильтров.

DECIMATION OF DISCRETE SIGNALS

S u m m a r y

In the paper problems of sampling rate conversion of discrete signals are considered. In particular, problems of digital filtering connected with sampling rate reduction, which results from the need of elimination of stroboscopic effect are presented. First a theoretic model for decimation systems is discussed and then it is shown how various structure can be derived to provide efficient implementations if these systems. Design techniques for FIR anty-aliasing digital filters are discussed, and finaly the ideas behind cascade of identical FIR subfilters implementations for increased efficiency are presented.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI SLĄSKIEJ 1988

Seria: ELEKTRYKA z. 103 Nr kol. 904

Marian PASKO
Janusz WALCZAK

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

MODELOWANIE PORTRETÓW FAZOWYCH RÓWNAŃ STANU W OTOCZENIU PUNKTU OSOBLIWEGO ZA POMOCĄ SPRZĘŻONYCH WZAJEMNIE ŹRÓDEŁ STEROWANYCH I ELEMENTÓW RC

Streszczenie. W pracy pokazano pewien sposób syntezy portretów fazowych równań stanu rzędu drugiego w otoczeniu punktu osobliwego za pomocą sprzężonych wzajemnie źródeł sterowanych i elementów RC. Przeprowadzono analizę wybranej struktury spośród wielu modelujących portrety fazowe. Wybrana struktura, w zależności od rodzaju sprzężeń oraz użycia impedancji ujemnych (realizowanych z pomocą konwertera impedancji ujemnej), pozwala na modelowanie wszystkich możliwych portretów fazowych. Badania przeprowadzone na modelu doświadczalnym w pełni potwierdzają wyniki uzyskane teoretycznie.

1. Wprowadzenie

Niech będzie dany układ równań różniczkowych zwyczajnych w postaci normalnej Cauchy'ego

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = f_k(x), \qquad k \in \{1,\dots,n\}, \tag{1}$$

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in D \subset R^n,$$

$$f_k \in \text{kl. } C_1(D).$$

Punktami osobliwymi układu równań (1) nazywamy te punkty obszaru D, w których nie są spełnione założenia twierdzeń gwarantujących jednoznaczność rozwiązania tego układu równań (np. twierdzenie Picarda [1]). Problem istnienia punktów osobliwych układu równań (1) jest ściśle związany z problemem istnienia rozwiązań układu równań algebraicznych:

$$f_k(x) = 0, \qquad k \in \{1,\dots,n\}, \tag{2}$$

gdyż rozwiązania tego układu równań określają zbiór punktów osobliwych dla równań (1), [1], [4]. Problem ten nie będzie w niniejszej pracy analizowany.

Badanie trajektorii układu równań (1) w otoczeniu punktu osobliwego x_0 przeprowadza się często drogą analizy trajektorii układu równań pierwszego liniowego przybliżenia przyporządkowanego układowi równań (1).

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = \sum_{l=1}^{n} H_{kl}(x_0)x_l(t), \qquad x_0 \in D \subset R^n, \quad k,l \in \{1,\dots,n\}. \tag{3}$$

gdzie:

x_0 - izolowany punkt osobliwy układu równań (1),

$[H_{kl}]$ - macierz Jacobiego funkcji f_k w punkcie osobliwym x_0.

W teorii równań różniczkowych wykazuje się [1], [4], że układ równań (3) sprowadzić można za pomocą przekształcenia nieosobliwego

$$\xi_k = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, x_l, \qquad \det[a_{kl}] = 0, \tag{4}$$

do postaci kanonicznej:

$$\frac{d\xi_k(t)}{dt} = \sum_{l=1}^{n} J_{kl}\xi_l(t), \tag{5}$$

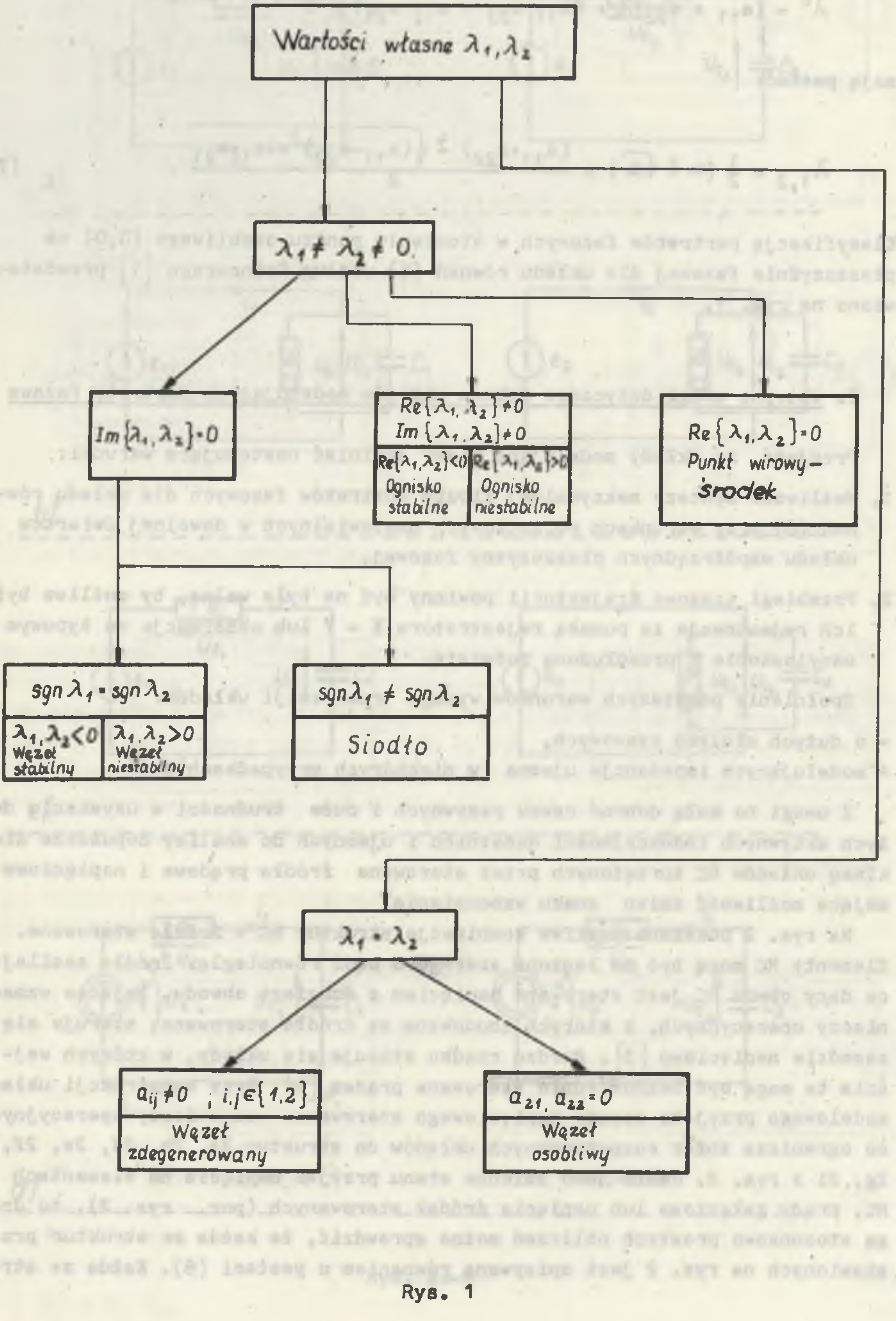
gdzie:

$[J_{kl}]$ - macierz Jordana przyporządkowana macierzy H_{kl} z pomocą przekształcenia podobieństwa.

Analiza wartości własnych macierzy $[H_{kl}]$ pozwala ustalić [4] pełną klasyfikację portretów fazowych dla układu równań (5) w otoczeniu punktu osobliwego, a tym samym pozwala ustalić klasyfikację portretów fazowych dla układów równań (3), (1), jeśli tylko wszystkie wartości własne macierzy $[H_{kl}]$ są różne od zera.

W niniejszej pracy przeprowadza się analizę możliwości uzyskania portretów fazowych w otoczeniu punktu osobliwego dla układu równań:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= a_{11}\, x_1(t) + a_{12}\, x_2(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}\, x_1(t) + a_{22}\, x_2(t). \end{aligned} \tag{6}$$



Wartości własne λ_1, λ_2
$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$
$Im\{\lambda_1, \lambda_2\} = 0$
$Re\{\lambda_1, \lambda_2\} \neq 0$
$Im\{\lambda_1, \lambda_2\} \neq 0$
$Re\{\lambda_1, \lambda_2\} < 0$
Ognisko stabilne
$Re\{\lambda_1, \lambda_2\} > 0$
Ognisko niestabilne
$Re\{\lambda_1, \lambda_2\} = 0$
Punkt wirowy - środek
$sgn\,\lambda_1 = sgn\,\lambda_2$
$\lambda_1, \lambda_2 < 0$
Węzeł stabilny
$\lambda_1, \lambda_2 > 0$
Węzeł niestabilny
$sgn\,\lambda_1 \neq sgn\,\lambda_2$
Siodło
$\lambda_1 = \lambda_2$
$a_{ij} \neq 0 \; ; \; i,j \in \{1,2\}$
Węzeł zdegenerowany
$a_{21}, a_{22} = 0$
Węzeł osobliwy

Rys. 1

Pierwiastki równania charakterystycznego układu równań (6)

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}) = 0$$

mają postać:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\alpha \pm \sqrt{\Delta}) = \frac{(a_{11}+a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}}}{2}. \tag{7}$$

Klasyfikację portretów fazowych w otoczeniu punktu osobliwego (0,0) na płaszczyźnie fazowej dla układu równań (6) według Poincarego [1] przedstawiono na rys. 1.

