

## SPIS TREŚCI

|  | Str. |
|--|------|
| 1. Marek Brodzki, Marian Pasko, Magdalena Umińska-Bortliczek: Jednolita teoria mocy dla obwodów trójfazowych o przebiegach odkształconych w oparciu o ortogonalny rozkład prądu w przestrzeni $L_3^2(\langle 0; T \rangle)$ .....                              | 7    |
| 2. Leszek S. Czarnecki: Ortogonalny rozkład prądu źródła napięcia odkształconego zasilającego asymetryczny, nieliniowy odbiornik trójfazowy .....  | 17   |
| 3. Leszek S. Czarnecki, Anna Łasicz: Ortogonalny rozkład prądu odbiornika zasilanego napięciem nieokresowym .....  | 31   |
| 4. Leszek S. Czarnecki: Moc bierna i moc deformacji według definicji Budeanu i przyczyny bezużyteczności tych wielkości w elektrotechnice .....  | 41   |
| 5. Zygmunt Garczarczyk: Metoda kontynuacji w analizie hybrydowej sieci rezystancyjnych nieliniowych .....  | 53   |
| 6. Jan Chojcan, Lucjan Karwan: Zastosowanie wrażliwości wyższych rzędów względem częstotliwości .....  | 63   |
| 7. Andrzej Drygażło: O równoważności trzech liniowych układów filtrujących .....   | 73   |
| 8. Janusz Walczak: Zastosowanie teorii równań całkowych do analizy istnienia rozwiązań problemu Dirichleta dla pewnych równań eliptycznych w elektrostatyce<br>I. Konstrukcja rozwiązania podstawowego .....   | 81   |
| 9. Janusz Walczak: Zastosowanie teorii równań całkowych do analizy istnienia rozwiązań problemu Dirichleta dla pewnych równań eliptycznych w elektrostatyce<br>II. Analiza istnienia rozwiązań w postaci potencjałów .....                                     | 95   |
| 10. Edward Wilczyński: Problem brzegowy analizy pola elektromagnetycznego w układzie wielu środowisk przewodzących o symetrii osiowo-obrotowej .....   | 109  |
| 11. Stefan Paszak: Wykorzystanie twierdzenia o istnieniu transformacji układu liniowych równań różniczkowych o współczynnikach okresowo zmiennych do stałych dla rozwiązania równań stanu na przykładzie maszyny synchronicznej z niesymetrią zewnętrzną ..... | 125  |
| 12. Krzysztof Kluszczynski: Pasożytnicze momenty synchroniczne w jednofazowych silnikach indukcyjnych z kondensatorem pracy .....  | 141  |
| 13. Lesław Topór-Kamiński: Mnożniki impedancji .....   | 151  |

## СОДЕРЖАНИЕ

|  | Стр. |
|--|------|
| 1. Бродэки М., Паско М., Уминьска-Еортличек М.: Монолитная теория мощности для трехфазных цепей с деформированными характеристиками на основе ортогонального распределения тока в пространстве $L_3^2(\langle O, T \rangle)$ .....                             | 7    |
| 2. Чарнецки Л.С.: Ортогональное разложение тока источника деформированного напряжения, питающего асимметрический нелинейный трехфазный приемник .....  | 17   |
| 3. Чарнецки Л.С., Лясич А.: Ортогональное распределение тока в приемнике питаемом непосредческим напряжением .....   | 31   |
| 4. Чарнецки Л.С.: Реактивная и деформационная мощности по определению Будаана и причины непригодности этих величин в электротехнике .....  | 41   |
| 5. Гарчарчик Э.: Метод продолжения решения по параметру в гибридном анализе нелинейных резистивных систем .....  | 53   |
| 6. Хойцан Я., Карван Л.: Применение высших порядков от частоты ....  | 63   |
| 7. Дрыгайло А.: О эквивалентности трех линейных систем фильтрации .....  | 73   |
| 8. Вальчак Я.: Применение теории интегральных уравнений к анализу существования решений проблемы Дирихле для некоторых уравнений эллиптического типа в электростатике<br>I. Конструкция главного решения .....   | 81   |
| 9. Вальчак Я.: Применение теории интегральных уравнений к анализу существования решений проблемы Дирихле для некоторых уравнений эллиптического типа в электростатике<br>II. Анализ существования решений типа потенциалов .....                               | 95   |
| 10. Вильчиньски Э.: Проблема краевого анализа электромагнитного поля в системе разных проводящих сред имеющих вращательно-осевую симметрию .....   | 109  |
| 11. Пашек С.: Использование теоремы о существовании преобразования линейной системы дифференциальных уравнений с периодически изменяющимися коэффициентами к постоянным для решения уравнений состояния на примере синхронной машины с внешней несимметрией .. | 125  |
| 12. Ключчиньски К.: Паразитные синронные моменты в однофазных асинхронных двигателях .....   | 141  |
| 13. Топур-Каминьски Л.: Множители импедансов .....   | 151  |

## CONTENTS

|  | Page |
|--|------|
| 1. Marek Brodzki, Marian Pasko, Magdalena Umińska-Bortliczek: A uniform power theory for three - phase circuits with non - sinusoidal wave from based on the current orthogonal decomposition in the $L^2_3(<0, T>)$ space .....   | 7    |
| 2. Leszek S. Czarnecki: Orthogonal current decomposition of non - sinusoidal voltage source supplying an asymmetrical non - linear three - phase receiver .....  | 17   |
| 3. Leszek S. Czarnecki, Anna Lasicz: Orthogonal decomposition of current of the receiver supplied with aperiodic voltage .....   | 31   |
| 4. Leszek S. Czarnecki: Reactive and distortion powers according to Budeanu's definition and their uselessness in electrical engineering .....   | 41   |
| 5. Zygmunt Garczarczyk: Continuation method in the hybrid analysis of non - linear resistance networks .....   | 53   |
| 6. Jan Chojcan, Lucjan Karwan: Application of the higher order sensitivities in relation to frequency .....  | 63   |
| 7. Andrzej Drygajło: On equivalence of three linear filtering systems .....  | 73   |
| 8. Janusz Walczak: Application of integral equation theory to analysis of existence of Dirichlet problem solutions for certain elliptic equations in electrostatics.<br>I. The structure of fundamental solution .....   | 81   |
| 9. Janusz Walczak: Application of integral equation theory to analysis of existence of Dirichlet problem solutions for certain elliptic equations in electrostatics.<br>II. The analysis of existence of potential form solutions .....  | 95   |
| 10. Edward Wilczyński: Boundary problem of electromagnetic field analysis in a system of many conducting media with axial - rotational symmetry .....  | 109  |
| 11. Stefan Paszek: Application of the theorem on existence of transformation of linear differential equations system with periodically variable coefficients into constants for the solution of state equations by an example of synchronous machine with external asymmetry ..... | 125  |
| 12. Krzysztof Kluszczynski: Parasitic synchronous torques in single - phase induction capacitor motors .....   | 141  |
| 13. Lesław Topór-Kamiński: Impedance multipliers .....   | 151  |

Marek BRODZKI

Marian PASKO

Magdalens UMIŃSKA-BORTLICZEK

JEDNOLITA TEORIA MOCY DLA OBWODÓW TRÓJFAZOWYCH

O PRZEBIEGACH ODKSZTAŁCONYCH

W OPARCIU O ORTOGONALNY ROZKŁAD PRĄDU W PRZESTRZENI  $L_3^2(0; T)$ 

**Streszczenie.** W pracy przedstawia się próbę sformułowania pewnych definicji mocy dla obwodów trójfazowych o przebiegach odkształconych w oparciu o uogólnienie teorii profesora Stanisława Fryzego o rozkładzie prądu na dwa wzajemnie ortogonalne składniki ( $i_a$  - czynny,  $i_{bf}$  - bierny).

Uwzględniono jako naturalną konsekwencję tego rozkładu teorię Leszka Czarneckiego o dalszym rozkładzie ortogonalnym składnika biernego prądu na dwa wzajemnie ortogonalne ( $i_s$ ,  $i_r$ ) składniki (zaproponowana dla obwodów jednofazowych).

Przedstawiono teorię rozkładu ortogonalnego prądów w obwodzie trójfazowym na trzy wzajemnie ortogonalne składniki  $a_i$ ,  $r_i$ ,  $s_i$  w potrójnej przestrzeni Hilberta  $L_3^2(0; T)$ . W konsekwencji tego rozkładu sformułowano odpowiednie definicje mocy i zaproponowano pewne ich interpretacje.

## 1. Wstęp

Podstawowym pojęciem w teorii mocy dla obwodów elektrycznych jest umotywowana na gruncie zasady zachowania moc chwilowa:

$$p \hat{=} u i \quad (1)$$

oraz, przy założeniu, że funkcja mocy chwilowej jest całkowalna w przedziale domkniętym, także moc czynna

$$p \hat{=} \bar{p}, \quad (2)$$

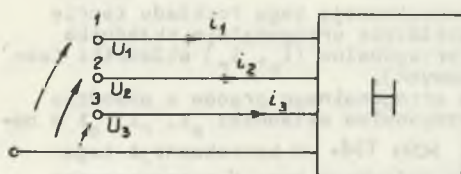
gdzie

$$\bar{p} \hat{=} \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt.$$

Przyjmując powyższe definicje, co do których panuje ogólna zgoda, a także wyniki szczegółowej analizy porównawczej różnych koncepcji teorii mocy dla obwodów jednofazowych o przebiegach odkształconych, przeprowadzonej przez L. Czarneckiego [4] oraz mając na uwadze teorie mocy sformułowane w pracach prof. Zygmunta Nowomiejskiego [9], [10], proponujemy uogólnienie procedury podanej przez L. Czarneckiego, a dotyczącej rozkładu funkcji prądu biernego prof. S. Fryzego [5] na dwa wzajemnie ortogonalne składniki, jako punktu wyjścia dla próby zdefiniowania pewnych mocy w układach trójfazowych [4].

## 2. Uogólnienie trójskładnikowego wzajemnie ortogonalnego rozkładu funkcji prądu dla przebiegów odkształconych odbiornika 3-fazowego

Rozpatrujemy obwód trójfazowy (H) czteroprzewodowy z uwzględnieniem sprzężeń, przedstawiony na rys. 1 i spełniający następujące warunki:



Rys. 1

- jest odbiornikiem liniowym (jeśli w dalszym ciągu będziemy rozpatrywać jeden stan napięciowo-prądowy odbiornika, to założenie o jego liniowości nie jest konieczne - dla jednego takiego stanu definicji liniowości odbiornika w ogóle nie można sformułować),

- napięcia fazowe  $u_\alpha$  i prądy fazowe  $i_\alpha$ ,  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  są funkcjami zmiennej rzeczywistej (czas), okresowymi (o tym samym okresie  $T$ ) mierzalnymi w sensie Lebesgue'a na przedziale domkniętym  $\langle 0, T \rangle$  oraz posiadają całkowny w sensie Lebesgue'a kwadrat, tzn.:

$$\int_0^T f_\alpha^2(t) dt < \infty \quad (3)$$

Ponieważ celem naszym jest rozwinięcie dla układu (H) pożądanej teorii mocy, musimy skonstruować odpowiednią przestrzeń Hilberta, w której dobrze określona baza zapewnia możliwości rozwinięcia dowolnego elementu tej przestrzeni w szereg Fouriera.

Niech  $f = (f_1, f_2, f_3)$  będzie ciągiem prądów (napięć), którego wyrazami są klasy funkcji różniących się na zbiorach miary zero (tzn. dla której cała

$$\int_0^T f_\alpha^2 dt \text{ jest identyczna}).$$

Zbiorowi tych ciągów, który oznaczymy  $L_3^2(\langle 0; T \rangle)$ , nadajemy strukturę przestrzeni liniowej nad ciałem liczb rzeczywistych ze zdefiniowanymi działaniami dodawania elementów i mnożenia przez liczby rzeczywiste:

$$f + g \triangleq (f_1 + g_1, f_2 + g_2, f_3 + g_3), \quad (4)$$

$$c \cdot f \triangleq (cf_1, cf_2, cf_3), \quad (5)$$

dla dowolnych ciągów  $f, g \in L_3^2(\langle 0; T \rangle)$ ,  $c \in R$ .

Na mocy nierówności

$$(f_\alpha(t) + g_\alpha(t))^2 \leq 2(f_\alpha^2(t) + g_\alpha^2(t)), \quad t \in R, \alpha \in \{1, 2, 3\} \quad (6)$$

stwierdzamy, że z przynależności  $f$  i  $g$  do zbioru  $L_3^2(\langle 0; T \rangle)$  wynika również przynależność sumy (4) i iloczynu (5) do tego zbioru.

Tak uporządkowana czwórka tworzy przestrzeń liniową

$$(L_3^2(\langle 0; T \rangle), R, +, \cdot). \quad (7)$$

W przestrzeni  $(L_3^2(\langle 0; T \rangle), R, +, \cdot)$  wprowadzamy iloczyn skalarny

$$(|\cdot)_3: L_3^2(\langle 0; T \rangle) \times L_3^2(\langle 0; T \rangle) \rightarrow R. \quad (8)$$

Iloczynem skalarnym w przestrzeni  $(L_3^2(\langle 0; T \rangle), R, +, \cdot)$  nazwiemy operację, która każdej uporządkowanej parze  $(f, g)$  elementów  $f, g$  należących do zbioru  $L_3^2(\langle 0; T \rangle)$  przyporządkowuje liczbę rzeczywistą w ten sposób, że spełnione są cztery aksjomaty iloczynu skalarnego [6], [7].

Przyjmujemy za definicję iloczynu skalarnego następujące wyrażenie:

$$(f|g)_3 \triangleq \sum_{\alpha=1}^3 \frac{1}{T} \int_0^T f_\alpha(t)g_\alpha(t)dt. \quad (9)$$

Całkowalność iloczynu funkcji  $f_\alpha g_\alpha$  wynika ze spełnienia nierówności

$$f_\alpha(t)g_\alpha(t) \leq \frac{1}{2}(f_\alpha^2(t) + g_\alpha^2(t)), \quad t \in R. \quad (10)$$

Iloczyn skalarny indukuje w przestrzeni liniowej, w której został określony, normę

$$\|f\|_3 \triangleq \sqrt{(f|f)_3}, \quad f \in L_3^2(\langle 0; T \rangle). \quad (11)$$

Przestrzeń liniowa nad ciałem liczb rzeczywistych z określonym iloczynem skalarnym (9) jest przestrzenią unitarną:

$$(L^2_3(\langle 0; T \rangle), R, +, \dots, (| \cdot |)_3). \quad (12)$$

Można wykazać, że przestrzeń (12) jest przestrzenią zupełną [1], [6], a zatem jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym i normą zdefiniowanymi wzorami (9) i (11).

Wprowadzamy w rozpatrywanej przestrzeni Hilberta bazę ortonormalną w postaci następującego zbioru  $(e)_k$ :

$$\left\{ \begin{aligned} & (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), \dots, \\ & (\sqrt{2} \cos h\omega(\cdot), 0, 0), (0, \sqrt{2} \cos h\omega(\cdot), 0), (0, 0, \sqrt{2} \cos h\omega(\cdot)) \\ & (\sqrt{2} \sin h\omega(\cdot), 0, 0), (0, \sqrt{2} \sin h\omega(\cdot), 0), (0, 0, \sqrt{2} \sin h\omega(\cdot)), \dots \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

gdzie  $h \in \mathbb{N}$ ,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,

dla którego zachodzi

$$(e|e)_{kl} = \delta_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{dla } k \neq l \\ 1 & \text{dla } k = l, \quad k, l \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Ponieważ w przestrzeni Hilberta  $(L^2_3(\langle 0; T \rangle), R, +, \dots, (| \cdot |)_3)$  mamy układ ortonormalny  $(1, \dots, \sqrt{2} \cos h\omega(\cdot), \sqrt{2} \sin h\omega(\cdot), \dots)$ , który jest zamknięty [6], [7], to fakt ten decyduje o tym, że układ (13) też jest zamknięty. Zatem dowolny element  $f \in L^2_3(\langle 0; T \rangle)$  posiada względem układu (13) następujący szereg Fouriera zbieżny do  $f$  w sensie przyjętej normy (11).

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} (f|e)_k e_k. \quad (14)$$

Zamiast wzoru (14) stosować będziemy (wprowadzając metodę symboliczną) wzór:

$$f_{\alpha} = F_{\alpha 0} + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} F_{\alpha h} e^{jh\omega(\cdot)}, \quad \alpha \in \{1, 2, 3\}. \quad (15)$$

gdzie:

$$F_{\alpha 0} = \frac{1}{T} \int_0^T f_{\alpha}(t) dt, \quad (16)$$

$$F_{\alpha h} = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T f_{\alpha}(t) e^{-jh\omega t} dt. \quad (17)$$

Natomiast iloczyn skalarny dla dwóch dowolnych  $f, g \in L_3^2(0; T)$  wyraża się wzorem:

$$(f|g)_3 = \operatorname{Re} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^3 F_{\alpha h} G_{\alpha h}^* = \operatorname{Re} \sum_{h=0}^{\infty} (F_{1h} G_{1h}^* + F_{2h} G_{2h}^* + F_{3h} G_{3h}^*). \quad (18)$$

### 3. Ortogonalny rozkład prądów odbiornika trójfazowego czteroprzewodowego ze sprzężeniami w potrójnej przestrzeni Hilberta $L_3^2(0; T)$

Zakładając, że odbiornik (H) reprezentuje dla każdej harmonicznej zespolona macierz admitancyjna  $Y$ , której elementy mają postać:

$$Y_{\alpha\beta h} = G_{\alpha\beta h} + jB_{\alpha\beta h}, \quad \alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}, \quad h \in \mathbb{N} \quad (19)$$

oraz, że napięcia fazowe dane są w postaci szeregu Fouriera

$$u_{\alpha} = U_{\alpha 0} + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} U_{\alpha h} e^{j h \omega(\cdot)}, \quad \alpha \in \{1, 2, 3\}, \quad (20)$$

możemy prąd  $i_{\alpha}$  zapisać w postaci:

$$i_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^3 G_{\alpha\beta 0} U_{\beta 0} + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^3 (G_{\alpha\beta h} + jB_{\alpha\beta h}) U_{\beta h} e^{j h \omega(\cdot)}, \quad (21)$$

$$\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}; \quad u, i \in L_3^2(0; T).$$

Wprowadźmy rozkład prądu  $i$  na trzy składniki wzajemnie ortogonalne:

$$i = {}_a i + {}_s i + {}_r i, \quad (22)$$

dla których wzajemną ortogonalność sprawdzimy po przyjęciu pewnych definicji

$${}_a i \hat{=} G u, \quad (23)$$

gdzie:

$$G \hat{=} \frac{(u|i)_3}{\|u\|_3^2} = \frac{P}{\|u\|_3^2} - \text{konduktancja równoważna [5]}. \quad (24)$$

$$\|u\|_3 \neq 0.$$



Obliczając iloczyn skalarny  $(u|_a i)_3$  otrzymujemy:

$$(u|_a i)_3 = (u|Gu)_3 = G(u|u)_3 = G\|u\|_3^2 = \frac{P}{\|u\|_3^2} \|u\|_3^2 = P. \quad (25)$$

Zatem całkowita moc czynna  $P$  dostarczana do układu (H) przenoszona jest przez składową czynną  $a i$  prądu  $i$  odbiornika.

Zdefiniujemy obecnie pozostałe składowe  $s i, r i$  prądu  $i$

$$a i_\alpha = GU_{\alpha 0} + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} GU_{\alpha h} e^{jh\omega(\cdot)}, \quad (26)$$

$$s i_\alpha \hat{=} \sum_{\beta=1}^3 (G_{\alpha\beta 0} - G\delta_{\alpha\beta})U_{\beta 0} + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^3 (G_{\alpha\beta h} - G\delta_{\alpha\beta})U_{\beta h} e^{jh\omega(\cdot)}, \quad (27)$$

$$r i_\alpha \hat{=} \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^3 jB_{\alpha\beta h} U_{\beta h} e^{jh\omega(\cdot)}, \quad \alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}. \quad (28)$$

Z warunku przynależności  $u, i \in L^2_3(\langle 0; T \rangle)$  wynika przynależność poszczególnych prądów  $a i, s i, r i, \in L^2_3(\langle 0; T \rangle)$ .

Dla sprawdzenia iloczynów skalarnych poszczególnych par składników prądu  $i$  stosując wzór (18), otrzymujemy [2]:

$$(r i|_a i)_3 = \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 jB_{\alpha\beta h} U_{\beta h} GU_{\alpha h}^* \quad (28a)$$

Jeżeli założymy symetrię sprzężeń, tzn.:

$$B_{\alpha\beta h} = B_{\beta\alpha h}, \quad \alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}, \quad h \in \mathbb{N}, \quad (29)$$

czyli w zapisie macierzowym  $B_h = B_h^T$ , to wyrażenie  $U_{\beta h} B_{\alpha\beta h} U_{\alpha h}^*$  jest rzeczywiste i wówczas

$$(r i|_a i)_3 = 0. \quad (30)$$

Przy spełnieniu założenia (29) i na mocy wzoru (18) moc czynna dostarczana do układu wynosi:

$$\begin{aligned}
 P = (u|i)_3 &= \operatorname{Re} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 U_{\alpha h} (G_{\alpha\beta h} - jB_{\alpha\beta h}) U_{\beta h}^* = \\
 &= \operatorname{Re} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 U_{\alpha h} G_{\alpha\beta h} U_{\beta h}^* - \operatorname{Re} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 j U_{\alpha h} B_{\alpha\beta h} U_{\beta h}^*. \quad (31)
 \end{aligned}$$

Wykorzystując założenie (29), otrzymujemy wzór na moc czynną:

$$P = \operatorname{Re} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 U_{\alpha h} G_{\alpha\beta h} U_{\beta h}^*. \quad (32)$$

Ortogonalność składników  $a^i$  i  $s^i$  wykazemy korzystając ze wzorów (24) i (32).

$$\begin{aligned}
 (a^i | s^i)_3 &= \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 G U_{\alpha h} (G_{\alpha\beta h} - G\delta_{\alpha\beta}) U_{\beta h}^* = \\
 &= G(\operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 (U_{\alpha h} G_{\alpha\beta h} U_{\beta h}^* - U_{\alpha h} G\delta_{\alpha\beta} U_{\beta h}^*)) = \\
 &= G(P - G \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^3 |U_{\alpha h}|^2) = G(P - \frac{P}{\|u\|_3^2} \|u\|_3^2) = 0. \quad (33)
 \end{aligned}$$

Pozostaje do wykazania jeszcze ortogonalność składników  $s^i$  i  $r^i$ .

$$\begin{aligned}
 (r^i | s^i)_3 &= \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \sum_{\gamma=1}^3 j B_{\alpha\beta h} U_{\beta h} (G_{\alpha\gamma h} - G\delta_{\alpha\gamma}) U_{\gamma h}^* = \\
 &= \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \sum_{\gamma=1}^3 j B_{\alpha\beta h} U_{\beta h} G_{\alpha\gamma h} U_{\gamma h}^*. \quad (34)
 \end{aligned}$$

Ażeby składowe  $r^i$  i  $s^i$  były wzajemnie ortogonalne, prawa strona równania (34) musi być urojona, co zachodzi wówczas, gdy poza spełnieniem warunku (29) jest spełniony również warunek [2]

$$\sum_{\alpha=1}^3 G_{\alpha\beta h} B_{\alpha\gamma h} = \sum_{\alpha=1}^3 G_{\alpha\gamma h} B_{\alpha\beta h}, \quad \alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}, \quad h \in \mathbb{N}. \quad (35)$$

Warunek (35) w postaci macierzowej ma postać:

$$\mathbf{G}_h^T \mathbf{B}_h = \mathbf{B}_h^T \mathbf{G}_h = \mathbf{B}_h \mathbf{G}_h \quad (36)$$

i wówczas

$$(\mathbf{r} \mathbf{i} | \mathbf{s} \mathbf{i})_3 = 0. \quad (37)$$

Podsumowując możemy stwierdzić, że warunki: (29) (symetria sprzężeń) i (35) (komutatywność) są wystarczające, aby zachodziła parami ortogonalność składników  $\mathbf{a} \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{r} \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{s} \mathbf{i} \in L_3^2(\langle 0; T \rangle)$ .

W przypadku gdy wszystkie harmoniczne napięć we wszystkich fazach są różne od zera oraz rozpatrywany jest jeden stan pracy napięciowo-prądowej odbiornika, możemy użyć w miejsce danych macierzy admitancji  $\mathbf{Y}_h$  macierze diagonalne zapewniające ten sam stan pracy napięciowo-prądowej.

Widać więc, że warunki (29) i (35) przy uczynionych założeniach odnośnie do napięć odbiornika mogą być pominięte.

#### 4. Definicje pewnych mocy w przestrzeni $L_3^2(\langle 0; T \rangle)$

Na podstawie wykazanej wzajemnej ortogonalności składników prądu (30), (33), (37) otrzymujemy wzór

$$\|\mathbf{i}\|_3^2 = \|\mathbf{a} \mathbf{i}\|_3^2 + \|\mathbf{s} \mathbf{i}\|_3^2 + \|\mathbf{r} \mathbf{i}\|_3^2. \quad (38)$$

Mnożąc obustronnie wyrażenie (38) przez  $\|\mathbf{u}\|_3^2$ , otrzymujemy:

$$\|\mathbf{u}\|_3^2 \|\mathbf{i}\|_3^2 = \|\mathbf{u}\|_3^2 \|\mathbf{a} \mathbf{i}\|_3^2 + \|\mathbf{u}\|_3^2 \|\mathbf{s} \mathbf{i}\|_3^2 + \|\mathbf{u}\|_3^2 \|\mathbf{r} \mathbf{i}\|_3^2. \quad (39)$$

Możemy teraz zdefiniować następujące moce:

$$S \hat{=} \|\mathbf{u}\|_3 \|\mathbf{i}\|_3, \quad (40)$$

$$Q_s \hat{=} \|\mathbf{u}\|_3 \|\mathbf{s} \mathbf{i}\|_3, \quad (41)$$

$$Q_r \hat{=} \|\mathbf{u}\|_3 \|\mathbf{r} \mathbf{i}\|_3, \quad (42)$$

oraz wykazać, że

$$\|\mathbf{u}\|_3 \|\mathbf{a} \mathbf{i}\|_3 = |P|. \quad (43)$$

Pomiędzy poszczególnymi mocami zachodzi więc związek:

$$S^2 = P^2 + Q_s^2 + Q_r^2. \quad (44)$$

Przedstawione poprzednio motywacje dla składowych ortogonalnych prądów  $\mathbf{a}_i$ ,  $\mathbf{s}_i$ ,  $\mathbf{r}_i$  przenoszą się na moce, tak więc możemy poszczególnym mocom nadać nazwy i spróbować je zinterpretować.

$$1^{\circ} \text{ Moc czynna } P = (\mathbf{u}_i | \mathbf{i})_3$$

Jedynym jej nośnikiem jest prąd  $\mathbf{a}_i$ , to stanowi jedną z przyczyn zdefiniowania tego prądu. Następną przyczyną zdefiniowania prądu  $\mathbf{a}_i$  jest to, że przy danym napięciu zasilania i przy zadanej mocy czynnej pobieranej przez odbiornik prąd ten minimalizuje straty mocy czynnej na rezystancjach  $\Delta R$ , występujących w przewodach 1, 2, 3, doprowadzających moc czynną  $P$  do odbiornika.

$$2^{\circ} \text{ Moc częstotliwościowego rozrzutu konduktancji } Q_s \hat{=} \|\mathbf{u}_3\|_{s_i}\|_3$$

Analizując wyrażenie (27) możemy przypuszczać, że to moc nie będzie kompensowalna metodami konwencjonalnymi (filtrami  $L$ ,  $C$ ).

$$3^{\circ} \text{ Moc bierna } Q_r \hat{=} \|\mathbf{u}_3\|_{r_i}\|_3$$

Analizując własności równania (28) możemy przypuszczać, że dla skończonej liczby harmonicznych prąd  $\mathbf{r}_i$  można kompensować za pomocą układu filtrującego złożonego ze skończonej liczby elementów  $L$ ,  $C$ . Zatem moc  $Q_r$  może być kompensowalna. Z przedstawionych powyżej mocy tylko moc czynna  $P$  jest mocą zachowawczą [2].

#### LITERATURA

- [1] Brodzki M., Pasko M.: Definicje pewnych mocy dla układów wielozaciskowych o przebiegach odkształconych. Rozprawy Elektrotechniczne (w druku).
- [2] Brodzki M., Pasko M., Uminska-Bortliczek M.: Jednolita teoria mocy dla obwodów trójfazowych o przebiegach odkształconych. Raport z pracy naukowo-badawczej, wykonanej w ramach CPBR 5.7, Gliwice 1966.
- [3] Cholewicki T.: Rodzaje mocy przy przebiegach odkształconych. Stan obecny badań. Przegląd elektrotechniczny, nr 3, 1960.
- [4] Czarnecki L.: Interpretacja, identyfikacja i modyfikacja właściwości energetycznych obwodów jednofazowych z przebiegami odkształconymi. ZN Pol. Śl. s. Elektryka, z. 91, Gliwice 1964 (rozprawa habilitacyjna).
- [5] Fryze S.: Wybrane zagadnienie teoretycznych podstaw elektrotechniki. PWN, Wrocław 1960.
- [6] Kołodziej W.: Wybrane rozdziały analizy matematycznej. PWN, Warszawa 1970.
- [7] Kudrewicz J.: Analiza funkcjonalna dla automatyków i elektroników. PWN, Warszawa 1970.
- [8] Leja F.: Rachunek różniczkowy i całkowy. PWN, Warszawa 1969.
- [9] Nowomiejski Z.: Moc i energia elektryczna w układach elektrycznych o dowolnych ustalonych przebiegach. ZN Pol. Śl. s. Elektryka z. 15, Gliwice 1963 (rozprawa habilitacyjna).

- [10] Nowomiejski Z., Sowa E.: Teoria mocy układów elektrycznych. ZN Pol. Śl. s. Elektryka z. 49, Gliwice 1977.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Kazimierz Mikołajuk

Wpłynęło do redakcji 15 maja 1987 r.

МОНОЛИТНАЯ ТЕОРИЯ МОЩНОСТИ ДЛЯ ТРЕХФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ  
С ДЕФОРМИРОВАННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ НА ОСНОВЕ ОРТОГОНАЛЬНОГО  
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОКА В ПРОСТРАНСТВЕ

Р е з ю м е

В работе дается попытка формулировки некоторых определений мощности для трехфазных цепей с деформированными характеристиками на основе обобщенной теории проф. Станислава Фрызе об распределении тока на два взаимно ортогональные составляющие ( $i_a$  - активный,  $i_{bF}$  - пассивный).

В качестве естественного следствия этого распределения учтена теория Лешка Чарнецкого о дальнейшем ортогональном распределении пассивной составляющей тока на две взаимно ортогональные ( $i_g$ ,  $i_r$ ) составляющие (предложенная для однофазных цепей).

Представлена теория ортогонального распределения токов в трехфазной цепи на три взаимно ортогональные составные  $a^i$ ,  $r^i$ ,  $s^i$  в тройном пространстве Гильберта  $L_3^2(<0;T>)$ . В последствии этого распределения сформулированы соответствующие определения мощности и предложены некоторые их интерпретации.

A UNIFORM POWER THEORY FOR THREE-PHASE CIRCUITS  
WITH NON-SINUSOIDAL WAVE FORM BASED ON THE CURRENT  
ORTHOGONAL DECOMPOSITION IN THE  $L_3^2(<0;T>)$  SPACE

S u m m a r y

An attempt of formulating the power definitions for the three-phase circuits with non-sinusoidal wave form is presented in the paper. The attempt is based on the generalization of the professor S. Fryze's power theory concerning the current decomposition into two mutually orthogonal components ( $i_a$  - active current,  $i_{bF}$  - reactive current).

As a natural consequence of this decomposition a theory by Leszek Czarniecki on further decomposition of the reactive current component into two mutually orthogonal ( $i_g$ ,  $i_r$ ) components has been taken into account.

The theory of the current decomposition in a threefold Hilbert space  $L_3^2(<0;T>)$  into three mutually orthogonal components  $a^i$ ,  $r^i$ ,  $s^i$  in the three-phase circuits has been presented in this paper. As a result of this decomposition the appropriate definitions of power have been formulated and their certain interpretations suggested.

Leszek S. CZARNECKI

ORTOGONALNY ROZKŁAD PRĄDU ŹRÓDŁA NAPIĘCIA ODKSZTAŁCONEGO  
ZASILAJĄCEGO ASYMETRYCZNY, NIELINIOWY ODBIORNIK TRÓJFAZOWY

**Streszczenie.** Ortogonalny rozkład prądu źródła w obwodzie jednofazowym z przebiegami odkształconymi na prąd czynny, bierny, rozrzutu i prąd generowany, będący podstawą nowej teorii mocy takich obwodów, jest rozszerzony w tym artykule na prądy źródła o napięciu odkształconym w asymetrycznym i nieliniowym obwodzie trójfazowym. Pokazano, że w obwodzie takim prąd źródła, traktowany jako wektor, którego składowymi są prądy fazowe, można rozłożyć na wzajemnie ortogonalne prądy: czynny, bierny, rozrzutu i prąd generowany, zachowujące dotychczasową interpretację fizyczną. Rozkład ten ujawnia nowy, ortogonalny do pozostałych składników prądu, nazwany prądem asymetrii, którego wartość skuteczna jest miarą wpływu asymetrii impedancyjnej odbiornika na wartość skuteczną prądu źródła. W ten sposób znaleziony rozkład separuje poszczególne zjawiska i przyczyny determinujące wartość skuteczną prądu źródła, a także dostarcza, poprzez wartości skuteczne wyodrębnionych składowych miar dla ilościowego badania wpływu tych zjawisk na prąd źródła.

### 1. Wstęp

W artykule [1] pokazano, że prąd w obwodzie jednofazowym ze źródłem napięcia odkształconego i nieliniowym odbiornikiem może być rozłożony na cztery ortogonalne składniki związane z odrębnymi zjawiskami odpowiedzialnymi za wartość skuteczną prądu źródła. Są to: (i) przenoszenie mocy czynnej, (ii) zmiana konduktancji odbiornika z częstotliwością, (iii) dwukierunkowy przepływ energii między źródłem a reaktancyjnymi elementami odbiornika, (iv) generacja harmonicznych prądu spowodowana nieliniowością odbiornika. Trzy ostatnie zjawiska powodują wzrost wartości skutecznej prądu źródła ponad jej wartość niezbędną dla przenoszenia mocy czynnej, zmniejszając w ten sposób współczynnik mocy źródła. Ponieważ wartości skuteczne poszczególnych składowych prądu są ilościowymi miarami wpływu tych zjawisk na wartość skuteczną prądu źródła, rozkład ten nie tylko jakościowo wyjaśnia energetyczne właściwości obwodu z przebiegami odkształconymi, lecz tworzy także podstawę dla ilościowego opisu tych właściwości oraz badań nad syntezą równoległych kompensatorów reaktancyjnych, poprawiających współczynnik mocy źródeł o napięciu odkształconym.

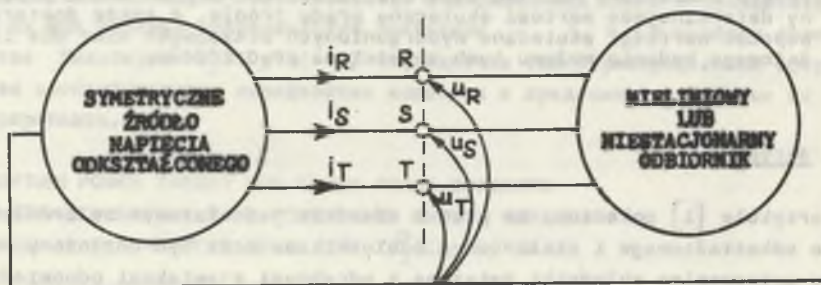
Obwody służące do przesyłania energii mają jednak najczęściej strukturę trójfazową. Dlatego jednym z czynników decydujących o praktycznej war-

tości tego rozkładu jest możliwość jego rozszerzenia na układy trójfazowe w ten sposób, aby, zachowując cechy jakie ma on w obwodach jednofazowych, uwzględniał przyczyny wzrostu wartości skutecznej prądu źródła, wynikające z trójfazowej struktury obwodu. Ponieważ w obwodach takich również asymetria impedancyjna odbiornika obniża współczynnik mocy źródła, dlatego w niniejszym artykule poszukuje się takiego ortogonalnego rozkładu prądów źródła trójfazowego, w którym poprzednio zdefiniowane składowe zachowałyby swoje znane już właściwości, lecz ujawniłyby się jednocześnie nowa składowa, której wartość skuteczna byłaby wyłączną miarą wpływu asymetrii na prąd źródła.

W artykule tym pokazano, że w trójprzewodowym układzie trójfazowym bez sprzężeń międzyprzewodowych i z napięciowo-symetrycznym źródłem jest to możliwe.

## 2. Założenia i symbole

Rozważania w artykule ograniczone są do obwodu trójfazowego bez sprzężeń międzyprzewodowych, o strukturze przedstawionej na rys. 1 z odbiornikiem



Rys. 1. Struktura obwodów

Fig. 1. Network structure

kiem nieliniowym lub o parametrach okresowo zmiennych lecz takich, że okres zmienności prądu  $T$  jest równy okresowi zmienności napięcia, przy czym zarówno prądy, jak i napięcia są w okresie  $T$  całkowalne z kwadratem. Przyjmuje się ponadto, że średnia wartość napięć i prądów jest równa zeru, zaś źródło jest napięciowo-symetryczne, zgodnej kolejności, tj.:

$$u_S = u_R(t-T/3), \quad u_T = u_R(t+T/3). \quad (1)$$

Wielkości na zaciskach RST, takie jak napięcia  $u_R$ ,  $u_S$ ,  $u_T$ , prądy  $i_R$ ,  $i_S$ ,  $i_T$  lub ich części będą oznaczone przez  $f_R$ ,  $f_S$ ,  $f_T$ . Ich szereg Fouriera jest przedstawiony w postaci:

$$f \triangleq \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{n \in N} F_n e^{jn\omega_1 t}, \quad (2)$$

gdzie  $\omega_1 \triangleq \frac{2\pi}{T}$ ,  $N$  jest zbiorem indeksów harmoniczych  $n$ , zaś

$$F_n \triangleq F_n e^{jn\omega_1 t} \triangleq \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T f e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (3)$$

jest zespoloną wartością skuteczną  $n$ -tej harmoniczej.

Wielkości o okresie  $T$  na zaciskach RST, uporządkowane w wektory  $f \triangleq [f_R, f_S, f_T]^t$ , gdzie  $[.]^t$  oznacza macierz transponowaną, tworzą przestrzeń wektorową  $L_T^2$  z iloczynem skalarnym  $(f_1, f_2)$  zdefiniowanym jako:

$$\begin{aligned} (f_1, f_2) &\triangleq \frac{1}{T} \int_0^T f_1^t f_2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T [f_{1R}, f_{1S}, f_{1T}] \begin{bmatrix} f_{2R} \\ f_{2S} \\ f_{2T} \end{bmatrix} dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T (f_{1R} f_{2R} + f_{1S} f_{2S} + f_{1T} f_{2T}) dt = \\ &= \operatorname{Re} \sum_{n \in N} (F_{1nR} F_{2nR}^* + F_{1nS} F_{2nS}^* + F_{1nT} F_{2nT}^*), \end{aligned} \quad (4)$$

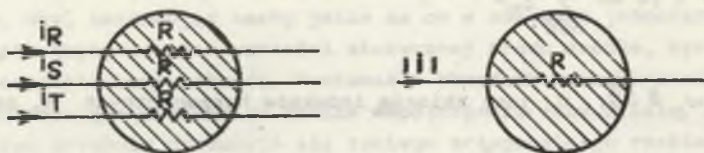
gdzie gwiazdka oznacza liczbę zespoloną sprzężoną i normę

$$\begin{aligned} \|f\| &\triangleq \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (f_R^2 + f_S^2 + f_T^2) dt} = \\ &= \sqrt{\sum_{n \in N} (F_{nR}^2 + F_{nS}^2 + F_{nT}^2)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Norma  $\|f\|$  wektora  $f$  może być traktowana jako pewne uogólnienie pojęcia wartości skutecznej prądu lub napięcia w obwodzie jednofazowym.

Gdy skutki cieplne trzech prądów lub napięć fazowych reprezentowanych wektorem  $f$  symetrycznego urządzenia trójfazowego nie zależą od częstotliwości, wówczas norma  $\|f\|$  może być interpretowana jako wartość prądu lub napięcia stałego, który działając na jedną fazę tego urządzenia wywołuje równoważne skutki cieplne takie jak trójka wielkości  $f_R, f_S, f_T$  (rys. 2).





Rys. 2. Interpretacja wartości skutecznej  $\|i\|$   
 Fig. 2. Interpretation of  $\|i\|$  r m s value

Wektory  $f_1, f_j$  są wzajemnie ortogonalne, gdy ich iloczyn skalarny  $(f_1, f_j)$  jest równy zeru i wówczas

$$\begin{aligned} \|f_1 + f_j\|^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T (f_1^t + f_j^t)(f_1 + f_j) dt = \\ &= \|f_1\|^2 + 2(f_1, f_j) + \|f_j\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_j\|^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Moc czynna przenoszona przez przekrój RST może być wyrażona alternatywnie jako:

$$\begin{aligned} P = (u, i) &= \frac{1}{T} \int_0^T u^t i dt = \frac{1}{T} \int_0^T (u_R i_R + u_S i_S + u_T i_T) dt = \\ &= \operatorname{Re} \sum_{n \in \mathbb{N}} (U_{nR} I_{nR}^* + U_{nS} I_{nS}^* + U_{nT} I_{nT}^*). \end{aligned} \quad (7)$$

Moc pozorna  $S$  źródła trójfazowego jest wielkością umowną. W niniejszym artykule przyjmuje się umowę najbliższą tej powszechnie używanej w obwodach jednofazowych. Mianowicie, przyjmuje się, że moc pozorna  $S$  jest iloczynem uogólnionych wartości skutecznych prądu i napięcia źródła, tj.

$$S \triangleq \|u\| \|i\|. \quad (8)$$

### 3. Ortogonalny rozkład prądu w asymetrycznym obwodzie trójfazowym z przebiegami sinusoidalnymi

Zdefiniujemy konduktancję równoważną  $G_0$  i susceptancję równoważną  $B_0$  odbiornika asymetrycznego jako konduktancję i susceptancję odbiornika symetrycznego, który przy takim samym napięciu ma moc czynną i moc bierną taką jak odbiornik asymetryczny, a więc

$$G_e \hat{=} \frac{P}{\|u\|^2} \quad B_e \hat{=} - \frac{Q}{\|u\|^2}, \quad (9)$$

gdzie

$$P \hat{=} \operatorname{Re} \{ \underline{U}_R \underline{I}_R^* + \underline{U}_S \underline{I}_S^* + \underline{U}_T \underline{I}_T^* \}, \quad (10)$$

$$Q \hat{=} \operatorname{Im} \{ \underline{U}_R \underline{I}_R^* + \underline{U}_S \underline{I}_S^* + \underline{U}_T \underline{I}_T^* \}. \quad (11)$$

Z pomocą parametrów równoważnych odbiornika prąd  $i$  można rozłożyć w sposób następujący:

$$i = i_a + i_r + i_u, \quad (12)$$

gdzie

$$i_a \hat{=} G_e u = \sqrt{2} \operatorname{Re} \begin{bmatrix} G_e \underline{U}_R \\ G_e \underline{U}_S \\ G_e \underline{U}_T \end{bmatrix} [e^{j\omega_1 t}], \quad (13)$$

$$i_r \hat{=} B_e \frac{d}{d(\omega_1 t)} u = \sqrt{2} \operatorname{Re} \begin{bmatrix} jB_e \underline{U}_R \\ jB_e \underline{U}_S \\ jB_e \underline{U}_T \end{bmatrix} [e^{j\omega_1 t}], \quad (14)$$

$$i_u \hat{=} i - i_a - i_r. \quad (15)$$

Obliczmy wartość iloczynów skalarnych tak zdefiniowanych prądów

$$(i_r, i_a) = \operatorname{Re} \{ jB_e \underline{U}_R G_e \underline{U}_R^* + jB_e \underline{U}_S G_e \underline{U}_S^* + jB_e \underline{U}_T G_e \underline{U}_T^* \} = 0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} (i_u, i_r) &= ((i - i_a - i_r), i_r) = (i, i_r) - (i_a, i_r) - (i_r, i_r) = \\ &= (i, i_r) - \|i_r\|^2 = \\ &= \operatorname{Re} \{ jB_e \underline{U}_R \underline{I}_R^* + jB_e \underline{U}_S \underline{I}_S^* + jB_e \underline{U}_T \underline{I}_T^* \} - B_e^2 \|u\|^2 = \\ &= B_e \operatorname{Re} \{ j(P + jQ) \} + B_e Q = -B_e Q + B_e Q = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} (i_u, i_a) &= (i, i_a) - (i_a, i_a) - (i_r, i_a) = \\ &= G_e (i, u) - G_e^2 \|u\|^2 = G_e (P - P) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Ponieważ iloczyny skalarne (16), (17), (18) są równe zero, prądy  $i_a$ ,  $i_r$ ,  $i_u$  są wzajemnie ortogonalne i ich wartości skuteczne spełniają relację

$$\|i\|^2 = \|i_a\|^2 + \|i_r\|^2 + \|i_u\|^2, \quad (19)$$

gdzie:

$$\|i_a\| = G_e \|u\|, \quad (20)$$

$$\|i_r\| = B_e \|u\|, \quad (21)$$

$$\|i_u\| = \sqrt{\|i\|^2 - (G_e^2 + B_e^2) \|u\|^2}. \quad (22)$$

Zauważmy, że w obwodzie impedancyjnie symetrycznym

$$Y_R = Y_S = Y_T = G_e + jB_e, \quad (23)$$

$$\|i\| = \|u\| \sqrt{G_e^2 + B_e^2}, \quad (24)$$

a więc  $\|i_u\| = 0$ , tj. prąd źródła nie zawiera prądu  $i_u$ . Pojawia się on tylko wtedy, gdy warunek (23) nie jest spełniony. Jego wartość skuteczna  $\|i_u\|$  może być więc użyta jako ilościowa miara oddziaływania impedancyjnej asymetrii obwodu na wartość skuteczną prądu źródła.

#### 4. Ortogonalny rozkład prądu w asymetrycznym obwodzie trójfazowym o napięciu odkształconym z nieliniowym lub okresowo zmiennym obciążeniem

Założmy, że napięcie źródła  $u$  ma harmoniczne o numerach  $n$  ze zbioru liczb naturalnych  $N_u$  a prąd  $i$  ma harmoniczne o numerach ze zbioru liczb naturalnych  $N_i$ . Wskutek generowania harmonicznych przez nieliniowy lub okresowo zmienny odbiornik zbiór  $N_i$  może być liczniejszy od zbioru  $N_u$ .

Rozłóżmy prąd źródła  $i$  na dwie składowe,  $i_o$ , złożoną z harmonicznych o numerach ze zbioru  $N_u$  oraz  $i_g$ , złożoną z harmonicznych o pozostałych numerach,  $N_g \hat{=} N_i \ominus N_u$ , tj.

$$i = i_o + i_g. \quad (25)$$

Ponieważ prądy  $i_o$ ,  $i_g$  nie mają harmonicznycch o takich samych częstotliwościach, zatem są one wzajemnie ortogonalne, a więc

$$\|i\|^2 = \|i_o\|^2 + \|i_g\|^2. \quad (26)$$

Oznaczmy przez  $i_n$  pojedynczą harmoniczną prądu  $i_o$ , wówczas

$$i_o = \sum_{n \in N_u} i_n. \quad (27)$$

Jeżeli przez przekrój RST obwodu asymetrycznego przenoszona jest przy częstotliwości  $n\omega_1$  moc czynna  $P_n$  i moc bierna  $Q_n$ , gdzie

$$P_n = \operatorname{Re}\{U_{nR}I_{nR}^* + U_{nS}I_{nS}^* + U_{nT}I_{nT}^*\}, \quad (28)$$

$$Q_n = \operatorname{Im}\{U_{nR}I_{nR}^* + U_{nS}I_{nS}^* + U_{nT}I_{nT}^*\}, \quad (29)$$

to takie same moce przenoszone są przy tej samej częstotliwości  $n\omega_1$  w symetrycznym obwodzie trójfazowym, którego odbiornik ma dla częstotliwości  $n\omega_1$  konduktancję  $G_{ne}$  i susceptancję  $B_{ne}$ , równe odpowiednio:

$$G_{ne} \hat{=} \frac{P_n}{\|u_n\|^2}, \quad B_{ne} \hat{=} -\frac{Q_n}{\|u_n\|^2}, \quad (30)$$

gdzie:

$$\|u_n\| = \sqrt{U_{nR}^2 + U_{nS}^2 + U_{nT}^2}. \quad (31)$$

Z pomocą tych parametrów każda harmoniczna  $i_n$  prądu  $i_o$  może być rozłożona w taki sam sposób jak prąd  $i$  w obwodzie z przebiegami sinusoidalnymi. Mianowicie

$$i_o = \sum_{n \in N_u} (i_{na} + i_{nr} + i_{nu}), \quad (32)$$

gdzie:

$$i_{na} \hat{=} G_{ne} u_n, \quad (33)$$

$$i_{nr} \hat{=} B_{ne} \frac{d}{d(n\omega_1 t)} u_n, \quad (34)$$

$$i_{nu} \hat{=} i_n - (i_{na} + i_{nr}). \quad (35)$$

Niech  $G_\theta$  oznacza konduktancję liniowego, symetrycznego odbiornika trójfazowego, który przy napięciu  $u$  ma taką samą moc czynną jak rozpa-trywany odbiornik asymetryczny, tj.:

$$G_\theta \hat{=} \frac{P}{|u|^2}. \quad (36)$$

Ponadto zdefiniujmy

$$i_a \hat{=} G_\theta u, \quad (37)$$

$$i_s \hat{=} \left( \sum_{n \in N_u} i_{na} \right) - i_a, \quad (38)$$

$$i_r \hat{=} \sum_{n \in N_u} i_{nr}, \quad (39)$$

$$i_u \hat{=} \sum_{n \in N_u} i_{nu}. \quad (40)$$

Prądy  $i_r$ ,  $i_u$ ,  $i_s + i_a$ , złożone wyłącznie ze wzajemnie ortogonalnych składowych  $i_{na}$ ,  $i_{nr}$ ,  $i_{nu}$ , są wzajemnie ortogonalne. Sprawdźmy, czy są ortogonalne prądy  $i_a$ ,  $i_s$ . Ich iloczyn skalarny

$$\begin{aligned} (i_a, i_s) &= \frac{1}{T} \int_0^T i_a^t i_s dt = \frac{1}{T} \int_0^T G_\theta [u_R, u_S, u_T] \left[ \sum_{n \in N_u} G_{ne} u_n - G_\theta u \right] dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T G_\theta [u_R, u_S, u_T] \begin{bmatrix} \sum_{n \in N_u} G_{ne} u_{nR} - G_\theta u_R \\ \sum_{n \in N_u} G_{ne} u_{nS} - G_\theta u_S \\ \sum_{n \in N_u} G_{ne} u_{nT} - G_\theta u_T \end{bmatrix} dt = \\ &= G_\theta \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \sum_{n \in N_u} G_{ne} (u_R u_{nR} + u_S u_{nS} + u_T u_{nT}) - G_\theta (u_R^2 + u_S^2 + u_T^2) \right] dt = \\ &= G_\theta \left[ \sum_{n \in N_u} G_{ne} (|u_{nR}|^2 + |u_{nS}|^2 + |u_{nT}|^2) - G_\theta |u|^2 \right] = \\ &= G_\theta \left[ \sum_{n \in N_u} G_{ne} |u_n|^2 - G_\theta |u|^2 \right] = G_\theta \left[ \sum_{n \in N_u} P_n - P \right] = 0, \end{aligned} \quad (41)$$

a więc te prądy są także wzajemnie ortogonalne.

W ten sposób prąd w asymetrycznym obwodzie trójfazowym ze źródłem niesinusoidalnego napięcia i nieliniowym lub okresowo zmiennym odbiornikiem został rozłożony na pięć wzajemnie ortogonalnych składowych

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_a + \mathbf{i}_s + \mathbf{i}_r + \mathbf{i}_u + \mathbf{i}_g, \quad (42)$$

których wartości skuteczne spełniają relacje:

$$|\mathbf{i}|^2 = |\mathbf{i}_a|^2 + |\mathbf{i}_s|^2 + |\mathbf{i}_r|^2 + |\mathbf{i}_u|^2 + |\mathbf{i}_g|^2. \quad (43)$$

Szczególnie ważną cechą tego rozkładu jest to, że separuje on poszczególne zjawiska i przyczyny determinujące wartość prądu źródła i poprzez wartości skuteczne każdego z pięciu składowych prądu dostarcza ilościowych miar określających wpływ tych zjawisk na wartość skuteczną prądu źródła.

Spośród tych pięciu składowych tylko prąd  $\mathbf{i}_a$  o wartości skutecznej

$$|\mathbf{i}_a| = G_e |u| \quad (44)$$

jest niezbędny dla przenoszenia do odbiornika mocy czynnej. Cztery pozostałe jedynie bezużytecznie powiększają prąd i moc pozorną źródła, obniżając jego współczynnik mocy P/S.

Prąd  $\mathbf{i}_a$  jest bezpośrednim uogólnieniem prądu czynnego  $i_a$ , który dla obwodu jednofazowego został zdefiniowany przez Fryzego [2] i mógłby być tak samo nazywany.

Prąd  $\mathbf{i}_s$  o wartości skutecznej

$$|\mathbf{i}_s| = \sqrt{\sum_{n \in N_u} (G_{ne} - G_e)^2 |u_n|^2} \quad (45)$$

pojawia się w prądzie źródła wtedy, gdy konduktancja równoważna odbiornika  $G_{ne}$  dla częstotliwości harmonicznych zmienia się z częstotliwością wokół konduktancji równoważnej  $G_e$ .

Jest on uogólnieniem prądu  $i_s$  wprowadzonego przez autora dla obwodu jednofazowego w pracy [1], przy czym jego szczegółowa interpretacja fizyczna podana jest w pracy [3].

Ponieważ wartość skuteczną prądu  $\mathbf{i}_s$  jest miarą wpływu rozrzutu konduktancji  $G_{ne}$  dla częstotliwości harmonicznych wokół konduktancji równoważnej  $G_e$  na wartość skuteczną prądu źródła, autor zaproponował dla niego nazwę "prądu rozrzutu" (ang. "scattered current").

Zwrotny przepływ energii między polami magnetycznymi i elektrycznymi odbiornika a źródłem, co uwidacznia się przesunięciem fazowym prądu względem napięcia dla częstotliwości harmonicznych, a więc niezerową suscep-

tancją równoważną  $B_{ne}$ , powoduje pojawienie się w prądzie źródła składowej  $i_r$  o wartości skutecznej

$$|i_r| = \sqrt{\sum_{n \in N_u} B_{ne}^2 |u_n|^2} = \sqrt{\sum_{n \in N_u} Q_n^2 / |u_n|^2}. \quad (46)$$

Ponieważ jest ona miarą wpływu tego zwrotnego przepływu energii, tj. niezerowych mocy biernych  $Q_n$  harmonicznych, na wartość skuteczną prądu źródła, prąd  $i_r$ , będący bezpośrednim uogólnieniem prądu  $i_r$  w obwodzie jednofazowym, mógłby być nazywany "prądem biernym". Należy tu zwrócić uwagę na to, że prąd  $i_r$  i jego wartość skuteczna  $\|i_r\|$  nie są związane z mocą bierną w sensie Budeanu [4]

$$Q_B \hat{=} \sum_{n \in N_u} Q_n. \quad (47)$$

a prąd bierny  $i_r$  i jego wartość skuteczna  $\|i_r\|$  nie są związane z mocą bierną w sensie Budeanu obwodu trójfazowego.

Prąd  $i_u$ , o wartości skutecznej

$$|i_u| = \sqrt{\sum_{n \in N_u} [ |i_n|^2 - (G_{ne}^2 + B_{ne}^2) |u_n|^2 ]}, \quad (48)$$

pojawia się w prądzie źródła wtedy, gdy admitancje poszczególnych faz dla częstotliwości harmonicznych nie są wzajemnie równe. Jego wartość skuteczna jest miarą wzrostu wartości skutecznej prądu źródła wskutek impedancyjnej asymetrii odbiornika, dlatego można by go nazywać "prądem asymetrii".

Ostatnia składowa  $i_g$ , o wartości skutecznej

$$|i_g| = \sqrt{\sum_{n \in N_g} |i_n|^2}, \quad (49)$$

jest złożona z harmonicznych pojawiających się w prądzie źródła wskutek nieliniowości odbiornika lub okresowej zmiany jego parametrów. Można by go nazywać "prądem generowanym".

Chociaż wydaje się, że fizyczna interpretacja zjawisk energetycznych w obwodzie oraz modyfikacja jego właściwości może być oparta tylko na równaniu prądów (42), właściwościach jego składowych oraz równaniu wartości skutecznych (43), to jednak ze względów tradycyjnych można wprowadzić równanie mocy źródła. Mianowicie, mnożąc równanie (43) przez  $|u|^2$ , otrzymujemy:

$$S^2 = P^2 + D_S^2 + Q_R^2 + D_U^2 + D_G^2, \quad (50)$$

gdzie:

$$D_S \hat{=} \|u\| \|i_S\|, \quad Q_R \hat{=} \|u\| \|i_R\|, \quad D_U \hat{=} \|u\| \|i_U\|, \quad D_G \hat{=} \|u\| \|i_G\|, \quad (51)$$

lecz poza mocą czynną wielkości te nie mają interpretacji fizycznej; są jedynie formalnymi iloczynami. Mimo to równanie mocy unaocznia wpływ poszczególnych zjawisk na moc pozorną źródła.

Przedstawiony rozkład ma jednak zasadnicze ograniczenie. Mianowicie, nie można go przeprowadzić wtedy, gdy napięcie źródła ma harmoniczne o numerach harmonicznych generowanych w odbiorniku, a także wtedy, gdy wskutek impedancji wewnętrznej źródła w napięciu na jego zaciskach ujawniają się harmoniczne o numerach wszystkich harmonicznych prądu. W sytuacji takiej znika bowiem kryterium rozkładu prądu  $i$  na składowe  $i_o$  oraz  $i_g$ , a składowe te są ortogonalne tylko wtedy, gdy nie mają harmonicznych o tych samych numerach.

Rozkład można przeprowadzić z zachowaniem jego ortogonalności (choćby adekwatność otrzymanego modelu będzie zmniejszona) na podstawie następującego rozumowania. Gdy przyczyną istnienia w prądzie harmonicznej  $i_n$  jest tylko napięcie źródła, wówczas moc czynna tej harmonicznej  $P_n$  w przekroju RST jest dodatnia. Gdy zaś przyczyną istnienia w prądzie tej harmonicznej jest wyłącznie nieliniowość bądź niestacjonarność odbiornika, wówczas moc czynna  $P_n$  w tym przekroju jest ujemna.

Harmoniczną  $i_n$  może być jednak wypadkowym efektem działania napięcie źródła i jej generacji w odbiorniku, lecz aby prądy  $i_o$  i  $i_g$  były ortogonalne, harmoniczną tą może być składową tylko jednego z nich.

Ortogonalność prądów  $i_o$  i  $i_g$  zostaje zachowana kosztem zmniejszenia adekwatności modelu, jeśli harmoniczną  $i_n$  przyporządkowana jest tylko jednemu z nich. O tym, któremu jest ona przyporządkowana, może decydować znak mocy  $P_n$ , gdyż on właśnie wskazuje na dominującą przyczynę przepływu tej harmonicznej prądu. Mianowicie wtedy, gdy  $P_n > 0$ , harmoniczną  $i_n$  przyporządkowujemy prądowi  $i_o$ , zaś wtedy, gdy  $P_n < 0$ , przyporządkowujemy ją prądowi  $i_g$ .

## 5. Wnioski

Przedstawiony w tym artykule ortogonalny rozkład prądu tworzy wygodny model matematyczny dla interpretacji właściwości energetycznych asymetrycznego obwodu trójfazowego z przebiegami odkształconymi gdyż separuje poszczególne zjawiska i przyczyny decydujące o wartości prądu źródła oraz pozwala badać wpływ na prąd źródła każdego z nich z osobna. Dlatego też model ten może być bardzo przydatny w badaniach nad metodami modyfikacji



właściwości energetycznych obwodów trójfazowych z przebiegami odkształconymi, mającymi na celu poprawę współczynnika mocy i redukcję odkształceń.

Matematyczne cechy przedstawionego modelu są też dobrze dostosowane do obecnego stanu techniki cyfrowego przetwarzania sygnałów. Za pomocą nowoczesnych przetworników analogowo-cyfrowych, współpracujących z procesorami FFT, wyposażonymi w pewne dodatkowe procedury numeryczne, można obecnie wyznaczyć poszczególne składowe prądu i mocy niemal w czasie rzeczywistym.

Wydaje się, że przedstawiony tu ortogonalny rozkład prądów tworzy podstawy nowej teorii mocy obwodów trójfazowych na tyle obiecującej, że warta jest ona dalszych prac nad jej rozwojem.

#### LITERATURA

- [1] Czarnecki L.S.: An orthogonal decomposition of the current of non-sinusoidal voltage source applied to non-linear loads, Int. Journal on Circuit Theory and Appl., Vol. II, pp. 235-239, 1983.
- [2] Fryze S.: Active, reactive and apparent power in circuits with non-sinusoidal voltage and current, Przegląd Elektrot., nr 7, ss. 193-203, nr 8, ss. 225-234, 1931.
- [3] Czarnecki L.S.: Consideration on the reactive power in nonsinusoidal situations, IEEE Trans. on Instr. Meas., Vol. IM-34, No 3, pp. 399-404, Sept. 1985.
- [4] Budeanu C.I.: Puissances reactivés et fictives, Inst., Romain de l'Energie, Bucharest, Romania 1927.
- [5] Czarnecki L.S.: Power theories of periodic nonsinusoidal systems, Rozprawy Elektrotechniczne 1985, nr 31, z. 3-4, pp. 659-689.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Kazimierz Mikołajuk

Wpłynęło do redakcji 15 maja 1987 r.

#### ОРТОГОНАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ТОКА ИСТОЧНИКА ДЕФОРМИРОВАННОГО НАПРЯЖЕНИЯ, ПИТАЮЩЕГО АСИММЕТРИЧЕСКИЙ НЕЛИНЕЙНЫЙ ТРЕХФАЗНЫЙ ПРИЁМНИК

#### Резюме

Ортогональное разложение тока источника в однофазной электрической цепи с деформациями на ток: активный, реактивный, рассеивания и генерированный, основной в новой теории мощности таких электрических цепей, расширено в настоящей работе о токи источника с деформированным напряжением, в асимметричной нелинейной трёхфазной цепи. Показано, что в такой электрической цепи ток источника, рассматриваемый как вектор, составляющими которого являются трёхфазные токи, можно разложить на взаимно ортогональные токи!

активный, реактивный, рассеивания и генерированный, сохраняющие прежнюю физическую интерпретацию. Такое разложение выявляет новый, ортогональный относительно остальных, составляющий элемент тока, названный током асимметрии, действующее значение которого является мерой влияния асимметрии приемника на действующее значение тока источника. Таким образом, найденное разложение сепарирует отдельные явления и причины, предопределяющие действующее значение тока источника, а также поставяет через действующие значения выделенных составляющих элементов, меры для количественного исследования влияния этих явлений на ток источника.

ORTHOGONAL CURRENT DECOMPOSITION OF NON-SINUSOIDAL VOLTAGE SOURCE SUPPLYING AN ASYMMETRICAL NON-LINEAR THREE-PHASE RECEIVER

S u m m a r y

Orthogonal current decomposition of the non-sinusoidal voltage source, into the active, reactive, scatter and generated currents in a single - phase circuit being a new power theory basis of such circuits, is widened over the currents of the source of non-sinusoidal voltage in asymmetrical and non-linear three-phase circuit. It has been shown that the source current in such a circuit, treated as a vector of the phase current components, can be decomposed into the mutually orthogonal currents: active, reactive, scatter and generated currents, preserving previous physical interpretation. This decomposition reveals a new current component, orthogonal to the other ones, called current of asymmetry; its root - mean - square current is a measure of the influence of receiver's impedance asymmetry on the root - mean - square current of the source.

The decomposition found in this way, separates particular phenomena and reasons that determine the rms value of the source current and also provides, by rms values of separated components, with measures for quantitative testing of these phenomena influence on the source current.

Leszek S. CZARNECKI

Anna LASICZ

ORTOGONALNY ROZKŁAD PRĄDU ODBIORNIKA  
ZASILANEGO NAPIĘCIEM NIEOKRESOWYM

**Streszczenie.** Artykuł formułuje teoretyczną podstawę do opisu właściwości energetycznych obwodów z przebiegami nieokresowymi o skończonej energii. Pokazano, że prąd w takich obwodach może być rozłożony na trzy wzajemnie ortogonalne składowe, które odpowiadają za wartości prądu i są wyraźnie związane z trzema różnymi zjawiskami fizycznymi. Rozkład ten umożliwi nie tylko głębsze zrozumienie właściwości energetycznych w takich obwodach, lecz także tworzy podstawę do minimalizacji prądu. Dostarcza również informacji dotyczących pomiaru wielkości, które są potrzebne do tej minimalizacji.

1. Wprowadzenie

Zagadnienie opisu właściwości energetycznych obwodów było i jest podejmowane przez wielu autorów [1], [4], [5], [6], [7], [9]. Prace na ten temat dotyczą głównie obwodów z przebiegami okresowymi, niesinusoidalnymi. Znanych jest wiele definicji mocy w takich obwodach i istnieją różne rozkłady zdeformowanych prądów (napięć) [2].

W pracy [3] zaproponowano nową koncepcję opisu właściwości energetycznych obwodów zasilanych napięciem niesinusoidalnym. W pracy tej, wykorzystując ideę St. Fryzego rozkładu ortogonalnego, rozkłada się prąd źródła na trzy wzajemnie ortogonalne składowe, zwane odpowiednio: prądem czynnym, rozrzutu i biernym.

Mianowicie:

$$i = i_a + i_s + i_r$$

$$i_a \hat{=} G_e U_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} G_n U_n \exp\{jn\omega_1 t\}$$

$$i_s \hat{=} (G_0 - G_e) U_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (G_n - G_e) U_n \exp\{jn\omega_1 t\}$$

$$i_r \hat{=} \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} jB_n U_n \exp\{jn\omega_1 t\},$$

gdzie:  $G_n$  i  $B_n$  oznaczają konduktancję i susceptancję odbiornika dla częstotliwości harmonicznych  $n\omega_1$ , zaś  $G_0$  jest jego konduktancją równoważną. Rozkład ten dostarcza nowej interpretacji właściwości energetycznych takich obwodów. Mianowicie, ujawnia on dwie odrębne fizyczne przyczyny powodujące powiększenie wartości skutecznej prądu źródła ponad tę, która jest niezbędna dla przeniesienia mocy czynnej. Jedną z nich jest zwrotny przepływ energii między źródłem a polami magnetycznymi i elektrycznymi odbiornika. Zjawisko to było oczywiście brane pod uwagę już we wcześniejszych sformułowaniach teorii mocy np. Budeanu [1]. Jednak funkcjonał określający wpływ tego zjawiska na moc pozorną źródła nie jest w tej teorii określony poprawnie, gdyż jego wartość może być równa zero mimo obecności zwrotnego przepływu energii. Nowy proponowany funkcjonał  $\|i_r\|$ , tj. wartość skuteczna składowej  $i_r$  wady tej nie ma. Drugą, ujawnioną przyczyną bezużytecznego wzrostu wartości skutecznej prądu źródła jest zmiana konduktancji odbiornika z częstotliwością. Miara oddziaływania tego zjawiska na prąd źródła jest funkcjonał  $\|i_g\|$ . Oba funkcjonały  $\|i_g\|$  oraz  $\|i_r\|$ , tj. wartość skuteczna prądu rozrztu i prądu biernego powiększają wartość skuteczną prądu źródła w sposób określony równaniem:

$$\|i\|^2 = \|i_g\|^2 + \|i_r\|^2 + \|i_0\|^2.$$

Ponieważ składowa  $i_r$  jest kompensowalna równoległym dwójnikiem reaktancyjnym, zaś składowa  $i_g$  nie jest takim dwójnikiem kompensowalna, dlatego rozkład ten dostarcza ważnych informacji dotyczących możliwości minimalizacji mocy pozornej źródeł.

Istnieją jednak w elektrotechnice sytuacje, gdy energia przenoszona jest do odbiornika w obecności nieokresowych przebiegów prądów i napięć. Mając na uwadze własności opisanego rozkładu nasuwa się pytanie, czy można taki rozkład rozszerzyć na obwody z przebiegami nieokresowymi. Niniejszy artykuł udziela potwierdzającej odpowiedzi na to pytanie.

## 2. Założenia

Rozważania w niniejszym artykule ograniczone są do obwodów liniowych z nieokresowymi przebiegami napięcia  $u(t)$  i prądu  $i(t)$ , całkowanymi z kwadratem w przedziale  $(-\infty, +\infty)$ , tzn., jeżeli  $u(t)$  lub  $i(t)$  oznaczamy przez  $f(t)$ , wówczas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt < \infty$$

(1)

Są to więc przebiegi należące do przestrzeni  $L^2(-\infty, +\infty)$ . Przebiegi opisane takimi funkcjami mają [8], [10] widmo  $\underline{F}(\omega)$ , określone prostym przekształceniem Fouriera

$$\underline{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (2)$$

przy czym przekształcenie odwrotne Fouriera widma  $\underline{F}(\omega)$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3)$$

jest zbieżne do funkcji  $f(t)$  w sensie średniokwadratowym. Iloczyn skalarny dwóch dowolnych elementów  $f, g$  tej przestrzeni zdefiniowany jest jako:

$$(f, g) \hat{=} \int_{-\infty}^{+\infty} fg dt = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{F}(\omega) \underline{G}^*(\omega) d\omega \right\} \quad (4)$$

a norma

$$\|f\| \hat{=} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(\omega) d\omega}. \quad (5)$$

W przestrzeni całkowalnych z kwadratem funkcji okresowych  $f_T$  norma  $\|f_T\|$  jest wartością skuteczną przebiegu określonego tą funkcją. Jednak pojęcia "wartość skuteczna" nie można używać wtedy, gdy przebieg  $f$  nie jest okresowy. Norma  $\|f\|$  nie ma wymiaru normy  $\|f_T\|$  i nie może też być interpretowana jako wartość prądu stałego, równoważnego temu przebiegowi ze względu na efekty cieplne. Przy nieograniczonych granicach całkowania prąd taki musi być nieskończenie mały. Ponieważ jednak norma  $\|f\|$  spełnia w dalszych rozważaniach taką rolę jak wartość skuteczna  $\|f_T\|$  w teorii mocy przebiegów okresowych, będzie ona dalej nazywana uogólnioną wartością skuteczną przebiegu  $f$  lub w skrócie "wartością skuteczną". Nazwa taka może być bliższa elektrotechnice stosowanej, szczególnie, że dla przebiegu  $f$ , który jest równy zeru poza skończonym przedziałem czasu  $\tau$ , jego uogólniona wartość skuteczna  $\|f\|$  może być interpretowana jako wartość prądu stałego, który w przedziale  $\tau$  jest równoważny prądowi  $f$  ze względu na skutki cieplne.

Założmy, że odbiornik jest elementem dwuzaciskowym, liniowym i stacjonarnym o admitancji  $\underline{Y}(\omega)$

$$\underline{Y}(\omega) \hat{=} Y(\omega) \exp\{-j\varphi(\omega)\} = G(\omega) + jB(\omega). \quad (6)$$

### 3. Rozkład prądu na składowe ortogonalne

Energię  $E$  przeniesioną ze źródła do odbiornika określa iloczyn skalarny prądu i napięcia

$$\begin{aligned} E = (i, u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} i u dt = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{J}(\omega) \underline{U}^*(\omega) d\omega \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) U^2(\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (7)$$

przy czym spełnia ona nierówność:

$$E = (i, u) \leq \|i\| \cdot \|u\|. \quad (8)$$

Nierówność ta staje się równością wówczas, gdy

$$i = G_0 u, \quad G_0 - \text{liczba rzeczywista} \quad (9)$$

a energia równa jest wtedy:

$$E = G_0 \|u\|^2. \quad (10)$$

Wynika stąd, że ze względu na pobieraną energię  $E$  odbiornik zasilany napięciem  $u$  jest równoważny odbiornikowi rezystancyjnemu o konduktancji  $G_0$ , gdzie

$$G_0 = \frac{E}{\|u\|^2}, \quad (11)$$

zasilanemu tym samym napięciem.

Wyróżnijmy w prądzie  $i$  składową

$$i_s \hat{=} G_0 u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_0 \underline{U}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{J}_s(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (12)$$

proporcjonalną do napięcia  $u$ .

Reszta prądu źródła

$$i - i_a = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [(G(\omega) - G_\theta) + jB(\omega)] \underline{U}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (13)$$

może być rozłożona na składowe:

$$i_s \hat{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{J}_s(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (G(\omega) - G_\theta) \underline{U}(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (14)$$

$$i_r \hat{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{J}_r(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} jB(\omega) \underline{U}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (15)$$

W ten sposób prąd  $i$  oraz jego widmo  $\underline{J}(\omega)$  można przedstawić w postaci sumy:

$$i = i_a + i_s + i_r, \quad (16)$$

$$\underline{J}(\omega) = \underline{J}_a(\omega) + \underline{J}_s(\omega) + \underline{J}_r(\omega), \quad (17)$$

gdzie:

$$\underline{J}_a(\omega) \hat{=} G_\theta \underline{U}(\omega), \quad (18)$$

$$\underline{J}_s(\omega) \hat{=} (G(\omega) - G_\theta) \underline{U}(\omega), \quad (19)$$

$$\underline{J}_r(\omega) \hat{=} jB(\omega) \underline{U}(\omega). \quad (20)$$

Obliczmy wartości iloczynów skalarnych składowych prądu:

$$(i_s, i_r) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (G(\omega) - G_\theta) \underline{U}(\omega) (jB(\omega) \underline{U}(\omega))^* d\omega \right\} = 0, \quad (21)$$

$$(i_s, i_a) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (G(\omega) - G_\theta) \underline{U}(\omega) (G_\theta \underline{U}(\omega))^* d\omega \right\} = E - E = 0, \quad (22)$$

$$(i_r, i_a) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (jB(\omega) \underline{U}(\omega)) (G_\theta \underline{U}(\omega))^* d\omega \right\} = 0. \quad (23)$$

Ponieważ są one równe zero, zatem:

$$|i|^2 = |i_a|^2 + |i_s|^2 + |i_r|^2, \quad (24)$$

gdzie:

$$|i_a| = \frac{E}{|U|}, \quad (25)$$

$$|i_s| = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (G(\omega) - G_0)^2 U^2(\omega) d\omega}, \quad (26)$$

$$|i_r| = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B^2(\omega) U^2(\omega) d\omega}. \quad (27)$$

#### 4. Interpretacja fizyczna

Przedstawiany ortogonalny rozkład prądu wyjaśnia przyczyny powodujące, że przeniesienie ze źródła do odbiornika energii  $E$  może wymagać prądu większego od niezbędnego do tego celu prądu  $i_a$ . Mianowicie, prądowi  $i_a$  towarzyszą dwa bezużyteczne prądy  $i_s$  oraz  $i_r$ , nie przenoszące energii, gdyż

$$(u, i_s) = G_0(i_a, i_s) = 0, \quad (28)$$

$$(u, i_r) = G_0(i_a, i_r) = 0, \quad (29)$$

przy czym miarami oddziaływania tych prądów na prąd źródła są ich uogólnione wartości skuteczne. "Wartość skuteczna" składowej  $i_s$  jest większa od zera wtedy, gdy konduktancja  $G(\omega)$  odbiornika zmienia się z częstotliwością, natomiast "wartość skuteczna" składowej  $i_r$  jest większa od zera wtedy, gdy susceptancja nie ma wartości zerowej.

#### 5. Minimalizacja prądu źródła napięcia nieokresowego

Jeśli źródło napięcia nieokresowego ma rezystancję wewnętrzną  $R_z$ , to przesłaniu energii  $E$  do odbiornika towarzyszy jej strata  $\Delta E$  w źródle. W najprostszym modelu opisu tych strat można przyjąć, że rezystancja źródła jest niezależna od częstotliwości, a przy takim założeniu strata energii w źródle jest proporcjonalna do kwadratów uogólnionej wartości skutecznej prądu źródła, tj.



$$\Delta E = \|i\|_R^2 = (\|i_a\|^2 + \|i_s\|^2 + \|i_r\|^2)R_Z. \quad (30)$$

Od wartości tej zależy jest także przekrój przewodów źródła. Istnieją w elektrotechnice sytuacje, w których energia do odbiornika przekazywana jest w nieregularnych odstępach czasu impulsami podobnego kształtu o względnie krótkim, w stosunku do przerwy, czasie trwania. Naturalne jest wtedy pytanie, czy można i jak zminimalizować straty energii i przekroje przewodów? Wymaga to oczywiście minimalizacji uogólnionej wartości skutecznej prądu  $\|i\|$  przy nie zmienionej energii  $E$ , a więc nie zmienionej wartości  $\|i_a\|$ .

W obwodach z przebiegami okresowymi najprostszym sposobem minimalizacji wartości skutecznej prądu źródła jest włączenie kondensatora na zaciski odbiornika. Sprawdźmy zatem, czy minimalizacja taka może mieć zastosowanie do obwodów z przebiegami nieokresowymi. Jeżeli tak, wyznaczmy wartość pojemności minimalizującej wartość skuteczną prądu. Przyjmijmy przy tym, że źródło jest idealne.

Idealna pojemność włączona na zaciski odbiornika modyfikuje jego admittancję do wartości:

$$Y(\omega) = G(\omega) + j[B(\omega) + \omega C]. \quad (32)$$

Ponieważ przed pojawieniem się impulsu napięciowego  $u(t)$  i po jego zaniku do zera energia pola elektrycznego kondensatora jest równa zero, jego włączenie nie zmienia energii  $E$  wydanej ze źródła, a tym samym, nie zmienia on konduktancji równoważnej  $G_0$  odbiornika oraz prądu czynnego źródła. Kondensator taki nie zmienia konduktancji  $G(\omega)$  na zaciskach źródła, a więc nie oddziałuje on także na wartość prądu  $i_0$ . Wskutek zmiany susceptancji na zaciskach źródła oddziałuje on tylko na prąd  $i_r$ , modyfikując kwadrat jego uogólnionej wartości skutecznej do wartości:

$$\|i_r\|^2 = \frac{1}{2R} \int_{-\infty}^{+\infty} [B(\omega) + \omega C]^2 U^2(\omega) d\omega. \quad (33)$$

Jeżeli susceptancja odbiornika  $B(\omega)$  przyjmuje wartości ujemne, a jest tak w przypadku odbiorników rezystancyjno-indukcyjnych, wówczas funkcjonal  $\|i_r\|^2$  może mieć dla pewnego  $C = C_{opt}$  minimum.

Warunkiem koniecznym na to, aby pojemność  $C_{opt}$  minimalizowała "wartość skuteczną" prądu źródła  $\|i\|$  jest spełnienie przez tę pojemność równania

$$\frac{d\|i_r\|^2}{dC} = \frac{1}{2R} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\omega B(\omega) U^2(\omega) d\omega + 2C_{opt} \frac{1}{2R} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 U^2(\omega) d\omega = 0, \quad (34)$$

tj.

$$C_{\text{opt}} = - \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega B(\omega) U^2(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 U^2(\omega) d\omega} > 0. \quad (34)$$

Warunek powyższy ma postać podobną do warunku podanego przez Shepherd'a i Zakikhaniego [9] dla optymalnej pojemności kompensującej w obwodzie z przebiegami okresowymi. Jedynie sumowanie zastąpione jest całkowaniem. Ponieważ w obwodzie z idealnym źródłem napięcia dla  $C = C_{\text{opt}}$

$$\frac{d^2 \|i_r\|^2}{dC^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 U^2(\omega) d\omega > 0, \quad (35)$$

zatem warunek (36) jest także warunkiem wystarczającym. Jednak w obwodzie, w którym źródło ma impedancję wewnętrzną o charakterze indukcyjnym, warunek ten może nie być wystarczającym, ze względu na możliwość pojawienia się zjawisk rezonansowych. Podobnie jak w przypadku obwodów z przebiegami okresowymi, sprawdzenie czy warunek powyższy jest warunkiem wystarczającym wymaga analizy konkretnej sytuacji obwodowej.

### Zakończenie

Przedstawiony ortogonalny rozkład prądu w obwodach z przebiegami nieokresowymi wykazuje dużą analogię do rozkładu prądu w obwodach z przebiegami okresowymi. Wymaga on jedynie stosowania przekształcenia, nie zaś szeregu Fouriera, a norma przebiegu jest interpretowana odmiennie niż wartość skuteczna przebiegu okresowego, chociaż i w tym przypadku istnieją znaczne podobieństwa.

Przedstawiony rozkład dostarcza fizycznej interpretacji właściwości energetycznych obwodów, a także informacji o możliwości minimalizacji prądu źródła o napięciu nieokresowym.

### LITERATURA

- [1] Budeanu C.I.: Puissances reactives et fictives. Institut Romain de L'Energie, Bucarest 1927.
- [2] Czarnecki L.S.: Interpretacja, identyfikacja i modyfikacja właściwości energetycznych obwodów jednofazowych z przebiegami odkształconymi. ZN Pol. 31., "Elektryka", z. 91, Gliwice 1984.
- [3] Czarnecki L.S.: Power Theories of Periodic Nonsinusoidal Systems. Rozprawy Elektrotechniczne, 31, z. 3-4, 1985.

- [4] Depenbrock M.: Wirk - und Blindleistung. ETG - Fachtagung "Blindleistung", Aachen, October 1979.
- [5] Fryze S.: Moc czynna, bierna i pozorna w obwodach o przebiegach odkształconych prądu i napięcia. Przegląd Elektrotechniczny, 1931, nr 7, 8.
- [6] Kusters N.L., Moore W.J.M.: On the definition of reactive power under nonsinusoidal conditions. IEEE Trans. Power Appl. Syst. vol. PAS-99, sept. 1980.
- [7] Nowomiejski Z.: Uogólniona teoria mocy. ZN Pol. Śl. "Elektryka", z.46, Gliwice 1974.
- [8] Piskorek A.: Równania całkowe. WNT, Warszawa 1980.
- [9] Shepherd W., Zakikhani P.: Capacitive compensation in systems with nonsinusoidal voltage. University of Bradford Postgraduate School of Electrical and Electronic Engineering Research Report 88, 1971.
- [10] Titchmarsh: Introduction to the Theory of Fourier Integrals. Oxford Univ. Press. 1948.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Kazimierz Mikołajuk

Wpłynęło do redakcji 15 maja 1987 r.

ОРТОГОНАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА В ПРИЕМНИКЕ ПИТАЕМОМ  
НЕПЕРИОДИЧЕСКИМ НАПРЯЖЕНИЕМ

Р е з ю м е

В статье сформулировано теоретическое обоснование описания теоретических свойств энергетических цепей с непериодическими процессами и конечной энергией. Доказано, что ток в таких цепях может распределяться на три взаимно ортогональные составляющие, отвечающие за величину тока и четко связанные с тремя различными физическими явлениями.

Данное распределение позволяет не только на более глубокое изучение энергосвойств в таких цепях, но также создает основу для минимализации тона и дает информацию по измерению величин необходимых для такой минимализации.

ORTHOGONAL DECOMPOSITION OF CURRENT OF THE RECEIVER  
SUPPLIED WITH APERIODIC VOLTAGE

S u m m a r y

The paper formulates a theoretical basis for the description of power properties of circuits with aperiodic wave forms of a finite energy. It has been shown that the current in such circuits can be decomposed into three orthogonal components which are responsible for the current value and distinctively related to three different physical phenomena.

This decomposition enables not only a deeper understanding of the power properties of such circuits but also forms a ground for the current minimization.

It also provides with information on measurements of the values required for this minimization.

- [1] J. J. Moreau, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **CAS-28**, pp. 1000-1001, 1981.
- [2] J. J. Moreau, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **CAS-28**, pp. 1002-1003, 1981.
- [3] J. J. Moreau, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **CAS-28**, pp. 1004-1005, 1981.
- [4] J. J. Moreau, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **CAS-28**, pp. 1006-1007, 1981.
- [5] J. J. Moreau, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **CAS-28**, pp. 1008-1009, 1981.
- [6] J. J. Moreau, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **CAS-28**, pp. 1010-1011, 1981.
- [7] J. J. Moreau, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **CAS-28**, pp. 1012-1013, 1981.
- [8] J. J. Moreau, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **CAS-28**, pp. 1014-1015, 1981.
- [9] J. J. Moreau, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **CAS-28**, pp. 1016-1017, 1981.
- [10] J. J. Moreau, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **CAS-28**, pp. 1018-1019, 1981.

Received: Oct. 10, 1981; revised: Dec. 15, 1981.

This paper is a contribution to the theory of linear circuits. It discusses the decomposition of the power function of a circuit into two parts, one of which is independent of the values of the resistors. The decomposition is useful for the minimization of the power consumption of a circuit.

The decomposition is based on the fact that the power function of a circuit can be written as a sum of two terms. The first term is a function of the resistors, and the second term is a function of the sources. This decomposition is useful for the minimization of the power consumption of a circuit.

ORTHOGONAL DECOMPOSITION OF POWER CONSUMPTION OF LINEAR CIRCUITS WITH RESISTIVE VOICES

- [1] J. J. Moreau, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **CAS-28**, pp. 1000-1001, 1981.
- [2] J. J. Moreau, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **CAS-28**, pp. 1002-1003, 1981.
- [3] J. J. Moreau, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **CAS-28**, pp. 1004-1005, 1981.
- [4] J. J. Moreau, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **CAS-28**, pp. 1006-1007, 1981.
- [5] J. J. Moreau, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **CAS-28**, pp. 1008-1009, 1981.
- [6] J. J. Moreau, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **CAS-28**, pp. 1010-1011, 1981.
- [7] J. J. Moreau, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **CAS-28**, pp. 1012-1013, 1981.
- [8] J. J. Moreau, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **CAS-28**, pp. 1014-1015, 1981.
- [9] J. J. Moreau, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **CAS-28**, pp. 1016-1017, 1981.
- [10] J. J. Moreau, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, **CAS-28**, pp. 1018-1019, 1981.

Leszek S. CZARNECKI

MOC BIERNA I MOC DEFORMACJI WEDŁUG DEFINICJI BUDEANU I PRZYCZYNY  
BEZUŻYTECZNOŚCI TYCH WIELKOŚCI W ELEKTROTECHNICE

**Streszczenie.** Sformułowana przez Budeanu teoria mocy obwodów z przebiegami odkształconymi rozprzestrzeniła się w elektrotechnice, pomimo zastrzeżeń i prób znalezienia innych teorii, od niemal 60 lat. Zastrzeżenia dotyczyły głównie tego, że moc bierna nie jest w tej teorii zdefiniowana poprzez wartości chwilowe prądu i napięcia, lecz pośrednio za pomocą szeregów trygonometrycznych tych wielkości. Problem pomiaru tak zdefiniowanej mocy biernej został rozwiązany dopiero po niemal 50 latach, natomiast problem poprawy współczynnika mocy źródła w oparciu o teorię mocy Budeanu nie doczekał się rozwiązania. Główne wady teorii Budeanu nie zostały jednak ujawnione. Mianowicie, moc bierna i moc deformacji według tej teorii nie mają żadnych cech wiążących te moce ze zjawiskami fizycznymi odpowiedzialnymi za bezużyteczny wzrost wartości skutecznej prądu źródła. Dlatego nie dostarczają one żadnych informacji niezbędnych do projektowania kompensatorów. Moc deformacji nie dostarcza też żadnych informacji o deformacji przebiegów. Niedostrzeżenie tych wad dostatecznie wcześniej spowodowało na manowce badania nad właściwościami energetycznymi obwodów z przebiegami odkształconymi.

## 1. Wstęp

C.I. Budeanu uogólnił [1] w roku 1927 równanie mocy obwodu z przebiegami sinusoidalnymi tak, aby stosowało się ono do obwodów z przebiegami odkształconymi. Zdefiniował w tym celu moc bierną

$$Q_B \hat{=} \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \sin \varphi_n \quad (1)$$

oraz wprowadził nową wielkość, zwaną mocą deformacji

$$D_B \hat{=} \sqrt{S^2 - P^2 - Q_B^2} \quad (2)$$

Moc bierną  $Q_B$  i moc deformacji  $D_B$  interpretuje się zwykle, co sugerują już ich nazwy, jako miary oddziaływania, osobno zwrotnego przepływu energii oraz deformacji przebiegów na moc pozorną źródła.

Pomimo zastrzeżeń S. Fryzego [2], dotyczących głównie definiowania mocy biernej poprzez harmoniczne prądu i napięcia, definicje Budeanu rozprzestrzeniły się w elektrotechnice. Również Shepherd i Zekikhani kwestionowali w 1972 r. fizyczną interpretację mocy biernej Budeanu, proponując [3] przyjęcie odmiennej definicji tej mocy.

Pomimo tych zastrzeżeń jeszcze w 1977 roku A.E. Emanuel stwierdził [6], że "model Budeanu jest powszechnie akceptowany". Model ten został wsparty pracami Z. Nowomiejskiego [7], który wyraził moc bierną za pomocą przekształcania Hilberta w dziedzinie czasowej, a także pracami H. Fishera [8], który nadał jej bardziej wyrefinowaną matematycznie postać.

Zdefiniowane przez Budeanu moce okazały się jednak niezmiernie trudne do mierzenia. Pomimo poważnych wysiłków [9-16], [18] upłynęło niemal 50 lat zanim zbudowano pierwsze mierniki tych mocy. Fiaskiem zakończyły się natomiast usiłowania rozwiązania, na podstawie teorii Budeanu, problemu poprawy współczynnika mocy źródeł o napięciu odkształconym. Być może, że właśnie niedostępność pomiarowa mocy biernej i mocy deformacji Budeanu odwróciła uwagę od zagadnień, które wydają się być podstawowe dla teorii mocy, mianowicie, jaki jest związek tych mocy ze zjawiskami fizycznymi determinującymi właściwości energetyczne obwodu, a także, czy wielkości te dostarczają informacji, które umożliwiają projektowanie kompensatorów poprawiających współczynnik mocy źródeł. Tymczasem okazuje się, jak to zostanie w niniejszym artykule pokazane, że ani moc bierna ani moc deformacji Budeanu nie pozostają w jednoznacznej relacji do zjawisk fizycznych determinujących właściwości energetyczne obwodu i w tym tkwi przyczyna ich bezużyteczności w zagadnieniach dotyczących poprawy współczynnika mocy. Co więcej, okazuje się, że moc deformacji nie ma związku z deformacją przebiegów.

Niestety, te podstawowe wady teorii Budeanu nie zostały dotąd w sposób wyraźny ujawnione.

Badania autora tego artykułu nad pomiarem mocy biernej Budeanu z użyciem obwodów ortonormalnych [15, 16], szerokopasmowych przesuwników fazy [12], czy poprzez modulację jednowętową [19] doprowadziły do konstrukcji pierwszych mierników mocy biernej i mocy deformacji [14]. W ten sposób autor, będąc przekonany o poprawności teorii Budeanu, przyczynił się do utrzymywania jej przy życiu. Dlatego czuje się on szczególnie zobowiązany do pokazania, że jest to błędna i bezużyteczna teoria mocy.

## 2. Moc bierna i moc deformacji Budeanu a energetyczne właściwości obwodu

Założmy, że okresowe napięcie źródła  $u$  o pulsacji  $\omega_1$  zawiera wyłącznie pojedynczą harmoniczną  $u_n$  o pulsacji  $n\omega_1$  i wartości skutecznej  $U_n$ , tj.:

$$u = u_n \hat{=} \sqrt{2} U_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n). \quad (3)$$

Jeśli na zaciski źródła włączony jest odbiornik liniowy o admitancji dla pulsacji  $n\omega_1$  równej  $Y_n = Y_n \exp\{-j\varphi_n\}$ , to prąd źródła jest równy

$$i = i_n = \sqrt{2} I_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n - \varphi_n), \quad I_n \hat{=} Y_n U_n. \quad (4)$$

Moc chwilowa źródła, tj. prędkość przepływu energii ze źródła do odbiornika może być rozłożona na dwa składniki:

$$p_n \hat{=} \frac{dw}{dt} = u_n i_n = P_n [1 + \cos 2(n\omega_1 t + \alpha_n)] + Q_n \sin 2(n\omega_1 t + \alpha_n), \quad (5)$$

gdzie:

$$P_n \hat{=} U_n I_n \cos \varphi_n, \quad (6)$$

$$Q_n \hat{=} U_n I_n \sin \varphi_n. \quad (7)$$

Rozkład ten uwypukla fizyczny sens mocy biernej  $Q$  w obwodach z przebiegami sinusoidalnymi. Jest to "uogólniona" w tym znaczeniu, że może być ujemna amplituda składowej przemiennej mocy chwilowej  $Q_n \sin 2(n\omega_1 t + \alpha_n)$ . Istnieje ona, gdy wskutek akumulacji energii w polach elektrycznych i magnetycznych odbiornika występuje zwrotny przepływ energii między źródłem i odbiornikiem.

Definiując moc bierną w obwodzie z odkształconym napięciem i prądem

$$u \hat{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad i \hat{=} \sum_{n=1}^{\infty} i_n \quad (8)$$

jako

$$Q_B \hat{=} \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \sin \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \quad (9)$$

Budeanu dodał po prostu uogólnione amplitudy  $Q_n$  składowych przemiennych poszczególnych harmonicznych. Lecz każda z tych składowych ma inną częstotliwość i może się różnić kątem fazowym  $\alpha_n$ . Dlatego suma ta nie określa składowej przemiennej mocy chwilowej  $p = u \cdot i$ . Chociaż każdy wyraz  $Q_n$  sumy ma jednoznaczny sens fizyczny, ich suma  $Q_B$  traci ten sens całkowity. W szczególności suma ta może być równa zero przy niezerowych wartościach  $Q_n$ , tj. pomimo istnienia zwrotnego przepływu energii między źródłem a odbiornikiem. Moc bierna Budeanu nie może więc być interpretowana jako ilościowa miara wpływu zwrotnego przepływu energii

w obwodzie na moc pozorną źródła. Zwrotny przepływ energii, ujawniający się w niezerowych wartościach  $Q_n$ , w inny też sposób oddziałuje na wartość skuteczną prądu  $\|i\|$  źródła niż to sugeruje model Budeanu. Mianowicie, każda harmoniczna  $i_n$  prądu  $i$  może być rozłożona na ortogonalne składowe

$$i_{dn} \hat{=} \sqrt{2} I_n \cos \varphi_n \cos(n\omega_1 t + \alpha_n), \quad (10)$$

$$i_{rn} \hat{=} \sqrt{2} I_n \sin \varphi_n \sin(n\omega_1 t + \alpha_n), \quad (11)$$

których wartości skuteczne  $\|i_{dn}\|$ ,  $\|i_{rn}\|$  spełniają relację:

$$\|i_n\|^2 = \|i_{dn}\|^2 + \|i_{rn}\|^2 = \left(\frac{P_n}{U_n}\right)^2 + \left(\frac{Q_n}{U_n}\right)^2. \quad (12)$$

Ponieważ harmoniczne  $i_n$  są wzajemnie ortogonalne, zatem

$$\|i\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|i_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{U_n}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{U_n}\right)^2. \quad (13)$$

Wynika stąd, że w obecności zwrotnego przepływu energii wartość  $\sum (Q_n/U_n)^2$ , nie zaś  $\sum Q_n = Q_B$  jest miarą bezużytecznego wzrostu wartości skutecznej prądu źródła z powodu niezerowych wartości  $Q_n$ .