2. Wstępne uwagi dotyczące doboru układów modelujących portrety fazowe

Przyjęto, że układy modelujące winny spełniać następujące warunki:

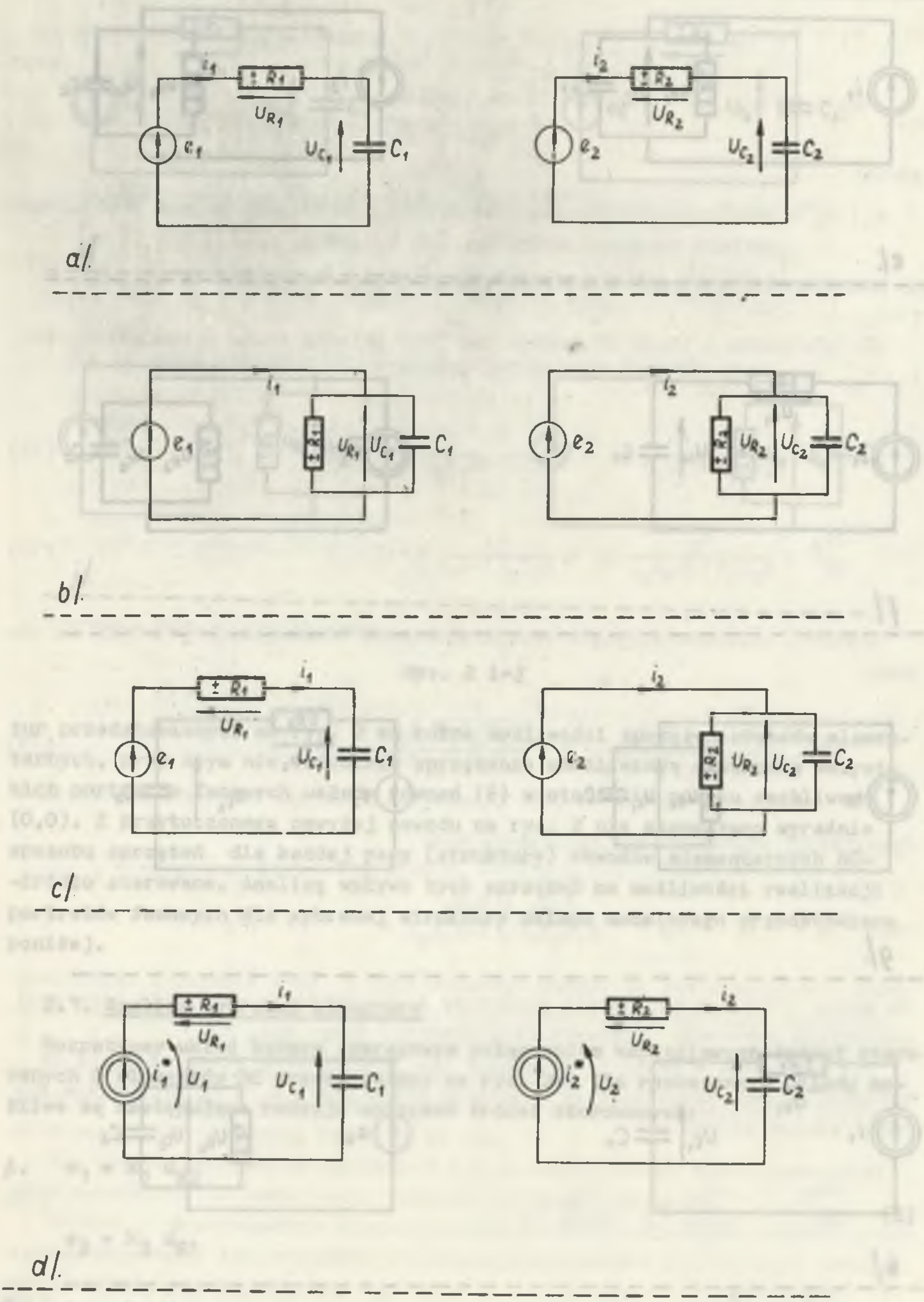
1. Możliwość syntezy maksymalnej liczby portretów fazowych dla układu równań (6) przy warunkach początkowych nastawialnych w dowolnej ćwiartce układu współrzędnych płaszczyzny fazowej.
2. Przebiegi czasowe trajektorii powinny być na tyle wolne, by możliwa była ich rejestracja za pomocą rejestratora X - Y lub obserwacja na typowym oscyloskopie z przedłużoną poświatą.

Spełnienie powyższych warunków wymaga realizacji układów:

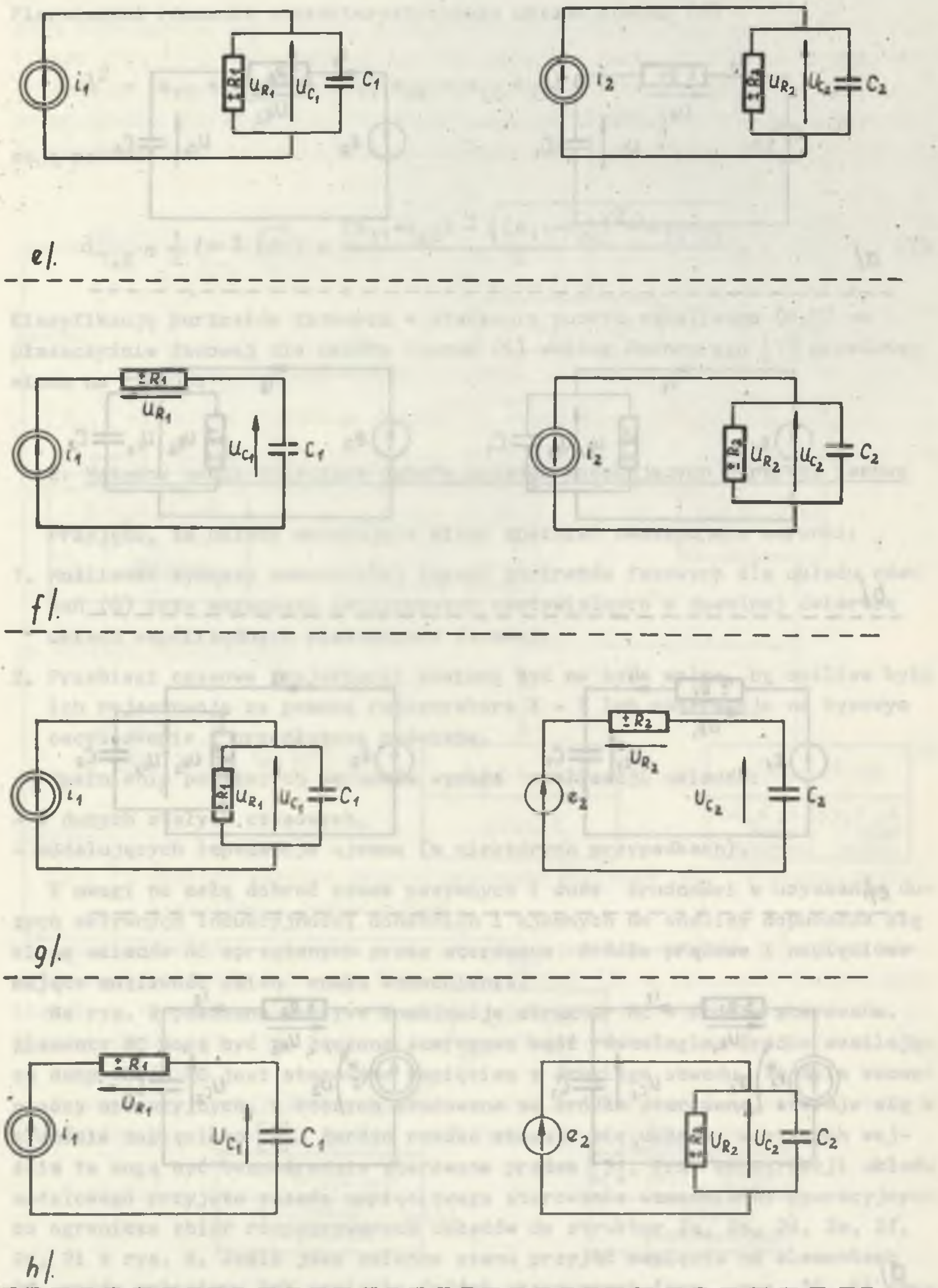
- o dużych stałych czasowych,
- modelujących impedancje ujemne (w niektórych przypadkach).

Z uwagi na małą dobroć cewek pasywnych i duże trudności w uzyskaniu dużych aktywnych indukcyjności dodatnich i ujemnych do analizy dopuszcza się klasę układów RC sprzężonych przez sterowane źródła prądowe i napięciowe mające możliwość zmian znaku wzmocnienia.