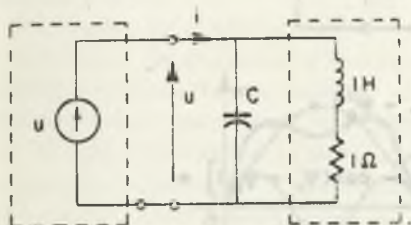
Dla określonych wartości  $P_n$  i  $U_n$  skuteczna wartość prądu ma minimum wtedy, gdy dla każdego  $n$ ,  $Q_n = 0$ , nie zaś wtedy, gdy ich suma  $Q_B = 0$ . Zerowanie się mocy biernej Budeanu jest tylko warunkiem koniecznym, lecz nie wystarczającym na to, aby wartość skuteczna prądu była minimalna. Ponieważ zwrotny przepływ energii w obwodzie może mieć miejsce, pomimo że  $Q_B = 0$ , zatem z równania mocy Budeanu

$$S^2 = P^2 + Q_B^2 + D_B^2 \quad (14)$$

wynika, że nie tylko moc bierna  $Q_B$ , lecz także moc deformacji  $D_B$  zależy od zwrotnego przepływu energii. Oznacza to, niestety, że to podstawowe zjawisko fizyczne determinujące właściwości energetyczne obwodu nie jest przyporządkowane w sposób wyłączny jednej z tych mocy. To jest właśnie przyczyną bezużyteczności mocy  $Q_B$  i  $D_B$  w zagadnieniach dotyczących poprawy współczynnika mocy źródeł z pomocą kompensatorów reaktancyjnych. Kompensator taki redukując, poprzez zmianę wartości  $Q_n$ , moc bierną  $Q_B$  oddziałuje na moc deformacji  $D_B$ .



**Przykład 1.** Napięcie źródła w obwodzie przedstawionym na rys. 1 ma pulsację  $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$  i trzy harmoniczne o numerach  $n = 1, 5, 7$ , przy czym  $U_1 = 100 \text{ V}$  zaś  $U_n = U_1/n$ .



Rys. 1. Przykład obwodu, w którym kompensacja mocy biernej Budeanu  $Q_B$  nie poprawia współczynnika mocy

Fig. 1. Example of a circuit where Budeanu's power  $Q_B$  compensation does not improve its power factor

Moc czynna  $P = 5019 \text{ W}$ . Wartości mocy  $S$ ,  $Q_B$ ,  $D_B$  oraz współczynnik mocy  $\lambda \hat{=} P/S$  źródła w obwodzie bez kondensatora zestawione są w kolumnie (1) tabeli 1.

Tabela 1

| Wielkość  | Jedn. | (1)   | (2)    |
|-----------|-------|-------|--------|
| C         | F     | -     | 0,3802 |
| S         | VA    | 7296  | 7259   |
| $Q_B$     | VA    | 5105  | 0      |
| $D_B$     | VA    | 1407  | 5244   |
| $\lambda$ | -     | 0,688 | 0,691  |

Moc bierna  $Q_B$  może być całkowicie skompensowana kondensatorem o pojemności  $C = 0,3802 \text{ F}$ , (kolumna (2)), lecz nie zmienia to praktycznie współczynnika mocy.

Redukcji mocy biernej w powyższym przykładzie towarzyszy wzrost mocy deformacji. Niestety, teoria Budeanu nie dostarcza kryterium wyboru parametrów kompensatora minimalizującego jednocześnie obie moce. Poszukiwanie takiego kryterium, wyrażonego za pomocą pojęć tej teorii, wydaje się zupełnie niezasadnione, gdyż już z równania (13) wynika bezpośrednio kryterium minimalizacji wartości skutecznej prądu źródła.

Nazwa drugiej wielkości wprowadzonej przez Budeanu, mocy deformacji  $D_B$ , sugeruje jej związek z deformacją przebiegów. Rzeczywiście, jest ona równa zero w obwodach z przebiegami sinusoidalnymi, lecz jest także równa zero wtedy, gdy źródło odkształconego napięcia zasila odbiornik rezystancyjny, tj., gdy przebieg prądu nie jest zdeformowany względem napięcia. Oznacza to, że być może moc deformacji nie jest jakąś miarą samego stopnia odkształcenia przebiegów względem przebiegu sinusoidalnego, lecz ra-

czej odkształcenia prądu względem napięcia. Sprawdzimy tę hipotezę. Moc deformacji może być przedstawiona w postaci:

$$D_B \triangleq \sqrt{S^2 - P^2 - Q_B^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} A_{rs}} \quad (15)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A_{rs} &\triangleq U_r^2 I_s^2 + U_s^2 I_r^2 - 2U_r U_s I_r I_s \cos(\varphi_r - \varphi_s) = \\ &= (I_s U_r - U_s I_r)^2 + 2U_r U_s I_r I_s [1 - \cos(\varphi_r - \varphi_s)] = \\ &= U_r^2 U_s^2 (\underline{Y}_r - \underline{Y}_s)(\underline{Y}_r^* - \underline{Y}_s^*) \geq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Ponieważ wszystkie wyrazy  $A_{rs}$  są nieujemne, moc deformacji  $D_B$  jest równa zero wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego  $r, s \in \mathcal{N}$ ,  $A_{rs} = 0$ , tj. wtedy, gdy dla każdej harmonicznej napięcia

$$\underline{Y}_r = \underline{Y}_s. \quad (17)$$

Spełnienie tego warunku nie musi pociągać za sobą braku odkształceń prądu odbiornika względem napięcia. Wtedy, gdy warunek (17) jest spełniony przy  $\varphi_r = \varphi_s \neq 0$ , moc deformacji jest równa zero pomimo odkształcenia prądu względem napięcia. Ilustruje to przykład 2.

Przykład 2. Źródło o napięciu (rys. 2b)

$$u \triangleq \sqrt{2} U_1 \sin \omega_1 t + \sqrt{2} U_3 \sin 3\omega_1 t$$

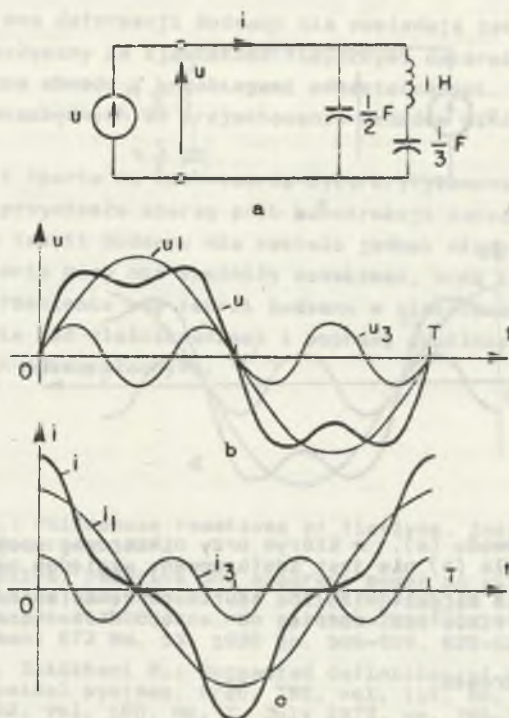
zasila odbiornik przedstawiony na rys. 2a, o admitancji dla pulsacji  $\omega_1 = 1$  rad/s oraz  $3\omega_1$ , równej

$$\underline{Y}_1 = \underline{Y}_3 = \underline{Y} = j \text{ 1 S.}$$

Warunek (17) jest spełniony, lecz prąd źródła

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{2} Y U_1 \sin(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}) + \sqrt{2} Y U_3 \sin(3\omega_1 t + \frac{\pi}{2}) = \\ &= Y(\sqrt{2} U_1 \cos \omega_1 t + \sqrt{2} U_3 \cos 3\omega_1 t) \end{aligned}$$

ma względem napięcia przebieg odkształcony (rys. 2c).



Rys. 2. Przykład obwodu (a), w którym przebieg prądu (c) jest zdeformowany względem napięcia (b), mimo że moc deformacji  $D_B$  jest równa zero

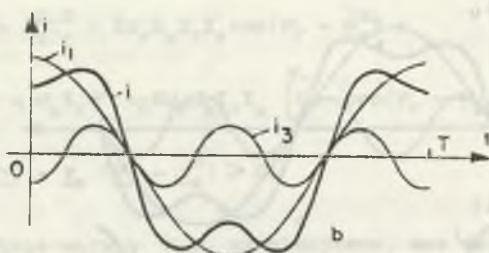
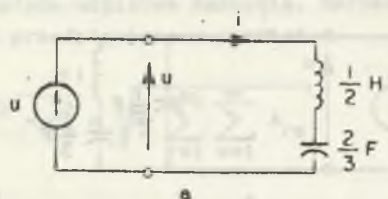
Fig. 2. Example of a circuit (a) with the current (c) deformed in relation to the source voltage (b), despite its distortion power  $D_B$  is equal to zero

Przeciwnie, przebieg prądu może być jedynie przesunięty względem napięcia, z zachowaniem kształtu, przy różnej od zera mocy deformacji. Ilustruje to przykład 3.

**Przykład 3.** Źródło o napięciu takim jak w przykładzie 2 zasila odbiornik przedstawiony na rys. 3a o admitancji:

$$Y_1 = j 1 \text{ S}; \quad Y_3 = -j 1 \text{ S}.$$

Ponieważ warunek (17) nie jest spełniony, źródło jest obciążone mocą deformacji  $D_B = 2YU_1U_3$ , gdzie  $Y = 1 \text{ S}$ .



Rys. 3. Przykład obwodu (a), w którym przy niezerowej mocy deformacji  $D_B$  prąd źródła (b) nie jest zdeformowany względem napięcia

Fig. 3. Example of a circuit with the source current (b) not distorted in relation to its voltage, despite non - zero distortion power  $D_B$

Przebieg prądu źródła

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{2} Y_1 U_1 \sin(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}) + \sqrt{2} Y_3 U_3 \sin(3\omega_1 t - \frac{\pi}{2}) = \\ &= Y \left[ \sqrt{2} U_1 \sin \omega_1 \left( t + \frac{T}{4} \right) + \sqrt{2} U_3 \sin 3\omega_1 \left( t + \frac{T}{4} \right) \right] = \\ &= Y u \left( t + \frac{T}{4} \right) \end{aligned}$$

jest więc tylko przesunięty względem napięcia, nie zaś zdeformowany (rys. 3b).

Tak więc moc deformacji nie dostarcza żadnych informacji ani o stopniu deformacji przebiegu napięcia względem przebiegu sinusoidalnego ani o wzajemnej deformacji prądu i napięcia. W rzeczywistości wielkość ta pojawiła się w elektrotechnice w ten sposób, że po niewłaściwym zdefiniowaniu przez Budeanu mocy biernej między kwadratem mocy pozornej  $S^2$  a sumą kwadratów mocy czynnej i biernej  $P^2 + Q_B^2$  pojawiła się luka, którą trzeba było czymś wypełnić. Wypełniono ją właśnie  $D_B^2$ , nadając tej różnicy nazwę "mocy deformacji".

### 3. Wnioski

Moc bierna i moc deformacji Budeanu nie posiadają cech wiążących te moce w sposób rozłączny ze zjawiskami fizycznymi determinującymi właściwości energetyczne obwodu z przebiegami odkształconymi. Nie dostarczają też informacji niezbędnych do projektowania układów minimalizujących moc pozorną źródeł.

Wielkości te i oparta na nich teoria były krytykowane i przyjmowane sceptycznie, co przyniosło szereg prób konstrukcji innych teorii mocy. Dogłębna analiza teorii Budeanu nie została jednak nigdy przeprowadzona. Ponieważ inne teorie mocy nie spełniły oczekiwań, brak tej analizy pozwolił na rozprzestrzenienie się teorii Budeanu w elektrotechnice, prowadząc na manowce badania nad właściwościami i poprawą współczynnika mocy obwodów o przebiegach odkształconych.

### LITERATURA

- [1] Budeanu C.I.: Puissancees reactivies et fictives, Instytut Român de l'Energie, Bucarest 1927.
- [2] Fryze S.: Active, reactive and apparent power in circuits with nonsinusoidal voltage and current, in polish: Przegląd Elektrotechniczny, 1931, no. 7, pp. 193-203, no. 8, pp. 225-234, 1932, no. 22, pp. 673-676, in german: ETZ Bd. 53, 1932 pp. 596-599, 625-627, 700-702.
- [3] Shepherd W., Zakikhani P.: Suggested definition of reactive power for nonsinusoidal systems, Proc. IEE, vol. 119, No. 9, Sept. 1972, pp. 1361-1362, Vol. 120, No. 7, July 1973, pp. 796-798, Vol. 121, No. 5, May 1974, pp. 389-391.
- [4] D. Sharon: Reactive power definition and power - factor improvement in nonlinear systems, Proc. IEE, Vol. 120, No. 6, July 1973, pp. 704-706.
- [5] Emanuel A.E.: Suggested definition of reactive power in nonsinusoidal systems, Proc. IEE, Vol. 121, No. 7, July 1974.
- [6] Emanuel A.E.: Energetical factors in power systems with nonlinear loads, Archiv für Elektrotechnik, 59, 1977, pp. 183-189.
- [7] Nowomiejski Z.: Generalized theory of electrical power, Archiv für Elektrotechnik, 63, 1981, pp. 177-182.
- [8] Fisher H.D.: Bemerkungen zu Leistungsbegriffen bei Strommen und Spannungen mit Oberschwingungen, Archiv für Elektrotechnik, 64, 1982, pp. 289-295.
- [9] Antoniu S.I. 1 inni: P, Q, D-mètre appareil pour la mesure des puissancees et énergies actives, réactives et déformantes dans in régime énergétique déformant, Congrés MESUCORA, Paris 1973.
- [10] Sawicki J.: The measurement of reactive power  $\sum UI \sin Q$ , Acto IMEKO, Budapest 1977.
- [11] Lopez R.A. 1 inni: Reactive power meter for nonsinusoidal systems, IEEE Trans. Instr. Meas., Vol. IM-26, no. 3, pp. 256-260, 1977.
- [12] Czarnecki L.S.: Measurement principle of a reactive power meter for nonsinusoidal systems, IEEE Trans. Instr. Meas., Vol. IM-30, No. 3, pp.209-212, 1981.

- [13] Czarnecki L.S.: One - ports which realize Hilbert transformation and their application in reactive power meters, (in polish), *Archiwum Elektrotechniki*, z. 3/4, pp. 415-425, 1984.
- [14] Filipski P.: Measurement of distortion current and distortion power, *IEEE Trans. on Instr. Meas.*, Vol. IM-33, No. 1, pp. 36-40, 1984.
- [15] Czarnecki L.S.: 1-ports with orthonormal properties, *Int. Journ. on Circuit Theory and Appl.*, Vol. 6, pp. 65-73, 1978.
- [16] Czarnecki L.S.: Orthonormal 2-port syntheses, *Proc. European Conf. on Circuit Theory and Design, Lausanne 1979.*
- [17] Czarnecki L.S.: Considerations on the reactive power in nonsinusoidal situations. *IEEE Trans. on Instr. Meas.*, Vol. IM-34, No. 3, Sept. 1985.
- [18] Sawicki J.: Meßmethoden zur Bestimmung der Blindleistung nach Budeanu bei verzerrten Strom - und Spannungskurven, *Archiv für Elektrotechnik*, 69, 1986, pp. 227-238.
- [19] Czarnecki L.S.: Metoda pomiaru mocy biernej obwodów o przebiegach odkształconych, wykorzystująca modulację jednowstęgową. *ZN Pol. Śl. Elektryka*, Nr 88, 1984.

Recenzent: prof. dr inż. Stanisław Bolkowski

Wpłynęło do redakcji 15 maja 1987 r.

#### РЕАКТИВНАЯ И ДЕФОРМАЦИОННАЯ МОЩНОСТИ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ БУДЕАНА И ПРИЧИНЫ НЕПРИГОДНОСТИ ЭТИХ ВЕЛИЧИН В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

#### Р е з ю м е

Сформулированная Будеаном теория мощности электрических цепей с деформациями, распространилась в электротехнике, несмотря на оговорки и почти 60-летние поиски новых теорий. Оговорки относятся в основном к тому, что в этой теории реактивная мощность не определена мгновенными значениями тока и напряжения, а определяется с помощью тригонометрических рядов этих величин. Проблема измерения таким образом определённой реактивной мощности была решена спустя почти 50 лет, а проблема поправки коэффициента мощности источника на основе теории мощности Будеана не дождалась решения. Главные недостатки этой теории не были, однако, выявлены. А именно, в этой теории реактивная и деформационная мощности не имеют никаких черт, связывающих эти мощности с физическими явлениями, влияющими на бесполезный рост действующих значений тока источника. Поэтому, они не поставляют никаких информаций необходимых для проектирования компенсаторов. Деформационная мощность никаким образом не информирует о деформации протекания в электрической цепи. Невыявление этих недостатков направило по неверному пути исследования энергетических свойств электрических цепей с деформациями.

REACTIVE AND DISTORTION POWERS ACCORDING TO  
BUDEANU'S DEFINITION AND THEIR USELESSNESS IN  
ELECTRICAL ENGINEERING

S u m m a r y

Power theory of circuits with non-sinusoidal wave forms formulated by Budeanu has widened in electrical engineering for almost 60 years, despite some objections and attempts of finding other theories.

The objections have mainly concerned the fact that in this theory the reactive power is not defined by actual values of current and voltage but indirectly, by means of trigonometric series of these quantities.

The problem of measurement of such defined reactive power has been solved after almost 50 years, while the problem of the source power factor improvement on the basis of the Budeanu's power theory has not reached the solution.

The main disadvantages of the Budeanu's theory have not been revealed however. Namely, the reactive power and distortion power have no features linking these powers with physical phenomena responsible for useless increase of the rms value of the source current. Because of this they do not provide us with any information indispensable to design compensators. The distortion power do not provide any information on the wave forms distortion either.

Failing to notice these disadvantages early enough, has led the research on energetistic properties of the circuits with non-sinusoidal wave forms astray.

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \neq 0 \quad (15)$$

- 1 - wektor napięć i prądów rzeczywistych w układzie,
- 2 - macierz wektor transferu,
- 3 - macierz hybrydowa powiązań w (rys. 1),
- 4 - wektor charakterystyk impedancji w układzie.

Seria: ELEKTRYKA z. 107

Zygmunt GARCZARZYK

METODA KONTYNUACJI W ANALIZIE HYBRYDOWEJ  
SIECI REZYSTANCYJNYCH NIELINIOWYCH

**Streszczenie.** W pracy przedstawiono dwa algorytmy analizy hybrydowej sieci rezystancyjnych nieliniowych oparte na metodzie kontynuacji. W pierwszym algorytmie rozwiązuje się ciąg zmodyfikowanych równań hybrydowych układu metodą Newtona-Raphsona. Drugi algorytm związany jest z rozwiązaniem zagadnienia początkowego dla równania różniczkowego zwyczajnego pierwszego rzędu, stowarzyszonego z równaniem hybrydowym sieci. Użyteczność, obydwu algorytmów zademonstrowano na przykładzie obliczeń numerycznych wybranego obwodu nieliniowego.

## 1. Wstęp

W pracy rozważa się analizę nieliniowej sieci rezystancyjnej zawierającej liniowe i nieliniowe (uzależnione napięciowo jak i prądowo) rezystory, stałe źródła niezależne napięciowe i prądowe i wszystkie cztery typy liniowych źródeł sterowanych. Wiadomo [1], że z wyjątkiem pewnych sytuacji patologicznych, wynikających z doboru wartości elementów lub pewnych specjalnych ograniczeń topologicznych układ taki opisany jest równaniami hybrydowymi postaci:

$$\begin{bmatrix} g(\hat{u}_a) \\ r(\hat{i}_b) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{H}_{aa} & \hat{H}_{ab} \\ \hat{H}_{ba} & \hat{H}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_a \\ \hat{i}_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{S}_a \\ \hat{S}_b \end{bmatrix} = 0 \quad (1a)$$

lub krótko:

$$F(\hat{x}) = f(\hat{x}) - \hat{A}\hat{x} - \hat{s} = 0, \quad (1b)$$

gdzie:

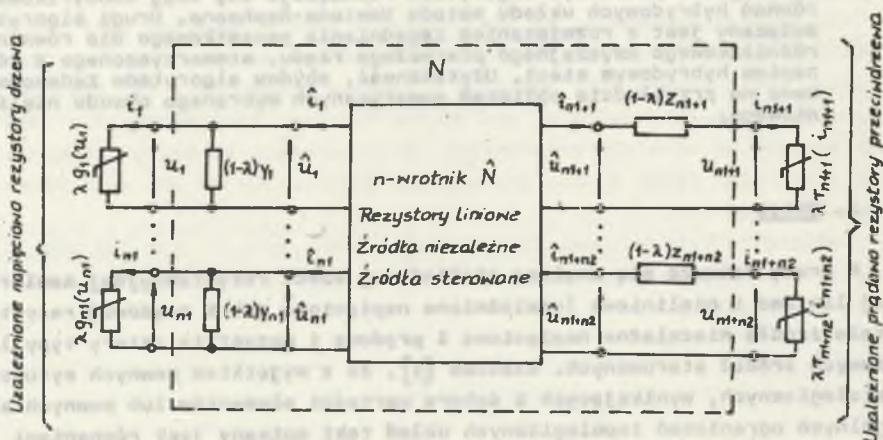
- $\hat{x}$  - wektor napięć i prądów rezystorów nieliniowych,
- $\hat{s}$  - stały wektor źródeł,
- $\hat{A}$  - macierz hybrydowa n-wrotnika N (rys. 1),
- $f(\hat{x})$  - wektor charakterystyk rezystorów nieliniowych.



Indeks a odnosi się do gałęzi należących do drzewa, indeks b do gałęzi zawartych w przeciwdrzewie grafu sieci. Macierz hybrydowa  $\hat{H}$  i wektor źródeł  $\hat{s}$  są zdefiniowane przez jawne formuły topologiczne. Równanie (1) jest rozwiązywane na ogół z wykorzystaniem algorytmu Newtona-Raphsona. Efektywne wykorzystanie tego algorytmu może napotkać na zasadniczą przeszkodę związaną z brakiem systematycznej procedury wyboru odpowiedniego punktu startowego. W dalszym ciągu przedstawione zostaną dwa rozwiązania tego problemu, oparte na metodzie kontynuacji.

## 2. Zmodyfikowane równania hybrydowe

Rozważmy układ przedstawiony na rys. 1. Dla układu tego zachodzi:



Rys. 1. Struktura zmodyfikowanego n-wrotnika  $\hat{N}$  - n-wrotnik N  
Fig. 1. Structure of modified n-port  $\hat{N}$  - n-port N

$$\begin{aligned} i_a &= \hat{i}_a - (1 - \lambda) Y \hat{u}_a \\ u_b &= \hat{u}_b - (1 - \lambda) Z \hat{i}_b \end{aligned} \quad (2)$$

oraz:

$$\hat{u}_a = u_a, \quad \hat{i}_b = i_b. \quad (3)$$

gdzie:

$i_a, u_a, \hat{i}_a, \hat{u}_a$  - wektory prądów i napięć n-wrotników N i  $\hat{N}$  dla wrót należących do drzewa grafu sieci,

$i_b, u_b, \hat{i}_b, \hat{u}_b$  - wektory prądów i napięć w  $N$  i  $\hat{N}$  dla wrót należących do przeciwdrzewa,

$$Y = \text{diag} [y_1, y_2, \dots, y_{n1}],$$

$$Z = \text{diag} [z_{n1+1}, z_{n1+2}, \dots, z_{n1+n2}],$$

$$\lambda \in (0, 1).$$

Reprezentacja hybrydowa tego układu będzie miała zatem postać:

$$\begin{bmatrix} i_a \\ u_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{H}_{aa} - (1-\lambda)Y & \hat{H}_{ab} \\ \hat{H}_{ba} & \hat{H}_{bb} - (1-\lambda)Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ i_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{S}_a \\ \hat{S}_b \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Oznaczając charakterystyki rezystorów uzależnionych napięciowo i prądowo odpowiednio przez:

$$i_a = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{n1} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} g_1(u_2) \\ g_2(u_2) \\ \vdots \\ g_{n1}(u_{n1}) \end{bmatrix} = \lambda g(u_a) \quad (5)$$

$$u_b = \begin{bmatrix} u_{n1+1} \\ u_{n1+2} \\ \vdots \\ u_{n1+n2} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} r_{b1+1}(i_{n1+1}) \\ r_{n1+2}(i_{n1+2}) \\ \vdots \\ r_{n1+n2}(i_{n1+n2}) \end{bmatrix} = \lambda r(i_b) \quad (6)$$

otrzymuje się równania hybrydowe:

$$\lambda \begin{bmatrix} g(u_a) \\ r(i_b) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{H}_{aa} - (1-\lambda)Y & \hat{H}_{ab} \\ \hat{H}_{ba} & \hat{H}_{bb} - (1-\lambda)Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ i_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{S}_a \\ \hat{S}_b \end{bmatrix} = 0 \quad (7a)$$

$$\lambda \in (0, 1)$$

lub krótko:

$$F(x, \lambda) = \lambda f(x) - Hx - \hat{S} = 0. \quad (7b)$$

### 3. Rozwiązanie równań hybrydowych

Zauważmy, że równania (7) ma następujące własności:

(a) rozwiązanie układu dla wartości parametru  $\lambda_0 = 0$  jest łatwe do uzyskania, gdyż równanie

$$\begin{bmatrix} \hat{H}_{aa}-Y & \hat{H}_{ab} \\ \hat{H}_{ba} & \hat{H}_{bb}-Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a^{(0)} \\ i_b^{(0)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{S}_a \\ \hat{S}_b \end{bmatrix} \quad (8a)$$

stanowi układ równań liniowych,

(b) dla wartości parametru  $\lambda_N = 1$  redukuje się do równania (1) analizowanej sieci.

$$F(x, 1) = F(\hat{x}). \quad (8b)$$

Wynika stąd, że jeśli przyjąć, iż charakterystyki rezystorów nieliniowych są dane funkcjami ciągłymi i jednoznaczными, to równanie (7) jest homotopią [2], to znaczy istnieje odwzorowanie ciągłe  $x(\lambda)$  takie, że

$$F(x, \lambda) = \lambda f(x(\lambda)) - Hx(\lambda) - \hat{S} = 0 \quad \forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle. \quad (9)$$

Oznacza to, że rozwiązania  $x(\lambda) = [u_a(\lambda), i_b(\lambda)]^t$  wyznaczone dla pewnego podziału odcinka  $\langle 0, 1 \rangle$

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N = 1 \quad (10)$$

opisują pewną krzywą w przestrzeni  $R^n$  łączącą początkowy punkt  $x(0) = x^{(0)} = [u_a^{(0)}, i_b^{(0)}]$  z rozwiązaniem  $x(1) = x^* = [u_a^*, i_b^*]$  równania (1).

Jeżeli ponadto macierz Jacobiego równania (7) jest niesobliwa dla wszystkich  $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ , to istnieje podział (10) i stałe  $m_1, m_2, \dots, m_{N-1}$  dla ciągu iteracji Newtona-Raphsona

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \left[ \lambda_1 \frac{\partial f(x_1^{(k)})}{\partial x} - H' \right]^{-1} (\lambda_1 f(x_1^{(k)}) - Hx_1^{(k)} - \hat{S}) \quad (11a)$$

$$x_1^{(0)} = x(0) = x^{(0)}, \quad x_{i+1}^{(0)} = x_1^{(m_i)} \quad (11b)$$

$$k = 0, \dots, m_1 - 1$$

$$i = 1, \dots, N$$

takie, że [2]

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_N^{(k)} = x(1) = x^*. \quad (12)$$

Ponieważ odwrócenie macierzy wymaga większego nakładu obliczeniowego niż rozwiązanie odpowiedniego układu równań liniowych, dlatego ciąg (11) przekształca się w ciąg równań:

$$\lambda_1 \left[ \frac{\partial f(x_1^{(k)})}{\partial x} - H' \right] x_1^{(k+1)} = \lambda_1 \left[ f(x_1^{(k)}) - \frac{\partial f(x_1^{(k)})}{\partial x} \right] + \hat{S}. \quad (13)$$

Zależności (8), (10)-(13) określają zatem algorytm poszukiwania rozwiązania równania (1) związany z dyskretnymi zmianami parametru  $\lambda$ .

Alternatywne rozwiązanie tego zadania wiąże się założeniem ciągłej zmiany  $\lambda$ . Własność (a) i (b) równania (7) oraz założenia towarzyszące (9) implikują istnienie i ciągłość pochodnych cząstkowych  $F(x, \lambda)$  względem  $x$  i  $\lambda$ . Wynika z tego [2], że poszukiwanie rozwiązania (1) może być w przypadku rozważanej sieci wprowadzone do rozwiązania zagadnienia początkowego postaci:

$$\left( \lambda \frac{\partial f(x)}{\partial x} - H \right) \frac{dx}{d\lambda} = Kx - f(x) \quad (14)$$

$$x(0) = x^{(0)},$$

gdzie

$$K = \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}, \quad (15)$$

które może być rozwiązane wybraną metodą całkowania równań różniczkowych pod warunkiem, że macierz Jacobiego jest nieosobliwa. W obydwu przypadkach można uzyskać pewną oszczędność nakładu obliczeniowego, jeżeli założyć, że

$$Y = 0, \quad Z = 0. \quad (16)$$

Wyznaczenie przybliżenia startowego jest wtedy szczególnie proste, bowiem

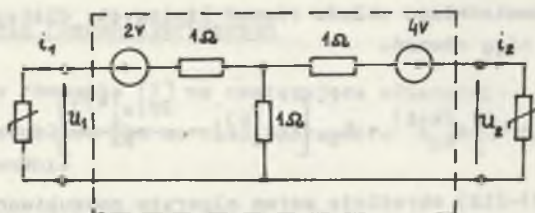
$$u_a^{(0)} = 0$$

$$i_b^{(0)} = \hat{H}_{bb}^{-1} \hat{S}_b. \quad (17)$$

Jak widać jest ono zdeterminowane wyłącznie właściwościami sieci.

#### 4. Przykład

Celem zilustrowania obydwu proponowanych metod rozwiązywania równań hybrydowych rozpatrywano obwód przedstawiony na rys. 2.



Rys. 2. Nieliniowy obwód

Fig. 2. Non-linear circuit

Rezystory nieliniowe opisują zależności:

$$i_1 = g(u_1) = \begin{cases} 0,5 u_1^2, & u_1 \geq 0 \\ -0,5 u_1^2, & u_1 < 0 \end{cases}$$

$$u_2 = r(i_2) = \begin{cases} 0,25i_2^2, & i_2 \geq 0 \\ -0,25i_2^2, & i_2 < 0. \end{cases}$$

Reprezentacja hybrydowa 2-wrotnika ma postać:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Przybliżenie startowe uzyskujemy z równania (8)

$$\begin{bmatrix} -0,5-Y & -0,5 \\ 0,5 & -1,5-Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(0)} \\ i_2^{(0)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Na przykład, dla konduktancji  $Y = 2,0$  i rezystancji  $Z = 1,0$

$$u_1^{(0)} = 0,153846, \quad i_2^{(0)} = 1,230769.$$

Wykorzystując wzór (17) uzyskuje się bezpośrednio:

$$u_1^{(0)} = 0, \quad i_2^{(0)} = 2,0.$$

Metoda dyskretna prowadzi do rozwiązania ciągu równań liniowych:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \frac{dg(u_{1,1}^{(k)})}{du_1} + 0,5 + (1-\lambda_1)Y & \\ - 0,5 & \lambda_1 \frac{dr(i_{2,1}^{(k)})}{di_2} + 1,5 + (1-\lambda_1)Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1}^{(k+1)} \\ i_{2,1}^{(k+1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda_1 \left( \begin{bmatrix} g(u_{1,1}^{(k)}) \\ r(i_{2,1}^{(k)}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{dg(u_{1,1}^{(k)})}{du_1} \\ \frac{dr(i_{2,1}^{(k)})}{di_2} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (a)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, m_1 - 1$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

W metodzie ciągłej rozwiązuje się układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$\begin{bmatrix} \lambda \frac{dg(u_1)}{du_1} + 0,5 + (1-\lambda)Y & 0,5 \\ - 0,5 & \lambda \frac{dr(i_2)}{di_2} + 1,5 + (1-\lambda)Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du_1}{d\lambda} \\ \frac{di_2}{d\lambda} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g(u_1) \\ r(i_2) \end{bmatrix} \quad (b)$$

Zastosowano metodę Runge-Kuty 4-rzędu. Wykorzystując programy biblioteki Fortranu: FPINDE, F4RUNG systemu Odra 1305 uzyskano następujące wyniki:

| x(0)    | $\bar{\lambda}$ | $u_1$    |          | $i_2$    |          |
|---------|-----------------|----------|----------|----------|----------|
|         |                 | (a)      | (b)      | (a)      | (b)      |
| Y = 2,0 | 0,1             | 0,279056 | 0,279497 | 1,643071 | 1,643381 |
| Z = 1,0 | 0,05            | 0,279056 | 0,279498 | 1,643071 | 1,643382 |
| Y = 0   | 0,1             | 0,279056 | 0,279056 | 1,643071 | 1,643071 |
| Z = 0   | 0,05            | 0,279056 | 0,279056 | 1,643071 | 1,643071 |

gdzie  $\bar{\lambda} = \lambda_{i+1} - \lambda_i$ .

Wyniki te prawie dokładnie przybliżają rozwiązanie obwodu.

### 5. Uwagi końcowe

Przeprowadzony eksperyment numeryczny potwierdził przydatność obu metod do analizy sieci rezystancyjnych z rezystorami o charakterystykach ściśle monotonicznych, co odpowiada założeniu o nieosobowości macierzy Jacobiego

$$J(x, \lambda) = \lambda \frac{\partial f(x)}{\partial x} - H'$$

Określenie sposobu postępowania w przypadkach, gdy macierz  $J(x, \lambda)$  jest osobliwa, jest przedmiotem dalszych badań. Konieczne jest również poszukiwanie procedury doboru  $\lambda$  [3].

### LITERATURA

- [1] Chua L.O., Lin P.M.: Komputerowa analiza układów elektronicznych. WNT, Warszawa 1981.
- [2] Ortega J.M., Rheinboldt W.C.: Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Academic Press, New York 1970.
- [3] Garczarczyk Z.: O długości kroku w dyskretnej metodzie kontynuacji Materiały IX SPETU, Gliwice 1986.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Kazimierz Mikołajuk

Wpłynęło do redakcji 15 maja 1987 r.

### МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ В ГИБРИДНОМ АНАЛИЗЕ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

#### Резюме

В статье представлены два алгоритма гибридного анализа нелинейных резистивных цепей, основанных на методе продолжения решения по параметру. В первом алгоритме решается последовательность модифицированных гибридных уравнений методом Ньютона-Рафсона. Второй алгоритм связан с решением начальной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, сопряженного с гибридным уравнением цепи. Полезность этих алгоритмов показывает пример численного расчета нелинейной цепи.

|          |          |          |          |      |       |
|----------|----------|----------|----------|------|-------|
| 170000,0 | 170000,0 | 170000,0 | 170000,0 | 1,0  | 0 = 0 |
| 170000,0 | 170000,0 | 170000,0 | 170000,0 | 20,0 | 0 = 0 |

CONTINUATION METHOD IN THE HYBRID ANALYSIS  
OF NON-LINEAR RESISTANCE NETWORKS

## Summary

In the paper, two algorithms of the hybrid analysis of non-linear resistance networks based on continuation method have been presented. In the first algorithm a sequence of modified hybrid equations is solved by Newton-Raphson method.

The second one is related to the solution of initial problem for ordinary differential equation of the first order, associated with the network hybrid equation. Usefulness of both algorithms has been demonstrated by an example of numerical calculations of a chosen non-linear circuit.



Jan CHUJCAN

Lucjan KARWAN

## ZASTOSOWANIE WRAŻLIWOŚCI WYŻSZYCH RZĘDÓW WZGLĘDEM CZĘSTOTLIWOŚCI

**Streszczenie.** W pracy podano wzory na wrażliwości funkcji układowych względem częstotliwości do trzeciego rzędu włącznie. Wrażliwości te zgodnie z podanymi zależnościami oblicza się na podstawie wrażliwości funkcji układowych względem pojemności i indukcyjności. Wyprowadzenia są oparte na jednorodności funkcji układowych względem indukcyjności, pojemności i częstotliwości i korzysta się z niezmienników wrażliwości. Przedstawiono szczegółowe wyprowadzenie dla wrażliwości rzędu drugiego. Obliczono wrażliwości do rzędu trzeciego włącznie dla modułu wzmocnienia filtra pasmowoprzepustowego. Pokazano, jak powiększa się kres górny tolerancji małoprzyrostowych częstotliwości przy uwzględnianiu wrażliwości coraz wyższego rzędu.

### 1. Wprowadzenie

Analiza odchyłek funkcji układowych od wartości nominalnych często jest przeprowadzana w oparciu o rozwinięcie funkcji w szereg Taylora. Występujące w tym rozwinięciu pochodne częstkowe funkcji układowej względem parametrów nazywa się wrażliwościami.

Do oszacowania odchyłek funkcji układowej spowodowanych niewielkimi zmianami parametrów zwykle wykorzystuje się człony zawierające pochodne (wrażliwości) pierwszego rzędu. Natomiast przy dużych zmianach parametrów należy uwzględnić dalsze człony w rozwinięciu funkcji w szereg Taylora. Wymaga to uprzedniego obliczenia pochodnych częstkowych wyższego rzędu. Potrzeba wyznaczania wrażliwości wyższego rzędu może też wynikać z faktu zerowania się wrażliwości pierwszego rzędu. Przykładem może być filtr pasmowoprzepustowy. Dla częstotliwości środkowej pasma przepuszczenia wrażliwość pierwszego rzędu modułu wzmocnienia napięciowego wynosi zero. Aby zbadać wahania modułu wzmocnienia w otoczeniu tej częstotliwości należy wykorzystać wrażliwości wyższych rzędów. Zagadnieniom ogólnym wrażliwości wyższych rzędów w układach elektronicznych poświęcono wiele miejsca w literaturze, np. [2], [4], [6], [8], [9], [10]. Wydaje się, że dotychczas nie były szeroko rozpatrywane zagadnienia wrażliwości wyższych rzędów względem częstotliwości. Niniejsza praca jest próbą wypełnienia tej luki.

## 2. Funkcje jednorodne i niezmienniki wrażliwości

Wprowadzenie do analizy tolerancji pojęcia funkcji jednorodnych pozwoliło na znalezienie wielu niezmienników wrażliwości.

Jedną z pierwszych prac w tej dziedzinie ogłosił Belove [1]. Prace innych autorów, m.in. [7], [5], [4] rozwinęły i rozszerzyły tę teorię na szeroką klasę obwodów. Niezmienniki wrażliwości są wygodnym narzędziem przy analizie porównawczej obwodów równoważnych, a także służą do określenia dokładności obliczeń odchyłek funkcji układowych. W tej pracy zostaną wykorzystane do znalezienia zależności na wrażliwości wyższych rzędów względem częstotliwości. Przypomnijmy najpierw podstawowe własności funkcji jednorodnych.

Definicja: Funkcja układowa  $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$  określona w obszarze  $D$  nazywa się funkcją jednorodną stopnia  $m$ , jeżeli pomnożenie wszystkich jej argumentów przez czynnik  $t$  jest równoważne  $t^m$ -krotnemu powiększeniu początkowej jej wartości, tzn., jeżeli zachodzi tożsamość

$$T(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^m \cdot T(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1)$$

Jeżeli funkcja  $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$  jednorodna stopnia  $m$  ma w obszarze otwartym  $D$  ciągle pochodne czątkowe względem wszystkich argumentów, to dla dowolnego punktu  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  w obszarze  $D$  zachodzi równość:

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial T}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial x_n} x_n = m \cdot T(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2)$$

Równość ta nosi nazwę wzoru Eulera. Dzieląc obie strony równania (2) przez  $T$  (przy założeniu niezzerowania się funkcji układowej dla nominalnych wartości parametrów) otrzymujemy wzór:

$$S_{x_1}^T + S_{x_2}^T + \dots + S_{x_n}^T = \sum_{i=1}^n S_{x_i}^T = m. \quad (3)$$

znany w literaturze jako niezmiennik wrażliwości pierwszego rzędu ( $S_{x_1}^T = \frac{\partial T}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{T}$  jest wrażliwością pierwszego rzędu funkcji układowej  $T$  względem parametru  $x_1$ ).

W układach SLS z pojedynczymi pobudzeniami stopień jednorodności transmitancji wynosi zero i zgodnie ze wzorem (3) tyłuż samo wynosi sama wrażliwość względem wszystkich parametrów  $x_i$ , którymi są  $G_i$ ,  $L_i^{-1}$ ,  $C_i$  oraz współczynniki wzmocnienia źródeł sterowanych  $k_{vc_i}$  (źródła VCT) oraz  $k_{cv_i}^{-1}$  (źródła CVT). Jeżeli jako funkcję układową rozważamy admitancję, to wartość niezmiennika wrażliwości wynosi 1, natomiast dla impedancji

cji -1. Pełniejszy zestaw niezmienników można znaleźć w pracy [5]. W przypadku układów z wieloma pobudzeniami stałoprądowymi można wykazać, że stopnie podstawowych funkcji układowych zawierają się w przedziale  $(-1, +1)$ . Odpowiednie wzory podano w pracy [4].

Jeżeli przymyślimy, że argumentami funkcji jednorodnej będą  $L_1$ ,  $C_1$  oraz  $f^{-1}$ , to łatwo uzyskać następujący niezmiennik wrażliwości:

$$\sum_{i \in NL} S_{L_1}^T + \sum_{i \in NC} S_{C_1}^T + S_{f^{-1}}^T = 0, \quad (4)$$

który pozwala na wyznaczenie wrażliwości funkcji układowej względem częstotliwości w sposób pośredni za pomocą wrażliwości względem indukcyjności i pojemności:

$$S_f^T = \sum_{i \in NL} S_{L_1}^T + \sum_{i \in NC} S_{C_1}^T. \quad (5)$$

W podobny sposób można wykorzystywać niezmienniki wrażliwości przy wyznaczaniu wzorów na wrażliwości drugiego i trzeciego rzędu funkcji układowej względem częstotliwości.

### 3. Wrażliwości wyższych rzędów

Iwierdzenie 1: Jeżeli funkcja układowa  $T(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$  obwodu SLS, której argumentami  $x_1$  są  $L_1$ ,  $C_1$ ,  $f^{-1}$ , jednorodna stopnia zerowego względem  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ma w obszarze otwartym  $D$  ciągle pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu, to dla dowolnego punktu  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$  zachodzi równość:

$$S_{f^2}^T = \sum_{i=1}^{NL} \sum_{j=1}^{NL} S_{L_i L_j}^T + \sum_{i=1}^{NL} \sum_{j=1}^{NC} S_{L_i C_j}^T + \sum_{i=1}^{NC} \sum_{j=1}^{NC} S_{C_i C_j}^T. \quad (6)$$

Występujące we wzorze (6) wrażliwości rzędu drugiego są zdefiniowane następująco:

$$S_{f^2}^T \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{f^2}{T} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial f^2} \quad (7)$$

$$S_{L_i C_j}^T \stackrel{\text{df}}{=} \frac{L_i C_j}{T} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial L_i \partial C_j}. \quad (8)$$

Dla wykazania słuszności twierdzenia 1 skorzystamy z niezmiennika względności pierwszego rzędu. Funkcja  $T$  jednorodna stopnia zerowego względem  $L_1$ ,  $C_1$  oraz  $f^{-1}$  może być zapisana następująco:

$$\begin{aligned} T(tL_1, \dots, tL_{NL}, tC_1, \dots, tC_{NC}, \frac{t}{f}, y_1, \dots, y_k) = \\ = t^m \cdot T(L_1, \dots, L_{NL}, C_1, \dots, C_{NC}, \frac{1}{f}, y_1, \dots, y_k). \end{aligned} \quad (9)$$

Różniczkując podług  $t$  mamy ( $m = 0$ ):

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^{NL} \frac{\partial T}{\partial (tL_i)} L_i + \sum_{j=1}^{NC} \frac{\partial T}{\partial (tC_j)} C_j - \frac{\partial T}{\partial t} \cdot f = 0. \quad (10)$$

Różniczkując ponownie podług  $t$  otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T}{dt^2} = \sum_{i=1}^{NL} \sum_{j=1}^{NL} \frac{\partial^2 T}{\partial L_i \partial L_j} L_i L_j + 2 \sum_{i=1}^{NL} \sum_{j=1}^{NC} \frac{\partial^2 T}{\partial L_i \partial C_j} L_i C_j + \\ + \sum_{i=1}^{NC} \sum_{j=1}^{NC} \frac{\partial^2 T}{\partial C_i \partial C_j} C_i C_j - 2 \sum_{i=1}^{NL} \frac{\partial^2 T}{\partial L_i \partial f} L_i f - 2 \sum_{j=1}^{NC} \frac{\partial^2 T}{\partial C_j \partial f} C_j f + \\ + \frac{\partial^2 T}{\partial f^2} f^2 + 2 \frac{\partial T}{\partial f} f = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

przy czym przyjęto  $t = 1$ .

Natomiast różniczkując wyrażenie (10) podług częstotliwości i mnożąc przez częstotliwość mamy (przy  $t = 1$ ):

$$\begin{aligned} f \frac{\partial}{\partial f} \left( \sum_{i=1}^{NL} \frac{\partial T}{\partial L_i} L_i + \sum_{j=1}^{NC} \frac{\partial T}{\partial C_j} C_j - \frac{\partial T}{\partial f} f \right) = \sum_{i=1}^{NL} \frac{\partial^2 T}{\partial L_i \partial f} L_i f + \\ + \sum_{j=1}^{NC} \frac{\partial^2 T}{\partial C_j \partial f} C_j f - \frac{\partial^2 T}{\partial f^2} f^2 - \frac{\partial T}{\partial f} f = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Stąd wyznaczamy:

$$-2 \sum_{i=1}^{NL} \frac{\partial^2 T}{\partial L_i \partial f} L_i f - 2 \sum_{j=1}^{NC} \frac{\partial^2 T}{\partial C_j \partial f} C_j f = -2 \frac{\partial^2 T}{\partial f^2} f^2 - 2 \frac{\partial T}{\partial f} f. \quad (13)$$

Po podstawieniu wzoru (13) do (11) i podzieleniu przez  $T$  otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial f^2} \cdot \frac{f^2}{T} &= \sum_{i=1}^{NL} \sum_{j=1}^{NL} \frac{\partial^2 T}{\partial L_i \partial L_j} \cdot \frac{L_i L_j}{T} + 2 \sum_{i=1}^{NL} \sum_{j=1}^{NC} \frac{\partial^2 T}{\partial L_i \partial C_j} \cdot \frac{L_i C_j}{T} + \\ &+ \sum_{i=1}^{NC} \sum_{j=1}^{NC} \frac{\partial^2 T}{\partial C_i \partial C_j} \cdot \frac{C_i C_j}{T}. \end{aligned} \quad (14)$$

Albo

$$W = \sum_{i=1}^{NL} \sum_{j=1}^{NL} \frac{\partial^2 T}{\partial L_i \partial L_j} \cdot \frac{L_i L_j}{T} = \sum_{i=1}^{NL} \frac{\partial^2 T}{\partial L_i^2} \cdot \frac{L_i^2}{T} + \sum_{j=1}^{NL} \frac{\partial^2 T}{\partial L_i \partial L_j} \cdot \frac{L_i L_j}{T}. \quad (15)$$

Korzystając z definicji wrażliwości (7) i (8)

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=1}^{NL} \left( 2 S_{L_i L_i}^T + \sum_{j=1}^{NL} S_{L_i L_j}^T \right) = \sum_{i=1}^{NL} \left( 2 S_{L_i L_i}^T + 2 \sum_{j=i+1}^{NL} S_{L_i L_j}^T \right) = \\ &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{NL} \sum_{j=1}^{NL} S_{L_i L_j}^T, \end{aligned}$$

ponieważ

$$S_{L_i L_j}^T = S_{L_j L_i}^T,$$

zatem

$$\sum_{i=1}^{NL} \sum_{j=1}^{NL} S_{L_i L_j}^T = 2 \sum_{i=1}^{NL} \sum_{j=1}^{NL} S_{L_i L_j}^T. \quad (16)$$

Podstawiając wyrażenie (16) do (14) wykazemy słuszność tezy twierdzenia 1.

Przy podobnych założeniach jak w twierdzeniu 1 i dodatkowo istnieniu ciągłych pochodnych cząstkowych trzeciego rzędu funkcji układowej można wyprowadzić wzór na wrażliwość trzeciego rzędu względem częstotliwości, który podaje następnne twierdzenie.

**Twierdzenie 2:**

$$S_{f3}^T = \sum_{i=1}^{NL} \sum_{j=1}^{NL} \sum_{k=j}^{NL} S_{L_1 L_j L_k}^T + \sum_{i=1}^{NL} \sum_{j=1}^{NL} \sum_{k=1}^{NC} S_{L_1 L_j C_k}^T + \\ + \sum_{i=1}^{NL} \sum_{j=1}^{NC} \sum_{k=j}^{NC} S_{L_1 C_j C_k}^T + \sum_{i=1}^{NC} \sum_{j=1}^{NC} \sum_{k=j}^{NC} S_{C_1 C_j C_k}^T \quad (17)$$

gdzie wrażliwości trzeciego rzędu są zdefiniowane następująco:

$$S_{x_1^3}^T \stackrel{\text{df}}{=} \frac{df}{f} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{x_1^3}{T} \cdot \frac{\partial^3 T}{\partial x_1^3} \quad (18)$$

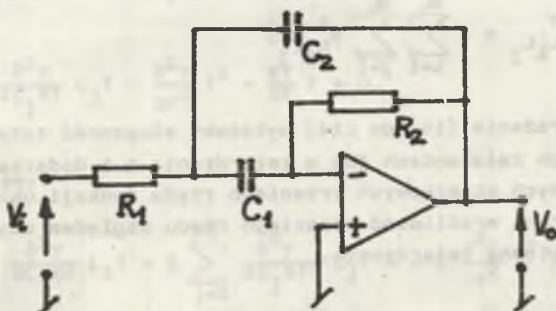
$$S_{x_1^2 x_j}^T \stackrel{\text{df}}{=} \frac{df}{f} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{x_1^2 x_j}{T} \cdot \frac{\partial^3 T}{\partial x_1^2 \partial x_j} \quad (19)$$

$$S_{x_1 x_j x_k}^T \stackrel{\text{df}}{=} \frac{df}{f} \cdot \frac{x_1 x_j x_k}{T} \cdot \frac{\partial^3 T}{\partial x_1 \partial x_j \partial x_k} \quad (20)$$

W podobny sposób można wyprowadzić wzory na wrażliwości czwartego i wyższych rzędów.

#### 4. Przykład

Dla filtra pasmowprzepustowego podanego na rys. 1 określimy wrażliwości modułu wzmocnienia przy częstotliwości środkowej, a następnie wyznaczmy zmiany wzmocnienia przy rozstrojeniu częstotliwości środkowej uwzględniając coraz wyższe wrażliwości.



Rys. 1

Wartości nominalne parametrów wynoszą:  $R_1 = R_2 = 1\Omega$ ,  $C_1 = C_2 = 1F$ ,  
 $|V_1| = 1V$ ,  $\omega = 1 \frac{rad}{s}$ , wzmacniacz idealny.

Wzmocnienie napięciowe  $K_u = \frac{V_o}{V_1} = |K_u| e^{j\varphi}$ . Rozważaną funkcję układową jest  $|K_u| = K_u(f)$ . Dla wrażliwości pierwszego rzędu mamy:

$$S_{C_1}^{K_u} = 0,5 - j 0,5 \quad S_{C_2}^{K_u} = -0,5 - j 0,5.$$

Na podstawie wzoru (5)

$$S_f^{K_u} = S_{C_1}^{K_u} + S_{C_2}^{K_u} = -j.$$

więc

$$S_f^{|K_u|} = \text{Real} \{ S_f^{K_u} \} = 0.$$

Czyli moduł wzmocnienia dla częstotliwości środkowej jest niewrażliwy na zmianę częstotliwości, jeżeli ograniczymy się do wrażliwości pierwszego rzędu. Celowe jest wyznaczenie wrażliwości wyższych rzędów. Na podstawie zależności (6) i (17) można obliczyć:

$$S_f^{|K_u|^2} = S_{C_1 C_1}^{K_u} + S_{C_1 C_2}^{K_u} + S_{C_2 C_2}^{K_u} = -0,5,$$

$$S_f^{|K_u|^3} = S_{C_1 C_1 C_1}^{K_u} + S_{C_1 C_1 C_2}^{K_u} + S_{C_1 C_2 C_2}^{K_u} + S_{C_2 C_2 C_2}^{K_u} = 0,5.$$

Zatem zmiany modułu wzmocnienia można wyznaczyć w sposób przybliżony na podstawie rozwinięcia funkcji w szereg Taylora w postaci wielomianu stopnia trzeciego

$$t^{|K_u|} \approx -0,5 t_f^2 + 0,5 t_f^3,$$

gdzie  $t^{|K_u|}$ ,  $t_f$  są zmianami procentowymi.

Tak określona zmiana modułu wzmocnienia nie różni się więcej niż 2% od zmiany obliczonej dokładnie przy zmianach częstotliwości o 55%.

Uwzględniając coraz wyższe wrażliwości 1, co za tym idzie, uwzględniając większą liczbę członów we wzorze Taylora możemy uzyskać większy kres górny tolerancji małoprzrostowych.

Dla rozważanego przykładu (zakładając 2% błąd wynikający z zaniedbania dalszych wyrazów szeregu Taylora) mamy następujące wartości kresu górnego tolerancji małoprzrostowej  $t_f$ .

Przy uwzględnieniu wrażliwości 1 rzędu  $t_f = 18\%$ , uwzględnienie wrażliwości 1 i 2 rzędu daje  $t_f = 32\%$  i, jak już wcześniej wspomniano, uwzględnienie wrażliwości do 3 rzędu włącznie daje  $t_f = 55\%$ .

## 5. Wnioski

Przy dużych zmianach parametrów (duże wartości kresu górnego tolerancji małoprzrostowej) konieczne jest uwzględnienie wrażliwości wyższych rzędów. Jak pokazano na przykładzie, mogą być one przydatne przy badaniu zmian charakterystyk częstotliwościowych. Podobnie jak w znanej z literatury zależności na wrażliwość pierwszego rzędu pokazano w pracy, że wrażliwości wyższych rzędów względem częstotliwości mogą być obliczone na podstawie wrażliwości funkcji układowych względem pojemności i indukcyjności.

## LITERATURA

- [1] Belove C.: Sensitivity sums of homogeneous functions. IEEE Trans. on CT, Vol. CT-11, No 2, 1964.
- [2] Chojcan J.: Obliczanie wrażliwości wyższych rzędów i ich zastosowanie. ZN Pol. Śl. s. Elektryka z. 95, Gliwice 1985.
- [3] Chojcan J.: Niezmienniki wrażliwości wyższych rzędów. VIII KKTOIUE, Poznań 1985.
- [4] Chojcan J.: Niektóre problemy wrażliwości wyższych rzędów układów elektrycznych. ZN Pol. Śl., s. Automatyka z. 88, Gliwice 1987.
- [5] Geher K.: Teoria tolerancji i wrażliwość układów elektronicznych. WNT, Warszawa 1976.
- [6] Goddard P.I., Spence R.: Efficient method for the calculation of first - and second - order network sensitivities. El, Vol. 5, No 16, 1969.
- [7] Holt A.G.I., Fidler I.K.: Summed sensitivity of network functions. El, Vol. 4, No 5, 1968.
- [8] Richards G.A.: Second derivative sensitivity using the concept of the adjoint network, El, Vol. 5, No 17, 1969.
- [9] Seth A.K., Roe P.H.: Higher derivative network sensitivities using adjoint network. Int. J. Cir. Theory Appl., Vol. 1, 1973.
- [10] Seth A.K., Roe P.H.: Hybrid Formulation of Explicit Formulae for Higher Order Network Sensitivities. IEEE Trans. on CAS, Vol. CAS-22, No 5, 1975.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Michał Tadeusiewicz

Wpłynęło do redakcji 15 maja 1987 r.



## ПРИМЕНЕНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ОТ ЧАСТОТЫ

## Р е з ю м е

В работе выведены формулы определяющие чувствительность второго и третьего порядков схемной функции от частоты. Эти чувствительности определяются из чувствительности схемной функции от изменений всех емкостей и индуктивностей цепи. Формулы выведены из однородности схемных функций от индуктивностей, емкостей и частоты с использованием инвариантов чувствительности. Подробно выведена формула определяющая чувствительность второго порядка. Теоретические выводы дополнены расчетом примера активного полосового фильтра. Определены чувствительности 1, 2 и 3 порядка модуля усиления этого фильтра и представлено как увеличиваются допуски расброа частоты пооле применения чувствительности высших порядков.

APPLICATION OF THE HIGHER ORDER SENSITIVITIES  
IN RELATION TO FREQUENCY

## S u m m a r y

Formulae for the second and third order sensitivities of the system functions in relation to the frequency have been given in the paper.

In accordance with the given dependances, these sensitivities are calculated on the basis of the system functions sensitivities in relation to capacity and inductance.

Derivations are based on homogeneity of the system functions in relation to the inductance, capacity and frequency; the sensitivity invariants are used.

A detailed derivation has been presented for the sensitivity of the second order. The sensitivities to the thrid order inclusive, have been calculated for an amplification factor of the band - pass filter.

It has been shown how the upper bound of the frequency small - incremental tolerances increases when taking into account the sensitivities of higher and higher order.

Andrzej DRYGAJŁO

O RÓWNOWAŻNOŚCI TRZECH LINIOWYCH UKŁADÓW FILTRUJĄCYCH<sup>x)</sup>

**Streszczenie.** W pracy opisano metodę budowy, przy użyciu dyskretnej transformacji Hartley'a (DHT) i dyskretnej transformacji Walsha (DWT), liniowych układów filtracji widmowej równoważnych układom opartym na dyskretnej transformacji Fouriera (DFT). W oparciu o właściwości rzeczywistych transformacji DHT i DWT przedstawiono sposób wyznaczenia charakterystyk filtrów cyfrowych Hartley'a i Walsha na podstawie charakterystyk częstotliwościowych filtrów cyfrowych Fouriera. Otrzymane macierze filtrujące Hartley'a  $G^H$  i Walsha  $G^W$  są rzeczywiste, podczas gdy odpowiadająca im macierz Fouriera  $G^F$  jest zespolona. Wyznaczone w ten sposób macierze filtrujące pozwoliły na zdefiniowanie uogólnionego algorytmu cyfrowej filtracji widmowej przy użyciu algorytmów szybkich transformacji Hartley'a (FHT) i Walsha (FWT), zamiast algorytmu szybkiej transformacji Fouriera (FET).

## 1. Wprowadzenie

Dyskretna filtracja widmowa polega na przetwarzaniu wejściowego sygnału dyskretnego w pożądany wyjściowy sygnał dyskretny, wynikający z wymaganej postaci widma tego sygnału. Najczęściej wykorzystywanym w tym celu widmem jest zespolona dyskretna transformata Fouriera. Otrzymuje się ją za pomocą dyskretnej transformacji Fouriera (DFT), zbudowanej w oparciu o zupełny ortogonalny układ dyskretnych zespolonych funkcji wykładniczych.

W ostatnich latach znacznie wzrosło zainteresowanie dyskretnymi transformacjami opartymi na rzeczywistych funkcjach ortogonalnych. Obecnie największe zainteresowanie skupia się na dyskretnej transformacji Hartley'a (DHT), opartej na układzie rzeczywistych ortogonalnych funkcji trygonometrycznych [1] oraz na dyskretnej transformacji Walsha (DWT), wykorzystującej rzeczywiste funkcje dwuwartościowe [2].

W niniejszej pracy, wykorzystując ideę dyskretnej filtracji widmowej, wyprowadzono zależności pozwalające na zastąpienie zespolonego procesu liniowej filtracji przez równoważne mu procesy rzeczywiste.

<sup>x)</sup>Praca wykonana w ramach CPBP nr O2.14.

## 2. Dyskretna transformacja Fouriera (DFT), Hartley'a (DHT) i Walsh (DWT)

Dla rzeczywistego dyskretnego sygnału  $\{x(n)\}$  danego w postaci ciągu wartości  $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$ ,  $N = 2^p$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$ , prosta i odwrotna DFT określone są następującymi zależnościami macierzowymi:

$$\underline{X}_F = \frac{1}{N} \underline{F} \underline{x}, \quad \underline{x} = \underline{F}^{*T} \underline{X}_F, \quad (1)$$

gdzie  $\underline{x}$ ,  $\underline{X}_F$  - wektory sygnału i widma Fouriera,  $\underline{F}$  - macierz Fouriera o elementach zespolonych  $\exp(-j(2\pi/N)kn)$  i wymiarach  $N \times N$ ,  $\underline{F}^{*T} = \underline{F}^{-1}$  - macierz sprzężona transponowana względem macierzy  $\underline{F}$ , będąca jednocześnie macierzą odwrotną do macierzy  $\underline{F}$ .

Wśród transformacji rzeczywistych, które mogłyby zastąpić zależności (1), uzyskując jednocześnie większą symetrię przekształceń, można wyróżnić transformację Hartley'a wśród rzeczywistych transformacji trygonometrycznych oraz transformację Walsh - wśród transformacji dwuwartościowych [1], [2].

Prostą i odwrotną transformację Hartley'a (DHT) określają wzory:

$$\underline{X}_H = \frac{1}{N} \underline{H} \underline{x}, \quad \underline{x} = \underline{H} \underline{X}_H, \quad (2)$$

gdzie  $\underline{x}$ ,  $\underline{X}_H$  - wektory sygnału i widma Hartley'a,  $\underline{H}$  - macierz Hartley'a o wymiarach  $N \times N$  i elementach rzeczywistych

$$\cos((2\pi/N)kn) = \cos((2\pi/N)kn) + \sin((2\pi/N)kn). \quad (3)$$

Z kolei prosta i odwrotna dyskretna transformacja Walsh opisana jest zależnościami:

$$\underline{X}_W = \frac{1}{N} \underline{W} \underline{x}, \quad \underline{x} = \underline{W} \underline{X}_W, \quad (4)$$

gdzie  $\underline{x}$ ,  $\underline{X}_W$  - wektory sygnału i widma Walsh w uporządkowaniu naturalnym,  $\underline{W}$  - macierz Walsh o wymiarach  $N \times N$  i elementach rzeczywistych

$$w(k, n) = \prod_{i=0}^{p-1} (-1)^{k_i n_i}, \quad (5)$$

$k_i, n_i$  są współczynnikami binarnego rozwinięcia liczb  $k, n$ .

We wszystkich trzech przypadkach etapy prostej i odwrotnej transformacji mogą być realizowane za pomocą algorytmów szybkich transformacji [3], [4].

### 3. Liniowe układy filtrujące Fouriera, Hartley'a i Waleha

Liniowy układ filtrujący w przestrzeni dyskretnych zespolonych funkcji wykładniczych określony jest wzorem:

$$\underline{y} = \frac{1}{N} \underline{F}^{*T} \underline{G}^F \underline{F} \underline{x}, \quad (6)$$

gdzie:  $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$  - wektory sygnałów wejściowego i wyjściowego,  $\underline{G}^F$  - zespolona macierz filtrująca Fouriera.

Z kolei liniowy układ filtracji widmowej w przestrzeni funkcji dyskretnych cos(.) opisuje zależność:

$$\underline{y} = \frac{1}{N} \underline{H} \underline{G}^H \underline{H} \underline{x}, \quad (7)$$

gdzie  $\underline{G}^H$  - rzeczywista macierz filtrująca Hartley'a.

Natomiast liniowy układ filtrujący w przestrzeni funkcji Waleha przedstawia wzór:

$$\underline{y} = \frac{1}{N} \underline{W} \underline{G}^W \underline{W} \underline{x}, \quad (8)$$

gdzie  $\underline{G}^W$  - rzeczywista macierz filtrująca Waleha.

### 4. Równoważność liniowej filtracji widmowej w przestrzeniach Fouriera, Hartley'a i Waleha

Rozważając równoważność liniowych układów filtrujących Fouriera, Hartley'a i Waleha, opisanych równaniami (6-8), dochodzi się do równości:

$$\underline{G}^H = \frac{1}{N} \underline{H} \underline{F}^{*T} \underline{G}^F \underline{F} \underline{H}, \quad (9)$$

$$\underline{G}^W = \frac{1}{N} \underline{W} \underline{F}^{*T} \underline{G}^F \underline{F} \underline{W}. \quad (10)$$

pozwalających wyznaczyć macierze filtrujące Hartley'a  $\underline{G}^H$  i Waleha  $\underline{G}^W$  na podstawie znajomości macierzy filtrującej Fouriera  $\underline{G}^F$  [5], [6], [7].

Określmy obecnie warunki, dla których macierze  $\underline{G}^H$  i  $\underline{G}^W$  są rzeczywiste, a tym samym cały proces liniowej filtracji widmowej Hartley'a i Waleha jest rzeczywisty. Jeżeli macierz  $\underline{A}$  zdefiniujemy następująco:

$$\underline{A} = [\underline{a}_{nm}] = \frac{1}{N} \underline{F}^{*T} \underline{G}^F \underline{F}, \quad (11)$$

a macierz filtrująca Fouriera będzie zespoloną macierzą diagonalną

$$\underline{G}^F = \text{diag} [g_0, g_1, \dots, g_{N-1}], \quad (12)$$

to wówczas

$$a_{nm} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} g_i \exp(j(2\pi i/N)(n-m)). \quad (13)$$

Zdefiniujmy również k-tą częściową macierz

$$\underline{A}^{(k)} = [\underline{a}_{nm}^{(k)}], \quad (14)$$

gdzie

$$a_{nm}^{(k)} = \frac{g_k}{N} \exp(j(2\pi k/N)(n-m)). \quad (15)$$

Wynika stąd, że

$$\underline{A} = \sum_{k=0}^{N-1} \underline{A}^{(k)}. \quad (16)$$

Wyznamy obecnie macierze filtrujące  $\underline{G}^H$  i  $\underline{G}^W$  w zależności od  $\underline{A}^{(k)}$

$$\underline{G}^H = \frac{1}{N} \underline{H} \left( \sum_{k=0}^{N-1} \underline{A}^{(k)} \right) \underline{H} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \underline{H} \underline{A}^{(k)} \underline{H} = \sum_{k=0}^{N-1} \underline{G}^H(k). \quad (17)$$

Stąd

$$\underline{G}^H(k) = \frac{1}{N} \underline{H} \underline{A}^{(k)} \underline{H}. \quad (18)$$

Elementy macierzy  $\underline{G}^H(k)$  mogą być interpretowane jako elementy dwuwymiarowej dyskretnej transformaty Hartley'a macierzy  $\underline{A}^{(k)}$ .

Podobną zależność można wyprowadzić dla macierzy filtrującej Walsha  $\underline{G}^W$ :

$$\underline{G}^W(k) = \frac{1}{N} \underline{W} \underline{A}^{(k)} \underline{W}. \quad (19)$$

Można udowodnić [7], że macierz  $\underline{A}^{(k)}$  jest rzeczywistą kołową macierzą, jeżeli

$$g_0, g_{N/2} \in \mathbb{R}, \quad g_k^* = g_{N-k}, \quad g_k \in \mathbb{C}. \quad (20)$$



$$\underline{G}^F = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-jb & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+jb \end{bmatrix}, \quad \underline{G}^H = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \underline{G}^W = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{bmatrix}$$

### 5. Podsumowanie

W pracy podano warunki równoważnego przekształcenia liniowych układów filtrujących: zespolonego Fouriera w rzeczywiste Hartley'a i Walsh'a. Na podstawie przedstawionych struktur algorytmów filtracji rzeczywistej można budować użyteczne procedury nierekursywnej filtracji cyfrowej, wykorzystujące efektywne algorytmy szybkich transformacji Hartley'a i Walsh'a (FHT i FWT). Cyfrowe filtry Hartley'a i Walsh'a ze względu na duże podobieństwo algorytmów FFT, FHT i FWT mogą być łatwo realizowane za pomocą komercyjnie dostępnych procesorów sygnałowych VLSI.

### LITERATURA

- [1] Bracewell R.N.: The Discrete Hartley Transform. J. Opt. Soc. Amer., vol. 73, Dec. 1983, ss. 1832-1835.
- [2] Beauchamp K.G.: Applications of Walsh and Related Functions. Academic Press, London 1984.
- [3] Elliott D.F., Rao K.R.: Fast Transforms. Academic Press, New York 1982.
- [4] Bracewell R.N.: The Fast Hartley Transform. Proc. IEEE, vol. 72, no. 8, Aug. 1984, ss. 1010-1018.
- [5] Drygażo A.: Wykorzystanie szybkiej transformacji Hartley'a w cyfrowej filtracji widmowej. IX KK TO1UE, Szklarska Poręba, 22-24.10.1986, ss. 523-528.
- [6] Kahveci A.E., Hall E.L.: Sequence Domain Design of Frequency Filters. IEEE Trans. Comput., vol. C-23, Sept. 1974, ss. 976-981.
- [7] Zarowski C.J., Yunik M.: Spectral Filtering Using the Fast Walsh Transform. IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Proc., vol. ASSP-33, no. 4, Oct. 1985, ss. 1246-1252.
- [8] Drygażo A.: An Application of the Fast Hartley Transform to Digital Spectral Filtering. ECCTD 87, Paryż, 1-4.09.1987.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Maciej Siwczyński

Wpłynęło do redakcji 20 maja 1987 r.

## О ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ФИЛЬТРАЦИИ

## Р е з ю м е

В работе представлен метод построения при помощи дискретного преобразования Хартлея (DHT) и дискретного преобразования Уолла (DWT) линейных спектральных систем эквивалентных системом основанных на дискретном преобразовании Фурье (DFT).

Используя особенности действительных преобразований DHT и DWT представлен метод определения характеристик цифровых фильтров Хартлея и Уолла на базе частотных характеристик цифровых фильтров Фурье.

Полученные матрицы фильтрации Хартлея  $G^H$  и Уолла  $G^W$  являются действительными когда соответственная матрица Фурье  $F$  комплексная. Полученные таким образом матрицы фильтрации позволили определить обобщенный алгоритм цифровой спектральной фильтрации, использующий алгоритмы быстрых преобразований Хартлея (FHT) и Уолла (FWT) вместо алгоритма быстрого преобразования Фурье (FFT).

## ON EQUIVALENCE OF THREE LINEAR FILTERING SYSTEMS

## S u m m a r y

This paper describes a method of construction of linear spectral filtering systems using the discrete Hartley transform (DHT) and the discrete Walsh transform (DWT). These systems are equivalent to the ones based on the discrete Fourier transform (DFT).

Basing oneself on the properties of the actual DHT and DWT transforms, a method of characteristic determination of the Hartley and Walsh's digital filters on the basis of frequency characteristics of the Fourier's digital filters.

Obtained new Hartley and Walsh filtering matrices  $G^H$  and  $G^W$  are real, while the corresponding Fourier matrix  $G^F$  is complex. The filtering matrices determined in this way have allowed to define a generalized digital spectral filtering algorithm using the algorithms of the fast Hartley transform (FHT) and fast Walsh transform (FWT) instead of the fast Fourier transform (FFT) algorithm.



Janusz WALCZAK

ZASTOSOWANIE TEORII RÓWNAŃ CAŁKOWYCH  
DO ANALIZY ISTNIENIA ROZWIĄZAŃ PROBLEMU DIRICHLETA  
DLA PEWNYCH RÓWNAŃ ELIPTYCZNYCH W ELEKTROSTATYCE

I. KONSTRUKCJA ROZWIĄZANIA PODSTAWOWEGO

**Streszczenie.** W artykule przeprowadzono analizę rozwiązania podstawowego (w sensie Leviego) dla równania eliptycznego opisującego pole elektrostatyczne w ośrodkach liniowych, izotropowych i niejednorodnych.

Podano warunki wystarczające istnienia rozwiązania podstawowego w obszarach nieograniczonych przestrzeni  $R^3$  oraz sposób konstrukcji tego rozwiązania.

1. Wstęp

Rozwiązywanie zagadnień brzegowych w teorii pola elektromagnetycznego przeprowadza się często przez sprowadzenie układu równań Maxwella, uzupełnionych związkami materiałowymi, do układu równań różniczkowych cząstkowych rzędu drugiego z niewiadomymi funkcjami skalarnymi lub wektorowymi, zwanymi potencjałami.

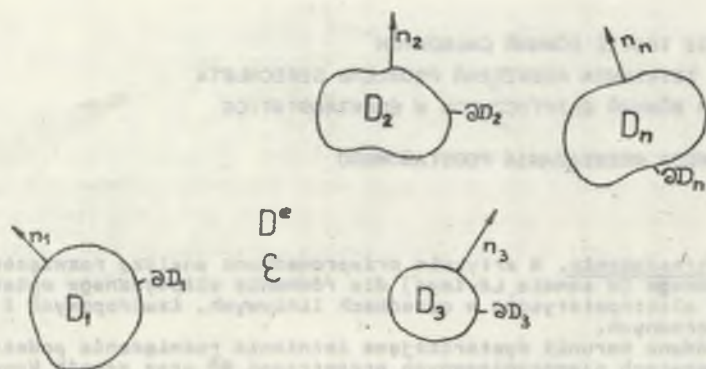
Konstrukcja potencjałów opiera się na pojęciu odpowiedniego, dla danego równania różniczkowego cząstkowego, rozwiązania podstawowego. Problem istnienia rozwiązań podstawowych najprostszych równań fizyki matematycznej (np. równania Laplace'a) jest rozstrzygnięty pozytywnie, natomiast problem ten dla równań bardziej złożonych w sposób globalny nie został rozstrzygnięty do chwili obecnej.

W artykule przeprowadzono analizę istnienia rozwiązania podstawowego dla równania eliptycznego z częścią główną w postaci operatora Laplace'a, opisującego pole elektrostatyczne w obszarach nieograniczonych wypełnionych dielektrykiem liniowym, izotropowym i niejednorodnym.

2. Formalizacja problemu

Przyjmijmy następujący model (rys. 1) układu polowego:

Niech w przestrzeni euklidesowej  $R^3$  (stanowiącej ([7], str. 12) rozmaistość współrzędnościową opartą na grupie ortogonalnej), wyposażonej w pole skalarne przenikalności dielektrycznej  $\epsilon$ , znajdują się dyfeomorficzne obrazy klasy  $C_m$  ( $m \geq 2$ ) skończonej liczby  $n \in \mathbb{N}$  kul domkniętych, wszystkie rozłączne między sobą.



Rys. 1. Rzut w płaszczyźnie  $R^2$  modelu układu polowego  
Fig. 1. Projection of the field system model in the plane  $R^2$

Zgodnie z powyższą definicją obszary wypełnione dielektrykiem określamy wzory:

$$D^e = R^3 \setminus \sum_{j=1}^n \bar{D}_j, \quad (1)$$

$$D^i = \sum_{j=1}^n D_j \quad (2)$$

gdzie:

$D^e$  - obszar nieograniczony wypełniony dielektrykiem,

$D^i$  - obszar ograniczony i niespójny wypełniony dielektrykiem.

Przyjmuje się, że normalna do brzegu  $\partial D = \bigcup_{j=1}^n \partial D_j$  obszaru  $D^e$  jest skierowana do wnętrza tego obszaru (rys. 1).

Pole elektrostatyczne w obszarze  $D^e$  i w obszarach  $D_j$  opisują równania elektrostatyki:

$$\xi_{klm} \partial_l E_m = 0 \quad (3)$$

$$k, l, m \in \{1, 2, 3\}.$$

$$\sum_{k=1}^3 \partial_k D_k = \rho \quad (4)$$

Funkcje  $D_k$ ,  $E_k$  są składowymi funkcji wektorowych indukcji i natężenia pola elektrycznego w ośrodku, a  $\xi_{klm}$  oznacza symbol permutacyjny Ricciego. Funkcja  $\rho$  określa objętościowy rozkład ładunku w obzarach  $D^0$ ,  $D^1$ . Zakładamy, że ośrodek (dielektryk wypełniający obszary  $D^0$ ,  $D^1$ ) jest liniowy, izotropowy, niejednorodny i pozbawiony ładunków swobodnych.

Z powyższego założenia wynika, że pomiędzy wektorem indukcji a wektorem natężenia pola elektrycznego zachodzi zależność:

$$D_k = \xi E_k \quad k \in \{1, 2, 3\} \quad (5)$$

$$\xi \in \text{kl}C_2(D^0) \wedge \text{kl}C_2(D^1)$$

gdzie  $\xi$  - funkcja przenikalności dielektrycznej ośrodka.

Pole elektryczne w obszarach  $D^0$ ,  $D^1$  jest bezwirowe, a więc rozwiązanie układu równań (3), (4) można poszukiwać w postaci funkcji skalarnej  $u$ , zwanej potencjałem pola i określonej wzorem:

$$E_k = -\partial_k u \quad k \in \{1, 2, 3\}. \quad (6)$$

Wykorzystując wzór (6) sprowadza się układ równań (3), (4), (5), po prostych przekształceniach, do równania eliptycznego z częścią główną w postaci operatora Laplace'a:

$$\Delta u + \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0,$$

gdzie  $\Delta$  - operator Laplace'a,

$$a_i(x) = \frac{1}{\xi(x)} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x), \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (8)$$

Rozwiązaniem podstawowym w sensie Leviego równania (7) nazywamy ([5], str. 104) funkcję  $\Gamma$  określoną wzorem:

$$\Gamma(x, y) = L(x, y) + \int_{D^0} L(x, M) \phi(M, y) d\mathcal{U}_M, \quad (9)$$

$$x, y, M \in D^0$$

gdzie:

$L$  - funkcja Leviego dla równania (7) określona wzorem

$$L(x, y) = |xy|^{-1}, \quad (10)$$

$\Phi$  - pewna funkcja pomocnicza.

Rozwiązanie podstawowe  $\Gamma$  równania (7) posiada przejrzystą interpretację fizyczną; rozwiązanie to można traktować jako "odstojenie" rozwiązania podstawowego dla równania Laplace'a (za pomocą funkcji  $\Phi$  generowanej przez niejednorodność ośrodka). Wykorzystanie rozwiązania podstawowego do konstrukcji potencjałów będących rozwiązaniami równania (7) umożliwi ponadto przedstawienie tych potencjałów w postaci sumy dwóch składników:

- składnika będącego klasycznym potencjałem dla równania Laplace'a,
- składnika dodatkowego odpowiedzialnego za niejednorodność ośrodka.

Problem istnienia rozwiązania podstawowego  $\Gamma$ , związany ściśle z problemem istnienia i własnościami funkcji  $\Phi$ , jest analizowany w dalszej części artykułu.

### 3. Sprowadzenie problemu istnienia rozwiązania podstawowego do problemu istnienia rozwiązania pewnego równania całkowego

Wyznaczenie funkcji  $\Phi$ , a zatem wyznaczenie rozwiązania podstawowego określonego wzorem (9), umożliwia następujący lemat:

#### LEMAT 1

Jeżeli funkcja  $\Phi$  spełnia warunki:

$$1^{\circ} \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma \in \Lambda = \{\gamma \in D^0 : x = \gamma\} \\ \kappa^3(\gamma, \rho) \in D^0 \\ x \in \kappa^3(\gamma, \rho) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} |\Phi(x, \gamma)| \leq A_1(x) |xy|^{-2} \\ \int_{\kappa^3(\gamma, \rho)} A_1^2(x) dx \leq C_1 \rho^5, \quad C_1 \in \mathbb{R}^+ \end{array} \right. \quad (11)$$

$$2^{\circ} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1, x_2 \in D^0 \setminus \kappa^3(\gamma, \rho) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} |\Phi(x_1, \gamma) - \Phi(x_2, \gamma)| \leq C_2 |x_1 x_2|^\alpha \\ C_2 \in \mathbb{R}^+ \\ \alpha \in (0, 1] \end{array} \right. \quad (12)$$

$$\begin{array}{c}
 3^{\circ} \\
 \triangle \\
 x \in D^{\circ} \setminus K^3(\gamma, \rho)
 \end{array}
 \quad
 |\Phi(x, \gamma)| \leq \frac{C_3}{(|x| + 1)^{3+\varepsilon} (|\gamma| + 1)^2} \quad (13)$$

$C_3 \in \mathbb{R}^+$   
 $\varepsilon' > 0$

gdzie:

$|x|$ ,  $|\gamma|$  - odległość punktów  $x$ ,  $\gamma$  od początku układu współrzędnych,  
to jest one rozwiązaniem następującego równania całkowego:

$$\begin{aligned}
 4\pi \Phi(x, \gamma) = & \\
 = \sum_{i=1}^3 a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} L(x, \gamma) + \int_{D^{\circ}} \left[ \sum_{i=1}^3 a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} L(x, M) \right] \Phi(M, \gamma) d\tau_M & \\
 x, \gamma, M \in D^{\circ}. & \quad (14)
 \end{aligned}$$

#### Dowód

Utwórzmy quasi-potencjał ([5], ss. 91-107) określony wzorem:

$$\hat{V}(x, \gamma) = \int_{D^{\circ}} L(x, M) \Phi(M, \gamma) d\tau_M, \quad (15)$$

w którym współrzędną  $\gamma$  traktujemy jako parametr.

Quasi-potencjał  $\hat{V}$  zapiszemy w postaci:

$$\hat{V}(x, \gamma) = \int_{D^{\circ} \setminus K^3(\gamma, \rho)} L(x, M) \Phi(M, \gamma) d\tau_M + \int_{K^3(\gamma, \rho)} L(x, M) \Phi(M, \gamma) d\tau_M \quad (16)$$

$\gamma \in \Lambda$

W obszarze  $D^{\circ} \setminus K^3(\gamma, \rho)$  funkcja  $\Phi$  spełnia założenia 2, 3 lematu, a zatem przyczynę do quasi-potencjału pochodzący od pierwszej całki wzoru (16) spełnia ([6], ss. 171-176) równanie Poissona w sensie klasycznym.

W obszarze  $K^3(\gamma, \rho)$  ( $\gamma \in \Lambda$ ) funkcja  $\Phi$  spełnia warunek 1 lematu i jest klasy  $L_2$  względem współrzędnej  $x$ :

$$\|\Phi\|_{L_2(K(\gamma, \rho))} = \int_{K^3(\gamma, \rho)} |\Phi(x, \gamma)|^2 d\tau_x \leq \int_{K^3(\gamma, \rho)} \left| \frac{A_1(x)}{|xy|^2} \right|^2 d\tau_x \leq C_4$$

$C_4 \in \mathbb{R}^+$  (17)

Wzór powyższy jest wnioskiem z pewnego twierdzenia zamieszczonego w pracy [4], str. 82.

Przyczynek do quasi-potencjału pochodzący od drugiej całki wzoru (17) spełnia równanie Poissona w sensie uogólnionym ([1], str. 119).

Ostatecznie quasi-potencjał  $\hat{V}$  spełnia w obszarze  $D^0$  równanie Poissona w sensie uogólnionym (pochodne funkcji  $\hat{V}$  względem zmiennej  $X$  należy rozumieć jako pochodne uogólnione w sensie Sobolewa).

Wykorzystując powyższe stwierdzenie oraz fakt, że funkcja  $\Gamma$  (wzór (9)) winna z założenia spełniać równanie (7), podstawiamy funkcję  $\Gamma$  do wzoru (7) i po prostych przekształceniach uzyskujemy równanie całkowe (14).

Tym samym dowód lematu został zakończony.

□

Przedłużmy funkcje występujące we wzorze (14) na całą przestrzeń  $R^3$  z zachowaniem założeń lematu 1.

Funkcje przedłużone na przestrzeń  $R^3$  oznaczac będziemy wężykiem nad znakiem funkcji. Równanie (14) zapiszemy w postaci:

$$\check{\Phi}(X, Y) = \check{N}(X, Y) + \int_{R^3} \check{N}(X, M) \check{\Phi}(M, Y) d\tau_M \quad (18)$$

$X, Y, M \in R^3$

gdzie:

$$N(X, Y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^3 a_i(X) \frac{\partial}{\partial X_i} L(X, Y). \quad (19)$$

Zakładając, że funkcje  $a_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) klasy  $C_1(D^0)$  spełniają warunki:

$$\bigwedge_{\substack{X \in D^0 \\ i \in \{1, 2, 3\}}} |a_i(X)| = \left| \frac{1}{E(X)} \cdot \frac{\partial E}{\partial X_i}(X) \right| \leq \frac{C_5}{(|X| + 1)^{3+\varepsilon}} \quad (20)$$

$C_5 \in R^+$   
 $\varepsilon' > 0$

można wykazać ([8], ss. 74-76), że jądro  $\check{N}$  operatora całkowego określonego wzorem (18) posiada oszacowania:

$$\bigwedge_{\substack{X \in K^3(Y, \rho) \\ Y \in R^3}} |\check{N}(X, Y)| \leq \frac{C_6}{|XY|^2}, \quad C_6 \in R^+ \quad (21)$$

$$\bigwedge_{\substack{X \in R^3 \setminus K^3(Y, \rho) \\ \rho = \frac{3|Y|+1}{2} \\ Y \in R^3}} |\check{N}(X, Y)| \leq \frac{C_7}{(|X| + 1)^{3+\varepsilon'} (|Y| + 1)^2} \quad (22)$$

$C_7 \in R^+$   
 $\varepsilon' > 0$

Ze wzorów (21), (22) oraz z faktu, że nośniki funkcji  $\tilde{N}$ ,  $\tilde{\Phi}$  nie są zwarte, wynika, że równanie całkowe określone wzorem (18) nie jest równaniem typu Fredholma. Sposób rozwiązania tego równania różni się zatem będzie od znanych w literaturze metod rozwiązywania równań całkowych typu Fredholma.

#### 4. Analiza istnienia rozwiązania równania całkowego (18)

Zdefiniujmy operator  $T$  wzorem:

$$Tf(x, y) = \int_{R^3} \tilde{N}(x, s) f(s, y) d\tau_s \quad (23)$$

i zapiszmy równanie całkowe (18) w postaci:

$$\tilde{\Phi} - T\tilde{\Phi} = \tilde{N}. \quad (24)$$

Równanie (24) (podobnie jak w pracy [8], ss. 76-80) sprowadzimy do następującej postaci:

$$\tilde{\Phi}' + T\tilde{\Phi}' = \tilde{N}', \quad (25)$$

$$\tilde{\Phi}' = (-1)^{m+1} T^{m+1} \tilde{\Phi} \quad (26)$$

$m \in \mathbb{N}$

$$\tilde{N}' = (-1)^{m+1} T^{m+1} \tilde{N} \quad (27)$$

w celu wyeliminowania osobliwości funkcji  $\tilde{\Phi}$  przez dobór liczby iteracji operatora  $T$ . Rozwiązanie równania (18) (podobnie jak w pracy [8], str. 77) przedstawić można w postaci wzoru:

$$\tilde{\Phi} = \sum_{j=1}^m (-1)^{jT^j} \tilde{N} + \tilde{\Phi}'. \quad (28)$$

Wykażemy następujący lemat:

#### LEMAT 2

Jeżeli funkcja  $f$  posiada oszacowania:

$$\begin{array}{l} \triangle \\ x \in K^3(y, \rho) \\ y \in R^3 \end{array} |f(x, y)| \leq \frac{C_B}{|xy|^2}, \quad C_B \in R^+ \quad (29)$$

$$\bigwedge_{\substack{x \in \mathbb{R}^3 \setminus K^3(Y, \rho) \\ Y \in \mathbb{R}^3}} |f(x, Y)| \leq \frac{C_9}{(|x|+1)^{3+\varepsilon} (|x|+1)^2}, \quad C_9 \in \mathbb{R}^+, \quad \varepsilon > 0 \quad (30)$$

to funkcja  $|T^j f|$  posiada oszacowania:

$$|T^j f(x, Y)| \leq \left\{ \begin{array}{ll} \frac{C_{10}}{|XY|} & j = 1 \\ C_{11} \log |XY| + C_{12} & j = 2 \\ C_{13} & j = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} X \in K^3(Y, \rho) \\ Y \in \mathbb{R}^3 \end{array} \\ \frac{C_{14}}{(|x|+1)^{3+\varepsilon} (|y|+1)^2} \quad j = 1, 2, 3 \quad X \notin K^3(Y, \rho) \quad (31)$$

$$C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14} \in \mathbb{R}^+$$

#### Dowód

Zgodnie z określeniem operatora  $T$  (wzór (23)) mamy:

$$Tf(x, y) = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{N}(x, s) f(s, Y) d\tau_s = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus K^3(Y, \rho)} \tilde{N}(x, s) f(s, Y) d\tau_s + \int_{K^3(Y, \rho)} \tilde{N}(x, s) f(s, Y) d\tau_s \quad (32)$$

Stąd:

$$|Tf(x, Y)| \leq \left| \int_{\mathbb{R}^3 \setminus K^3(Y, \rho)} \tilde{N}(x, s) f(s, Y) d\tau_s \right| + \left| \int_{K^3(Y, \rho)} \tilde{N}(x, s) f(s, Y) d\tau_s \right|. \quad (33)$$

1°

Wykorzystując oszacowania funkcji  $\tilde{N}$ ,  $f$  (wzory (21), (22), (29), (30)) rozpatrzmy pierwszą z całek wzoru (33):

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3 \setminus K^3(Y, \rho)} \tilde{N}(x, s) f(s, Y) d\tau_s \right| \leq \int_{\mathbb{R}^3 \setminus K^3(Y, \rho)} \frac{C_7 C_9}{(|x|+1)^{3+\varepsilon} (|s|+1)^2 (|s|+1)^{3+\varepsilon} (|y|+1)^2} d\tau_s \leq \\ \leq \frac{C_7 C_9}{(|x|+1)^{3+\varepsilon} (|y|+1)^2} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus K^3(Y, \rho)} \frac{1}{(|s|+1)^{5+\varepsilon}} d\tau_s \leq \frac{C_{14}}{(|x|+1)^{3+\varepsilon} (|y|+1)^2}. \quad (34)$$



Ze wzorów (30), (34) wynika, że funkcja  $|T^j f|$  dla  $x \in K^3(\gamma, \rho)$  i dla  $j = 1, 2, 3 \dots$  posiada to samo oszacowanie określone wzorem (31).

2°

Rozpatrzmy drugą całkę wzoru (33).

Na podstawie wzorów (21), (29) dla  $j = 1$  mamy:

$$\left| \int_{K^3(\gamma, \rho)} \tilde{N}(x, s) f(s, \gamma) d\tau_s \right| \leq \int_{K^3(\gamma, \rho)} \frac{C_6 C_8}{|xs|^2 |s\gamma|^2} d\tau_s. \quad (35)$$

Z pewnego lematu ([3], str. 330) wynika, że

$$\int_{K^3(\gamma, \rho)} \frac{C_6 C_8}{|xs|^2 |s\gamma|^2} d\tau_s \leq \frac{C_{10}}{|x\gamma|}. \quad (36)$$

Postępując podobnie dla  $j = 2, 3$  (por. [8], ss. 79, 80) uzyskujemy dalsze oszacowania funkcji  $|T^j f|$  określone wzorem (31) (dla  $x \in K^3(\gamma, \rho)$ )

Przedstawione rozumowania umożliwiają wykazanie lematu:

### LEMAT 3

Równanie całkowe iterowane (25) dla  $m = 2$  jest równaniem Fredholma drugiego rodzaju.

### Dowód

Wyprowadźmy podobnie jak w pracy [2] (str. 310) przestrzeń  $\mathcal{L}$  funkcji  $f$  całkownych w sensie Lebesgue'a na  $R^3$  z normą:

$$\|f\|_{\mathcal{L}(R^3)} = \left[ \int_{R^3} |f(x)|^p (|x| + 1)^{(3+\delta)g} d\tau_x \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (37)$$

gdzie:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \quad p = 2, \quad g = 2.$$

Wykorzystując oszacowania (11), (13), (21), (22) oraz lemat 2 łatwo sprawdzić, przez bezpośrednie obliczenie, że funkcje  $T^{m+1} \tilde{\Phi}^r$ ,  $T^{n+1} \tilde{N}^r$  dla  $m = 2$  należą do przestrzeni  $\mathcal{L}$ .

Zgodnie z pewnym twierdzeniem ([2], str. 311), mówiącym, że jeśli jądro operatora  $T$  posiada oszacowania określone wzorami (21), (22), a funk-

cje  $\tilde{\Phi}'$ ,  $\tilde{N}'$  należą do przestrzeni  $L$ , to operator  $T\tilde{\Phi}'$  jest pełnościędy w przestrzeni  $L$ , uzyskujemy też lematu.

□

Określmy obecnie, jakie warunki winny spełniać współczynniki  $a_1$  równania eliptycznego (7), by funkcja  $\tilde{\Phi}$  spełniała założenia lematu 1 (tym samym warunki te stanowiąc będą warunek wystarczający wyznaczenia funkcji  $\tilde{\Phi}$  jako rozwiązania równania całkowego (14)).

Zapiszmy równanie (18) w postaci:

$$\tilde{\Phi} = T\tilde{\Phi} + \tilde{N}. \quad (38)$$

Stąd mamy:

$$|\tilde{\Phi}| \leq |T\tilde{\Phi}| + |\tilde{N}|. \quad (39)$$

Zauważmy, że:

- funkcje  $\tilde{\Phi}$ ,  $\tilde{N}$  mają te same oszacowania określone wzorami (11), (13), (21), (22),
- działanie operatora  $T$  na funkcję  $\tilde{\Phi}$  zmniejsza jej rząd osobliwości, nie zmieniając własności tej funkcji przy dążeniu jej argumentu do nieskończoności (lemat 2) zgodnie z teorią iteracji słaboosobliwych równań całkowych.