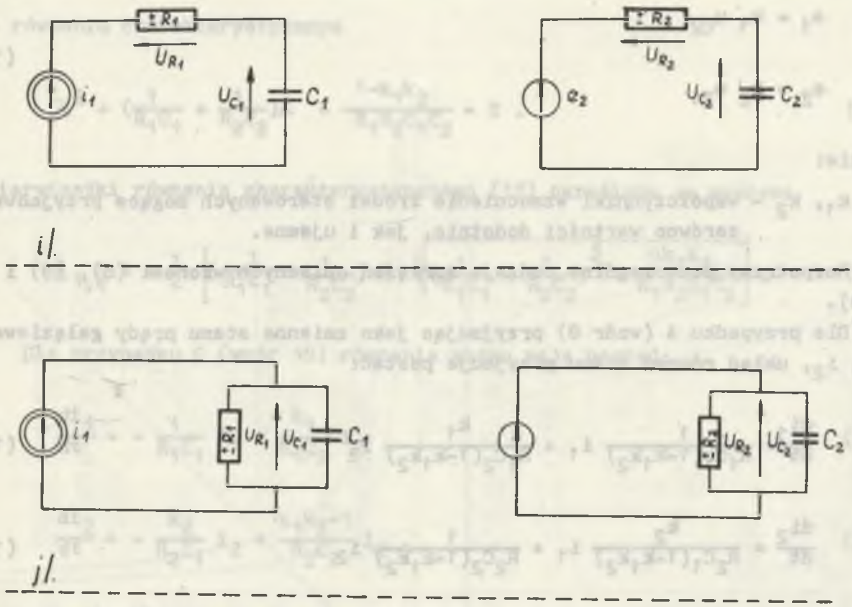
Na rys. 2 pokazano możliwe kombinacje struktur RC - źródła sterowane. Elementy RC mogą być tu łączone szeregowo bądź równolegle. Źródło zasilające dany obwód RC jest sterowane napięciem z drugiego obwodu. Wejścia wzmacniaczy operacyjnych, z których zbudowane są źródła sterowane, steruje się w zasadzie napięciowo [3]. Bardzo rzadko stosuje się układy, w których wejścia te mogą być bezpośrednio sterowane prądem [3]. Przy konstrukcji układu modelowego przyjęto zasadę napięciowego sterowania wzmacniaczy operacyjnych, co ogranicza zbiór rozpatrywanych układów do struktur 2a, 2b, 2d, 2e, 2f, 2g, 2i z rys. 2. Jeśli jako zmienne stanu przyjąć napięcia na elementach RC, prądy gałęziowe lub napięcia źródeł sterowanych (por. rys. 2), to drogą stosunkowo prostych obliczeń można sprawdzić, że każda ze struktur przedstawionych na rys. 2 jest opisywana równaniem o postaci (6). Każda ze struk-



Rys. 2a-d



Rys. 2e-h



Rys. 2 i-j

tur przedstawionych na rys. 2 ma różne możliwości sprzężeń obwodów elementarnych, przy czym nie wszystkie sprzężenia umożliwiają uzyskanie wszystkich portretów fazowych układu równań (6) w otoczeniu punktu osobliwego (0,0). Z przytoczonego powyżej powodu na rys. 2 nie zaznaczono wyraźnie sposobu sprzężeń dla każdej pary (struktury) obwodów elementarnych RC--źródło sterowane. Analizę wpływu tych sprzężeń na możliwości realizacji portretów fazowych dla wybranej struktury układu modelowego przedstawiono poniżej.

2.1. Analiza wybranej struktury

Rozpatrzmy układ będący szeregowym połączeniem napięciowych źródeł sterowanych i elementów RC przedstawiony na rys. 2a. Dla rozważanego układu możliwe są następujące rodzaje sprzężeń źródeł sterowanych:

A. $e_1 = k_1 u_{R2}$

$$e_2 = k_2 u_{R1} \tag{8}$$

B. $e_1 = k_1 u_{C2}$

$$e_2 = k_2 u_{C1} \tag{9}$$

C. $e_1 = k_1\, u_{C2}$

$$e_2 = k_2\, u_{R1} \tag{10}$$

gdzie:

k_1, k_2 - współczynniki wzmocnienia źródeł sterowanych mogące przyjmować zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne.

Rozpatrzmy poszczególne rodzaje sprzężeń opisanych wzorami (8), (9) i (10).

Dla przypadku A (wzór 8) przyjmując jako zmienne stanu prądy gałęziowe i_1, i_2, układ równań stanu przyjmuje postać:

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{R_1C_1(1-k_1k_2)}\, i_1 + \frac{k_1}{R_1C_2(1-k_1k_2)}\, i_2 \tag{11}$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{k_2}{R_2C_1(1-k_1k_2)}\, i_1 + \frac{1}{R_2C_2(1-k_1k_2)}\, i_2 . \tag{12}$$

Równanie charakterystyczne przyporządkowanę równaniom (11) i (12) ma postać:

$$\lambda^2 - \frac{R_1C_1 + R_2C_2}{R_1R_2C_1C_2(1-k_1k_2)}\,\lambda + \frac{1-k_1k_2}{R_1R_2C_1C_2(1-k_1k_2)^2} = 0. \tag{13}$$

Pierwiastki równania (13) są następujące:

$$\lambda_1 = 0 , \quad \lambda_2 = - \frac{R_1C_1 + R_2C_2}{R_1R_2C_1C_2(1-k_1k_2)} , \quad 1 - k_1k_2 \neq 0 \tag{14}$$

Ze wzoru (14) wynika, że dla struktury A nie istnieje możliwość generacji wszystkich portretów fazowych (trajektorii) (por. rys. 1).