Z powyższych uwag wynika nierówność:

$$|\tilde{\Phi}(x, \gamma)| \leq c_{15} |\tilde{N}(x, \gamma)|, \quad c_{15} \in \mathbb{R}^+. \quad (40)$$

Stąd na podstawie wzoru (19) mamy:

$$|\tilde{\Phi}(x, \gamma)| \leq \frac{c_{15} c_{16}}{|XY|^2} \sum_{i=1}^3 |a_1(x)| = \frac{c_1(x)}{|XY|^2}, \quad (41)$$

gdzie:

$$c_1(x) = c_{15} c_{16} \sum_{i=1}^3 |a_1(x)|, \quad c_{15}, c_{16} \in \mathbb{R}^+, \quad x \in K^3(\gamma, \rho).$$

Ze wzorów (40), (41) wynika, że funkcja  $\tilde{\Phi}$  w kuli  $K^3(\gamma, \rho)$  ( $x \in K^3(\gamma, \rho)$ ) będzie posiadała oszacowania określone wzorami (11), jeśli założymy, że:

$$\bigwedge_{\substack{K^3(Y, \rho) \\ K^3(Y, \rho) \in R^3 \\ x \in K^3(Y, \rho) \\ Y \in \Lambda = \{Y \in R^3 : x = Y\}}} \sum_{i=1}^3 \int_{K^3(Y, \rho)} |a_i(x)|^2 d\tau_x \leq c_1 \rho^5. \quad (42)$$

Zakładając, że funkcje  $a_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) spełniają w przestrzeni  $R^3$  warunek Höldera z wykładnikiem  $L$  oraz warunek:

$$\bigwedge_{\substack{x \in R^3 \\ i \in \{1, 2, 3\}}} |a_i(x)| \leq \frac{c_i}{(|x|+1)^{3+\varepsilon}}, \quad c_i \in R^+, \quad \varepsilon > 0, \quad (43)$$

uzyskujemy dla funkcji  $\Phi$  oszacowanie określone wzorem (13):

$$\bigwedge_{\substack{x \in R^3 \setminus K^3(Y, \rho) \\ Y \in R^3}} |\Phi(x, Y)| \leq c_{15} |\tilde{N}(x, Y)| \leq \frac{c_{15} c_{16} c_{17}}{(|x|+1)^{3+\varepsilon} |XY|^2} \leq \\ \leq \frac{c_3}{(|x|+1)^{3+\varepsilon} (|Y|+1)^2} \quad (44)$$

$$\varepsilon > 0, \quad c_{15}, c_{16}, c_{17}, c_3 \in R^+.$$

Z rozważań przeprowadzonych w punkcie 4 artykułu wynika następujący lemat:

#### LEMAT 4

Jeżeli współczynniki równania eliptycznego  $a_i$  spełniają warunki określone wzorami (42), (43) oraz spełniają warunek Höldera w przestrzeni  $R^3$ , to rozwiązania podstawowego  $\Gamma$  równania eliptycznego można poszukiwać w postaci określonej wzorem (9).

Funkcja  $\Phi$  występująca we wzorze (9) jest związana z funkcją  $\tilde{\Phi}'$  zależnością (28). Funkcja  $\tilde{\Phi}'$  jest rozwiązaniem równania całkowego Fedholma drugiego rodzaju określonego wzorem (25).

□

Wykażmy jeszcze, że liczba  $\lambda = 1$  nie jest wartością własną równań:

$$\tilde{\Phi} - \lambda T \tilde{\Phi} = \tilde{N} \quad (42')$$

$$\tilde{\Phi}' + \lambda T \tilde{\Phi}' = \tilde{N}' \quad (43')$$

W tym celu zapiszemy równanie (42) w postaci wzoru (18):

$$\tilde{\Phi}(X, Y) = \tilde{N}(X, Y) + \int_{R^3} \tilde{N}(X, M) \tilde{\Phi}(M, Y) d\tau_M$$

$X, Y, M \in R^3 \quad \lambda = 1.$

Zauważmy, że z warunku  $\tilde{N}(X, Y) = 0$  wynika wprost, że  $\tilde{\Phi}(X, Y) = 0$ . Jeśli  $\tilde{N}(X, Y) = 0$  i  $\tilde{\Phi}(X, Y) = 0$  to ze wzoru (28) wynika, że  $\tilde{\Phi}'(X, Y) = 0$ , zatem  $\lambda = 1$  nie jest wartością własną równań (42'), (43').

Równanie (43) posiada więc jednoznaczne rozwiązanie w klasie funkcji  $f \in L_2$ . Ze wzoru (28) wynika, że równanie (42) posiada jednoznaczne rozwiązanie w klasie funkcji  $L_2(R^3)$ .

Powyższe rozumowanie posiada prostą interpretację fizyczną:

Zauważmy, że przyjęcie warunku  $N(X, Y) = 0$  implikuje warunek  $a_1(X) = 0$ . Zatem wtedy  $\Gamma(X, Y) = L(X, Y)$ , tzn. rozwiązanie podstawowe równania eliptycznego (7) staje się rozwiązaniem podstawowym dla równania Laplace'a, co zachodzi tylko wtedy, gdy  $\Phi = 0$  (wzór (9)).

## 5. Podsumowanie

W artykule przeprowadzono analizę istnienia rozwiązania podstawowego w sensie Levia (wzór (9)) dla równania eliptycznego z częścią główną w postaci operatora Laplace'a. Równanie to opisuje pole elektrostatyczne w ośrodkach liniowych, izotropowych i niejednorodnych.

Stwierdzono, że warunkiem wystarczającym istnienia rozwiązania podstawowego jest:

- spełnienie warunku Höldera przez współczynniki równania eliptycznego,
- spełnienie pewnych dodatkowych warunków określonych wzorami (42), (43).

W artykule wykazano również, że rozwiązania podstawowego  $\Gamma$  należy poszukiwać poprzez:

- rozwiązanie równania całkowego (25),
- wyznaczenie funkcji  $\Phi$  na podstawie wzoru (28),
- wyznaczenie funkcji  $\Gamma$  poprzez wykorzystanie wzoru (9).

## LITERATURA

- [1] Glunter N.M.: Teoria potencjału. PWN, Warszawa 1957.
- [2] Jager W.: Über das Dirichletsche Aussenraum problem für die Schwingungsgleichung. Math. Zeitschr. Bd 95. 1967, ss. 299-323.
- [3] Krzyżański M.: Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego. T. I. PWN, Warszawa 1957.
- [4] Ładyżenskaja O.A., Uralceva N.N.: Liniejnyje i kwaziliniyjnyje urawnenija elliptičeszkogo tipa. Nauka, Moskwa 1964.

- [5] Pogorzelski W.: Równania całkowe i ich zastosowania. T. II. PWN, Warszawa 1957.
- [6] Sobolew S.L.: Urownienija matematycznej fiziki. G.I.T.T.L. Moskwa 1954.
- [7] Sulanke R., Wintgen P.: Geometria różniczkowa i teoria wiązek. PWN, Warszawa 1977.
- [8] Walczak J.: Zagadnienie stosowalności pewnych metod analitycznych wyznaczania parametrów skupionych RLC. Prace doktorska, Gliwice 1986.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Stanisław Krzeziński

Wpłynęło do redakcji dnia 15 maja 1987 r.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
К АНАЛИЗУ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ПРОБЛЕМЫ ДИРИХЛЕ ДЛЯ  
НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА В ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ

I. КОНСТРУКЦИЯ ГЛАВНОГО РЕШЕНИЯ

Р е з ю м е

В статье представлен анализ существования главного решения [в смысле Леви] для эллиптического уравнения описывающего электростатическое поле в линейных, изотропных и неоднородных средах. Даны необходимые условия существования главного решения в неограниченных областях пространства  $R^3$  и метод конструкции этого решения.

APPLICATION OF INTEGRAL EQUATION THEORY TO ANALYSIS OF  
EXISTENCE OF DIRICHLET PROBLEM SOLUTIONS FOR CERTAIN ELLIPTIC  
EQUATIONS IN ELECTROSTATICS

I. THE STRUCTURE OF FUNDAMENTAL SOLUTION

S u m m a r y

In the article the analysis of existence of fundamental solution (according to Levis) for elliptic equation describing electrostatic field in the linear, isotropic and heterogeneous media has been carried out.

Sufficient conditions for the existence of fundamental solution in the unlimited ranges of space  $R^3$  and the method of constructing this solution have been given.

Janusz WALCZAK

ZASTOSOWANIE TEORII RÓWNAŃ CAŁKOWYCH  
DO ANALIZY ISTNIENIA ROZWIĄZAŃ PROBLEMU DIRICHLETA  
DLA PEWNYCH RÓWNAŃ ELIPTYCZNYCH W ELEKTROSTATYCE

II. ANALIZA ISTNIENIA ROZWIĄZAŃ W POSTACI POTENCJAŁÓW

**Streszczenie.** Artykuł ten jest kontynuacją zagadnienia podjętego w pracy [6]. W artykule przeprowadzono analizę istnienia rozwiązań zewnętrznego problemu Dirichleta (w postaci potencjałów) dla pola elektrostatycznego w ośrodkach liniowych, izotropowych i niejednorodnych. Wykazano, że nie istnieje rozwiązanie w postaci uogólnionego potencjału warstwy podwójnej, natomiast istnieje w postaci sumy potencjału uogólnionego warstwy podwójnej i potencjału pochodzącego od układu ładunków punktowych lub też w postaci sumy uogólnionych potencjałów warstwy pojedynczej i podwójnej.

1. Formalizacja problemu brzegowego

Dla modelu układu polowego zdefiniowanego w pracy [6] (rozdz. 2) sformułujmy zewnętrzny problem Dirichleta:

Wyznaczyć rozwiązanie równania:

$$\Delta u + \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

gdzie:

$$a_i = \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon \right)$$

$\varepsilon$  - funkcja przenikalności dielektrycznej ośrodka w obszarze  $D^0$  (por. [6], wzór (1)), będąca funkcją klasy  $C_2(D^0)$  oraz funkcję klasy  $C_0(\bar{D}^0)$ , regularną w nieskończoności i spełniającą na brzegach  $\partial D_1$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) obszaru  $D^0$  warunki:

$$u|_{\partial D_1} = \tilde{v}_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \bigwedge_{1 \neq j} \tilde{v}_1|_{\partial D_1} = v_1 \\ \bigwedge_{1 \neq j} \tilde{v}_1|_{\partial D_j} = 0 \\ 1, j \in \{1 \dots n\} \\ D(\tilde{v}_1) = \partial D \\ v_1 \in \text{const}(\partial D_1). \end{array} \right. \quad (2)$$

Rozwiązania  $u$  równania (1) poszukiwać będziemy w postaci potencjałów zdefiniowanych w oparciu o pojęcie rozwiązania podstawowego  $\Gamma$  (w sensie Levie'go) równania (1). Istnienie rozwiązania podstawowego  $\Gamma$  wykazano w pracy [6].

## 2. Sprowadzenie problemu Dirichleta do układu równań całkowych

Poszukujemy rozwiązania zewnętrznego problemu Dirichleta dla równania (1) w postaci uogólnionego potencjału warstwy podwójnej określonego wzorem:

$$w(M) = \sum_{i=1}^n \int_{\partial D_1} \left[ \frac{d}{d\nu Q_1} \Gamma(M, Q_1) \right] \varphi_1(Q_1) dS_{Q_1}. \quad (3)$$

gdzie:

$\varphi_1$  - funkcje zwane gęstościami warstwy podwójnej określone na brzegu  $\partial D$  i spełniające warunki:

$$\varphi_1|_{\partial D_j} = 0 \quad \text{dla każdego } 1, j \in \{1 \dots n\}, \quad 1 \neq j \quad (4)$$

$\Gamma(M, Q_1)$  - rozwiązanie podstawowe ([6]) równania (1) określone wzorem:

$$\Gamma(M, Q_1) = |MQ_1|^{-1} + \int_{R^3} \frac{\tilde{\Phi}(x, Q_1)}{|MX|} d\tau_x. \quad (5)$$

$\frac{d}{d\nu Q_1} \Gamma(M, Q_1)$  - pochodna transwersalna rozwiązania podstawowego równania (1) w punkcie  $(M, Q_1)$ .

Ponieważ częścią główną operatora przyporządkowanego równaniu (1) jest operator Laplace'a, to łatwo wykazać, że pojęcie pochodnej transwersalnej pokrywa się z pojęciem pochodnej normalnej rozwiązania podstawowego dla równania (1).

Z powyższego wynika, że:

$$\frac{d}{d\nu_{Q_1}} \Gamma(M, Q_1) = \frac{\cos(\overline{Q_1 M}, n_{Q_1})}{|Q_1 M|^2} + \frac{d}{dn_{Q_1}} \int_{R^3} \frac{\tilde{\Phi}(x, Q_1)}{|MX|} d\tau_x \quad (6)$$

$x \in R^3, M \in D^0, Q_1 \in \partial D_1.$

Wzór na potencjał warstwy podwójnej przyjmie więc postać:

$$W(M) = \sum_{i=1}^n \int_{\partial D_1} \frac{\cos(\overline{Q_1 M}, n_{Q_1})}{|Q_1 M|^2} \varphi_1(Q_1) dS_{Q_1} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \int_{\partial D_1} \left[ \frac{d}{dn_{Q_1}} \int_{R^3} \frac{\tilde{\Phi}(x, Q_1)}{|MX|} d\tau_x \right] \varphi_1(Q_1) dS_{Q_1}. \quad (7)$$

Można wykazać (np. [4], str. 107), że rozwiązanie podstawowe  $\Gamma$  posiada oszacowanie:

$$|\Gamma(x, y)| \leq \frac{C}{|xy|}, \quad C \in R^+, \quad (8)$$

a ponadto dla równania eliptycznego z częścią główną w postaci operatora Laplace'a pochodna normalna jest pochodną transversalną, skąd wynika, że własności potencjałów uogólnionych będą identyczne jak własności potencjałów klasycznych (tzn. potencjałów dla równania Laplace'a).

Zakładając, że funkcje  $\varphi_1 (i \in \{1 \dots n\})$  są klasy  $C_0(\partial D)$  (założenie to wykazano w pracy [5], ss. 120-122) oraz że brzegi  $\partial D_1$  są klasy  $C_m (m \geq 2)$ , można wykazać przy niewielkiej modyfikacji dowodu dla obszaru jednopójnego ([3], str. 432), że wartości graniczne potencjału warstwy podwójnej (3) przy dążeniu z punktu  $M \in D^0$  do punktu  $P \in \partial D_1$  są określone identycznymi wzorami jak dla obszaru jednopójnego.

Stąd i ze wzoru (2) uzyskuje się układ  $n$  równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju z niewiadomymi funkcjami  $\varphi_1$ :

$$V_j = -2\pi \varphi_j(P_j) + \sum_{i=1}^n \int_{\partial D_1} \frac{\cos(\overline{Q_1 P_j}, n_{Q_1})}{|Q_1 P_j|^2} dS_{Q_1} +$$



$$+ \sum_{i=1}^n \int_{\partial D_i} \left[ \frac{d}{dn_{Q_1}} \int_{R^3} \frac{\bar{\Psi}(x, Q_1)}{|P_j X|} d\tau_x \right] \Psi_1(Q_1) dS_{Q_1} \quad (9)$$

$P_1, Q_1 \in \partial D_1$   
 $X \in R^3$   
 $i, j \in \{1 \dots n\}$ .

Chcąc wykorzystać teorię Fredholma do analizy równań całkowych (9) należy utworzyć układ równań stowarzyszonych z tymi równaniami.

W tym celu zdefiniujemy wewnętrzny problem Neumanna dla równania (1): Wyznaczyć funkcję  $u$  klasy  $C_2(D_1)$  i klasy  $C_0(\bar{D}_1)$  będącą rozwiązaniem równania (1) w obszarach  $D_1 (i \in \{1 \dots n\})$  i spełniającą na brzegach  $D_1$  obszarów  $D_1$  warunki:

$$\frac{\partial u}{\partial n(w)} \Big|_{\partial D_1} = g_1, \quad (10)$$

gdzie:

$\frac{\partial u}{\partial n(w)} \Big|_{\partial D_1}$  - wartość pochodnej normalnej funkcji  $u$  na brzegach  $\partial D_1$  przy dążeniu punktu  $M \in D_1$  do punktu  $P \in \partial D_1$  po normalnej,

$g_1$  - pewne funkcje zadane na brzegach  $\partial D_1$ .

Poszukujemy rozwiązania wewnętrznego problemu Neumanna dla równania (1) w postaci uogólnionego potencjału warstwa pojedynczej  $V$ :

$$V(M) = - \sum_{i=1}^n \int_{\partial D_i} \Gamma(M, Q_i) \Psi_i(Q_i) dS_{Q_i}, \quad (11)$$

$M \in D^1, \quad Q_i \in \partial D_1$

gdzie:

$\Psi_i$  - funkcje zwane uogólnionymi gęstościami warstwy pojedynczej, określone na brzegu  $\partial D$  i spełniające warunki:

$$\Psi_i \Big|_{\partial D_j} = 0 \quad i, j \in \{1 \dots n\}, \quad i \neq j. \quad (12)$$

Przyjmując, że funkcja  $\Psi_i$  są całkowne na brzegach  $\partial D_1$  (założenie to wykazano w pracy [5], ss. 120-122, można wykazać, że uogólniony potencjał warstwy pojedynczej  $V$  jest funkcją klasy  $C_2(D_1)$  i  $C_0(\bar{D}_1)$ ).

Pochodną normalną uogólnionego potencjału warstwy pojedynczej określa wzór:

$$\frac{\partial v}{\partial n}(M) = - \sum_{i=1}^n \int_{\partial D_i} \frac{d}{dn_p} \Gamma(M, Q_i) \Psi_i(Q_i) dS_{Q_i}, \quad (13)$$

$P_i, Q_i \in \partial D_i$   
 $M \in D_i$

gdzie  $n_p$  - normalna zewnętrzna do brzegu  $\partial D_i$  w punkcie  $P$ .

Uwzględniając we wzorze (13) wzór (5) uzyskujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial n}(M) = & - \left[ \sum_{i=1}^n \int_{\partial D_i} \frac{\cos(\overline{MQ_i}, n_p)}{|MQ_i|^2} \Psi_i(Q_i) dS_{Q_i} + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^n \int_{\partial D_i} \left[ \frac{d}{dn_p} \int_{R^3} \frac{\tilde{\Phi}(x, Q_i)}{|MX|} d\tau_x \right] \Psi_i(Q_i) dS_{Q_i} \right]. \quad (14) \end{aligned}$$

Można wykazać, że jeśli  $\Psi_i \in C_0(\partial D_i)$ , to wartości graniczne pochodnej normalnej (14) przy dążeniu do brzegów obszarów  $\partial D_i$  z wnętrza obszarów  $D_i$  są określone identycznymi wzorami jak dla obszaru jednopójnego ([3], str. 437). Wykorzystując te wzory oraz wzory (10), (14) uzyskuje się układ  $n$ -równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju z niewiadomymi funkcjami  $\Psi_i$ :

$$\begin{aligned} g_j(P_j) = & 2\pi \Psi_j(P_j) + \sum_{i=1}^n \int_{\partial D_i} \frac{\cos(\overline{P_j Q_i}, n_{p_i})}{|P_j Q_i|^2} dS_{Q_i} + \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{\partial D_i} \Psi_i(Q_i) \left[ \frac{d}{dn_{p_j}} \int_{R^3} \frac{\tilde{\Phi}(x, Q_i)}{|P_j x|} d\tau_x \right] dS_{Q_i}. \quad (15) \end{aligned}$$

Zdefiniujmy na brzegu  $\partial D$  funkcje:

$$\Psi = \sum_{i=1}^n \Psi_i, \quad (16)$$

$$\Psi = \sum_{i=1}^n \Psi_i.$$

$$g = \sum_{i=1}^n g_i, \quad (16)$$

$$v' = \sum_{i=1}^n \tilde{v}_i.$$

Układy równań całkowych (9), (15) można zapisać (przy wykorzystaniu wzorów (16)) w postaci układu dwóch równań całkowych z niewiadomymi funkcjami  $\varphi, \Psi$ :

$$\varphi(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \int_{\partial D} K_{11}(P, Q) \varphi(Q) ds_Q + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \int_{\partial D} K_{12}(P, Q) \varphi(Q) ds_Q - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} v' \quad (17)$$

$$\Psi(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \int_{\partial D} K_{21}(P, Q) \Psi(Q) ds_Q - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \int_{\partial D} K_{22}(P, Q) \Psi(Q) ds_Q + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} g(P) \quad (18)$$

dla parametru  $\lambda = 1$ , przy czym:

$$K_{11}(P, Q) = \frac{\cos(\overline{QP}, n_Q)}{|PQ|^2}, \quad (19)$$

$$K_{22}(P, Q) = \frac{\cos(\overline{PQ}, n_P)}{|QP|^2}, \quad (20)$$

$$K_{12}(P, Q) = \frac{d}{dn_Q} \int_{R^3} \frac{\tilde{\Phi}(x, Q)}{|PX|} d\tau_x, \quad (21)$$

$$K_{21}(P, Q) = \frac{d}{dn_P} \int_{R^3} \frac{\tilde{\Phi}(x, Q)}{|PX|} d\tau_x. \quad (22)$$

Jądra  $K_{1j}$  ( $1, j \in \{1, 2\}$ ) posiadają następujące oszacowania:

$$|K_{1j}(P, Q)| \leq \frac{C_{1j}}{|PQ|} \quad C_{1j} \in R^+. \quad (23)$$

Jądra  $K_{11}$  i  $K_{22}$  są ze sobą sprzężone. Z symetrii funkcji  $\Gamma$  ([3], str. 428) wynika, że jądra  $K_{12}$  i  $K_{21}$  są ze sobą również sprzężone ([3], str. 441). Równania (17); (18) stanowią więc układ stowarzyszonych równań Fredholma drugiego rodzaju.

3. Analiza funkcji własnych równań całkowych (17), (18)

Rozpatrzmy równanie całkowe jednorodne przyporządkowane równaniu (18):

$$\varphi(P) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} K_{21}(P, Q) \varphi(Q) ds_Q - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} K_{22}(P, Q) \varphi(Q) ds_Q \quad (24)$$

dla parametru  $\lambda = 1$ . Równanie to opisuje wewnętrzny jednorodny problem Neumanna dla równania (1).

Wykażemy następujący lemat:

## LEMAT 1

Równanie całkowe (24) posiada jednoznaczne rozwiązanie postaci:

$$\varphi(P) = \varphi^{(1)}(P) + \varphi^{(2)}(P), \quad (25)$$

gdzie:

$\varphi^{(1)}$  - funkcja własna zagadnienia Robina dla równania Laplace'a ([1], str. 161) określona wzorem:

$$\varphi^{(1)}(P) = \sum_{i=1}^n \varphi_i^{(1)}(P), \quad D(\varphi_i) = \partial D \quad (26)$$

i spełniająca warunki:

$$\int_{\partial D_j} \varphi_i^{(1)}(P) ds_{P_j} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i=j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases} \quad (27)$$

$1, j \in \{1, \dots, n\}$

$\varphi^{(2)}$  - funkcja będąca jednoznacznym rozwiązaniem równania całkowego:

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(P) = & -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} K_{22}(P, Q) \varphi^{(2)}(Q) ds_Q - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} K_{21}(P, Q) \varphi^{(2)}(Q) ds_Q - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} K_{21}(P, Q) \varphi^{(1)}(Q) ds_Q. \end{aligned} \quad (28)$$

Dowód

1°

Rozwiązania równania całkowego (24) bez utraty ogólności rozważań można przedstawić w postaci wzoru (25), przy czym  $\rho^{(1)}$  oznacza funkcję własną zagadnienia Robina dla równania Laplace'a, a  $\rho^{(2)}$  oznacza pewną funkcję tak dobraną, by funkcja  $\rho$  spełniała równanie (24).

Podstawiając funkcję określoną wzorem (25) do równania (24) uzyskujemy:

$$\begin{aligned} \rho^{(1)}(P) + \rho^{(2)}(P) = & -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} K_{22}(P, Q) \rho^{(1)}(Q) dS_Q - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} K_{21}(P, Q) \rho^{(1)}(Q) dS_Q - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} K_{22}(P, Q) \rho^{(2)}(Q) dS_Q - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} K_{21}(P, Q) \rho^{(2)}(Q) dS_Q. \end{aligned} \quad (29)$$

Funkcja  $\rho^{(1)}$  jest (z założenia) rozwiązaniem zagadnienia Robina dla równania Laplace'a i spełnia równanie:

$$\rho^{(1)}(P) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} K_{22}(P, Q) \rho^{(1)}(Q) dS_Q. \quad (30)$$

Odejmując stronami równania (29), (30) uzyskamy:

$$\begin{aligned} \rho^{(2)}(P) = & -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} K_{22}(P, Q) \rho^{(2)}(Q) dS_Q - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} K_{21}(P, Q) \rho^{(2)}(Q) dS_Q - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} K_{21}(P, Q) \rho^{(1)}(Q) dS_Q. \end{aligned}$$

Z powyższych rozważań widać, że jeśli rozwiązanie równania (24) przedstawić w postaci wzoru (25), to funkcja  $\rho^{(2)}$  winna spełniać niejednorodne równanie Fredholma drugiego rodzaju (wzór (28)).

2°

Wykażemy obecnie, że równanie całkowe (28) posiada jednoznaczne rozwiązanie. W celu wykazania powyższego stwierdzenia należy dowieść, że równanie jednorodne odpowiadające równaniu (28) posiada wyłącznie rozwiązania zerowe (zgodnie z pierwszym twierdzeniem Fredholma).

Energia elektrostatyczna pola  $W_1^0$  dla przyjętego modelu układu poleowego i dla ośrodka jednorodnego ( $\epsilon \in \text{const}$ ) wyraża się wzorem:

$$W_1^0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n C_{ij}^* V_i V_j, \quad (31)$$

gdzie:

$C_{ij}^*$  - współczynniki pojemnościowe przyjętego modelu układu polowego przy  $\epsilon \in \text{const}$ ,

$V_j$  - potencjały generowane na brzegach  $\partial D_i$  przez rozkłady ładunków  $\rho_i^{(1)}$  rozmieszczone na tych brzegach.

Jeśli dla przyjętego modelu układu polowego zastąpić dielektryk jednorodny dielektrykiem niejednorodnym (opisanym funkcją  $\epsilon$ ), to przyrost energii  $\Delta W^0 = W_2^0 - W_1^0$  ( $W_2^0$  - energia pola w układzie z dielektrykiem niejednorodnym) wyniesie ([2], str. 171):

$$\Delta W^0 = \frac{1}{2} \int_{R^3} (\epsilon(x) - \epsilon) \text{grad } V(x) \text{ grad } V_0(x) d\tau_x, \quad (32)$$

gdzie:

$V_0$  - potencjał generowany przez rozkład ładunków  $\rho^{(1)}$ ,

$V$  - potencjał generowany przez rozkład ładunków  $\rho$  (wzór (25)).

Przyjmując, że  $\rho^{(1)}$  jest funkcją zerową, mamy  $V_0(x) = 0$  (dla każdego  $x \in R^3$ ) oraz mamy  $W_1^0 = 0$ . Ze wzoru (32) wynika, że w tym przypadku  $\Delta W^0 = 0$  oraz że  $W_2^0 = 0$ .

Z drugiej strony:

$$W_2^0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tilde{C}_{ij} \tilde{V}_i \tilde{V}_j, \quad (33)$$

gdzie:

$\tilde{C}_{ij}$  - współczynniki pojemnościowe przyjętego modelu polowego dla ośrodka niejednorodnego,

$\tilde{V}_i$  - potencjały generowane przez rozkłady ładunków  $\rho^{(2)}$  na brzegach  $\partial D_i$ .

Z warunku  $W_2^0 = 0$  oraz ze ściśle dodatniej określoności formy kwadratowej (33) wynika natychmiast, że potencjały na brzegach  $\partial D_i$  oznaczone jako  $\tilde{V}_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) są tożsamościowo równe zero. Stąd i na podstawie pewnego twierdzenia ([3], str. 440) (lub też z zasady jednoznaczności rozwiązań równań eliptycznych) można stwierdzić, że funkcje  $\rho^{(2)}$  będące rozwiązaniami równania jednorodnego przyporządkowanego równania (28) są funkcjami zerowymi.

Zgodnie z pierwszym twierdzeniem Fredholma równanie (28) posiada jednoznaczne rozwiązanie.

Ponieważ rozwiązanie zagadnienia Robina jest jednoznaczne oraz ponieważ równanie (28) posiada jednoznaczne rozwiązanie, to tym samym funkcja (wzór (25)) będąca rozwiązaniem równania (24) jest określona jednoznacznie.

3°

Funkcję  $\rho^{(2)}$  można zapisać w postaci wzoru:

$$\rho^{(2)}(P) = \sum_{i=1}^n \rho_i^{(2)}(P), \quad (34)$$

przy czym  $\rho_i^{(2)}$  interpretuje się jako zastępcze gęstości ładunków pozornych rozmieszczonych na brzegach  $\partial D_i$  i wywołanych polaryzacją dielektryka niejednorodnego.

Można wykazać ([5], ss. 95-97), że funkcje  $\rho_i^{(2)}$  spełniają warunki:

$$\int_{\partial D} \rho_i^{(2)}(P) dS_P = 0 \quad \begin{array}{l} 1, j \in \{1 \dots n\} \\ D(\rho^{(2)}) = \partial D \\ D(\rho_i^{(2)}) = \partial D \end{array} \quad (35)$$

Wzór powyższy stanowi interpretację faktu, że całkowite ładunki pozorne idealnego dielektryka (a taki model dielektryka przyjęto w pracy) są równe zeru.

□

#### 4. Analiza istnienia rozwiązań problemu Dirichleta

Równania całkowe (17), (18) stanowią układ słaboosobliwych stowarzyszonych równań Fredholma drugiego rodzaju. Liczba  $\lambda = 1$  jest wartością własną tych równań.

Łatwo wykazać, że rozwiązanie równania (1) w postaci uogólnionego potencjału warotwy podwójnej nie istnieje, gdyż zgodnie z trzecim twierdzeniem Fredholma nie są spełnione następujące warunki ortogonalności:

$$\int_{\partial D} V \rho_i^{(2)}(P) dS_P = V_i \quad i \in \{1 \dots n\}, \quad (36)$$

gdzie:

$V_i$  - funkcje stałe zadane na brzegach  $\partial D_i$  i określone wzorem (2),

$\rho_1 = \rho_1^{(1)} + \rho_1^{(2)}$ ; przy czym funkcje  $\rho_1^{(1)}$ ,  $\rho_1^{(2)}$  spełniają zależności określone wzorami (27), (35).

Wykażemy, że rozwiązanie zewnętrznego problemu Dirichleta w postaci sumy uogólnionego potencjału warstwy podwójnej i potencjału uogólnionego pochodzącego od układu ładunków punktowych  $\mathcal{L}_1$  ( $i \in \{1 \dots n\}$ ) jest zawsze możliwe. W tym celu zdefiniujemy potencjał uogólniony  $W_p$  pochodzący od układu ładunków punktowych  $\mathcal{L}_1$ :

$$W_p(M) = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_i \Gamma(A_i, M), \quad (37)$$

gdzie:

$\mathcal{L}_i$  - ładunki punktowe,

$\Gamma$  - rozwiązanie podstawowe równania (1).

Poszukujemy rozwiązania zewnętrznego problemu Dirichleta w postaci:

$$\underline{W}(M) = \int_{\partial D} \frac{d}{dn_{Q_1}} \Gamma(M, Q) \varphi(Q) ds_Q + \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_i \Gamma(A_i, M) \quad (38)$$

$$A_i \in D_i.$$

Zamiast równania całkowego (17) należy rozpatryć równanie:

$$\varphi(P) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\partial D} (K_{11}(P, Q) + K_{12}(P, Q)) \varphi(Q) ds_Q - \frac{\lambda}{2\pi} (V' - \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_i \Gamma(A_i, M)). \quad (39)$$

Jądro równania (39) jest takie samo jak jądro równania (17), a więc zgodnie z trzecim twierdzeniem Fredholma równanie (39) posiada rozwiązanie dla  $\lambda = 1$ , gdy są spełnione następujące warunki ortogonalności:

$$\int_{\partial D} (V' - \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_i \Gamma(A_i, P)) \rho_i(P) ds_P = 0, \quad i \in \{1 \dots n\}. \quad (40)$$

Po prostych przekształceniach wzór (40) przyjmie postać:

$$V_j - \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_i v_{ij} = 0, \quad j \in \{1 \dots n\}. \quad (41)$$



gdzie:

$V_j$  - potencjał zadany na brzegu  $\partial D_j$ ,

$$V_{ij} = \int_{\partial D} \Gamma(A_{ij}, P) \rho_j(P) ds_P. \quad (42)$$

Z definicji funkcji własnych  $\rho_j$  wynika, że funkcje  $V_{ij}$  ( $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ) należą do klasy funkcji stałych w obszarach  $D_i$ . Funkcje te nazywane są współczynnikami potencjałowymi i posiadają własność określoną wzorem:

$$\det [V_{ij}] \neq 0. \quad (43)$$

Z powyższego wzoru i z twierdzenia Cramera wynika, że układ równań (41) względem zmiennych  $L_i$  posiada zawsze rozwiązanie, tym samym zawsze można dobrać ciąg stałych  $L_i$  tak, by spełnione były warunki ortogonalności (40). Tym samym rozwiązanie zewnętrznego problemu Dirichleta dla równania (1) w postaci sumy uogólnionych potencjałów warstwy podwójnej i ładunków punktowych (38) jest zawsze możliwe.

Poszukajmy jeszcze rozwiązania zewnętrznego problemu Dirichleta dla równania (1) w postaci sumy potencjału uogólnionego warstwy podwójnej i potencjału warstwy pojedynczej (o znanej z założenia gęstości  $\xi$ ):

$$V(M) = \int_{\partial D} \left[ \frac{d}{dn} \Gamma(Q, M) \right] \varphi(Q) ds_Q + \sum_{i=1}^n \int_{\partial D_i} \Gamma(Q_i, M) \xi_i(Q_i) ds_{Q_i}. \quad (44)$$

Rozpatrzmy równanie całkowe:

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= \frac{\lambda}{2\pi} \int_{\partial D} (K_{11}(P, Q) + K_{12}(P, Q)) \varphi(Q) ds_Q - \\ &- \frac{\lambda}{2\pi} \left( V' - \sum_{i=1}^n \int_{\partial D_i} \Gamma(Q_i, P) \xi_i(Q_i) ds_{Q_i} \right). \end{aligned} \quad (45)$$

Równanie całkowe (45) posiada takie samo jądro jak równanie (17), a więc zgodnie z trzecim twierdzeniem Fredholma równanie (45) dla  $\lambda = 1$  posiada rozwiązanie, gdy spełnione będą warunki ortogonalności:

$$\int_{\partial D} \left( V' - \sum_{i=1}^n \int_{\partial D_i} \Gamma(Q_i, P) \xi_i(Q_i) ds_{Q_i} \right) \rho_j(P) ds_P = 0. \quad (46)$$

Wzory (46) po prostych przekształceniach i zmianie porządku całkowania przyjmują postać:

$$v_j - \sum_{i=1}^n \int_{\partial D_1} \xi_i(Q_1) \left( \int_{\partial D} \rho_j(P) \Gamma(Q_1, P) dS_P \right) dS_{Q_1} = 0. \quad (47)$$

Oznaczając:

$$q_i = \int_{\partial D_1} \xi_i(Q_1) dS_{Q_1} \quad (48)$$

oraz wykorzystując wzór (42) uzyskuje się zależność:

$$v_j - \sum_{i=1}^n q_i v_{ij} = 0. \quad (49)$$

Z uwagi na wzór (43) układ równań (49) posiada zawsze rozwiązanie ze względu na zmienne  $q_i$ .

Można więc zawsze dobrać ciąg gładkich funkcji  $\xi_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) spełniających warunek (48) (np. utożsamiając funkcje  $\xi_i$  z funkcjami własnymi  $\phi_i$  równania całkowego (24)).

Tak więc rozwiązanie zewnętrznego problemu Dirichleta dla równania (1) można zawsze przedstawić w postaci sumy potencjału uogólnionego warstwy podwójnej i potencjału uogólnionego warstwy pojedynczej o znanej gęstości  $\xi$ .

## 5. Podsumowanie

W artykule przeprowadzono analizę istnienia rozwiązań (w postaci potencjałów) zewnętrznego problemu Dirichleta dla równania eliptycznego z częścią główną w postaci operatora Laplace'a, opisującego pole elektrostatyczne w ośrodkach liniowych, izotropowych i niejednorodnych.

Wykazano, że:

- rozwiązanie zewnętrznego problemu Dirichleta w postaci uogólnionego potencjału warstwy podwójnej nie istnieje,
- rozwiązanie zewnętrznego problemu Dirichleta istnieje w postaci:
  - sumy uogólnionych potencjałów warstwy podwójnej i ładunków punktowych,
  - sumy uogólnionych potencjałów warstwy pojedynczej i podwójnej.

## LITERATURA

- [1] Giunter N.M.: Teoria potencjału. PWN, Warszawa 1957.
- [2] Jackson J.D.: Elektrydyynamika klasyczna. PWN, Warszawa 1982.
- [3] Krzyżański M.: Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego. Tom I. PWN, Warszawa 1957.
- [4] Pogorzelski W.: Równania całkowe i ich zastosowania. Tom II. PWN, Warszawa 1957.
- [5] Walczak J.: Zagadnienie stosowalności pewnych metod analitycznych wyznaczania parametrów skupionych R,L,C. Praca doktorska, Gliwice 1986.
- [6] Walczak J.: Zastosowanie teorii równań całkowych do analizy istnienia rozwiązań problemu Dirichleta dla pewnych równań eliptycznych w elektrostatyce. I. Konstrukcja rozwiązania podstawowego. Materiały X Seminarium Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów. Wiśła 1987.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Stanisław Krzemiński

Wpłynęło do redakcji dnia 15 maja 1987 r.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
 К АНАЛИЗУ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ПРОБЛЕМЫ ДИРИХЛЕ  
 ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА В ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ  
 II. АНАЛИЗ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ТИПА ПОТЕНЦИАЛОВ

Р е з ю м е

Данная статья является продолжением проблемы, рассматриваемой в работе [6]. Представлен анализ существования решений внешней проблемы Дирихле (в виде потенциалов) для электростатического поля в линейных изотропных и неоднородных средах. Показано, что решение в виде обобщенного потенциала двойного слоя не существует. Показано также, что это решение существует в виде суммы обобщенного потенциала двойного слоя и обобщенного потенциала от системы точечных зарядов или в виде суммы обобщенных потенциалов простого и двойного слоев.

APPLICATION OF INTEGRAL EQUATION THEORY TO ANALYSIS OF  
 EXISTENCE OF DIRICHLET PROBLEM SOLUTIONS FOR CERTAIN ELLIPTIC  
 EQUATIONS IN ELECTROSTATICS  
 II. THE ANALYSIS OF EXISTENCE OF POTENTIAL FORM SOLUTIONS

S u m m a r y

This article is continuation of the problem dealt with in the work [6]. In the article the analysis of existence of external Dirichlet problem solutions (in the form of potentials) for electrostatic field in linear, isotropic and heterogeneous media has been carried out. It has been shown that there is no solution in the form of a generalized potential of a double layer, however, there is a solution in the form of a sum of generalized potential of a double layer and the potential derived from a point charge system or in the form of a sum of generalized potentials of a single and double layer.

Edward WILCZYŃSKI

PROBLEM BRZEGOWY ANALIZY POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO  
W UKŁADZIE WIELU ŚRODOWISK PRZEWODZĄCYCH  
O SYMETRII OSIOWO-OBROTOWEJ

**Streszczenie.** W artykule sformułowano problem brzegowy obliczania pola elektromagnetycznego w układzie wielu brył metalu o różnych konduktywnościach, przenikalnościach magnetycznych i elektrycznych. Przyjmuje się, że każda bryła jest ośrodkiem liniowym, izotropowym i jednorodnym. Źródłem pola elektromagnetycznego jest cewka opisana powierzchnią zadaną gęstością powierzchniową prądu. Układ ośrodków i cewka posiadają symetrię osiowo-obrotową. Pole elektromagnetyczne obliczane jest w stanie ustalonym sinusoidalnie zmiennym. Szukaną funkcją pola elektromagnetycznego jest potencjał wektorowy. W pracy sformułowano równania różniczkowe, jakie spełnia potencjał wektorowy w poszczególnych ośrodkach oraz warunki na brzegach obszarów i w nieskończoności. Zaproponowano również sposób rozwiązania tych równań wyprowadzając odpowiednio wzory całkowe. Po uwzględnieniu wyników prac [9], [10], [11], [12], [13] stwierdzono, że wzory te spełniają równania różniczkowe w przestrzeni oraz odpowiednio warunki graniczne.

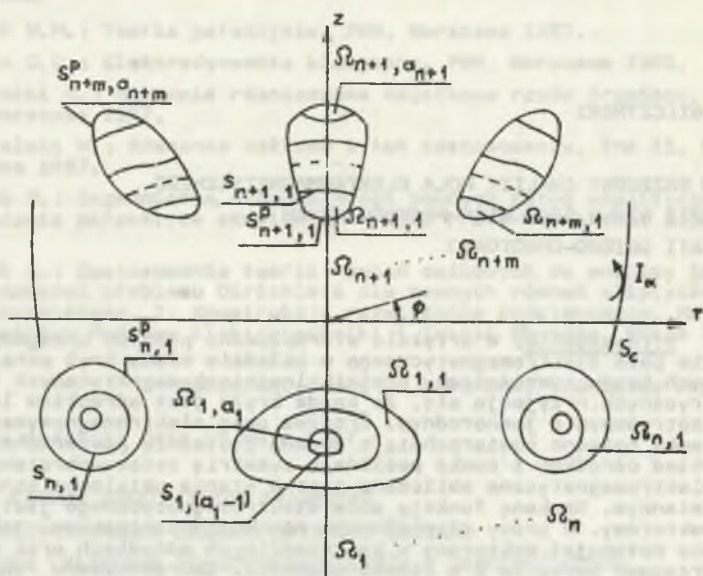
## 1. Wstęp

Niniejsza praca jest próbą rozszerzenia tematyki artykułów [9], [10], [11], [12]. W wielu zastosowaniach praktycznych mamy do czynienia z obliczaniem rozkładu pola elektromagnetycznego w przestrzeni w układzie wielu brył metalowych o różnych konduktywnościach. Bryły te są równocześnie pod wpływem źródeł pola elektromagnetycznego sinusoidalnie zmiennego. Prąd, kształt i rozkład przestrzenny źródeł pola (cewek) jest znany. Obecnie zostanie sformułowany odpowiedni problem brzegowy.

## 2. Model geometryczny układu rzeczywistego brył metalu

Rzeczywisty układ wielu ośrodków przewodzących o symetrii osiowo-obrotowej opisujemy zbiorem obszarów  $\Omega_k$  (4), (7),  $k = 1, 2, \dots, n+m$  zanurzonych w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej (obszar  $\Omega_p \subset R^3$ ) rys. 1. Do opisu punktu można w tym przypadku wprowadzić układ współrzędnych cylindrycznych  $(r, \phi, z)$ .

Rozpatrywany model geometryczny (rys. 1) składa się z  $(a_1 + a_2 + \dots + a_{n+m})$  obszarów  $\Omega_{kj} \subset R^3$  opisujących środowiska przewodzące o różnych



Rys. 1. Model geometryczny układu brył metalu

Fig. 1. Geometrical model of the system of metal blocks

kondukcyjnościach, przewodnościach elektrycznych i magnetycznych. Elementy  $a_1, a_2, \dots, a_{n+m}$  należą do zbioru liczb naturalnych. Podobszary  $\Omega_{kj}$  zgrupowane są w  $(n+m)$  rozłączonych obszarach  $\Omega_k \subset \mathbb{R}^3$   $k = 1, 2, \dots, n+m$  (rys. 1), tzn.:

$$\bigcap_{k=1}^{n+m} \Omega_k = \emptyset. \quad (1)$$

Obszar  $\Omega_{kj}$  konkretnego środowiska opisany jest literą  $\Omega$  z dwoma indeksami ( $k$ ) i ( $j$ ), z których pierwszy oznacza, że:

$$\Omega_{kj} \subset \Omega_k \quad k = 1, 2, \dots, n+m \quad j = 1, 2, \dots, a_k, \quad (2)$$

a drugi wskazuje kolejny numer środowiska ( $j$ ) w obszarze  $\Omega_k$   $j=1, 2, \dots, a_k$ , tzn.:

$$\Omega_k = \bigcup_{j=1}^{a_k} \Omega_{kj} \quad k = 1, 2, \dots, n+m. \quad (3)$$

Jak widać z rys. 1, mamy dwa rodzaje obszarów  $\Omega_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n+m$ . Pierwszy to obszary

$$\Omega_k, \quad k = n+1, n+2, \dots, n+m \quad (4)$$

zgrupowane w półprzestrzeni  $z > 0$  zarówno jednocyfne (narysowano 1 szt. -  $\Omega_{n+1}$ ) jak i niejednocyfne (narysowano 1 szt. -  $\Omega_{n+m}$ ). Mają tę własność, że podzielone są na "plasterki" podobszarów  $\Omega_{kj}$  w taki sposób, że brzeg  $\partial\Omega_{kj}$  domknięcia  $\bar{\Omega}_{kj} = \Omega_{kj} \cup \partial\Omega_{kj}$  [4] składa się z dwu części:

- powierzchni  $S_{kj}^p$

$$S_{kj}^p = \bar{\Omega}_p \cap \bar{\Omega}_{kj} \quad \begin{matrix} k = n+1, n+2, \dots, n+m \\ j = 1, 2, \dots, a_k \end{matrix} \quad (5)$$

- powierzchni  $S_{kj}$

$$S_{kj} = \bar{\Omega}_{kj} \cap \bar{\Omega}_{k(j+1)} \quad \begin{matrix} k = n+1, n+2, \dots, n+m \\ j = 1, 2, \dots, (a_k - 1) \end{matrix} \quad (6)$$

Drugi rodzaj obszarów

$$\Omega_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

zgrupowano w przestrzeni  $z < 0$ . Mają tę własność, że każdy z nich składa się z:

- obszarów  $\Omega_{kj}$  w kształcie toroidów zawartych jeden w drugim (narysowano 1 szt. -  $\Omega_n$ ),
- obszarów jednocyfnych  $\Omega_{kj}$  zawartych jeden w drugim (narysowano 1 szt. -  $\Omega_1$ ).

Wprowadzamy następujące oznaczenia części brzegów  $\partial\Omega_{kj}$  domknięć  $\bar{\Omega}_{kj} \cup \partial\Omega_{kj}$  składających się na  $\bar{\Omega}_k$  (7):

- powierzchnie  $S_{k1}^p$

$$S_{k1}^p = \bar{\Omega}_p \cap \bar{\Omega}_{k1} \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

- powierzchnie  $S_{kj}$

$$S_{kj} = \bar{\Omega}_{kj} \cap \bar{\Omega}_{k(j+1)} \quad \begin{matrix} k = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, (a_k - 1) \end{matrix} \quad (9)$$

Obszary  $\Omega_k$  (4), (7) obu rodzajów zostały rozdzielone półpłaszczyzną  $z = 0$  tylko w celu uzyskania większej przejrzystości opisu. Źródłem pola elektromagnetycznego jest cewka opisana powierzchnią  $S_c$  z zadaną gęsto-

ścią powierzchniową prądu  $I_\alpha$  (rys. 1), będącą polem wektorowym wyłączone o składowej kątowej [9]. Przyjmujemy, że powierzchnia  $S_C$  jest klasy  $C^2$  a funkcja  $I_\alpha$  klasy  $C^0$ .

### 3. Równania pola elektromagnetycznego w ośrodkach przewodzących

W granicach obszaru  $\Omega_{kj}$  (rys. 1) przyjmujemy, że środowisko jest liniowe, izotropowe i jednorodne (ze względu na stałe  $\mu^{kj}$ ,  $\epsilon^{kj}$  - przenikalność magnetyczną i elektryczną,  $\gamma^{kj}$  - konduktywność metalu). Wszystkie parametry pola elektromagnetycznego i stałe materiałowe dotyczące konkretnego ośrodka  $\Omega_{kj}$  będą oznaczone odpowiednią literą z dwoma indeksami  $k, j$  u góry. Równania pola zapisujemy w rachunku tensorowym w układzie kartezjańskim [7]. Rachunek ten dopuszcza wszelkie transformacje liniowe ortogonalne układu współrzędnych (rys. 1). Wskaźniki tensorów będą oznaczone ciągiem małych liter greckich przebiegających wartości 1, 2, 3. Do przedstawienia sumy wartości tensora względem dwu powtarzających się wskaźników wykorzystujemy umowę sumacyjną Einsteina [2], [7].