Dla przypadku B (wzór 9) przyjmuje się jako zmienne stanu napięcia na kondensatorach, oznaczając je w dalszym ciągu przez u_1 , u_2 ; uzyskuje się układ równań stanu:

$$\frac{du_1}{dt} = - \frac{1}{R_1C_1}\, u_1 + \frac{k_1}{R_1C_1}\, u_2 , \tag{15}$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{k_2}{R_2C_2}\, u_1 - \frac{1}{R_2C_2}\, u_2 , \tag{16}$$

o równaniu charakterystycznym

$$\lambda^2 + \left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_2}\right)\lambda + \frac{1-k_1k_2}{R_1R_2C_1C_2} = 0\,. \tag{17}$$

Pierwiastki równania charakterystycznego (17) określone są wzorem:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_2}\right) \mp \sqrt{\left(\frac{1}{R_1C_1} - \frac{1}{R_2C_2}\right)^2 + \frac{4k_1k_2}{R_1R_2C_1C_2}}\right]. \tag{18}$$

Dla przypadku C (wzór 10) równania stanu mają postać:

$$\frac{di_1}{dt} = -\frac{1}{R_1C_1}i_1 + \frac{k_1}{R_1C_2}i_2 \tag{19}$$

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{k_2}{R_2C_1}i_2 + \frac{k_1k_2-1}{R_2C_2}i_2\,, \tag{20}$$

o równaniu charakterystycznym

$$\lambda^2 - \frac{(k_1k_2-1)\,R_1C_1-R_2C_2}{R_1R_2C_1C_2}\lambda + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2} = 0. \tag{21}$$

Pierwiastki równania charakterystycznego (21) określone są wzorem:

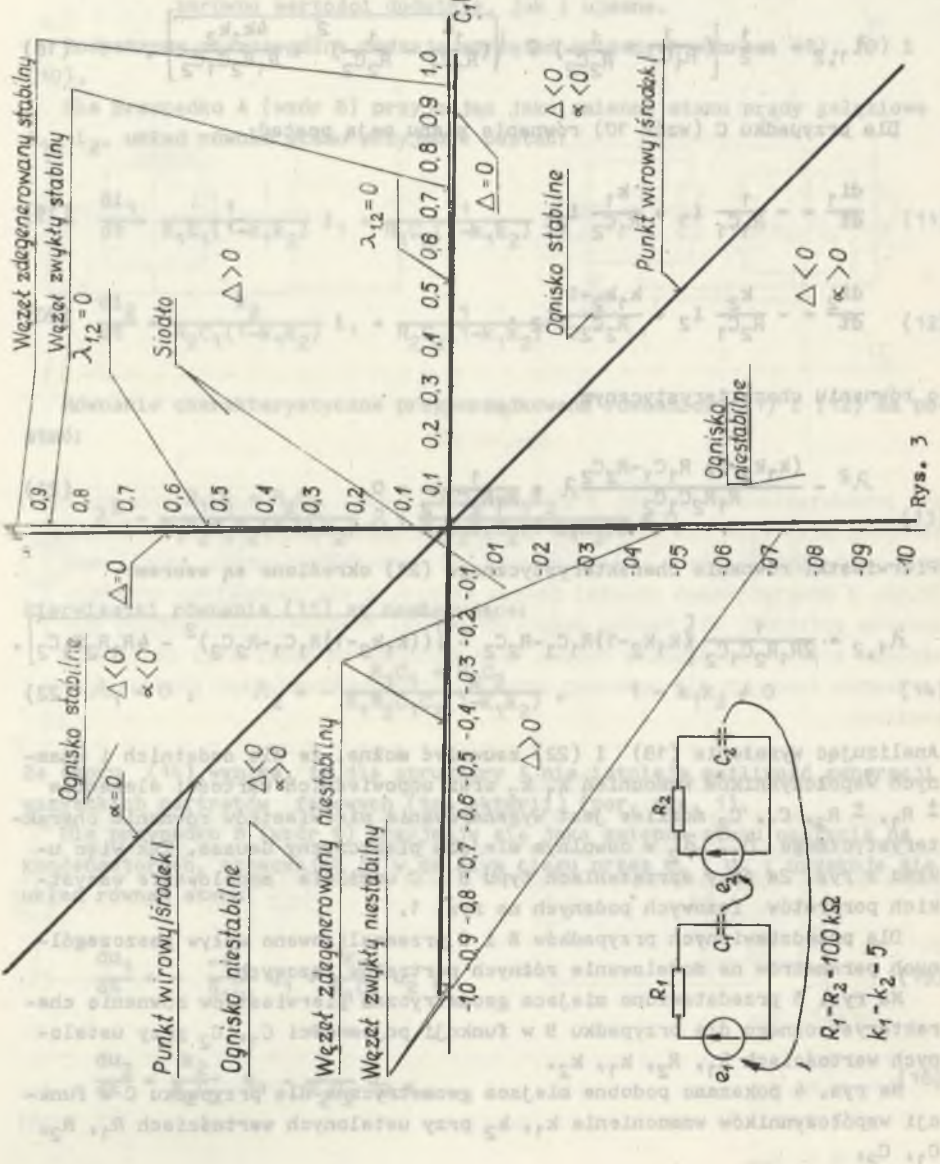
$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2R_1R_2C_1C_2}\left[(k_1k_2-1)R_1C_1-R_2C_2 \pm \sqrt{((k_1k_2-1)R_1C_1-R_2C_2)^2 - 4R_1R_2C_1C_2}\right]. \tag{22}$$