Rozpatrujemy rozkład pola elektromagnetycznego w stanie ustalonym sinusoidalnie zmiennym [1], [5], [8], [9]. Układ równań Maxwella ma następującą postać:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} E_{\gamma,\beta}^{kj} = -i\omega\mu^{kj} H_\alpha^{kj}, \quad (10)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} H_{\gamma,\beta}^{kj} = i\omega\epsilon^{kj} E_\alpha^{kj}, \quad (11)$$

$$B_{\alpha,\alpha}^{kj} = 0, \quad (12)$$

$$D_{\alpha,\alpha}^{kj} = 0, \quad (13)$$

gdzie  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$  - symbol zupełnie antysymetryczny [7].

Równania te uzupełniamy związkami materiałowymi:

$$D_\alpha^{kj} = \epsilon^{kj} E_\alpha^{kj}, \quad (14)$$

$$B_\alpha^{kj} = \mu^{kj} H_\alpha^{kj}, \quad (15)$$

$$J_\alpha^{kj} = \gamma^{kj} E_\alpha^{kj}. \quad (16)$$

Przenikalność elektryczna we wzorze (11) jest liczbą zespoloną:

$$\epsilon^{kj} = -i \frac{1}{\omega} \gamma^{kj}. \quad (17)$$

Powyższe oznacza, że częstotliwość źródła zasilania ograniczona jest od góry warunkiem pomijalnie małej wartości prądu przesunięcia w metalu w porównaniu z prądem przewodzenia, tzn.:

$$\xi^{kj} \ll \frac{1}{\omega} \gamma^{kj}. \quad (18)$$

Wprowadzamy potencjał wektorowy wg wzoru:

$$B_{\alpha}^{kj} = e_{\alpha\beta\gamma} A_{\gamma,\beta}^{kj}. \quad (19)$$

Z równań (10), (15), (19) uzyskuje się wzór na natężenie pola elektrycznego w obszarze  $\Omega_{kj}$ :

$$E_{\alpha}^{kj} = -i\omega A_{\alpha}^{kj} - \frac{k_j}{p_{,\alpha}}. \quad (20)$$

Przypuszczamy, że potencjał wektorowy jest wektorem solenoidalnym:

$$A_{\alpha,\alpha}^{kj} = 0. \quad (21)$$

W obliczeniach pomijamy pole elektrostatyczne, tzn. zakładamy, że potencjał skalarny we wzorze (20) znika:

$$\varphi^{kj} = 0. \quad (22)$$

Podstawiając równania (15), (19), (20), (22) do (11) otrzymujemy równanie różniczkowe, jakie spełnia potencjał wektorowy w obszarze  $\Omega_{kj}$ :

$$e_{\alpha\beta\gamma} e_{\gamma\kappa\nu} A_{\nu,\kappa,\beta}^{kj} = \omega^2 \epsilon^{kj\mu} k_j A_{\alpha}^{kj}. \quad (23)$$

Po uwzględnieniu wzoru na zwężony iloczyn dwu tensorów  $e$  [2], [7]:

$$e_{\alpha\beta\gamma} e_{\gamma\kappa\nu} = \delta_{\alpha\kappa} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\kappa}. \quad (24)$$

gdzie  $\delta_{\alpha\beta}$  - delta Kroneckera [7],

można dokonać nasunięcia tensora (24) na  $A_{\nu,\kappa,\beta}^{kj}$ .

Ostatecznie równanie różniczkowe, jakie spełnia potencjał wektorowy w obszarze  $\Omega_{kj}$   $k = 1, 2, \dots, n+m$ ,  $j = 1, 2, \dots, a_k$ , przyjmie postać:

$$A_{\alpha,\beta,\beta}^{kj} + (p^{kj})^2 A_{\alpha}^{kj} = 0, \quad (25)$$

gdzie  $(p^{kj})^2 = -i\omega\mu^{kj}\gamma^{kj}$  - po uwzględnieniu wzoru (17).



Poszukujemy rozwiązania układu równań (21), (25), jakie spełnia potencjał wektorowy w ośrodkach przewodzących (obszar  $\Omega_{kj}$ ). Przyjmujemy, że rozwiązanie takie istnieje w postaci wyrażań całkowych wynikających z wektorowego symetrycznego wzoru Greensa:

$$\int_{\Omega} (F_{\alpha} A_{\beta, \alpha, \beta} - F_{\alpha} A_{\alpha, \beta, \beta} - A_{\gamma} F_{\delta, \gamma, \delta} + A_{\gamma} F_{\gamma, \delta, \delta}) dv = \\ = \int_{\partial\Omega} (A_{\beta} F_{\beta, \alpha} - A_{\beta} F_{\alpha, \beta} - F_{\alpha} A_{\alpha, \alpha} + F_{\alpha} A_{\alpha, \alpha}) n_{\alpha} ds, \quad (26)$$

gdzie:

$\Omega$  - obszar wraz z brzegiem dyfeomorficzny z kulą domkniętą,

$\partial\Omega$  - brzeg obszaru,

$A_{\alpha}$  - potencjał wektorowy wg wzoru (19) (funkcja klasy  $C^2$ ),

$F_{\alpha}$  - dowolna funkcja wektorowa klasy  $C^2$ ,

$n_{\alpha}$  - ciągle pole wektorów jednostkowych określonych na  $\partial\Omega$  normalnych do  $\partial\Omega$ , skierowanych na zewnątrz obszaru  $\Omega$ .

W literaturze symetryczny wektorowy wzór Greena podawany jest w symbolice wektorowej [1]. Po wprowadzeniu zapisu tensorowego i uwzględnieniu zależności (24) wzór ten przyjmuje postać (26). Zakładamy, że funkcje  $A_{\alpha}$  i  $F_{\alpha}$  określone są w domknięciu  $\bar{\Omega}$ . Potencjał wektorowy  $A_{\alpha}$  w tożsamości (26) spełnia równania (21), (25) oraz

$$A_{\alpha}^{kj} n_{\alpha} = 0 \quad \begin{matrix} k = 1, 2, \dots, n+m \\ j = 1, 2, \dots, a_k \end{matrix} \quad (27)$$

a funkcja  $F_{\alpha}$  inna dla każdego ośrodka ma postać:

$$F_{\alpha} = W_{\alpha} \left( \frac{e^{-ip^{kj}r}}{r} \right)_{(x, y)}, \quad (28)$$

gdzie:

$W_{\alpha}$  - stałe pole wektorowe,

$x \in \Omega_{kj}$  - ustalony punkt obszaru  $\Omega_{kj}$ ,

$y \in \bar{\Omega}_{kj}$  - punkt całkowania,

$r$  - odległość punktów  $x$  i  $y$ ,

$p^{kj}$  - stała występująca we wzorze (25).

Zakładamy, że potencjał wektorowy  $A_\alpha$  (19) jest wektorem wyłącznie o składowej kątowej. Wzór (26) można zastosować do podobszaru  $\Omega_{(n+1)j} \subset \Omega_{n+1}$  (rys. 1, obszary wraz z brzegiem dyfeomorficzne z kulą domkniętą).

Postępując podobnie jak w pracach [1], [11] uzyskujemy ze wzoru (26) wyrażenie całkowe na potencjał wektorowy w obszarach  $\Omega_{(n+1)j} \subset \Omega_{n+1}$   $j = 1, 2, \dots, a_{n+1}$  (rys. 1):

$$A_\alpha^{kj}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega_{kj}} [M_{\alpha\beta}^{kj}(y)v_{,\beta}^{kj}(x,y) + N_\alpha^{kj}(y)v^{kj}(x,y)] dS(y), \quad (29)$$

gdzie:

$$M_{\alpha\beta}^{kj}(y) = A_\beta^{kj}(y)n_\alpha(y) - A_\alpha^{kj}(y)n_\beta(y) \quad (30)$$

$$N_\alpha^{kj}(y) = [A_{\alpha,\gamma}^{kj}(y) - A_{\gamma,\alpha}^{kj}(y)]n_\gamma(y), \quad (31)$$

$$v^{kj}(x,y) = \frac{1}{r} e^{-ip^{kj}r}, \quad (32)$$

$$k = n+1, \quad j = 1, 2, \dots, d_k.$$

Dla tensora  $M_{\alpha\beta}$  (30) przyjmujemy nazwę gęstości warstwy podwójnej prądu (ze względu na jego związek z wielkościami  $L_{||}$  i  $L_{\perp}$  wprowadzonymi w pracy [11]). Wektor  $N_\alpha$  (31) jest identyczny z gęstością warstwy pojedynczej prądu  $N$  wprowadzoną w pracy [9]. Zakładamy, że pola tensorowe (30), (31) są wielkościami zespolonymi klasy  $C^0$ , określonymi na powierzchni  $\partial\Omega_{(n+1)j}$   $j = 1, 2, \dots, a_{n+1}$ . Przyjęte nazwy tych funkcji łączą się z ich interpretacją fizyczną.

Do obszarów  $\Omega_{kj} \subset \Omega_1 \cup \Omega_n \cup \Omega_{n+m}$   $k = 1, n, n+m$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, a_k$  (rys. 1) nie można bezpośrednio zastosować wzoru (26).

Wytnijmy z obszaru  $\Omega_{n+m}$  (rys. 1) część przestrzeni zawartą między półpłaszczyznami  $\Phi = 0$ ,  $\Phi = \epsilon$ ,  $\epsilon \ll 1$ . Uzyskamy obszar

$$\Omega'_{n+m} = \bigcup_{j=1}^{a_{n+m}} \Omega'_{(n+m)j} \quad j = 1, 2, \dots, a_{n+m}, \quad (33)$$

składający się z domknięć  $\bar{\Omega}'_{(n+m)j} \subset \bar{\Omega}_{(n+m)j}$  dyfeomorficznych z kulą domkniętą (z wyjątkiem pewnych krzywych leżących na półpłaszczyznach  $\Phi = 0$ ,  $\Phi = \epsilon$ ). Do obszarów  $\Omega'_{(n+m)j}$  (33) można zastosować wzór Greena (26). Uzyskamy wyrażenie podobne do wzoru (29). Występują w nim:

- całki w gęstości  $M_{\alpha\beta}$  (30),  $N_\alpha$  (31) liczone na częściach  $S_0 \subset \partial\Omega'_{(n+m)j}$ ,  $S_\epsilon \subset \partial\Omega'_{(n+m)j}$  brzegu  $\partial\Omega'_{(n+m)j}$  leżących na półpłaszczyznach  $\Phi = 0$ ,  $\Phi = \epsilon$ .

- całka  $A_{\alpha}^{kj}$  z gęstości  $\mathcal{K}$  [1]

$$A_{\alpha}^{kj}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0 \cup S_{\xi}} \overline{\mathcal{K}^{kj}}(y) v_{,\alpha}^{kj}(x,y) dS, \quad (34)$$

gdzie

$$\overline{\mathcal{K}^{kj}}(y) = A_{\beta}^{kj}(y) n_{\beta}(y) \quad (35)$$

$v_{,\alpha}^{kj}(x,y)$  - funkcja (32)

$$k = n+m, j = 1, 2, \dots, a_{n+m},$$

- wyrażenie postaci (29) z płata  $\partial\Omega'_{(n+m)j} = S_0 \cup S_{\xi}$ .

Rozpatrzmy całki z gęstości  $M_{\alpha\beta}$  (30),  $N_{\alpha}$  (31),  $\mathcal{K}$  (35) po powierzchni  $S_0 \cup S_{\xi}$ . Liczymy je w punkcie  $x \in \Omega'_{(n+m)j}$  przy zdeżeniu parametru  $\xi$  do zera. Wychodząc z punktu całkowania  $y_0 \in S_0$  w kierunku wektora  $n_{\alpha}$  (26) do punktu  $y_{\xi} \in S_{\xi}$  można zauważyć (dla  $\xi \rightarrow 0$ ) że:

- gęstości  $N_{\alpha}(y_0)$ ,  $\mathcal{K}(y_0)$  zmieniają znak w stosunku do  $N_{\alpha}(y_{\xi})$  i  $\mathcal{K}(y_{\xi})$  (zmiana znaku wektora  $n_{\alpha}$ ),

- wielkość  $M_{\alpha\beta}$  znika na  $S_0 \cup S_{\xi}$

$$M_{\alpha\beta}(y_{\xi}) = M_{\alpha\beta}(y_0) = 0$$

- funkcje  $v$  (32) oraz  $v_{,\alpha}$  zachowują ciągłość.

W granicy dla  $\xi = 0$  całka po powierzchni  $S_0 \cup S_{\xi}$  z gęstości  $M_{\alpha\beta}$  (30),  $N_{\alpha}$  (31),  $\mathcal{K}$  (35) jest równa zeru. Dla  $\xi = 0$  obszar  $\Omega'_{(n+m)j}$  (33) pokrywa się z obszarem  $\Omega_{(n+m)j} \subset \Omega_{(n+m)}$   $j = 1, 2, \dots, a_{n+m}$  (rys. 1). Do obliczenia rozkładu potencjału wektorowego wewnątrz obszaru  $\Omega_{(n+m)j}$   $j = 1, 2, \dots, a_{n+m}$  (rys. 1) można więc wykorzystać wzór (29).

Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić w przypadku obszaru  $\Omega_1$  (rys. 1). Obszar ten należy przeciąć płaszczyzną (c) o równaniu  $z = \text{const}$ . Wszystkie podobezary  $\Omega_{1j}$   $j = 1, 2, \dots, a_1$  zostaną podzielone na dwie części, będące wraz z brzegiem obrazami kuli domkniętej. Odwzorowanie to będzie dyfeomorfizmem z wyjątkiem pewnych krzywych leżących na płaszczyźnie (c) [6]. Do takiej części obszaru  $\Omega_{1j}$  wolno zastosować wzór Greena (26). Można udowodnić, że całki z gęstości  $M_{\alpha\beta}$  (30),  $N_{\alpha}$  (31),  $\mathcal{K}$  (35), liczone po części brzegu leżącej na płaszczyźnie (c) w punkcie  $x \in \Omega_{1j}$ , są równe zeru.

Powyższe wynika z faktu, że gęstość  $\mathcal{K}$  (35) znika na (c), a funkcje  $M_{\alpha\beta}$  i  $N_{\alpha}$  zmieniają znak w zależności od tego, czy całki są liczone z jednej lub z drugiej strony powierzchni (c). W konsekwencji wyrażenie całkowe podające rozkład potencjału wektorowego w obszarze  $\Omega_{1j} \subset \Omega_1$   $j = 1, 2, \dots, a_1$  (rys. 1) ma postać wzoru (29) dla indeksu  $k = 1$ .

Aby można było zastosować wzór Greena (26) do obszaru  $\Omega_n$  (rys. 1) należy postąpić podobnie jak w przypadku obszarów  $\Omega_1$  i  $\Omega_{n+m}$ . Obszar  $\Omega_n$  przecinamy równocześnie płaszczyzną ( $c$ ) ( $z = \text{const}$ ) oraz półpłaszczyznami o równaniach  $\Phi = 0$  i  $\Phi = \varepsilon$ . Uwzględniając tok rozumowania przeprowadzony dla obszarów  $\Omega_1$  i  $\Omega_{n+m}$  dochodzimy do wniosku, że również w obszarach  $\Omega_{nj} \subset \Omega_n$ ,  $j = 1, 2, \dots, a_n$  (rys. 1) rozkład potencjału wektorowego określa wyrażenie całkowe (29) dla  $k = n$ ,  $j = 1, 2, \dots, a_n$ .

#### 4. Równania pola elektromagnetycznego w przestrzeni powietrznej

Przestrzeń powietrzną opisujemy obszarem nieograniczonym  $\Omega_p \subset R^3$ . Równania Maxwella (10), (11), (12), (13) i wzory (14), (15) obowiązują również w przestrzeni powietrznej dla przenikalności próżni  $\varepsilon_0$  i  $\mu_0$ . Po wprowadzeniu potencjału wektorowego wg definicji (19) i uwzględnieniu równań Maxwella można uzyskać równanie różniczkowe, jakie spełnia potencjał wektorowy w obszarze  $\Omega_p$ . Równanie to jest identyczne ze wzorem (25), przy czym zakładamy, że:

$$\rho^2 = 0. \quad (36)$$

Warunek (36) jest słuszny w pobliżu układu promieniującego fale elektromagnetyczną w przypadku, gdy jej długość znacznie przewyższa rozmiary układu. Równanie różniczkowe, jakie spełnia potencjał wektorowy w obszarze  $\Omega_p$ , przyjmie postać:

$$\Delta_{\alpha, \beta, \beta} A_{\alpha} = 0. \quad (37)$$

Poszukujemy wyrażenia całkowego na potencjał wektorowy  $A_{\alpha}$ , spełniającego w obszarze  $\Omega_p$  (rys. 1) równania (37), (21). Postępujemy podobnie jak w punkcie poprzednim. Rozpatrywany obszar  $\Omega_p$  nie jest jednozójny. Można go podzielić na podobezary dyfeomorficzne z kulą (płaszczyznami  $z = \text{const}$ ,  $\Phi = 0$ ,  $\Phi = \varepsilon$ ) i zastosować podobne rozumowanie jak w przypadku obszarów  $\Omega_1, \Omega_n, \Omega_{n+m}$ , eliminując całki po powierzchni  $z = \text{const}$ ,  $\Phi = 0$  dla  $\varepsilon = 0$ .

Potencjał wektorowy  $A_{\alpha}^c$  od powierzchni opisujących cewkę  $S_c$  obliczamy identycznie jak w pracy [9]:

$$A_{\alpha}^c(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_c} I_{\alpha}(y) \frac{1}{r(x,y)} dS(y), \quad (38)$$

gdzie  $x \in \Omega_p$ ,  $y \in S_c$ ,

$I_{\alpha}$  - gęstość powierzchniowa prądu.

W artykule [9] dokonano oszacowania zachowania się potencjału wektorowego i indukcji elektromagnetycznej w nieskończoności:

$$A_\alpha \in O\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad \text{dla } R \rightarrow \infty \quad (39)$$

$$\partial_{\alpha\beta\gamma} A_{\gamma,\beta} \in O\left(\frac{1}{R^3}\right) \quad \text{dla } R \rightarrow \infty \quad (40)$$

Uwzględniając te wyniki uzyskujemy wyrażenie całkowe na potencjał wektorowy  $A_\alpha$  w obszarze  $\Omega_p$  [9]:

$$A_\alpha(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega_p} \left[ M_{\alpha\beta}(y) \left(\frac{1}{r(x,y)}\right)_{,\beta} + N_\alpha(y) \left(\frac{1}{r(x,y)}\right) \right] dS(y) + A_\alpha^c(x) \quad (41)$$

gdzie:

$M_{\alpha\beta}$ ,  $N_\alpha$  - funkcje odpowiednio (30), (31) określone na powierzchni  $\partial\Omega_p$ ,  
 $r$  - odległość punktów  $x \in \Omega_p$  i  $y \in \partial\Omega_p$ ,

$$\partial\Omega_p = \left[ \bigcup_{k=n+1}^{n+m} \left( \bigcup_{j=1}^{a_k} S_{kj}^p \right) \right] \cup \left( \bigcup_{k=1}^n S_{k1}^p \right) - \text{zbiór} \quad (42)$$

utworzony z powierzchni  $S_{kj}^p$  (5), (8),

$A_\alpha^c$  - funkcja (38).

## 5. Sformułowanie problemu brzegowego

Zakładamy, że na powierzchniach rozdziału ośrodków  $S_{kj}^p$  (5), (8) i  $S_{kj}$  (6), (9) gęstości prądów i ładunków są równe zero. Definiujemy granice jednostronne wartości natężenia pola elektrycznego, magnetycznego, potencjału wektorowego oraz wektora  $N_\alpha$  (31) na powierzchniach określonych wzorami (5), (6), (7), (8):

${}^1_{E_{\alpha kj}}$ ,  ${}^1_{H_{\alpha kj}}$ ,  ${}^1_{A_{\alpha kj}}$ ,  ${}^1_{N_{\alpha kj}}$  - granice jednostronne w metalu dotyczące ośrodka opisanego obszarem  $\Omega_{kj}$  w punkcie  $y \in \partial\Omega_{kj}$  (dla obszaru  $\Omega_{k(j+1)}$  wszystkie wielkości oznaczamy cyfrą 2 nad literą),

${}^2_{E_{\alpha kj}}$ ,  ${}^2_{H_{\alpha kj}}$ ,  ${}^2_{A_{\alpha kj}}$ ,  ${}^2_{N_{\alpha kj}}$  - granice jednostronne w obszarze  $\Omega_p$  w punkcie  $y \in \partial\Omega_p$  (42).

Wektor  $N_\alpha$  (31) określamy w pobliżu brzegu  $\partial\Omega$  (powierzchnia klasy  $C_2$ ) poprzez:

- zbudowanie odpowiedniego układu współrzędnych dla otoczenia punktów powierzchni  $\partial\Omega$ ,
- rozpropagowanie wektora  $n_\alpha$  w tym otoczeniu,
- zdefiniowanie wektora  $N_\alpha$  (31) w przestrzeni.

Mamy następujące zależności zachodzące dla punktu  $y \in S_{kj}$  (wzory (6), (9)):

$$e_{\alpha\beta\gamma} n_\beta (E_\gamma^{1kj} - E_\gamma^{2k(j+1)}) = 0, \quad (43)$$

$$e_{\alpha\beta\gamma} n_\beta (H_\gamma^{1kj} - H_\gamma^{2k(j+1)}) = 0, \quad (44)$$

$$n_\alpha (\epsilon^{kj} E_\alpha^{1kj} - \epsilon^{k(j+1)} E_\alpha^{2k(j+1)}) = 0, \quad (45)$$

$$n_\alpha (\mu^{kj} H_\alpha^{1kj} - \mu^{k(j+1)} H_\alpha^{2k(j+1)}) = 0, \quad (46)$$

gdzie  $n_\alpha$  - pole wektorów jednostkowych normalnych do  $S_{kj}$  (6), (9) skierowanych na zewnątrz obszaru  $\Omega_{kj}$

$$k = 1, 2, \dots, n+m \quad j = 1, 2, \dots, (a_k - 1).$$

Analogicznie dla punktu  $y \in S_{kj}^p$  (wzory (5), (8)):

$$e_{\alpha\beta\gamma} n_\beta (E_\gamma^2 - E_\gamma^{1kj}) = 0, \quad (47)$$

$$e_{\alpha\beta\gamma} n_\beta (H_\gamma^2 - H_\gamma^{1kj}) = 0, \quad (48)$$

$$n_\alpha (\epsilon_0 E_\alpha^2 - \epsilon^{kj} E_\alpha^{1kj}) = 0, \quad (49)$$

$$n_\alpha (\mu_0 H_\alpha^2 - \mu^{kj} H_\alpha^{1kj}) = 0, \quad (50)$$

gdzie  $n_\alpha$  - pole wektorów jednostkowych normalnych do  $\Omega_p$  skierowanych na zewnątrz obszaru  $\Omega_p$ .

Dla płatów  $S_{k1}^p$  (8) indeksy  $k, j$  we wzorach (47), (48), (49), (50) przyjmują wartości  $k = 1, 2, \dots, n, j = 1$ , natomiast dla powierzchni  $S_{kj}^p$  (5)  $k = n+1, \dots, n+m, j = 1, 2, \dots, a_k$ .

Warunki graniczne (45), (49) spełniane są tożsamościowo (prostokątność wektorów  $n_\alpha$  i  $E_\alpha$ ). W dowodzie jednoznaczności postawionego problemu brzegowego (kolejna publikacja) będziemy korzystać z warunków (43), (44), (47), (48). Pozostałe równania (46), (50) niepotrzebne w dowodzie jednoznaczności można pominąć w sformułowaniu problemu brzegowego [1].

Podstawiamy równania (15), (19) do warunków (44), (48) oraz równania (20), (22) do (43), (47). Otrzymujemy warunki graniczne, jakie spełnia potencjał wektorowy dla punktu  $y \in S_{kj}$  (6), (9):

$$e_{\alpha\beta\gamma} n_{\beta} (A_{\gamma}^{1kj} - A_{\gamma}^{2k(j+1)}) = 0, \quad (51)$$

$$\frac{1}{\mu^{kj}} N_{\alpha}^{1kj} - \frac{1}{\mu^{k(j+1)}} N_{\alpha}^{2k(j+1)} = 0 \quad (52)$$

oraz dla punktu  $y \in S_{kj}^p$  (5), (8)

$$e_{\alpha\beta\gamma} n_{\beta} (A_{\gamma}^2 - A_{\gamma}^{1kj}) = 0, \quad (53)$$

$$\frac{1}{\mu^0} N_{\alpha}^2 - \frac{1}{\mu^{kj}} N_{\alpha}^{1kj} = 0. \quad (54)$$

Analogiczne warunki spełnienia potencjał wektorowy na powierzchni cewki [9]:

$$e_{\alpha\beta\gamma} n_{\beta} (A_{\gamma}^1 - A_{\gamma}^2) = 0, \quad (55)$$

$$N_{\alpha}^1 - N_{\alpha}^2 = 0, \quad (56)$$

gdzie  $A_{\alpha}^1, A_{\alpha}^2, N_{\alpha}^1, N_{\alpha}^2$  - granice jednostronne wartości potencjału wektorowego i wektora  $N_{\alpha}$  obliczane z jednej lub drugiej strony cewki (cyfra 1 lub 2),  $n_{\alpha}$  - pole wektorów jednostkowych, normalnych określonych na  $S_{\alpha}$ .

Obecnie możemy przystąpić do sformułowania problemu brzegowego. Poszukujemy rozwiązania potencjału wektorowego  $A_{\alpha}$  w przestrzeni (rys. 1), który spełnia:

- w nieskończoności warunki (39), (40),
- na powierzchni cewki równania (55), (56),
- na brzegach ośrodków przewodzących warunki graniczne (51), (52), (53), (54),
- równania (25), (21) wewnątrz ośrodków przewodzących oraz (37), (21) w przestrzeni powietrznej.

W celu rozwiązania postawionego problemu brzegowego wyprowadzono wzory całkowe (29), (41) określające rozkład potencjału wektorowego w całej przestrzeni. Uwzględniając wyniki prac [9], [10], [11], [12], [13] można stwierdzić, że wyrażenia (29), (41) spełniają:

- w całej przestrzeni równania (25), (37), (21) [10],
- na powierzchni cewki warunki (55), (56) [11],
- warunek symetrii osiowo-obrotowej rozkładu potencjału wektorowego w przestrzeni [13],

- w nieskończoności warunki (39), (40) [9],
- na brzegach ośrodków warunki graniczne (51), (52), (53), (54) [13].

## 6. Wnioski

Wyrażenia całkowe (29), (41) spełniają wszystkie postulaty postawione-go problemu brzegowego. Nie stanowią jednak poszukiwanego rozwiązania dopóki nie znamy funkcji podcałkowych  $M_{\alpha\beta}$  i  $N_{\alpha}$ . Gęstości  $M_{\alpha\beta}$  i  $N_{\alpha}$  można będzie obliczyć z odpowiedniego układu równań całkowych zapisanego na brzegach ośrodków przewodzących [4], [5], [8], [12], [13].

Dowód iatnienia i jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego oraz eksperymenty numeryczne testujące algorytm takich obliczeń są obeszernymi i czasochłonnymi zagadnieniami. Dopiero po uporaniu się z nimi (w kolejnych publikacjach) metodę można by uznać za opracowaną. Byłaby przydatna szczególnie w układzie brył o różnych konduktywnościach. Ciekawym zastosowaniem może być przypadek nagrzewania indukcyjnego, w trakcie którego poszczególne części bryły metalu różnią się znacznie konduktywnością i przenikalnością magnetyczną (np. ferromagnetyk tak nagrzwany, że warstwy powierzchniowe znajdują się powyżej punktu Curie, a wewnątrz poniżej tego punktu). Nagrzewanie się ekranu lub obudowy urządzenia łącznie z ośrodkiem nagrzewanym (wsadem) może być traktowane jako jeden problem obliczeniowy. Bryłę metalu o nieliniowej charakterystyce magnesowania  $B = f(H)$  można podzielić na podobezary, w granicach których przyjmujemy stałe wartości przenikalności magnetycznej. Obliczenie takiego układu wg proponowanej metody jest stosunkowo nieskomplikowanym i dokładnym sposobem rozwiązywania pola elektromagnetycznego w ośrodkach nieliniowych. W tym przypadku podział bryły metalu na podobezary byłby zależny od kształtu cewki (rozkładu źródeł pola elektromagnetycznego) i wielkości prądu cewki.

## LITERATURA

- [1] Bochenek K.: Metody analizy pól elektromagnetycznych. PWN, Warszawa 1961.
- [2] Gołąb S.: Rachunek tensorowy. PWN, Warszawa 1966.
- [3] Jackson J.D.: Elektrodynamika klasyczna. PWN, Warszawa 1982.
- [4] Marcinkowska H.: Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych. PWN, Warszawa 1972.
- [5] Müller C.: Grundprobleme der Mathematischen Theorie Elektromagnetischer Schwingungen, Springer Verlag Berlin 1957.
- [6] Sikoraki R.: Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje wielu zmiennych. PWN, Warszawa 1977.
- [7] Suffczyński M.: Elektrodynamika. PWN, Warszawa 1969.
- [8] Tozoní O.V., Maergoiz I.D.: Raschet trekhmernykh elektromagnitnykh polej. Kijów 1974.



- [9] Wilczyński E.: Problem brzegowy analizy pola elektromagnetycznego sinusoidalnie zmiennego w przestrzeni powietrznej i objętości metalu. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., s. Elektryka, z.75, Gliwice 1981.
- [10] Wilczyński E.: Potencjał wektorowy na granicy środowiska powietrza i przewodnika metalowego, dyskusja poprawności postawionego problemu brzegowego. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., s. Elektryka z. 75, Gliwice 1981.
- [11] Wilczyński E.: Zagadnienie istnienia rozwiązania problemu brzegowego analizy pola elektromagnetycznego w przestrzeni powietrznej i objętości metalu. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., s. Elektryka, z. 75, Gliwice 1981.
- [12] Wilczyński E.: Zastosowanie metody równań całkowych do wyznaczania parametrów elektromagnetycznych układu cewka - walec przewodzący, IX SPETO Gliwice-Wisła 1986.
- [13] Wilczyński E.: Analiza pola magnetycznego w układzie bryła metalu - powietrze. Rozprawa doktorska, Pol. Śl. Gliwice 1982.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Stanisław Krzemiński

Wpłynęło do redakcji dnia 15 maja 1987 r.

ПРОБЛЕМА КРАЕВОГО АНАЛИЗА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ  
В СИСТЕМЕ РАЗНЫХ ПРОВОДЯЩИХ  
СРЕД ИМЕЮЩИХ ВРАЩАТЕЛЬНУЮ - ОСЕВУЮ СИММЕТРИЮ

Р е з ю м е

В работе сформулирована краевая задача расчета электромагнитного поля в системе кусок металла с разными проводимостями, электрическими и магнитными проницаемостями. Предполагается, что каждый кусок является линейной изотропной и однородной средой. Источником электромагнитного поля является катушка (поверхность с определенной плотностью токов). Система сред и катушка имеют вращательно-осевую симметрию. Электромагнитное поле рассчитывается для синусоидальных переменных токов. Векторный потенциал является искомой функцией электромагнитного поля. В работе сформулированы дифференциальные уравнения, которые удовлетворяют векторному потенциалу в каждой среде, условиям на краю области и в бесконечности. В статье предложено решение этих уравнений после вывода соответствующих интегральных формул. Принимая итоги работ [9], [10], [11], [12], [13] установлены формулы удовлетворяющие дифференциальным уравнениям в пространстве и соответствующим условиям.

BOUNDARY PROBLEM OF ELECTROMAGNETIC FIELD  
ANALYSIS IN A SYSTEM OF MANY CONDUCTING  
MEDIA WITH AXIAL-ROTATIONAL SYMMETRY

S u m m a r y

The boundary problem of calculating the electromagnetic field in the system of many metal blocks of various conductivities, magnetic permeabilities and permittivities has been formulated in the paper. It is assumed that every block is a linear, isotropic and homogenous medium. The coil described by the surface with a given surface current density is a source of the electromagnetic field. The system of media and the coil have an axial - rotational symmetry. The electromagnetic field is calculated in the sinusoidal steady state. Vector potential constitutes the function of the electromagnetic field being looked for. The paper formulates the differential equations that are followed by the vector potential in particular media as well as conditions on the boundaries of the areas and in the infinity. The way of solving these equations has been also suggested by deriving special integral formulae.

Having taken the results of papers [9], [10], [11], [12], [13] into account, it has been stated that these formulae satisfy the integral equations in a space and adequate boundary conditions.

Stefan PASZEK

WYKORZYSTANIE TWIERDZENIA O ISTNIENIU TRANSFORMACJI UKŁADU  
LINIOWYCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH O WSPÓŁCZYNNIKACH OKRESOWO ZMIENNYCH  
DO STAŁYCH DLA ROZWIĄZANIA RÓWNAŃ STANU  
NA PRZYKŁADZIE MASZYNY SYNCHRONICZNEJ Z NIESYMETRIĄ ZEWNĘTRZNĄ

**Streszczenie.** Przedstawiono metodę służącą do uzyskania analitycznego rozwiązania stanów nieustalonych modeli maszyn synchronicznych wirujących ze stałą prędkością przy niesymetrycznym obciążeniu, bazującą na iteracyjnym wyznaczeniu wartości własnych nieznanej macierzy układu liniowych równań różniczkowych stanu o stałych współczynnikach jako macierzy stransformowanej z pierwotnego układu równań stanu o współczynnikach okresowych. Metodę pokazano na przykładzie wybranego niesymetrycznego obciążenia - zwarcia dwufazowego z biegu jałowego. Wyznaczono zmienność wartości własnych w funkcji częstotliwości dla modeli obwodowych dwóch maszyn synchronicznych o różnych mocach znamionowych. Wyznaczono przebiegi elektromagnetycznych zmiennych stanu dla dwóch skrajnych częstotliwości obrotowych. Przedstawiono częstotliwościowe widma prądu wzbudzenia dla stanu ustalonego i dla chwili początkowej po zakłóceniu, rozumiane w ten sposób, że pomija się wykładnicze zanikanie składników.

Podkreślono, że przedstawiona metoda, w odróżnieniu od metod przybliżonych znanych w literaturze, jest jedyną pozwalającą na analityczne rozwiązanie dla dowolnie małej prędkości obrotowej wirnika i dowolnej niesymetrii impedancyjnej obciążenia.

### 1. Wstęp i założenia

Typowym przykładem równań stanu o okresowo zmiennych współczynnikach jest opis matematyczny maszyny synchronicznej przy obciążeniu niesymetrycznym. W równaniach tych występuje macierz indukcyjności o współczynnikach zmiennych okresowo względem kąta położenia magnesu i twornika, a przy stałej prędkości obrotowej również względem czasu. Równania te są liniowe przy następujących założeniach [7]:

- a) nienasycony obwód magnetyczny,
- b) sinusoidalne rozłożenie uzwojeń twornika,
- c) stałość prędkości obrotowej,
- d) przyjęcie modelu obwodowego maszyny o stałych skupionych, w którym wyodrębniono obwód tłumiący umieszczony w osi wzdłużnej  $d$  i analogicznie w osi poprzecznej  $q$  maszyny.

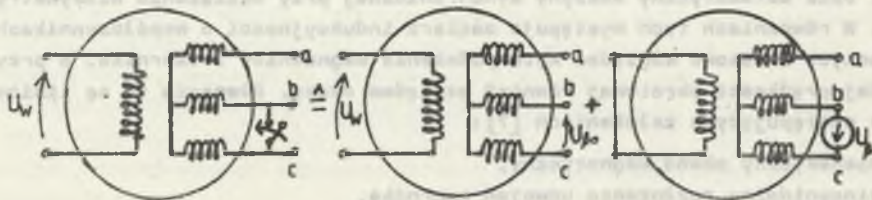
Lapunow i Floquet [9] wykazali, że istnieje macierz transformacyjna macierzy wyjściowego układu równań o współczynnikach okresowych do takiego nowego układu współrzędnych, w którym nastąpiłoby ustalenie współczynników macierzy układu. Mimo że ta macierz transformacyjna w ogólnym przypadku nie jest znana, własność istnienia takiej transformacji może być pomocna przy poszukiwaniu rozwiązania. W tym nieznanym nowym układzie współrzędnych nie zmienia się wymiar macierzy ustalonych współczynników w stosunku do wymiaru macierzy współczynników okresowych. Można zatem określić ilość wartości własnych tej nieznannej macierzy o stałych współczynnikach. Przedstawiona zostanie rekurencyjno-analityczna metoda bazująca na iteracyjnym wyznaczeniu tych wartości własnych.

## 2. Rozwiązanie szczególnego przypadku niesymetrycznego obciążenia twornika maszyny synchronicznej, zwarcia dwufazowego z biegu jałowego

Układ równań różniczkowych opisujący stan nieustalony maszyny synchronicznej przy zwarcia dwufazowym składa się z czterech równań (występują trzy niezależne obwody wirnika: obwód wzbudzenia, obwody tłumiące w osiach  $d$  i  $q$  oraz jeden obwód stojana, któremu odpowiada równanie stanu w osi  $\beta$ ).

Macierze indukcyjnościowe i rezystancyjne występujące w wyjściowym układzie równań mają wymiar  $4 \times 4$ , występują zatem cztery wartości własne nieznannej macierzy o stałych współczynnikach.

Przy rozwiązywaniu niesymetrycznego zwarcia z biegu jałowego można skorzystać z zasady superpozycji i wyników niesymetryczny stan nieustalony złożyć ze stanu biegu jałowego i stanu zakłóceniewego o zerowych warunkach początkowych. W przypadku zwarcia dwufazowego stan zakłóceniewy można uzyskać przez zełączenie do dwóch faz twornika maszyny niewzbudzonej napięcia międzyprzewodowego z przeciwnym znakiem w stosunku do napięcia biegu jałowego maszyny (rys. 1).



Rys. 1. Ilustracja zastosowania metody superpozycji do rozwiązania zwarcia dwufazowego z biegu jałowego

$U_{\beta 0}$  - napięcia biegu jałowego

Fig. 1. Example of the use of superposition method for the solution of 2-phase short - circuit of idle running

$U_{\beta 0}$  - idle running voltage

Podstawą rozwiązania jest wyrażenie prądów twornika w osiach  $d$  i  $q$  za pomocą funkcji rzeczywistych [1], [8], [6]

$$I_{d,q} = \sum_{h=0}^4 e^{-\rho_h t} F_{hd,q}(t). \quad (1a)$$

Uwzględnienia więzów wynikających z asymetrii obciążenia i periodyczności współczynników w równaniach stanu implikuje periodyczną postać funkcji:

$$F_{hd}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (U_{hk} e^{j(\psi_0 + \omega t)k} + D'_{hk} e^{-j(\psi_0 + \omega t)k}) + D_{ho}, \quad (1b)$$

$$F_{hq}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (Q_{nk} e^{j(\psi_0 + \omega t)k} + Q'_{hk} e^{-j(\psi_0 + \omega t)k}) + Q_{ho}.$$

gdzie:

- $\rho_h$  ( $h=1,2,3,4$ ) - wartości własne nieznannej macierzy układu liniowych równań stanu o współczynnikach stałych,
- $\omega$  - elektryczna prędkość obrotowa,
- $D, Q$  - współczynniki wagowe prądów twornika w osiach  $d$  i  $q$  (wielkości primowane odnoszą się do ujemnych pulsacji).

Wzory (1a) i (1b) dotyczą zarówno stanu zakłóceniewego (dla  $h = 1,2,3,4$ ), jak również odnoszą się do stanu ustalonego, jeśli założyć, że odpowiada mu wartość własna  $\rho_0 = 0$ .

Wzory (1) uwzględniono w równaniach dla składowych zakłóceniewych prądu i napięcia twornika wynikających z rys. 1 [6]

$$I_{\alpha} = 0, \quad U_{\beta} = -U_{\beta 0}(t) = -U_{q0} \cos \psi, \quad (2)$$

gdzie:

- $U_{\beta 0}, U_{q0}$  - napięcie biegu jałowego twornika w osi  $\beta$  lub  $q$ ,
- $\psi$  - kąt położenia twornika względem magnetycznej osi.

Przeprowadzono następnie transformację Laplace'a otrzymanych równań i uzyskano wyrażenia operatorowe wiążące amplitudy współczynników wagowych  $D$  i  $Q$  [6]. Przez porównanie składników o jednakowych biegunach w tych wyrażeniach otrzymano równania algebraiczne wiążące ze sobą odpowiednio parzyste lub nieparzyste współczynniki wagowe prądów twornika:

$$-Q_{hk-1} + jD_{hk-1} + Q_{hk+1} + jD_{hk+1} = 0 \quad (3a)$$

$$-Q'_{hk+1} + jD'_{hk+1} + Q'_{hk-1} + jD'_{hk-1} = 0 \quad (3b)$$

$$D_{hk-1} [R + (-\varphi_h + jk\omega)L_d(-\varphi_h + j(k-1)\omega)] + jQ_{hk-1} [R + (-\varphi_h + jk\omega)L_q(-\varphi_h + j(k-1)\omega)] - D_{hk+1} [R + (-\varphi_h + jk\omega)L_d(-\varphi_h + j(k+1)\omega)] + jQ_{hk+1} [R + (-\varphi_h + jk\omega)L_q(-\varphi_h + j(k+1)\omega)] = 0 \quad (3c)$$

$$D'_{hk+1} [(R + (-\varphi_h - jk\omega)L_d(-\varphi_h - j(k+1)\omega))] + jQ'_{hk+1} [R + (-\varphi_h - jk\omega)L_q(-\varphi_h - j(k+1)\omega)] - D'_{hk-1} [(R + (-\varphi_h - jk\omega)L_d(-\varphi_h - j(k-1)\omega))] + jQ'_{hk-1} [R + (-\varphi_h - jk\omega)L_q(-\varphi_h - j(k-1)\omega)] = 0. \quad (3d)$$

Ponadto dla  $h = 0$  i  $\varphi_0 = 0$ :

$$-jU_{q0} = [R + j\omega L_d(p=0)]D_{00} + j[R + j\omega L_q(p=0)]Q_{00} + j[R + j\omega L_q(p=2j\omega)]Q_{02} - [R + j\omega L_d(p=2j\omega)]D_{02}. \quad (3e)$$

Ze wzorów (3) dla dużych wekaźników  $k$ , które odpowiadają składnikom prądów twornika odnoszących się do częstotliwości dążącej do nieskończoności, można otrzymać wyrażenie:

$$\frac{D_{k+3}}{D_{k+1}} \cdot \frac{D_{k+1}}{D_{k-1}} + 2a \frac{D_{k+1}}{D_{k-1}} + 1 = 0, \quad (4)$$

gdzie:

$$a = \frac{L_d'' + L_q''}{L_q'' - L_d''},$$

$L_d''$  i  $L_q''$  - graniczne indukcyjności operatorowe dla  $p \rightarrow \infty$  (indukcyjności podprzejściowe) twornika w osiach  $d$  i  $q$ .

Wprowadzono następujące oznaczenia stosunków współczynników wagowych:

$$\frac{D_{k+1}}{D_{k-1}} = -\xi_{k+1}, \quad \frac{D'_{k+1}}{D'_{k-1}} = -\xi'_{k+1}, \quad \frac{Q_k}{D_k} = jk_k, \quad \frac{Q'_k}{D'_k} = -jk'_k. \quad (5)$$

Założono, że współczynniki wagowe  $D_{k-1}$ ,  $D_{k+1}$ ,  $D_{k+3}$ , tworzą dla dużych rosnących nieograniczenie wartości wskaźnika  $k$  malejący postęp geometryczny o ilorazie  $-\xi_{\infty}$ .

Implikacja takiego założenia wynika z przybliżonej analizy zwarć niesymetrycznych i rozumowania fizykalnego. Z równania kwadratowego wynikającego z wzoru (5) dla  $k \rightarrow \infty$  wynikają wartości współczynników  $\xi_{\infty}$  i  $k_{\infty}$ :

$$-\xi_{\infty} = -a + \sqrt{a^2 - 1}, \quad k_{\infty} = \sqrt{\frac{L_d''}{L_q''}} \quad (6)$$

Wyznaczenie wartości własnych odbywa się metodą iteracyjną. Rozpoczynamy proces iteracji np. od dużego nieparzystego wskaźnika  $k = N$ , dla którego można założyć przybliżone relacje:

$$\frac{D_{hN}}{D_{hN-2}} = -\xi_N \approx -\xi_{\infty}, \quad \frac{D'_{hN}}{D'_{hN-2}} \approx -\xi_{\infty}, \quad \frac{Q_{hN}}{D_{hN}} \approx jk_{\infty}, \quad \frac{Q'_{hN}}{D'_{hN}} \approx -jk_{\infty}. \quad (7)$$

Zakładamy pierwsze przybliżenie wartości własnej korzystając np. ze wzorów przybliżonych (oznaczone  $\rho'$ ). Ze wzorów (3) wyznaczamy  $\xi_{N-2}$ ,  $\xi'_{N-2}$ ,  $\xi_{N-4}$ ,  $\xi'_{N-4}$  ... dochodząc do  $\xi_1$  i  $\xi'_1$ .

Z uwagi na to, że

$$-\xi_1 = \frac{D_1}{D_{-1}} = \frac{D_1}{D'_1} \quad \text{oraz} \quad -\xi'_1 = \frac{D'_1}{D_{-1}} = \frac{D'_1}{D_1},$$

wyznaczono warunek określający poszukiwaną graniczną wartość własną:

$$\xi_1 \xi'_1 = 1. \quad (8a)$$

Ze względu na to, że przyjęto początkowo pierwsze przybliżenie na wartość własną, wartości  $\xi_1$  i  $\xi'_1$  obliczona ze pomocą  $\rho'$  nie spełniają dokładnie równania (8a). Równanie to można przekształcić do równania wyznaczającego poprawioną wartość własną, uwzględniając fakt, że zarówno  $\xi_1$  i  $\xi'_1$  są uwikłanymi funkcjami wartości własnej:

$$\rho'' a'(\rho') + b'(\rho') = 0, \quad (8b)$$

gdzie  $a'$  i  $b'$  zmieniają się, jak się okazało, powoli względem  $\rho'$ , a  $\rho''$  jest to poprawiona wartość własna. Równanie (8b) jest równaniem liniowym 1 stopnia względem  $\rho''$ , istnieje więc tylko jedna wartość własna  $\rho''_1$  związana z nieparzystymi wskaźnikami. Poprawioną wartość własną  $\rho''_1$  wyznaczoną z równania (8b) uwzględnia się ponownie w równaniach (3), dochodząc drogą kolejnych iteracji do coraz bardziej poprawnej wartości  $\rho_1$ , spełniającej równanie (8a) z dowolnie dużą dokładnością.

Podobnie dla wektórków parzystych stosując te same wzory dochodzimy do równań:

$$\frac{Q_0}{D_0} = jk_0, \quad \frac{Q'_0}{D'_0} = -jk'_0,$$

z których otrzymujemy warunek określający poszukiwaną graniczną poprawioną wartość własną:

$$k_0 + k'_0 = 0. \quad (9a)$$

Korzystając z równań (3) można równanie (9a) zapisać następująco:

$$\rho'^3 a''(\rho') + \rho''^2 b''(\rho') + \rho'' c''(\rho') + d''(\rho') = 0, \quad (9b)$$

gdzie  $a''$ ,  $b''$ ,  $c''$ ,  $d''$  zmieniają się również powoli w zależności od  $\rho'$ . Równanie (9b) jest równaniem 3 stopnia względem  $\rho''$ , wyznacza zatem trzy wartości własne związane z parzystymi wektórkami  $k$ .

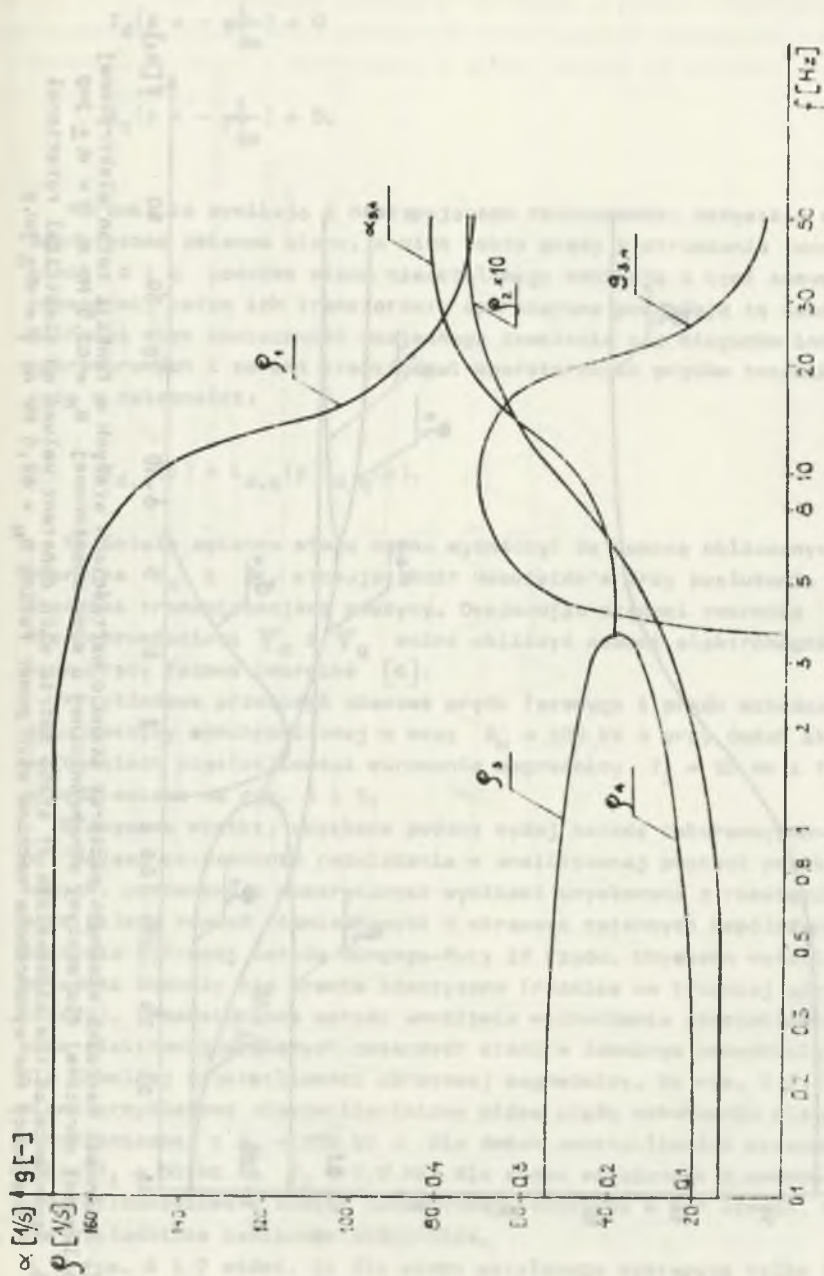
Na rys. 2 i 3 przedstawiono obliczone wartości własne w funkcji częstotliwości dla dwóch modeli maszyn synchronicznych, których parametry odnoszą się do maszyn o mocach znamionowych  $S_N = 100$  kV A i  $S_N = 62,5$  MV A. Wartości  $\rho_1$  i  $\rho_2$  są rzeczywiste dla obydwóch maszyn w rozpatrywanym przedziale częstotliwości (0,1 Hz - 50 Hz).  $\rho_3$  i  $\rho_4$  w zależności od rodzaju maszyny i częstotliwości wirowania są rzeczywiste lub zespolone sprzężone.

W celu wyznaczenia prądów  $I_d$  i  $I_q$  w stojanie wystarczy wyznaczyć cztery współczynniki wagowe związane z zanikającymi składnikami prądów  $D_{11}$ ,  $D_{20}$ ,  $D_{30}$ ,  $D_{40}$  oraz dwa  $D_{00}$  i  $Q_{00}$  związane ze stanem ustalonym. Pozostałe współczynniki wagowe można obliczyć znając wyznaczone uprzednio wartości własne i wymienione wyżej współczynniki.

Wartości współczynników  $D_{00}$  i  $Q_{00}$  wynikają bezpośrednio ze wzoru (3e), natomiast do wyznaczenia pozostałych współczynników służą równania wykorzystujące zerowanie warunków początkowych prądu twornika w osi  $\beta$  oraz we wszystkich trzech obwodach magneśnicy (współczynniki odnoszące się do stanu zakłóceniewego obliczane są za pomocą  $D_{00}$  i  $Q_{00}$ ). W równaniach określających przebiegi zwarciove nie uwzględnia się w sposób jawny prądów w obwodach magneśnicy. Można obejść zerowy warunek początkowy obwodów magneśnicy, kładąc:

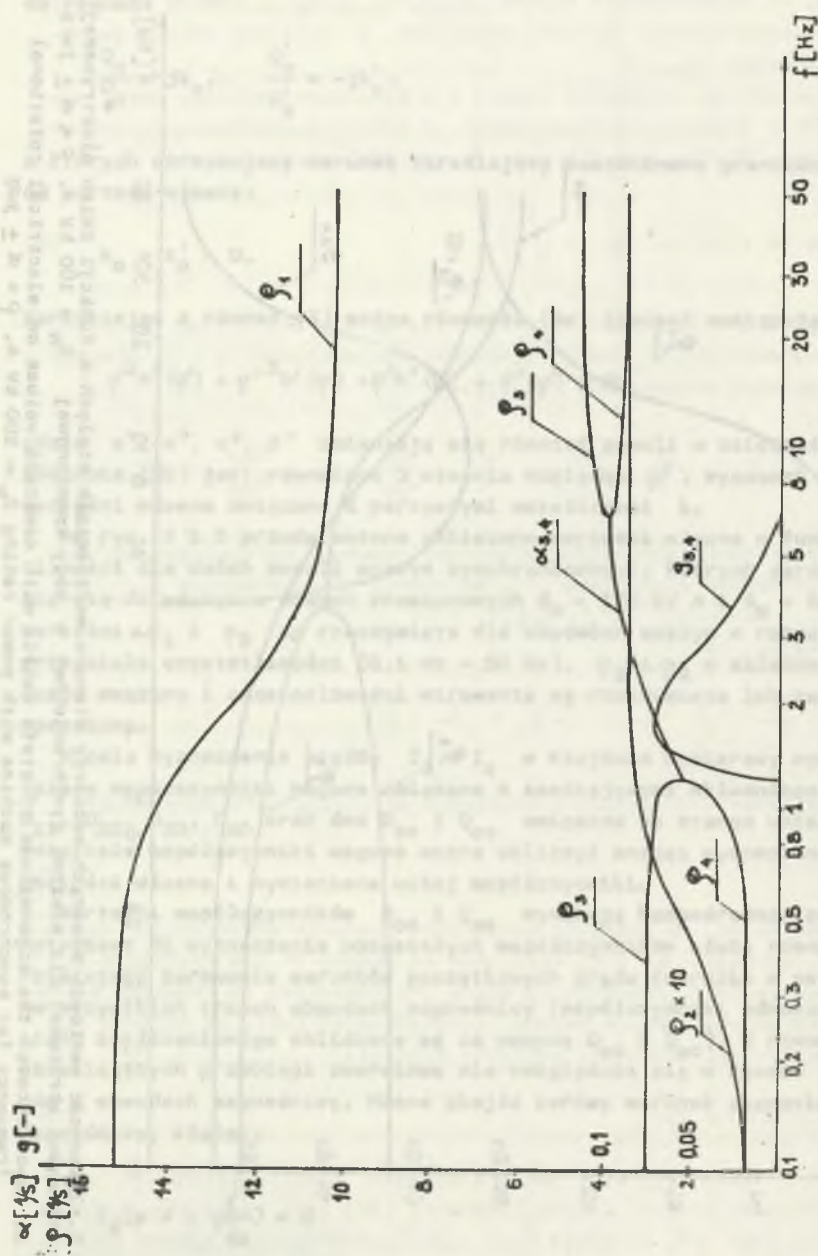
$$I_d(p = -\frac{1}{T_{d0}}) = 0 \quad (10a)$$





Rys. 2. Zmienność wartości własnych macierzy stanu o wartościach stałych w funkcji zmian elektrycznej częstotliwości obrotowej dla maszyny synchronicznej o mocy znamionowej  $S_N = 100$  kV A,  $\rho = \alpha \pm j\omega g$

Fig. 2. Dependence of the eigenvalues of state matrix with constant values on electrical rotational frequency for synchronous machine with power rating  $S_N = 100$  kV A,  $\rho = \alpha \pm j\omega g$



Rys. 3. Zmianność wartości własnych macierzy stanu o wartościach stałych w funkcji zmian elektrycznej częstotliwości obrotowej dla maszyny synchronicznej o mocy znamionowej  $S_N = 62,5$  MW A,  $p = \alpha \pm j\omega g$

Fig. 3. Dependence of the eigenvalues of state matrix with constant values on electrical rotational frequency for synchronous machine with power rating  $S_N = 62,5$  MW A,  $p = \alpha \pm j\omega g$

$$I_d(p = -\frac{1}{T_d}) = 0 \quad (10b)$$

$$I_q(p = -\frac{1}{T_q}) = 0. \quad (10c)$$

Warunki te wynikają z następującego rozumowania: wszystkie elektromagnetyczne zmienne stanu, a więc także prądy i strumienie twornika w osiach  $d$  i  $q$  podczas stanu nieustalonego zanikają z tymi samymi stałymi czasowymi, zatem ich transformaty operatorowe posiadają te same bieguny. Zachodzi więc konieczność wzajemnego znoszenia się biegunów indukcyjności operatorowych z zerami transformat operatorowych prądów twornika, wynikająca z zależności:

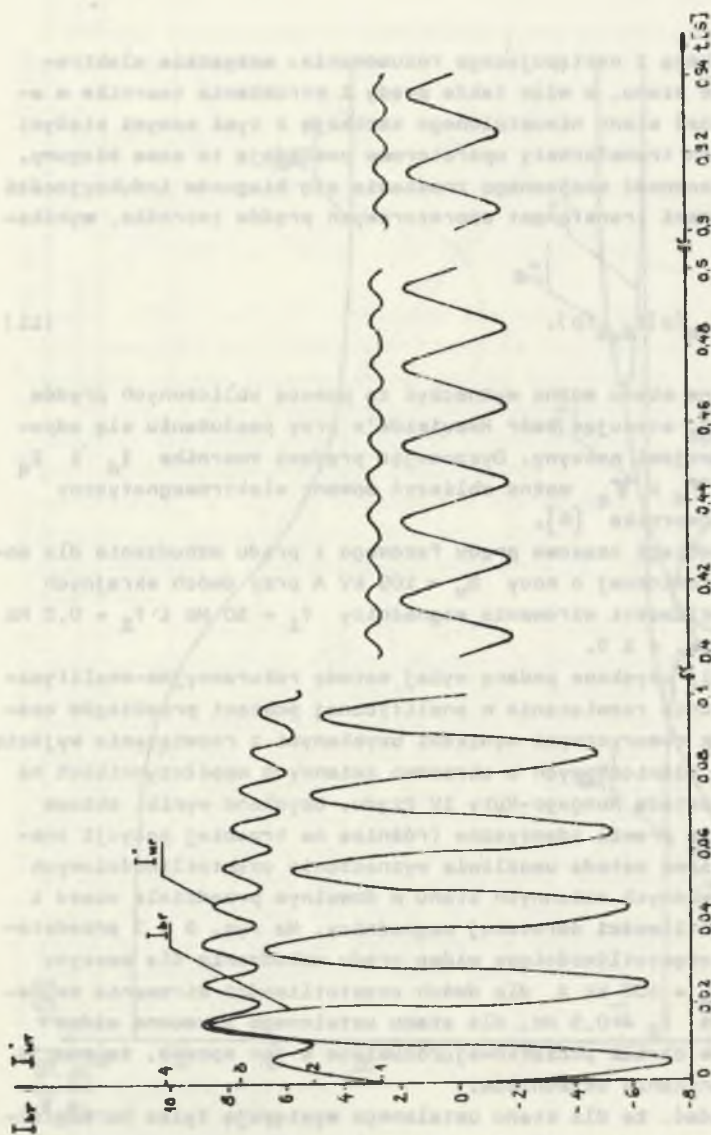
$$\Psi_{d,q}(p) = L_{d,q}(p)I_{d,q}(p). \quad (11)$$

Pozostałe zmienne stanu można wyznaczyć za pomocą obliczonych prądów twornika  $I_d$  i  $I_q$ , stosując wzór Heaviside'a przy posłużeniu się odpowiednimi transmitancjami maszyny. Dysponując prądami twornika  $I_d$  i  $I_q$  oraz strumieniami  $\Psi_d$  i  $\Psi_q$  można obliczyć moment elektromagnetyczny oraz prądy fazowe twornika [6].

Przykładowe przebiegi czasowe prądu fazowego i prądu wzbudzenia dla modelu maszyny synchronicznej o mocy  $S_N = 100$  kW przy dwóch skrajnych wartościach częstotliwości wirowania magnesnicy  $f_1 = 50$  Hz i  $f_2 = 0,5$  Hz przedstawiono na rys. 4 i 5.

Otrzymane wyniki, uzyskane podaną wyżej metodą rekurencyjno-analityczną, dającą ostatecznie rozwiązanie w analitycznej postaci przebiegów czasowych, porównano z numerycznymi wynikami uzyskanymi z rozwiązania wyjściowego układu równań różniczkowych o okresowo zmiennych współczynnikach na maszynie cyfrowej metodą Rungego-Kuty IV rzędu. Uzyskane wyniki obiema metodami okazały się prawie identyczne (różnice na trzeciej pozycji znaczącej). Przedstawiona metoda umożliwia wyznaczenie częstotliwościowych widm elektromagnetycznych zmiennych stanu w dowolnym przedziale czasu i dla dowolnej częstotliwości obrotowej magnesnicy. Na rys. 6 i 7 przedstawiono przykładowe częstotliwościowe widma prądu wzbudzenia dla maszyny synchronicznej o  $S_N = 100$  kW dla dwóch częstotliwości wirowania magnesnicy  $f_1 = 50$  Hz i  $f_2 = 0,5$  Hz, dla stanu ustalonego i umowne widma częstotliwościowe w chwili początkowej rozumiane w ten sposób, że pomija się wykładnicze zanikanie składników.

Z rys. 6 i 7 widać, że dla stanu ustalonego występują tylko harmoniczne parzyste prądu wzbudzenia. Dla początkowych chwil czasu, w przypadku gdy wszystkie wartości własne są rzeczywiste ( $f_2 = 0,5$  Hz), występują zarówno harmoniczne parzyste jak i nieparzyste, natomiast gdy wartości włas-



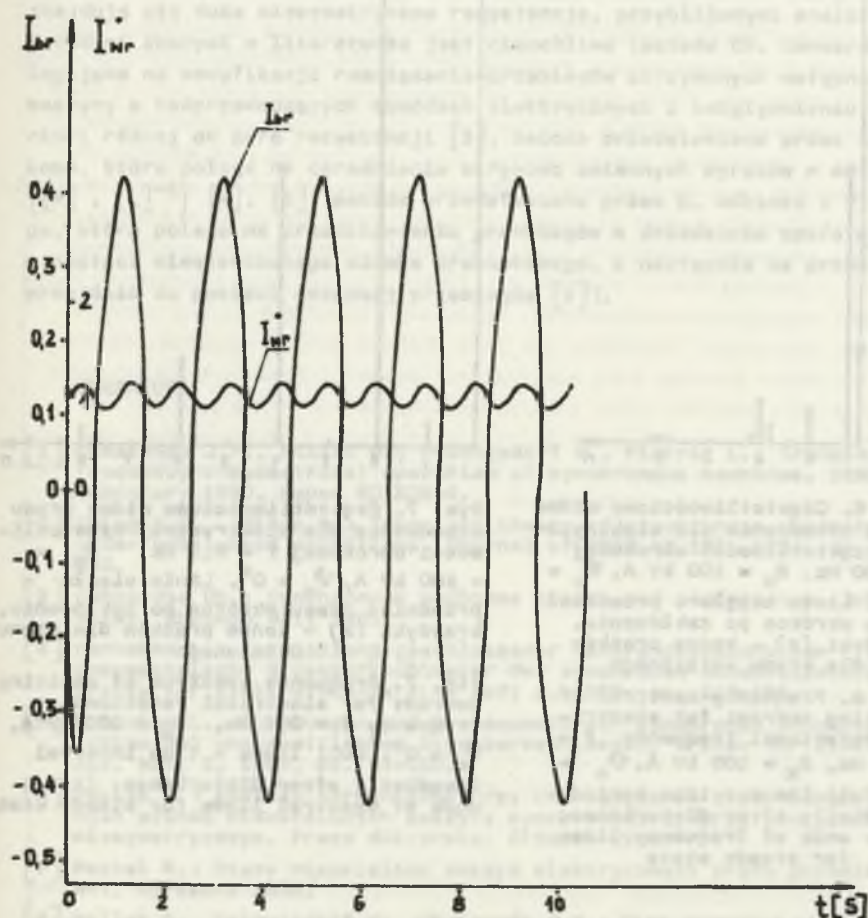
Rys. 4. Przebiegi względnego prądu fazowego twornika  $I_{br}$  i względnego sprowadzonego prądu wzbudzenia przy zwarceniu dwufazowym

$f = 50$  Hz,  $\psi_0 = 0^\circ$ ,  $I_b \text{ odn} = 152$  A,  $I'_w \text{ odn} = 188$  A,  $S_N = 100$  kVA

Fig. 4. Oscillations of the armature relative phase current  $I_{br}$  and relative exciting current in stator terms at 2-phase short circuit

$f = 50$  Hz,  $\psi_0 = 0^\circ$ ,  $I_b \text{ odn} = 152$  A,  $I'_w \text{ odn} = 188$  A,  $S_N = 100$  kVA

ne  $\rho_3$  i  $\rho_4$  są zespolone sprzężone występują w częstotliwościowym widmie dodatkowe prążki wokół parzystych harmonicznych (odległość pomiędzy harmoniczną parzystą a dodatkowymi prążkami zależy od wartości urojonej wartości własnej  $\rho_3$ ).

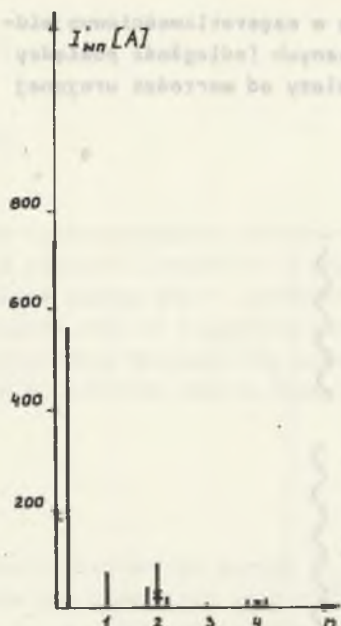


Rys. 5. Przebiegi względnego prądu fazowego twornika  $I_{br}$  i względnego doprowadzonego prądu wzbudzenia przy zwarciu dwufazowym

$$f = 0,5 \text{ Hz}, \psi_o = 0^\circ, I_b \text{ odn} = 152 \text{ A}, I'_w \text{ odn} = 188 \text{ A}, S_N = 100 \text{ kV A}$$

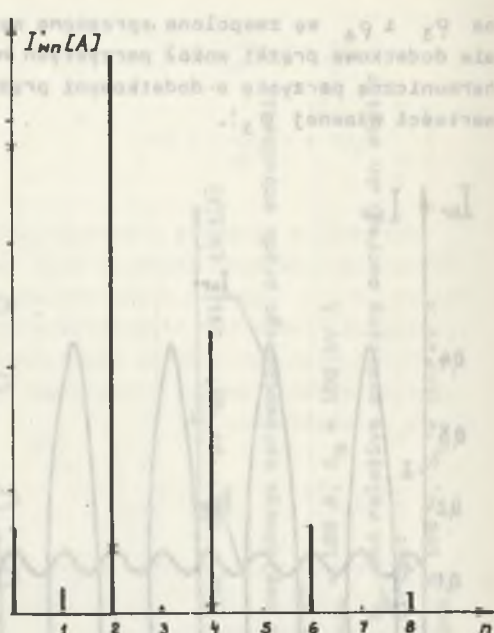
Fig. 5. Oscillations of the armature relative phase current and relative exciting current in stator terms at 2-phase short circuit

$$f = 0,5 \text{ Hz}, \psi_o = 0^\circ, I_b \text{ odn} = 152 \text{ A}, I'_w \text{ odn} = 188 \text{ A}, S_N = 100 \text{ kV A}$$



Rys. 6. Częstotliwościowe widmo prądu wzbudzenia dla elektrycznej częstotliwości obrotowej  $f = 50$  Hz,  $S_N = 100$  kV A,  $\psi_0 = 0^\circ$ . Linie ciągłe - przedział czasu wkrótce po zakłóceniu, krzyżyki (x) - końce prążków dla stanu ustalonego

Fig. 6. Frequency spectrum of exciting current for electrical rotational frequency  $f = 50$  Hz,  $S_N = 100$  kV A,  $\psi_0 = 0^\circ$ . Full lines - time period immediately after disturbance; (x) - ends of frequency lines for steady state



Rys. 7. Częstotliwościowe widmo prądu wzbudzenia dla elektrycznej częstotliwości obrotowej  $f = 0,5$  Hz,  $S_N = 100$  kV A,  $\psi_0 = 0^\circ$ . Linie ciągłe - przedział czasu wkrótce po zakłóceniu, krzyżyki (x) - końce prążków dla stanu ustalonego

Fig. 7. Frequency spectrum of exciting current for electrical rotational frequency  $f = 0,5$  Hz,  $S_N = 100$  kV A,  $\psi_0 = 0^\circ$ . Full lines - time interval immediately after disturbance; (x) - ends of spectral lines for steady state

### 3. Podsumowanie i wnioski końcowe

Przedstawioną metodę, nazwaną rekurencyjno-analityczną, na przykładzie zwarcia dwufazowego można uogólnić na przypadek załączenia na twornik maszyny synchronicznej niesymetrycznego obciążenia o impedancjach operatorowych [6]. Wzory wyznaczające wartości własne są oczywiście bardziej skomplikowane i zależą od postaci wyrażeń operatorowych opiewających obciążenie. Zasada postępowania jest jednak podobna jak dla zwarcia dwufazowego. Podstawową zaletą tej metody jest uzyskanie rozwiązania elektromagne-

tycznych zmiennych stanu w ostatecznej postaci analitycznej i jego rozbięcie na funkcje własne umożliwiające dyskusję i interpretacje fizyczne dla dowolnej prędkości obrotowej wirnika (także bardzo małej) i dowolnego obciążenia.

Uzyskanie analogicznych wyników dla małych prędkości obrotowych wirnika ( $\omega < 0,1 \omega_N$ ), a nawet dla dużych prędkości, jeżeli w obwodach maszyny znajdują się duże niesymetryczne rezystancje, przybliżonymi analitycznymi metodami znanymi w literaturze jest niemożliwe (metoda Ch. Concordii, polegająca na modyfikacji rozwiązania przebiegów otrzymanych wstępnie dla maszyny o nadprzewodzących obwodach elektrycznych i uwzględnieniu a posteriori różnej od zera rezystancji [3], metoda przedstawiona przez L. Hannakama, która polega na uśrednieniu okresowo zmiennych wyrazów w macierzy  $\{[R] \cdot [L]^{-1}\}$  [4], [5], metoda przedstawiona przez B. Adkinsa i Y.K. Chinga, która polega na przedstawieniu przebiegów w dziedzinie operatorowej w postaci nieskończonego ułamka drabinkowego, a następnie na przybliżonym przejściu do postaci czasowej przebiegów [2]).

#### LITERATURA

- [1] Chassande J.P., Pillet E., Poloujadoff M., Pierrat L.: Transient low frequency unsymmetrical operation of synchronous machines. IEEE-PES, February 1980, Paper 80 208-9.
- [2] Ching Y.K., Adkins B.: Transient theory of synchronous generators under unbalanced conditions. Journal of IEEE no 101, 1954, pp. 166-182.
- [3] Concordia Ch.: Synchronous machines theory and performance. John Wiley, Chapman Hall 1951.
- [4] Hannakam L.: Entwicklung geschlossener Näherungsbeziehungen für unsymmetrische Stoskurzschlösser der synchronen Schenkelpolmaschine. Archiv für Elektrotechnik XLV, Heft 2, 1960, ss. 118-156.
- [5] Hannakam L.: Spannungen und Drehmomente der synchronen Schenkelpolmaschine bei unsymmetrischen Stoskurzschlössern. Archiv für Elektrotechnik. Heft 2, 1965, ss. 91-100.
- [6] Paszek S.: Analiza harmoniczna przy rozwiązywaniu elektromagnetycznych stanów niestabilnych maszyny synchronicznej przy obciążeniu niesymetrycznym. Praca doktorska. Gliwice 1986.
- [7] Paszek W.: Stany niestabilne maszyn elektrycznych prądu przemiennego. WNT, Warszawa 1986.
- [8] Pillet E., Poloujadoff M., Chassande J.P.: Time constants of unsymmetrical short circuits of synchronous machines. IEEE-PES, Winter, 1979, Paper F 79 2049.
- [9] Rozo M.: Nelinejne kolebania i teoria ustojcziwosci. Główna redakcja fiziko-matematycznej literatury. Moskwa 1971.

Recenzent: doc. dr inż. Zdzisław Klonowicz

Wpłynęło do redakcji dnia 15 maja 1987 r.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРЕМЫ О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРЕСБРАЗОВАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ К ПОСТОЯННЫМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ НА ПРИМЕРЕ синхронной МАШИНЫ С ВНЕШНЕЙ НЕСИММЕТРИЕЙ

### Р е з ю м е

Представлен метод определения аналитического решения переходных режимов для моделей синхронных машин, вращающихся с постоянной скоростью при несимметричной нагрузке. Метод базируется на итерационном определении собственных значений неизвестной матрицы линейной системы дифференциальных уравнений состояния с постоянными коэффициентами, как преобразованной матрицы из первоначальной системы уравнений состояния с периодическими коэффициентами. Метод иллюстрирует пример избранной несимметричной нагрузки — двухфазного короткого замыкания холостого хода. Определена изменчивость собственных значений в зависимости от частоты для цепных моделей двух синхронных машин с разными номинальными мощностями. Определены временные кривые электромагнитных переменных состояния для двух крайних частот вращения. Представлены частотные спектры тока возбуждения для установившегося состояния и для начального момента после возмущения, понимаемые в том смысле, что пренебрегается экспоненциальным затуханием слагающих. Подчеркнуто, что представленный метод, в отличие от методов известных из литературы, является единственным методом допускающим аналитическое решение для произвольно малой скорости вращения ротора и произвольной несимметрии сопротивления нагрузки.

APPLICATION OF THE THEOREM ON EXISTANCE OF TRANSFORMATION OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEM WITH PERIODICALLY VARIABLE COEFFICIENTS INTO CONSTANTS FOR THE SOLUTION OF STATE EQUATIONS BY AN EXAMPLE OF SYNCHRONOUS MACHINE WITH EXTERNAL ASYMMETRY

### S u m m a r y

A method of obtaining analytical solutions of transients in the models of asymmetrically loaded synchronous machines with constant rotational speed has been shown.

The method is based on the iterative calculation of the unknown matrix eigenvalues of the linear differential equations with constant coefficients as the matrix transformed from primary system of the state equations with periodical coefficients. The chosen asymmetrical load i.e. 2-phase short-circuit of idle running has been shown as an example.

The dependence of the eigenvalues on frequency for the models of two synchronous machines with different power ratings and electromagnetic



state variables for two extreme rotational frequencies have been determined. The frequency spectra of exciting current for steady state and for initial constant after disturbance have been shown. Exponential decay of the components has been disregarded in the spectra.

It has been stressed that the presented method, as distinguished from approximate methods known from professional literature, is the only one allowing analytical solution for arbitrarily low rotational rotor speed and for every impedance load asymmetry.

Praca wykonana w Zakładzie Elektrotechniki i Energetyki  
W Instytucie Elektrotechniki i Energetyki  
Z Katedry Elektrotechniki

Wprowadzenie. W niniejszym artykule przedstawiono wyniki badań nad stanem ustalonym i początkowym prądu poboru energii przez silnik asynchroniczny przy dwóch ekstremalnych prędkościach obrotowych. Wykazano, że przy niskich prędkościach obrotowych występuje znaczny wpływ asymetrii obciążenia na charakterystykę prądu poboru energii. Wyniki badań przedstawiono w postaci wykresów i tabel. Wykazano, że przy niskich prędkościach obrotowych występuje znaczny wpływ asymetrii obciążenia na charakterystykę prądu poboru energii.

1. WSTĘP

W niniejszym artykule przedstawiono wyniki badań nad stanem ustalonym i początkowym prądu poboru energii przez silnik asynchroniczny przy dwóch ekstremalnych prędkościach obrotowych. Wykazano, że przy niskich prędkościach obrotowych występuje znaczny wpływ asymetrii obciążenia na charakterystykę prądu poboru energii. Wyniki badań przedstawiono w postaci wykresów i tabel. Wykazano, że przy niskich prędkościach obrotowych występuje znaczny wpływ asymetrii obciążenia na charakterystykę prądu poboru energii.

Krzysztof KLUSZCZYŃSKI

PASOŻYTNICZE MOMENTY SYNCHRONICZNE  
W JEDNOFAZOWYCH SILNIKACH INDUKCYJNYCH  
Z KONDENSATOREM PRACY

**Streszczenie.** Pokazano, że jednofazowy silnik indukcyjny z kondensatorem pracy o układzie połączeń uzwojeń stojana typu L można analizować jako symetryczną maszynę 2-fazową, przyłączoną do sieci jednofazowej poprzez niesymetryczny układ zasilający. Przedstawiono model, odpowiadający równaniom różniczkowym maszyny 2-fazowej w 2-osiowym układzie współrzędnych w postaci tzw. schematu rozkładu maszyny 2-fazowej na maszyny elementarne oraz podano zasady graficznego wyszukiwania pasożytniczych momentów synchronicznych na schematach rozkładu.

Przeanalizowano pasożytnicze momenty synchroniczne I rzędu powstające w jednofazowych silnikach indukcyjnych przy eliptycznym polu magnetycznym w szczelinie maszyny. Wskazano, jakie nowe pasożytnicze momenty synchroniczne i o jakich prędkościach synchronicznych pojawiają się w wyniku odkształcenia pola kołowego przez składową przeciwbieżną.

## 1. Wstęp

Analiza pasożytniczych momentów synchronicznych w jednofazowych silnikach indukcyjnych napotyka - w porównaniu z trójfazowymi silnikami indukcyjnymi, zasilanymi symetrycznym trójfazowym układem napięć sinusoidalnych - na szereg nowych trudności, związanych przede wszystkim z występowaniem eliptycznego pola magnetycznego w szczelinie powietrznej. Celem niniejszej pracy jest wskazanie na ogólne prawidłowości, dotyczące generowania pasożytniczych momentów synchronicznych w jednofazowych silnikach indukcyjnych z kondensatorem pracy, wynikające z obecności w prądach stojana i wirnika - oprócz składowej symetrycznej zgodnej - składowej przeciwnej. Rozważania zostaną przeprowadzone na podstawie schematu rozkładu maszyny na maszyny elementarne. Powyższa metoda badania momentów pasożytniczych dla maszyn asynchronicznych o dowolnej liczbie faz stojana i wirnika została szczegółowo omówiona w monografii [2].

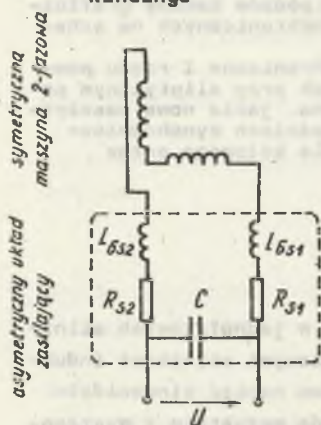
## 2. Schemat rozkładu jednofazowego silnika indukcyjnego na maszyny elementarne

Jednofazowy silnik indukcyjny z kondensatorem pracy o układzie połączeń uzwojeń stojana typu L jest niesymetryczną maszyną dwufazową (rys. 1). Wyodrębnienie rezystancji i indukcyjności rozproszonych stojana oraz przetransformowanie prądów, napięć i parametrów fazy pomocniczej na liczbę zwojów fazy głównej pozwala analizować niesymetryczną maszynę dwufazową tak, jak symetryczną maszynę dwufazową, przyłączoną do sieci jednofazowej poprzez niesymetryczny układ zasilający (rys. 2) [3].



Rys. 1. Układ połączeń uzwojeń stojana typu L

Fig. 1. L-connection system of stator windings



Rys. 2. Symetryczna maszyna 2-fazowa i niesymetryczny układ zasilający

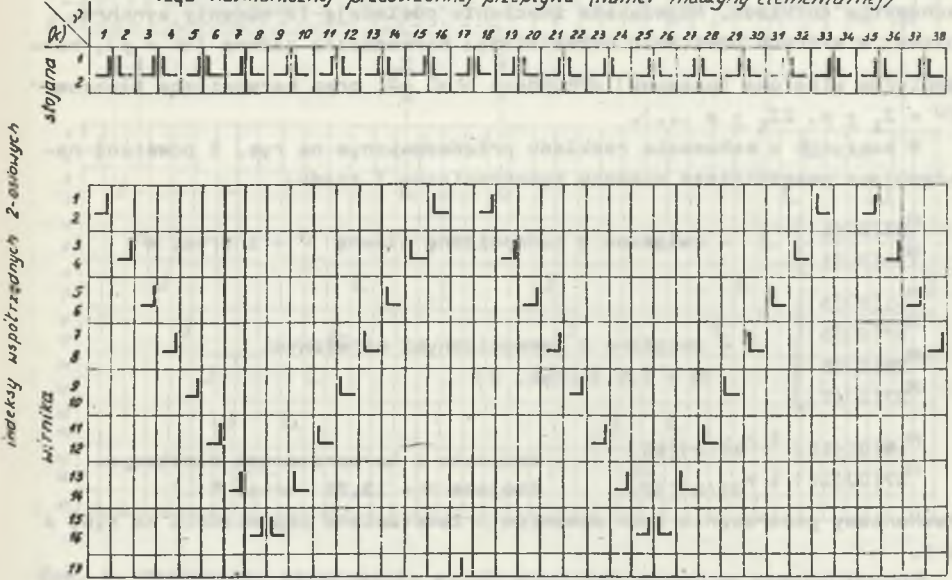
Fig. 2. Symmetrical 2-phase machine and asymmetrical supply system

Równaniom różniczkowym symetrycznej maszyny 2-fazowej we współrzędnych 2-osiowych (nowe współrzędne oznaczamy górnym wskaźnikiem ( $k$ )) odpowiada model fizyczny, który - przy wstępnym założeniu, że uwzględniamy kolejne wyższe harmoniczne przestrzenne przepływu (aż do harmonicznej  $\Omega$ -tego rzędu) - można sformułować mnemotechnicznie bez znajomości równań stransformowanych. Model ten, ujęty w uproszczonej graficznej formie tablicy, nazywamy schematem rozkładu maszyny dwufazowej na maszyny elementarne.

Rozważmy dla przykładu dwufazową maszynę klatkową 2-biegunową o liczbie żłobków stojana 16 i liczbie żłobków wirnika 17 ( $2p = 2$ ,  $Z_1 = 16$ ,  $Z_2 = 17$ ). Schemat rozkładu powyższej maszyny na maszyny elementarne przedstawia rys. 3. ( $\Omega = 38$ ). Poszczególne kolumny odpowiadają harmonicznym przestrzennym przepływu, zaś wiersze - kolejnym współrzędnym 2-osiowym stojana i wirnika. Znak  $\perp$  reprezentuje symetryczne uzwojenie 2-fazowe o prostopadłych i lewostronnie

zorientowanych osiach faz, znak  $\lfloor$  - uzwojenie 2-fazowe o prawostronnej orientacji osi faz, zaś znak  $|$  - uzwojenie jednofazowe. Każde z tych 2- lub 1-fazowych uzwojeń posiada sinusoidalny rozkład krzywej okładu prądowego i może wytwarzać tylko jedną harmoniczną przestrzenną przepływu o rzędzie równym numerowi kolumny. Odpowiadające sobie fazy uzwojeń elementarnych, zajmujących ten sam wiersz, są galwanicznie szeregowo połączone i zasilane kolejnymi współrzędnymi 2-osiowymi napięcia. Stojany i wirniki elementarne, zajmujące tę samą kolumnę, są elektromagnetycznie sprzężone.

rzęd harmonicznej przestrzennej przepływu (numer maszyny elementarnej)



Rys. 3. Schemat rozkładu maszyny 2-fazowej na maszyny elementarne ( $2p = 2, Z_2 = 17, \Omega = 38$ )

Fig. 3. Diagram of decomposition of 2-phase machine into elementary machines ( $2p = 2, Z_2 = 17, \Omega = 18$ )

Składają się one na ciąg elementarnych maszyn o 2-fazowych stojanach i 2- lub 1-fazowych wirnikach o różnych orientacjach osi faz.

Uzwojenia stojana generują wyłącznie harmoniczne nieparzyste  $\nu = 1, 3, 5, 7, \dots$ , zaś współczynnik skrótu dla 17 i 34 harmonicznej wirnika równa się zero. Pozwala to na zredukowanie schematu rozkładu, który przyjmuje postać przedstawioną na rys. 4. Dodatkowo czarnymi kropkami wyróżniono harmoniczne żłobkowe stojana  $Z_1 \pm p$  ( $\nu = 15$  i  $17$ ) oraz  $2Z_1 \pm p$  ( $\nu = 31$  i  $33$ ).

3. Wyszukiwanie pasożytniczych momentów synchronicznych I rzędu

Pasożytnicze momenty synchroniczne I rzędu, odgrywające dominującą rolę wśród momentów pasożytniczych, powstają w wyniku elektrodynamicznego współdziałania prądu reakcji pierwotnej stojana  $i_s^{(k)}(0)$  z prądami reakcji pierwotnej poszczególnych wirników elementarnych  $i_r^{(k)}(\nu)$ , gdzie:  $\nu$  - numer wirnika elementarnego,  $\lambda$  - numer wiersza schematu wirnika. Momenty te oznaczamy  $M_p^{(0)}(\nu)$ , gdzie wskaźnik  $p$  jest numerem elementarnej maszyny

synchronicznej, zaś wskaźnik  $\nu$  - numerem elementarnej maszyny wzbudzającej. Momenty pasożytnicze można łatwo wyszukiwać graficznie na podstawie schematów rozkładu. Największe znaczenie posiadają te momenty synchroniczne, w których powstaniu uczestniczą: harmoniczna główna ( $\nu = p$ ), harmoniczne strefowe (pasmowe) o rzędach  $\nu \leq \frac{Z_2}{2}$  oraz harmoniczne zębokowe ( $\nu = 2z_1 \pm p, 2z_2 \pm p \dots$ ).

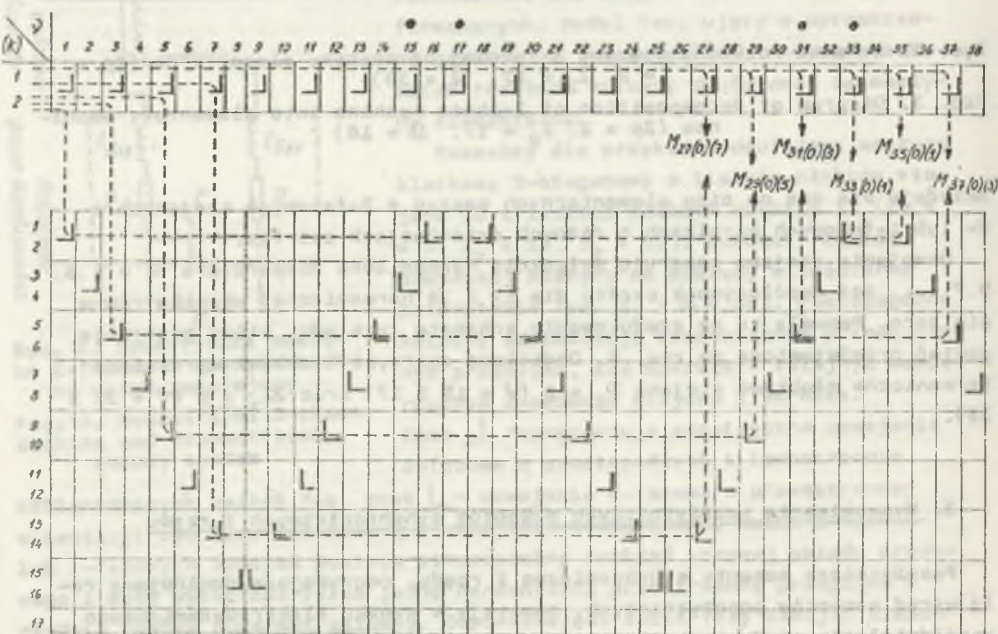
W maszynie o schemacie rozkładu przedstawionym na rys. 3 powstaną następujące pasożytnicze momenty synchroniczne I rzędu:

$$\left. \begin{array}{l} M_{33(0)}(1) \\ M_{35(0)}(1) \end{array} \right\} - \text{związane z harmoniczną główną } \nu = 1 \text{ (rys. 4)}$$

$$\left. \begin{array}{l} M_{31(0)}(3) \\ M_{37(0)}(3) \\ M_{29(0)}(5) \\ M_{27(0)}(7) \end{array} \right\} - \text{związane z harmonicznymi strefowymi} \\ \nu = 3, 5, 7 \text{ (rys. 4)}$$

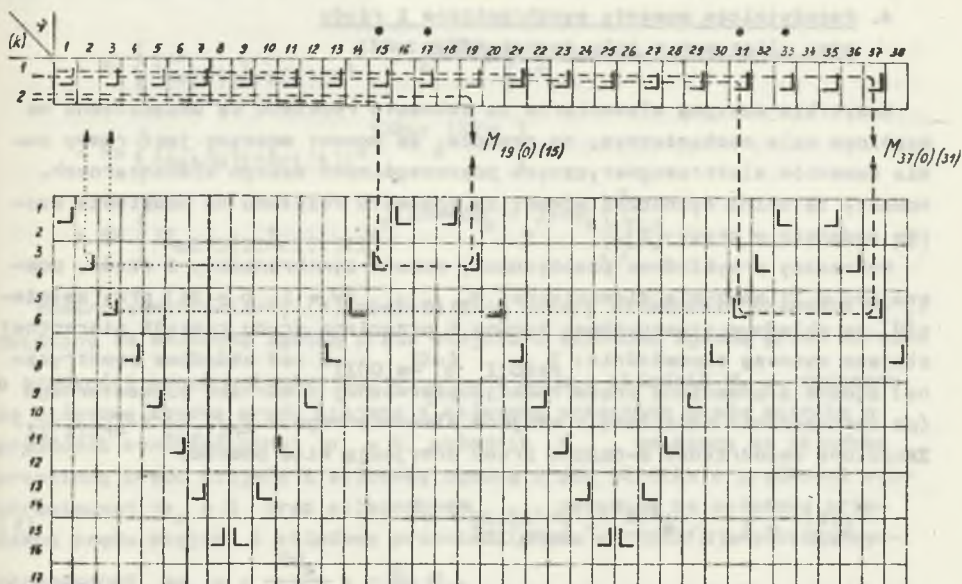
$$\begin{array}{l} M_{19(0)}(15) \text{ i } M_{15(0)}(19) \\ M_{37(0)}(31) \text{ i } M_{31(0)}(37) \end{array} - \text{związane z harmonicznymi zębokowymi} \\ \text{stojana } \nu = 15, 31 \text{ (rys. 5).}$$

Mechanizmy generowania tych momentów przedstawiono odpowiednio na rys. 4 i 5.



Rys. 4. Mechanizmy generowania synchronicznych momentów pasożytniczych, związanych z harmoniczną główną i harmonicznymi strefowymi  $\nu = 3, 4, 7$

Fig. 4. Generation mechanisms of synchronous parasitic torques related to working harmonic and to step harmonics: 3, 5 and 7



Rys. 5. Mechanizmy generowania synchronicznych momentów pasożytniczych, związanych z harmonicznymi żłobkowymi stojana

Fig. 5. Generation mechanisms of synchronous parasitic torques related to stator step harmonic

Na pasożytnicze momenty synchroniczne związane z harmonicznymi żłobkowymi stojana w istotny sposób wpływają indukcyjności rozproszenia różnicowego wirnika. W przypadku momentów  $M_{19(0)(15)}$  i  $M_{15(0)(19)}$  o wartości impedancji rozproszenia różnicowego decyduje wartość impedancji widziana z zacisków 2 wirnika elementarnego, zaś w przypadku momentów  $M_{37(0)(31)}$  i  $M_{31(0)(37)}$  - impedancja widziana z zacisków 3 wirnika elementarnego (linie kropkowane na rys. 5). W pierwszym przypadku impedancja widziana z zacisków 2 wirnika elementarnego jest równa reaktancji głównej 2 wirnika (naprzeciwko wirnika nie ma uzwojenia elementarnego stojana), w drugim zaś przypadku - reaktancja 3 wirnika elementarnego jest w znaczący sposób pomniejszona przez tłumiące oddziaływanie 3 stojana elementarnego (wpływ ten ujmuje się przy pomocy współczynnika tłumienia). Jest to przyczyną, dla której momenty  $M_{37(0)(31)}$  i  $M_{31(0)(37)}$ , mimo że związane z harmonicznymi wysokich rzędów, mogą przyjmować wartości porównywalne z momentami  $M_{19(0)(15)}$  i  $M_{15(0)(19)}$ .

#### 4. Pasożytnicze momenty synchroniczne I rzędu przy eliptycznym polu magnetycznym

Wszystkie maszyny elementarne ze schematu rozkładu są umieszczone na wspólnym wale mechanicznym, co oznacza, że moment maszyny jest równy sumie momentów elektromagnetycznych poszczególnych maszyn elementarnych. Momenty te można wyznaczać wprost ze schematu rozkładu na podstawie wzorów podanych w pracy [2].

Wyznamy przykładowo pasożytniczy moment synchroniczny I rzędu, powstający w 31 maszynie elementarnej  $M_{31(0)}(1)$  ( $\nu = 1$ ,  $\rho = 31$ ) przy założeniu, że składowe symetryczne: zgodna i przeciwna prądu reakcji pierwotnej stojana wynoszą odpowiednio:  $\underline{I}_0(0)I$  i  $\underline{I}_0(0)II$ , zaś składowe symetryczne: zgodna i przeciwna prądu reakcji pierwotnej i wirnika elementarnego (po sprowadzeniu na stronę 1 stojana elementarnego):  $\underline{I}_{r1}(1)I$  i  $\underline{I}_{r1}(1)II$ . Zespółone współrzędne 2-osiowe prądu przyjmują więc postać:

$$\underline{i}_0^{(k)} = \underline{I}_0(0)I e^{j\omega_0 t} + \underline{I}_0^*(0)II e^{-j\omega_0 t} \quad (1)$$

$$\underline{i}_{r1}^{(k)} = \sqrt{\frac{2}{Z_2}} \frac{Z_{s1} \xi_{s1}}{Z_r \xi_{r1} \xi_{x1}} e^{-j(\omega t + \varphi_0)} (\underline{I}_{r1}(1)I e^{j\omega_0 t} + \underline{I}_{r1}^*(1)II e^{-j\omega_0 t}), \quad (2)$$

z zaś pasożytniczy moment synchroniczny I rzędu w 31 maszynie elementarnej ma postać:

$$M_{31(0)}(1) = 31 L_{sr\nu} \operatorname{Re} \left\{ j \underline{i}_0^{(k)} \underline{i}_{r1}^{(k)*} e^{j31(\omega t + \varphi_0)} \right\}, \quad (3)$$

gdzie:

$\xi_{sv}, \xi_{rv}, \xi_{xv}$  - współczynniki uzwojenia stojana i wirnika oraz współczynnik skosu dla  $\nu$ -tej harmonicznej przestrzennej,

$\omega$  - prędkość kątowna wirnika,

$\varphi_0$  - kąt początkowego położenia wirnika.