Analizując wyrażenia (18) i (22) zauważyć można, że dla dodatnich i ujemnych współczynników wzmocnień k_1 k_2 oraz odpowiednich wartości elementów $\pm R_1$, $\pm R_2$, C_1, C_2 możliwe jest wygenerowanie pierwiastków równania charakterystycznego λ_1, λ_2 w dowolnym miejscu płaszczyzny Gaussa. Tak więc układ z rys. 2a przy sprzężeniach typu B i C umożliwia modelowanie wszystkich portretów fazowych podanych na rys. 1.

Dla przedstawionych przypadków B i C przeanalizowano wpływ poszczególnych parametrów na modelowanie różnych portretów fazowych.

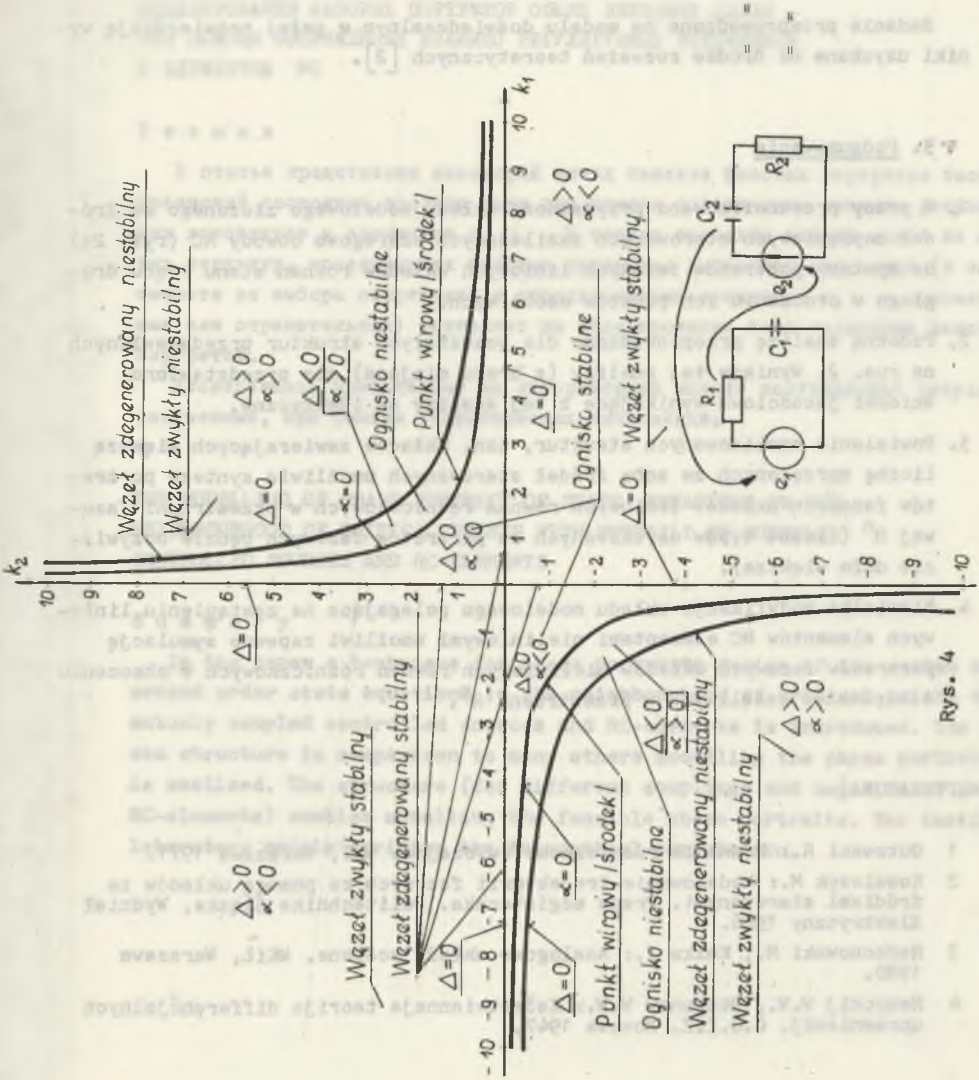
Na rys. 3 przedstawiono miejsca geometryczne pierwiastków równania charakterystycznego dla przypadku B w funkcji pojemności C_1, C_2 przy ustalonych wartościach R_1, R_2, k_1, k_2.

Na rys. 4 pokazano podobne miejsca geometryczne dla przypadku C w funkcji współczynników wzmocnienia k_1, k_2 przy ustalonych wartościach R_1, R_2, C_1, C_2.



Węzeł zdegenerowany stabilny
Węzeł zwykły stabilny
$\lambda_{1,2}=0$
Siodło
$\Delta>0$
$\lambda_{1,2}=0$
$\Delta=0$
Ognisko stabilne
$\Delta<0$
$\alpha<0$
Punkt wirowy /środek/
$\Delta<0$
$\alpha>0$
Ognisko niestabilne
$C_1[\mu F]$
$\Delta=0$
$\alpha=0$
Punkt wirowy /środek/
Ognisko niestabilne
Węzeł zdegenerowany niestabilny
Węzeł zwykły niestabilny
$\Delta>0$
$R_1=R_2=100\,k\Omega$
$k_1=k_2=5$

Rys. 3


k_2
k_1
Węzeł zdegenerowany niestabilny
Węzeł zwykły niestabilny
Ognisko niestabilne
Punkt wirowy /środek/
Ognisko stabilne
Węzeł zwykły stabilny
Węzeł zdegenerowany stabilny
$\Delta = 0$
$\Delta > 0$
$\Delta < 0$
$\alpha > 0$
$\alpha < 0$
$\alpha = 0$
R_1
R_2
C_1
C_2
e_1
e_2

Rys. 4

Badania przeprowadzone na modelu doświadczalnym w pełni potwierdzają wyniki uzyskane na drodze rozważań teoretycznych [2].

3. Podsumowanie

1. W pracy przeanalizowano przydatność układu modelowego złożonego ze źródeł napięciowych sterowanych zasilających szeregowe obwody RC (rys. 2a) do syntezy portretów fazowych liniowych układów równań stanu rzędu drugiego w otoczeniu ich punktów osobliwych.
2. Podobną analizę przeprowadzono dla pozostałych struktur przedstawionych na rys. 2. Wyników tej analizy (z braku miejsca) nie przedstawiono. Wnioski jakościowe wynikające z tej analizy są identyczne.
3. Powielenie analizowanych struktur, tzn. układów zawierających większą liczbę sprzężonych ze sobą źródeł sterowanych umożliwia syntezę portretów fazowych układów liniowych równań różniczkowych w przestrzeni fazowej R^n (liczba typów uzyskiwanych tu portretów fazowych będzie oczywiście dużo większa).
4. Niewielka modyfikacja układu modelowego polegająca na zastąpieniu liniowych elementów RC elementami nieliniowymi umożliwi zapewne symulację portretów fazowych układów nieliniowych równań różniczkowych w otoczeniu ich punktów osobliwych w przestrzeni R^n.

LITERATURA

1 Gutowski R.: Równania różniczkowe zwyczajne. WNT, Warszawa 1971.
2 Kowalczyk M.: Modelowanie trajektorii fazowych za pomocą układów ze źródłami sterowanymi. Praca magisterska. Politechnika Śląska, Wydział Elektryczny 1986.
3 Nadachowski M., Kulka Z.: Analogowe układy scalone. WKiŁ, Warszawa 1980.
4 Nemyckij W.W., Stepanow W.W.: Kačestwiennaja teorija differenčjalnych uprawnienij. O.G.I.Z. Moskwa 1947.

Recenzent:
Prof. dr inż. Stanisław Bolkowski

Wpłynęło do Redakcji 15 kwietnia 1986 r.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ ОБЩИХ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ ПРИ ПОМОЩИ СОПРЯЖЁННЫХ ВЗАИМНО РЕГУЛИРУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ И ЭЛЕМЕНТОВ RC

Р е з ю м е

В статье представлен некоторый метод синтеза фазовых портретов системы уравнений состояния второго рода при помощи сопряженных взаимно регулируемых источников и элементов R, C. В статье проведён анализ одной из многих структур, моделирующих фазовые портреты. Выбранная структура (в зависимости от выбора сопряжений и использованных элементов R, C - положительных или отрицательных) позволяет на моделирование всех возможных фазовых портретов.

Исследования проведённые на лабораторной модели подтверждают результаты, полученные, при помощи теоретических вычислений.

THE MODELLING OF PHASE PORTRAIT OF STATE EQUATIONS IN THE NEIGHBOURHOOD OF CRITICAL POINTS WITH MUTUAILY OF COUPPLED CONTROLLED SOURCES AND RC-ELEMENTS

S u m m a r y

In the paper a technique for phase portraits design of the system of second order state equations in the neighbourhood of critical points with mutualy coupled controlled sources and RC-elements is introduced. The chosen structure in comparison to many others modelling the phase portraits is analised. The structure (for different couplings and negative or positive RC-elements) enables modelling the feasible phase portraits. The testing of laboratory models verifies the theoretical computation.