Podstawiając wzory (1), (2) do wzoru (3) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} M_{31(0)}(1) &= M_{I,I} + M_{I,II} + M_{II,I} + M_{II,II} = \\ &= L_{\mu 33} \frac{\xi_{s1} \xi_{r31} \xi_{x31}}{\xi_{r1} \xi_{s31} \xi_{x1}} \left[ \operatorname{Re} \left\{ j \underline{I}_0^*(0) I \underline{I}_{r1}^*(1) I e^{j(32\omega - 2\omega_0)t} e^{j32\varphi_0} \right\} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \operatorname{Re} \left\{ j I_{\omega_0}^*(0) I_{-r1}(1) I_{II}^{\circ} \cdot j^{32\omega t} \cdot j^{32\varphi_0} \right\} + \\
 & + \operatorname{Re} \left\{ j I_{\omega_0}^*(0) I_{II}^* I_{-r1}(1) I^{\circ} \cdot j^{32\omega t} \cdot j^{32\varphi_0} \right\} + \\
 & + \operatorname{Re} \left\{ j I_{\omega_0}^*(0) I_{II}^* I_{-r1}(1) I_{II}^{\circ} \cdot j^{(32\omega + 2\omega_0)t} \cdot j^{32\varphi_0} \right\} \Big] . \quad (4)
 \end{aligned}$$

Moment synchroniczny (4) posiada więc cztery składniki: składnik  $M_{I,I}$ , związany ze składową zgodną prądu stojana i składową zgodną prądu wirnika o prędkości synchronicznej  $\omega_0 = \frac{2\omega}{p+\nu} = \frac{2}{32} \omega_0$ , składnik  $M_{I,II}$  związany ze składową zgodną prądu stojana i składową przeciwną prądu wirnika o prędkości synchronicznej  $\omega_0 = 0$ , składnik  $M_{II,I}$  związany ze składową przeciwną prądu stojana i składową zgodną prądu wirnika o prędkości synchronicznej  $\omega_0 = 0$  oraz składnik  $M_{II,II}$ , związany ze składową przeciwną prądu stojana i składową przeciwną prądu wirnika o prędkości synchronicznej  $\omega_0 = -\frac{2\omega}{p+\nu} = -\frac{2}{32} \omega_0$ .

Rozważając kolejno wszystkie możliwe mechanizmy generowania pasożytniczych momentów synchronicznych I rzędu w jednofazowych silnikach indukcyjnych otrzymujemy tab. 1.

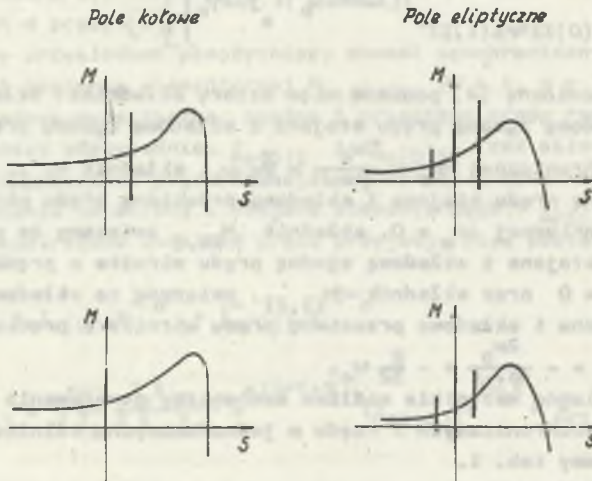
Tabela 1

Prędkości synchroniczne pasożytniczych momentów synchronicznych, związanych ze składowymi symetrycznymi; zgodnymi i przeciwnymi prądów stojana i wirnika

| Mechanizm generowania momentu |        | $M_{I,I}$                 | $M_{I,II}$                | $M_{II,I}$                 | $M_{II,II}$                |
|-------------------------------|--------|---------------------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $\nu$                         | $\rho$ |                           |                           |                            |                            |
|                               |        | 0                         | $\frac{2\omega_0}{p+\nu}$ | $-\frac{2\omega_0}{p+\nu}$ | 0                          |
|                               |        | $\frac{2\omega_0}{p+\nu}$ | 0                         | 0                          | $-\frac{2\omega_0}{p+\nu}$ |



Z tabeli 1 wynika, że pojawianie się składowej przeciwnej prądu powoduje powstanie nowych momentów pasożytniczych o nowych prędkościach synchronicznych. Zasadę opisującą generowanie się nowych pasożytniczych momentów synchronicznych przy przejściu od kołowego pola magnetycznego do pola eliptycznego zilustrowano na rys. 6.



Rys. 6. Synchroniczne momenty pasożytnicze przy polu kołowym i eliptycznym

Fig. 6. Synchronous parasitic torques in presence of circular and elliptical magnetic field

#### LITERATURA

- [1] Heller V., Hamata V.: Harmonic Field Effects in Induction Machines. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague 1977.
- [2] Kluszczyński K.: Momenty pasożytnicze w maszynach asynchronicznych. ZN Pol. Śl., s. "Elektryka", z. 102. Gliwice 1986 (monografia).
- [3] Kluszczyński K., Mikołajewicz R.: Projektowanie indukcyjnych silników jednofazowych z kondensatorem pracy za pomocą maszyny cyfrowej. Rozprawy Elektrotechniczne 1983, 29, z. 1, ss. 133-143.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Piotr Wach

Wpłynęło do redakcji dnia 25 października 1987 r.

ПАРАЗИТНЫЕ СИНХРОННЫЕ МОМЕНТЫ  
В ОДНОФАЗНЫХ АСИНХРОННЫХ ДВИГАТЕЛЯХ

Р е з ю м е

Показано, что однофазный асинхронный двигатель с постоянно включенным конденсатором с L - образной схемой соединения обмоток статора, можно анализировать как симметричную двухфазную машину присоединенную к однофазной сети через несимметричную питающую систему. Представлена модель соответствующая дифференциальным уравнениям двухфазной машины в двухосевой системе координат в виде т.н. схемы разложения двухфазной машины на элементарные машины. Даны примеры графического поиска паразитных синхронных моментов на схемах разложения.

Проанализированы паразитные синхронные моменты I порядка, возникающие в однофазных асинхронных двигателях при эллиптическом магнитном поле в зазоре машины.

Указано, какие новые паразитные синхронные моменты и с какими синхронными скоростями появились бы в результате искажения кругового поля через противобращающую составляющую.

PARASITIC SYNCHRONOUS TORQUES IN SINGLE-  
PHASE INDUCTION CAPACITOR MOTORS

С и ж е н и е

It has been shown that a single - phase induction capacitor motor with L - connection of stator windings can be treated as a symmetrical 2-phase machine connected to a single - phase network through an asymmetrical supply system. The model corresponding to differential equations of a 2-phase machine in 2 - axis coordinate system has been presented; it has a form of so-called diagram of decomposition of a 2-phase machine into elementary machines.

The rules of graphical searching of the parasitic synchronous torques on decomposition diagrams have been given. Parasitic synchronous torques of I order generated in single - phase induction motors in presence of elliptical magnetic field in the machine gap have been analysed.

It has been pointed, which new parasitic synchronous torques and of what synchronous speed appear as a result of circular field distortion by backward - rotating quantity.

Lesław TOPÓR-KAMIŃSKI

## MNOŻNIKI IMPEDANCJI

**Streszczenie.** Przedstawiono teoretyczną koncepcję budowy trójwrotników na bazie źródeł sterowanych oraz podwójnie sterowanych, realizujących iloczyn impedancji dowolnych dwójników dołączonych do zacisków wyjściowych. Układy te nazwane mnożnikami impedancji, podzielono na trzy grupy według właściwości realizowanych przez nie dwójników. Mnożniki impedancji typu A modelują dwójniki zależne od jednej zmiennej zaciskowej, typu B - zależne od obu zmiennych zaciskowych, natomiast typu C realizują dwójniki, dla których jedna zmienna zaciskowa może przybierać wartość dowolną. Pokazano po jednym przykładzie z każdego typu praktycznej ich realizacji z zastosowaniem wzmacniaczy operacyjnych i analogowych układów mnożących. Podano teoretyczne przykłady modelowania za pomocą mnożników impedancji uziemionych i swobodnych dwójników sterowanych (np. indukcyjność sterowana napięciem), nieliniowych (np. pojemność o zadanej charakterystyce nieliniowej w układzie współrządnych napięcie-zadunek), pewnych dwójników osobliwych (np. dwójniki będącego jednocześnie zwarcie lub źródłem prądowym) oraz dwustronnych wzmacniaczy mnożących rezystancyjnych i impedancyjnych.

## 1. Wstęp

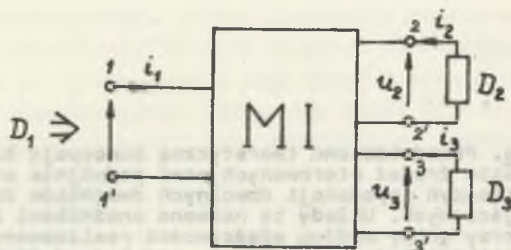
Wprowadzenie do teorii obwodów analogowego układu mnożącego pozwala budować źródła sterowane iloczynem dwu zmiennych zaciskowych. Źródła takie można nazwać źródłami podwójnie sterowanymi [2].

Na ich bazie można modelować podstawowe aktywne układy o sterowanych parametrach takie, jak: konwertor sterowany [4], inwertor sterowany [7] lub w ogólnym przypadku rezystancyjne aktywne obwody parametryczne [3], [6], [11], [12]. W układach tych poprzez wewnętrzne sprzężenia zacisków sterujących z dowolnymi innymi uzyskuje się sieci nieliniowe o zadanych parametrach [3], [8], [11], [12]. Można także wprowadzając do nich elementy reaktancyjne uzyskiwać parametryczne lub nieliniowe sieci inercyjne [10].

Dalszym rozwinięciem układów z analogowym układem mnożącym może być opisany poniżej mnożnik impedancji, zawierający wewnątrz sprzężenie zacisków sterujących źródło podwójnie sterowane z wejściem, przez co jest on układem bardziej uniwersalnym, pozwalającym modelować wszystkie wymienione bloki oraz dodatkowo inne o nowych własnościach.

## 2. Ogólna definicja mnożnika impedancji

Mnożnikiem impedancji (MI) będzie nazywany rezystancyjny aktywny trójwrotnik nieliniowy (rys. 1), którego zaciski 11' nazywane będą wejściowymi, natomiast zaciski 22' oraz 33' wyjściowymi.



Rys. 1

Jeżeli założy się, że zaciski wyjściowe mnożnika impedancji obciążone są dwójnikami  $D_2$  i  $D_3$  opisanymi ogólnie równaniami:

$$\hat{a}_2 u_2 = \hat{b}_2 i_2, \quad (1)$$

$$\hat{a}_3 u_3 = \hat{b}_3 i_3, \quad (2)$$

w których  $\hat{a}_2$ ,  $\hat{b}_2$ ,  $\hat{a}_3$ ,  $\hat{b}_3$  mogą być w najogólniejszym przypadku dowolnymi operatorami różniczkowo-całkowymi nieliniowymi lub zależnymi od czasu, wtedy od strony zacisków wejściowych układ będzie widoczny jako dwójnik  $D_1$ , którego zmienne zaciskowe  $u_1$  lub  $i_1$  będą funkcją operatorów (oraz ich odwrotności) z równań (1), (2), czyli:

$$\begin{aligned} D_1: u_1, (i_1) &= f[\hat{a}_2, (\hat{a}_2^{-1}), \hat{b}_2, (\hat{b}_2^{-1}), \hat{a}_3, (\hat{a}_3^{-1}), \hat{b}_3, (\hat{b}_3^{-1}), u_1, i_1] = \\ &= kf_2[\hat{a}_2, (\hat{a}_2^{-1}), \hat{b}_2, (\hat{b}_2^{-1}), u_1, (i_1)] \cdot \\ &\cdot f_3[\hat{a}_3, (\hat{a}_3^{-1}), \hat{b}_3, (\hat{b}_3^{-1}), u_1, (i_1)] \end{aligned}$$

Funkcja  $f$  ma zawsze postać iloczynu dwu funkcji, gdzie  $k$  jest współczynnikiem zależnym od stałych parametrów układu (np. od współczynników wzmocnienia źródeł sterowanych).

Z faktu istnienia w funkcji  $f$  operatorów odwrotnych do  $\hat{a}_2$ ,  $\hat{b}_2$ ,  $\hat{a}_3$ ,  $\hat{b}_3$  wynika warunek, aby operatory opisujące dwójniki  $D_2$  i  $D_3$  były komutujące, czyli posiadały operator impedancji:

$$\hat{z} = \hat{a}^{-1}\hat{b} \quad (4)$$

lub admitancji:

$$\hat{y} = \hat{b}^{-1}\hat{a}. \quad (5)$$

Funkcja  $f_2$  w relacji (3) będzie zależna tylko od operatora impedancji lub admitancji dwójnika  $D_2$ , natomiast funkcja  $f_3$  tylko od operatora impedancji lub admitancji dwójnika  $D_3$ . Wyraża to relacja:

$$u_1(i_1) = kf_2[\hat{z}_2, (\hat{y}_2), u_1, (i_1)]f_3[\hat{z}_3, (\hat{y}_3), u_1, (i_1)]. \quad (6)$$

Fakt ten uzasadnia nazwanie opisanego układu mnożnikiem impedancji.

### 3. Rodzaje mnożników impedancji

Opisany ogólnie mnożnik impedancji można zamodelować za pomocą jednego źródła podwójnie sterowanego oraz dwu źródeł sterowanych. W zależności od doboru rodzaju źródeł oraz zmiennych sterujących otrzymuje się 20 wersji MI, przy czym ze względu na ogólne własności dwójnika wejściowego można je podzielić na trzy grupy A, B, C przedstawione odpowiednio w tabelicach 1, 2 i 3.

Dwójniki  $D_{1A}$  dla grupy A opisują zależności:

$$\begin{aligned} u_1 &= kf[\hat{z}_2, (\hat{y}_2), \hat{z}_3, (\hat{y}_3), i_1] \\ i_1 &= kf[\hat{z}_2, (\hat{y}_2), \hat{z}_3, (\hat{y}_3), \hat{u}_1]. \end{aligned} \quad (7)$$

Dwójniki  $D_{1B}$  dla grupy B opisują zależności:

$$\begin{aligned} u_1 &= kf[\hat{z}_2, (\hat{y}_2), \hat{z}_3, (\hat{y}_3), u_1, i_1] \\ i_1 &= kf[\hat{z}_2, (\hat{y}_2), \hat{z}_3, (\hat{y}_3), u_1, i_1] \end{aligned} \quad (8)$$

Natomiast dwójniki  $D_{1C}$  dla grupy C opisują zależności:

$$\begin{aligned} u_1 &= kf[\hat{z}_2, (\hat{y}_2), \hat{z}_3, (\hat{y}_3), u_1] : i_1 - \text{dowolne} \\ i_1 &= kf[\hat{z}_2, (\hat{y}_2), \hat{z}_3, (\hat{y}_3), i_1] : u_1 - \text{dowolne} \end{aligned} \quad (9)$$

Tablica 1

## Mnożniki impedancji typu A

| l.p. | Schemat | Zależności opisujące dwójnik $D_2$  |
|------|---------|---|
| 1.   |         | $u_1 = \alpha (\hat{a}_2^{-1} \hat{b}_2 \beta i_1) (\hat{a}_3^{-1} \hat{b}_3 \gamma i_1)$ |
| 2.   |         | $u_1 = \alpha (\hat{b}_2^{-1} \hat{a}_2 \beta i_1) (\hat{b}_3^{-1} \hat{a}_3 \gamma i_1)$ |
| 3.   |         | $u_1 = \alpha (\hat{b}_2^{-1} \hat{a}_2 \beta i_1) (\hat{a}_3^{-1} \hat{b}_3 \gamma i_1)$ |
| 4.   |         | $i_1 = \alpha (\hat{a}_2^{-1} \hat{b}_2 \beta u_1) (\hat{a}_3^{-1} \hat{b}_3 \gamma u_1)$ |
| 5.   |         | $i_1 = \alpha (\hat{b}_2^{-1} \hat{a}_2 \beta u_1) (\hat{a}_3^{-1} \hat{b}_3 \gamma u_1)$ |
| 6.   |         | $i_1 = \alpha (\hat{b}_2^{-1} \hat{a}_2 \beta u_1) (\hat{a}_3^{-1} \hat{b}_3 \gamma u_1)$ |

Tablica 2

## Mnozniki impedancji typu B

| Lp. | Schemat | Zależności opisujące dwójnik $D_1$  |
|-----|---------|---|
| 1.  |         | $u_1 = \alpha (\hat{a}_2^{-1} \hat{b}_2 \beta u_1) (\hat{a}_3^{-1} \hat{b}_3 \gamma i_1)$ |
| 2.  |         | $u_1 = \alpha (\hat{b}_2^{-1} \hat{a}_2 \beta u_1) (\hat{b}_3^{-1} \hat{a}_3 \gamma i_1)$ |
| 3.  |         | $u_1 = \alpha (\hat{b}_2^{-1} \hat{a}_2 \beta i_1) (\hat{a}_3^{-1} \hat{b}_3 \gamma u_1)$ |
| 4.  |         | $u_1 = \alpha (\hat{b}_2^{-1} \hat{a}_2 \beta u_1) (\hat{a}_3^{-1} \hat{b}_3 \gamma i_1)$ |
| 5.  |         | $i_1 = \alpha (\hat{a}_2^{-1} \hat{b}_2 \beta u_1) (\hat{a}_3^{-1} \hat{b}_3 \gamma i_1)$ |
| 6.  |         | $i_1 = \alpha (\hat{b}_2^{-1} \hat{a}_2 \beta u_1) (\hat{b}_3^{-1} \hat{a}_3 \gamma i_1)$ |
| 7.  |         | $i_1 = \alpha (\hat{b}_2^{-1} \hat{a}_2 \beta i_1) (\hat{a}_3^{-1} \hat{b}_3 \gamma u_1)$ |
| 8.  |         | $i_1 = \alpha (\hat{b}_2^{-1} \hat{a}_2 \beta u_1) (\hat{a}_3^{-1} \hat{b}_3 \gamma i_1)$ |

## Mnożniki impedancji typu C

| l.p. | Schemat | Zależności opisujące dwójnik $D$ ,   |
|------|---------|--|
| 1.   |         | $u_1 = \alpha (\hat{b}_2^{-1} \hat{a}_2 \beta u_1) (\hat{b}_3^{-1} \hat{a}_3 \gamma u_1)$ $i_1 - \text{dowolne}$ |
| 2.   |         | $u_1 = \alpha (\hat{a}_2^{-1} \hat{b}_2 \beta u_1) (\hat{a}_3^{-1} \hat{b}_3 \gamma u_1)$ $i_1 - \text{dowolne}$ |
| 3.   |         | $u_1 = \alpha (\hat{b}_2^{-1} \hat{a}_2 \beta u_1) (\hat{a}_3^{-1} \hat{b}_3 \gamma u_1)$ $i_1 - \text{dowolne}$ |
| 4.   |         | $i_1 = \alpha (\hat{a}_2^{-1} \hat{b}_2 \beta i_1) (\hat{a}_3^{-1} \hat{b}_3 \gamma i_1)$ $u_1 - \text{dowolne}$ |
| 5.   |         | $i_1 = \alpha (\hat{b}_2^{-1} \hat{a}_2 \beta i_1) (\hat{b}_3^{-1} \hat{a}_3 \gamma i_1)$ $u_1 - \text{dowolne}$ |
| 6.   |         | $i_1 = \alpha (\hat{a}_2^{-1} \hat{b}_2 \beta i_1) (\hat{a}_3^{-1} \hat{b}_3 \gamma i_1)$ $u_1 - \text{dowolne}$ |



## 4. Przykłady realizacji MI

Praktyczne układy modelujące swoim działaniem mnożniki impedancji można zbudować z jednego analogowego układu mnożącego oraz w zależności od potrzeby - z kilku wzmacniaczy operacyjnych.

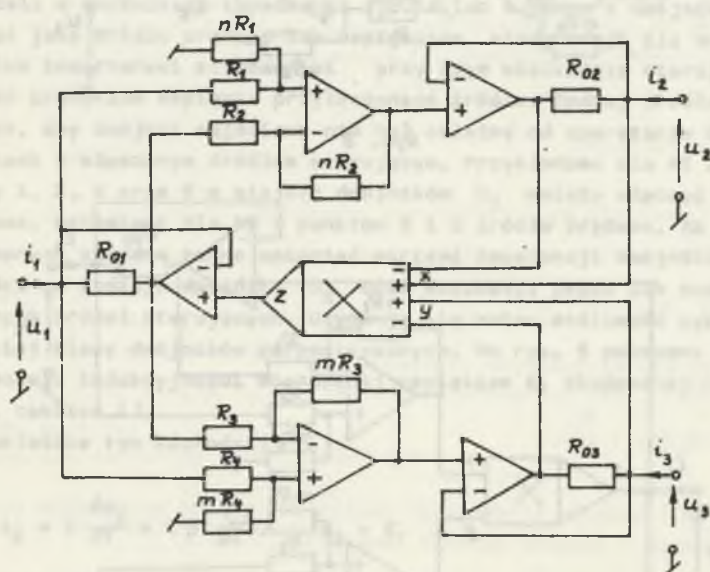
Na rys. 2 przedstawiona jest praktyczna realizacja MI typu A (p. 2, tabela 1). W realizacji tej układ mnożący posiada dwa napięciowe wejścia różnicowe i opisuje się relacją  $U_z = kU_x U_y$ , natomiast współczynniki  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$

$$\alpha = kR_{02}R_{03}$$

$$\beta = nR_{01}$$

$$\gamma = mR_{02}$$

(9)



Rys. 2

Na rys. 3 przedstawiona jest praktyczna realizacja MI typu B (p. 1, tabela 2).

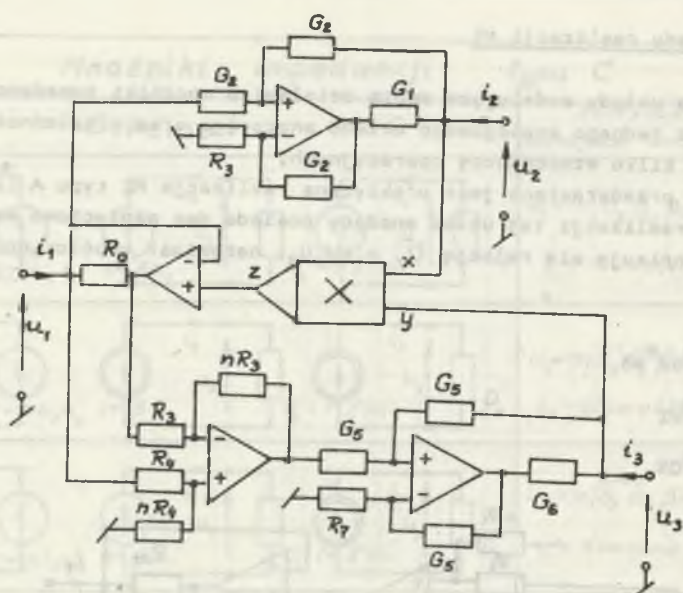
W realizacji tej współczynniki  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  wynoszą:

$$\alpha = k$$

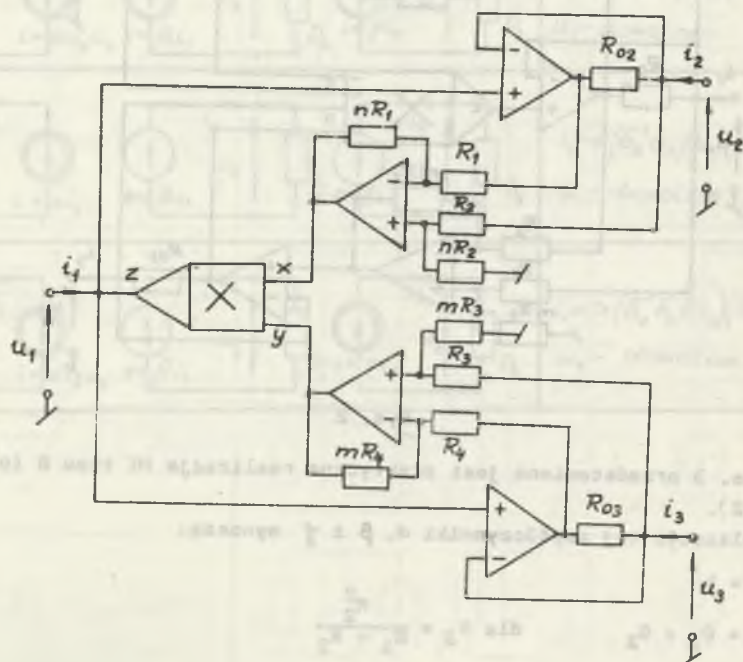
$$\beta = G_1 + G_2 \quad \text{dla } R_3 = \frac{R_2^2}{R_1 + R_2}$$

(10)

$$\gamma = nR_0(G_5 + G_6) \quad \text{dla } R_7 = \frac{R_5^2}{R_5 + R_6}$$



Rys. 3



Rys. 4

Na rys. 4 przedstawiona jest natomiast realizacja praktyczna MI typu C (p. 1, tablica 3).

W realizacji tej współczynniki  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  wynoszą:

$$\alpha = knmR_{02}R_{03}$$

$$\beta = 1 \quad (11)$$

$$\gamma = 1.$$

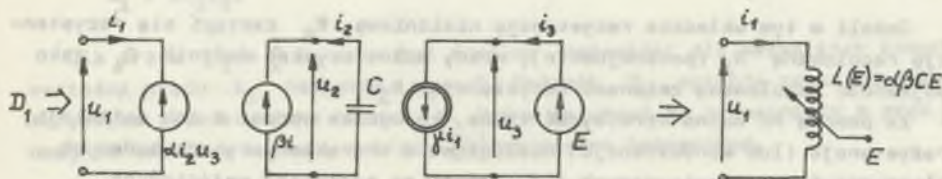
W podobny sposób modelując odpowiednio źródła podwójnie sterowane za pomocą układu mnożącego oraz napięciowe i prądowe źródła sterowane można zrealizować wszystkie układy MI przedstawione w tablicach 1, 2 i 3.

### 5. Przykłady zastosowań MI

Jeżeli w mnożnikach impedancji typu A lub B jeden z dwójników  $D_2$ ,  $D_3$  przyjęć jako źródło prądowe lub napięciowe, wtedy stają się one konwertorami lub inwertorami sterowanymi przy czym wielkością sterującą jest wartość prądu lub napięcia przyłączonego źródła. Rodzaj źródła dobiera się tak, aby dwójnik wejściowy nie był zależny od operatorów dwójnika na zaciskach z włączonym źródłem sterującym. Przykładowo dla MI z tablicy 1 punkty 1, 2, 4 oraz 6 w miejsce dwójników  $D_3$  należy włączyć źródło napięciowe, natomiast dla MI z punktów 2 i 5 źródła prądowe. Za pomocą tak zbudowanych układów można zmieniać wartość impedancji dwójnika  $D_1$  w zależności od rodzaju dwójnika  $D_2$  oraz wielkości prądu lub napięcia przyłączonych źródeł sterujących. Uzyskuje się zatem możliwość symulacji szerokiej klasy dwójników parametrycznych. Na rys. 5 pokazany jest przykład modelu indukcyjności sterowanej napięciem  $E$ , zbudowanej na MI typu A (p. 3, tablica 1).

W układzie tym zachodzi:

$$i_2 = C \frac{du_2}{dt} = C\beta \frac{di_1}{dt}, \quad u_3 = E, \quad (12)$$

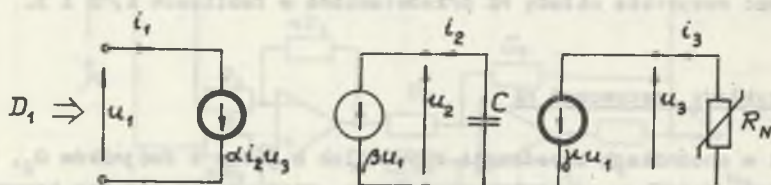


Rys. 5

stąd dla zacisków wejściowych zachodzi:

$$u_1 = \alpha i_2 u_3 = \alpha \beta C E \frac{di_1}{dt}. \quad (13)$$

Mnożniki impedancji umożliwiają także modelowanie nieliniowej impedancji typu reaktancyjnego za pomocą rezystancji nieliniowej. Na rys. 6 przedstawiony jest przykładowo układ zbudowany w oparciu o MI typu A (p. 6, tablica 1), którego dwójnik wejściowy  $D_1$  jest pojemnością nieliniową zależną od funkcji nieliniowej opisującej rezystancję  $R_{N3}$ .



Rys. 6

W układzie tym zachodzi:

$$i_2 = C \frac{du_2}{dt} = \beta \frac{du_1}{dt}. \quad (14)$$

$$u_3 = R_N(i_3) = R_N(\gamma u_1). \quad (15)$$

Zatem dla zacisków wejściowych otrzymuje się:

$$i_1 = \alpha C R_N(\gamma u_1) \frac{du_1}{dt}. \quad (16)$$

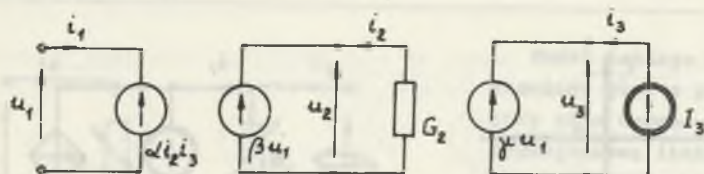
Równanie (16) opisuje kondensator nieliniowy, który w układzie współrzędnych napięcie - ładunek opisuje funkcją:

$$q(u) = \alpha C \int R_N(\gamma u) du. \quad (17)$$

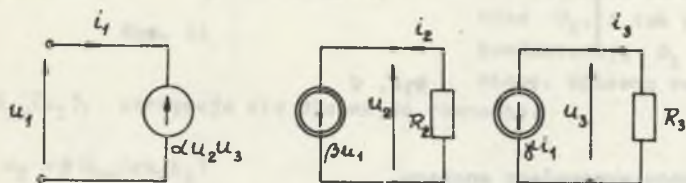
Jeżeli w tym układzie rezystancję nieliniową  $R_N$  zastąpi się rezystancją regulowaną  $R_3$  (potencjometr), wtedy można uzyskać dwójnik  $D_1$  jako pojemność regulowaną zmianami rezystancji  $R_3$ .

Za pomocą MI można otrzymywać także, co wynika wprost z ich definicji, rezystancje (lub konduktancje) nieliniowe o charakterystykach będących iloczynem funkcji opisujących rezystancje na zaciskach wyjściowych.

MI typu B i C przy pewnych rodzajach dwójników wyjściowych  $D_2$  i  $D_3$  i odpowiednim doborze parametrów  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  mogą zachowywać się jak układy osobliwe. Ilustrują to przykłady z rys. 7 i 8.



Rys. 7



Rys. 8

Na rys. 7 MI typu C (p. 1, tablica 3) obciążony jest na wyjściach konduktancją  $G_2$  oraz źródłem prądowym  $I_3$ . Napięcie wejściowe  $u_1$  opisuje równanie

$$u_1 = \alpha\beta G_2 I_3 u_1 = k(I_3)u_1. \quad (18)$$

Mogą zatem zachodzić dwa przypadki w zależności od wartości prądu  $I_3$ :

- dla  $k(I_3) \neq 1$   $u_1 = 0$ , stąd przy  $i_1$  dowolnym układ widziany jest od wejścia jako zwarcie,
- dla  $k(I_3) = 1$   $u_1$  może być dowolne, co oznacza, że przy  $i_1$  dowolnym układ symuluje norator.

Na rys. 8 MI typu B (p. 1, tablica 2) obciążony jest rezystancjami liniowymi  $R_2$  i  $R_3$ .

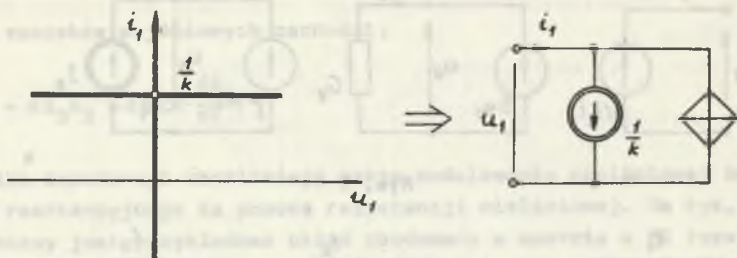
Napięcie wejściowe opisuje równanie:

$$u_1 = \alpha\beta\gamma R_2 R_3 u_1 i_1, \quad (19)$$

co można zapisać jako:

$$u_1 = k u_1 i_1. \quad (20)$$

Dla prądu  $i_1 = \frac{1}{k} u_1$  może być dowolne, natomiast dla wszystkich innych wartości prądu  $i_1$  napięcie  $u_1 = 0$ . Dwójnik  $D_1$  opisuje zatem charakterystyka przedstawiona na rys. 9. Można go uznać za przesunięty o prąd  $\frac{1}{k}$  dwójnik osobliwy nazwany w pracy [9] noratorem bezmocowym.



Rys. 9

### 6. Dwustronny wzmacniacz mnożący

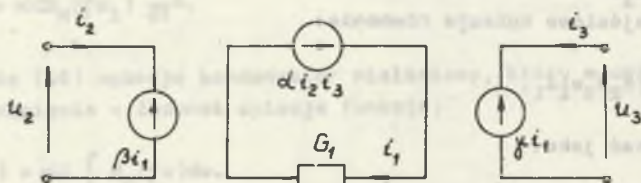
Jeżeli w układach MI przyjęc zaciski 11' jako wyjściowe, do których przyłącza się pewien dwójnik  $D_1$ , a zaciski 22' i 33' przyjęc jako wejścia układu, otrzyma się czwórnik parametryczny posiadający pewne specyficzne własności, ze względu na które można go nazwać dwustronnym wzmacniaczem mnożącym. Na rys. 10 przedstawiono układ zbudowany na bazie MI typu A (p. 2, tablica 1), do którego zacisków 11' dołączono konduktancję  $G_1$ .

Dla układu tego zachodzi:

$$i_1 = G_1 u_1 = G_1 \alpha_{12} i_3, \quad (21)$$

stąd zmienne na zaciskach wejściowych opisują zależności:

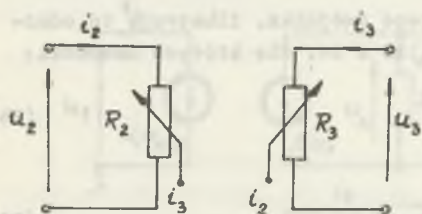
$$\begin{aligned} u_2 &= \beta \alpha G_1 i_2 i_3 \\ u_3 &= \gamma \alpha G_1 i_2 i_3 \end{aligned} \quad (22)$$



Rys. 10

Na ich podstawie można narysować schemat zastępczy układu z rys. 10, który jest przedstawiony na rys. 11.

W układzie tym występują w obu równaniach opisujących wejścia iloczynowy prądów wejściowych, co uzasadnia przyjęcie dla niego nazwy "dwustronny wzmacniacz mnożący".



Rys. 11

Model takiego układu przedstawiony jest w pracy [8], przy czym nazwany jest on tam dwuwęciową liniową konduktancją sterowaną. Układ z rys. 10 może zmieniać swoje własności w zależności od rodzaju dwójnika  $D_1$ . I tak przyjmując konduktancję  $G_1$  jako nieliniową, opisaną zależnością

$i_1 = G_{1N}(u_1)$ , otrzymuje się dla wejść równania:

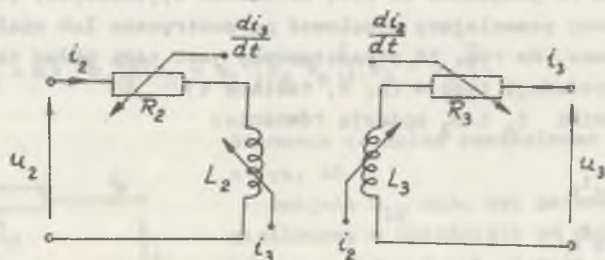
$$\begin{aligned} u_2 &= \beta G_{1N}(\alpha i_2 i_3) \\ u_3 &= \gamma G_{1N}(\alpha i_2 i_3), \end{aligned} \quad (23)$$

z których wynika, że rezystancje  $R_2$  i  $R_3$  są jednocześnie nieliniowe i parametryczne.

Natomiast zakładając  $D_1$  jako kondensator opisany zależnością  $i_1 = C du_1/dt$  otrzymuje się równania:

$$\begin{aligned} u_2 &= \alpha \beta C (i_3 \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{di_3}{dt}), \\ u_3 &= \alpha \gamma C (i_2 \frac{di_3}{dt} + i_3 \frac{di_2}{dt}). \end{aligned} \quad (24)$$

Modeluje je układ przedstawiony na rys. 12, złożony z rezystancji i indukcyjności sterowanych, można go zatem nazwać inercyjnym dwustronnym wzmacniaczem mnożącym.



Rys. 12

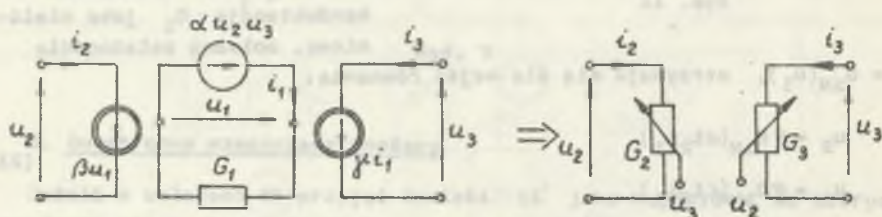
Dwustronne wzmacniacze mnożące budowane na bazie MI typu B mają tylko jedno z wejść zależne od impedancji dwójnika  $D_1$ , a w budowanych na bazie

MI typu C żadne z wejść nie zależy od tego dwójnika. Ilustrują to odpowiednio przykłady przedstawione na rys. 13 i 14, dla których zachodzi:

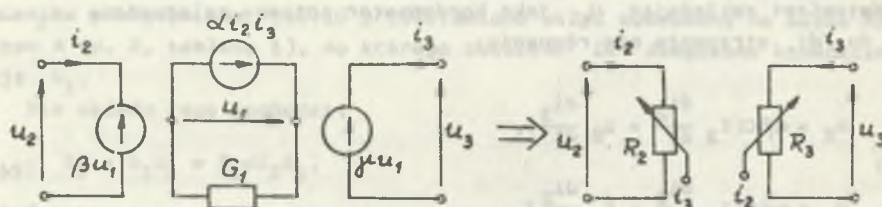
$$G_2 = \alpha\beta u_3, \quad G_3 = \alpha\gamma G_1 u_2 \quad (25)$$

oraz

$$R_2 = \alpha\beta i_3, \quad R_3 = \alpha\gamma i_2. \quad (26)$$



Rys. 13



Rys. 14

## 7. Modelowanie dwójników nieziemionych

Stosując dwa MI połączone ze sobą zaciskami wyjściowymi, otrzymuje się układ czwórnikowy pozwalający symulować parametryczne lub nieliniowe dwójniki nieziemione. Na rys. 15 przedstawiony jest taki układ zbudowany z mnożników impedancji typu A (p. 6, tablica 1).

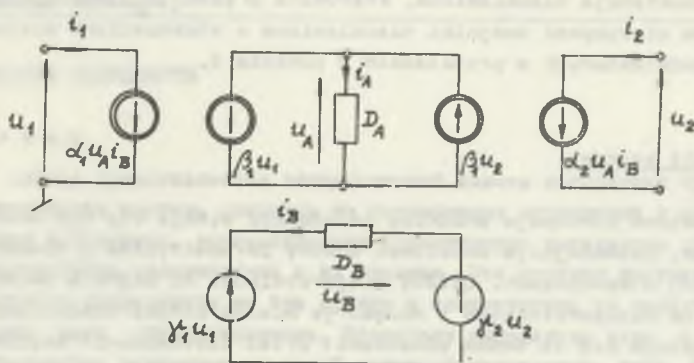
Jeżeli dwójniki  $D_A$  i  $D_B$  opisują równania:

$$\begin{aligned} \hat{a}_A u_A &= \hat{b}_A i_A \\ \hat{a}_B u_B &= \hat{b}_B i_B, \end{aligned} \quad (27)$$

to z układu wynika, że:

$$\begin{aligned} i_A &= \beta_2 u_2 - \beta_1 u_1 \\ u_B &= \gamma_2 u_2 - \gamma_1 u_1 \end{aligned} \quad (28)$$





Rys. 15

co po uwzględnieniu zależności (27) daje:

$$u_A = \hat{a}_A^{-1} \hat{b}_A (\beta_2 u_2 - \beta_1 u_1) \quad (29)$$

$$i_B = \hat{b}_B^{-1} \hat{a}_B (\gamma_2 u_2 - \gamma_1 u_1)$$

Stąd dla prądów wejściowych otrzymuje się równania:

$$i_1 = \alpha_1 \hat{a}_A^{-1} \hat{b}_A (\beta_2 u_2 - \beta_1 u_1) \hat{b}_B^{-1} \hat{a}_B (\gamma_2 u_2 - \gamma_1 u_1) \quad (30)$$

$$i_2 = \alpha_2 \hat{a}_A^{-1} \hat{b}_A (\beta_2 u_2 - \beta_1 u_1) \hat{b}_B^{-1} \hat{a}_B (\gamma_2 u_2 - \gamma_1 u_1).$$

Jeżeli założy się identyczność obu MI, czyli:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma,$$

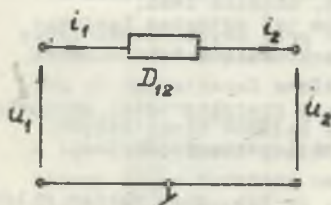
wtedy:

$$i_1 = i_2 = \alpha \hat{a}_B^{-1} \hat{b}_A [\beta (u_2 - u_1)] \hat{b}_B^{-1} \hat{a}_B [\gamma (u_2 - u_1)]. \quad (31)$$

Równania te można zamodelować układem z rys. 16.

Dwójnik  $D_{12}$  może być parametryczny lub nieliniowy w zależności od doboru dwójników  $D_A$  i  $D_B$ . I tak, jeżeli przyjąć  $D_A$  jako rezystancję  $R_A$ , a  $D_B$  jako źródło prądowe o wydajności prądowej  $I_B$ , to dwójnik  $D_{12}$  opisują równania:

$$i_1 = i_2 = \alpha \beta R_A I_B (u_2 - u_1). \quad (32)$$



Rys. 16

Jest to konduktancja nieuziemiona, sterowana prądem  $I_B$ . Postępując podobnie można otrzymywać dwójniki nieuziemione o własnościach analogicznych do przedstawionych w przykładach w punkcie 5.

### B. Wnioski końcowe

Przedstawiona koncepcja mnożnika impedancji wydaje się być układem uniwersalnym, pozwalającym modelować obwody parametryczne i nieliniowe o nietypowych własnościach. Układy trójwrotnikowe MI można w łatwy sposób rozszerzyć na wielowrotnikowe i nazwać je wielokrotnymi mnożnikami impedancji. Uzupełnia się to dwoma sposobami: przez zastosowanie wielowejściowego układu mnożącego możliwego do uzyskania przez złożenie dwujęściowych układów mnożących oraz przez łańcuchowe łączenie odpowiednich trójwrotnikowych MI.

### LITERATURA

- [1] Levenstein H.: Theory of Networks of Linearly Variable Resistances. Procc. IEEE, February 1958.
- [2] Topór-Kamiński L.: Analogowy układ mnożący jako element teorii obwodów. ZN Pol. Śl., s. Elektryka, z. 54, Gliwice 1976.
- [3] Malik M.R., Jackson G.L., Yong Sookim: Theory and Applications of Resistor, Linear Controlled Resistor, Linear Controlled Conductor Networks. IEEE Trans. on CTS, April 1976.
- [4] Topór-Kamiński L.: Konwertyer impedancyjny sterowany. ZN Pol. Śl., s. Elektryka, z. 60, Gliwice 1978.
- [5] Topór-Kamiński L.: Uogólniony rotator sterowany. ZN Pol. Śl., s. Elektryka, z. 62, Gliwice 1979.
- [6] Topór-Kamiński L.: Elementy składowe rezystancyjnych aktywnych obwodów parametrycznych. ZN Pol. Śl., s. Elektryka, z. 68, Gliwice 1980.
- [7] Topór-Kamiński L.: Inwertor impedancyjny sterowany. ZN Pol. Śl., s. Automatyka, z. 50, Gliwice 1980.
- [8] Huertas J.L., Acha J., Gago A.: Design of General Voltage - or Current - Controlled Resistive Elements and Their Applications to the Synthesis of Nonlinear Networks. IEEE Trans. on CTS, no 2, 1980.
- [9] Topór-Kamiński L.: Diodowe elementy osobliwe. ZN Pol. Śl., s. Elektryka, z. 88, Gliwice 1984.
- [10] Frycz S., Topór-Kamiński L.: Przełącznikowo-kondensatorowy układ mnożący. ZN Pol. Śl., s. Elektryka, z. 95, Gliwice 1985.
- [11] Cichocki A.: Synteza układów nieliniowych przy użyciu wzmacniaczy operacyjnych i elementów sterowanych. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, z. 67, Warszawa 1982.
- [12] Cichocki A.: Metody realizacji nieliniowych charakterystyk bezinercyjnych i ich zastosowanie do modelowania układów dynamicznych. VI Krajowa Konferencja Teoria Obwodów i Układy Elektroniczne, Gliwice 1983.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Marian Miłek

Wpłynęło do redakcji dnia 25 października 1987 r.

## МНОЖИТЕЛИ ИМПЕДАНСОВ

## Резюме

В статье представляется теоретический замысел построения трехходовых электрических систем, опираясь на управляемых источниках и вдвойне управляемых источниках, осуществляемых произведение импедансов произвольных двухполюсников подключенных к их выходам. Эти системы названные множителями импедансов разделяются на три группы в соответствии со свойствами осуществляемых ими двухполюсниками. Множители импедансов типа А моделируют двухполюсники зависящие от одной зажимной переменной, типа В - зависящие от двух зажимных переменных а типа С - осуществляют двухполюсники, для которых одна из зажимных переменных может быть произвольной. Представлены по одному примеру из каждого типа практического осуществления о применении операционных усилителей и аналоговых множительных систем. Представляются теоретические примеры моделирования с применением множителей импедансов заземленных и свобонных управляемых двухполюсников (например, индуктивность управляемая напряжением), нелинейных (например, емкость имеющая нелинейность в системе координат напряжение - заряд), некоторых аномальных двухполюсников (например, двухполюсник, являющийся одновременно коротким замыканием или источником тока), а также двухсторонних множительных резистивных и импедансных усилителей.

## IMPEDANCE MULTIPLIERS

## Summary

Theoretical conception of the construction of 3-port networks based on controlled and double controlled sources realizing the product of impedances of arbitrary two-terminal networks connected to their output terminals has been described. These networks called impedance multipliers have been divided into three groups A, B, C according to their properties. The impedance multipliers of type A are used for modelling the two-terminal dependent on one terminal variable, those of type B - dependent on both terminal variables, while the multipliers of type C realize the two-terminal networks for which one terminal variable may be of arbitrary value. The examples of each type of their practical realization with the use of operational amplifiers and analog multipliers have been given. Theoretical examples of modelling grounded and ungrounded controlled two-terminal networks (for example voltage controlled inductance), non-linear two-terminal networks (for example, capacitance with prescribed non-linear voltage-charge characteristic), some singular networks (for example, two-terminal network which is a short-circuit and a current source simultaneously) and bilateral resistance and impedance multiplier amplifiers by means of impedance multipliers have been given.