Doc. dr inż. Maria JASTRZĘBSKA

Maria Jastrzębska urodziła się w dniu 18 października 1924 roku w Samborze. W 1940 roku została przymusowo wywieziona do ZSRR do Kazachstanu, w czerwcu 1945 roku powróciła do Sambora, a w pierwszych dniach października tegoż roku została przesiedlona do Gliwic.
W 1947 roku została przyjęta na I rok studiów Wydziału Elektrycznego Politechniki Śląskiej w Gliwicach, a w 1952 roku uzyskała dyplom inżyniera elektryka.

Jako wyróżniająca się studentka już w 1949 roku rozpoczęła pracę na Wydziale Elektrycznym Politechniki Śląskiej w Katedrze Podstaw Elektrotechniki, kierowanej przez prof. dr inż. Stanisława Fryzego.
W 1960 roku obroniła pracę doktorską i rozpoczęła pracę na Wydziale Automatyki Politechniki Śląskiej w Katedrze Teorii Regulacji.
W 1966 roku doc. Maria Jastrzębska nawiązała pierwszy kontakt z WSI w Opolu a w marcu 1968 przeniosła się do Opola, obejmując kierownictwo Zespołu Automatyki, Elektroniki i Telemechaniki którym kierowała nieprzerwanie do 1986 roku. W lipcu 1968 roku w wyniku uznania Jej dorobku naukowego została mianowana na stanowisko docenta.
Doc. Maria Jastrzębska była autorką wielu publikacji naukowych, referatów na konferencjach naukowych, skryptów dla studentów zarówno z elektrotechniki teoretycznej jak i z teorii regulacji. Tłumaczyła również książki naukowe z języka rosyjskiego i francuskiego w ramach współpracy z PWN. Była promotorem jednej pracy doktorskiej i wielu prac dyplomowych.

Maria Jastrzębska była nadzwyczaj prawym, bezkompromisowym i dzielnym człowiekiem, swym przykładem oddziaływała wychowawczo na młodzież akademicką, była ceniowym dydaktykiem, przykładała wielką wagę do jasności wykładu, poświęcała wiele czasu konsultacjom i bezpośrednim kontaktom ze swoimi studentami. Była wymagająca, a równocześnie w czyjejś potrzebie starała się i potrafiła wykazać dużo zrozumienia, cierpliwości i serca.

Docent Maria Jastrzębska za swą działalność naukowo-dydaktyczną i wychowawczą została uhonorowana nagrodami Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego i nagrodami Rektora oraz odznaczeniami państwowymi i regionalnymi.

Maria Jastrzębska zmarła 6 czerwca 1988 roku i została pochowana zgodnie ze swoim życzeniem na cmentarzu w Pińczowie.

Pozostanie na zawsze w naszej pamięci

Grono Przyjaciół

SPIS TREŚCI

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: ELEKTRYKA z. 113 Nr kol. 983

Bernard BARON

ZASTOSOWANIE METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH DO ROZWIĄZYWANIA PROBLEMU DIRICHLETA DLA DWUWYMIAROWEGO RÓWNANIA LAPLACE'A

Streszczenie. W pierwszej części pracy sformułowano problem Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a w postaci równoważnego układu równań całkowych pierwszego rodzaju opierając się na teorii potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej. Zgodnie z ideą metody elementów brzegowych dokonano aproksymacji potencjału logarytmicznego zadanego na dowolnych konturach. Elementy macierzy otrzymane w wyniku aproksymacji wyrażono w postaci kombinacji funkcji standardowych zależnych od współrzędnych punktów węzłowych konturów. Otrzymano w ten sposób ogólną procedurę dla numerycznego rozwiązywania pól elektrycznych w układach dwuwymiarowych.

1. Sformułowanie problemu Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a w postaci równoważnego równania całkowego pierwszego rodzaju

Obecnie dużo uwagi zwraca się na rozwiązywanie pól elektrycznych quasi-statycznych metodą równań całkowych. Szerokie zastosowanie tej metody podyktowane jest wieloma zaletami, z których główna polega na możliwości obliczenia pola w nieograniczonej przestrzeni. Do innych zalet należy również zaliczyć możliwość konstruowania najbardziej prostych i ogólnych programów, pozwalających obliczyć pole elektryczne przy dowolnych kształtach powierzchni granicznych z rozdzielenia ośrodków, jak również możliwość otrzymania rozwiązań zagadnień polowych w przejrzystej zwartej formie, tj. w postaci potencjałów [4, 10, 13, 14].

Do obliczenia pól elektrycznych generowanych przez naładowane przewodniki bardzo często wykorzystuje się równanie całkowe pierwszego rodzaju [7, 8], co zapewne podyktowane jest bezpośrednim stosowaniem potencjałów warstwy pojedynczej ładunków.

Dwuwymiarowy model pola elektrycznego można stosować w przypadku rozpatrywania układów przewodów prowadzonych równolegle względem siebie oraz przy założeniu, że odległości między przewodami są dostatecznie małe w porównaniu z ich długością.

Z praktycznego punktu widzenia zewnętrzny problem Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a ma bardzo duże zastosowanie. Poszukiwanie rozwiązania tego problemu będzie prowadzone w postaci potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej.

Niech na płaszczyźnie R^2 dany jest układ $D_i (i = 0, 1,...N)$ rozłącznych obszarów ograniczonych jednospójnych, których brzegi $\mathcal{C}^i$ są krzywymi zamkniętymi klasy C^1. Poszukuje się rozwiązania $V(X)$ zagadnienia Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a:

$$\Delta V(X) = 0 \quad \text{dla} \quad X \in R^2 - \bigcup_{i=0}^{N} \bar{D}_i \tag{1}$$

z warunkami brzegowymi

$$V(X) = V^i \quad \text{dla} \quad X \in \mathcal{C}^i \quad (i = 0, 1, 2,...,N) \tag{2}$$

znikającego w nieskończoności w postaci potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej:

$$V(X) = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \sum_{k=0}^{N_p} \oint_{\mathcal{C}} \sigma^k(Y) \ln\left[\frac{1}{|XY|}\right] dl_Y = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{\mathcal{C}} \sigma(Y) \ln\left[\frac{1}{|XY|}\right] dl_Y \tag{3}$$

gdzie:

$$= \mathcal{C}^0 \cup \mathcal{C}^1 \dots \mathcal{C}^{N_p},$$

$$|XY| = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right]^{1/2},$$

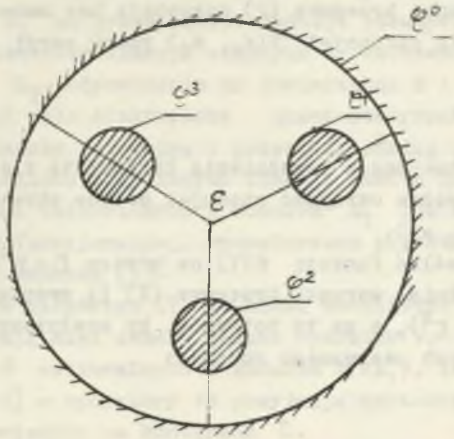
dl_Y - miara konturu $\mathcal{C}$ ze względu na współrzędne punktu Y.

Ażeby jednak potencjał określony wzorem (3) znikał w nieskończoności potrzeba i wystarcza, aby [8]:

$$\int_{\mathcal{C}} \sigma(X) dl_X = \sum_{k=0}^{N_p} \int_{\mathcal{C}^k} \sigma^k(X) dl_X = 0. \tag{4}$$

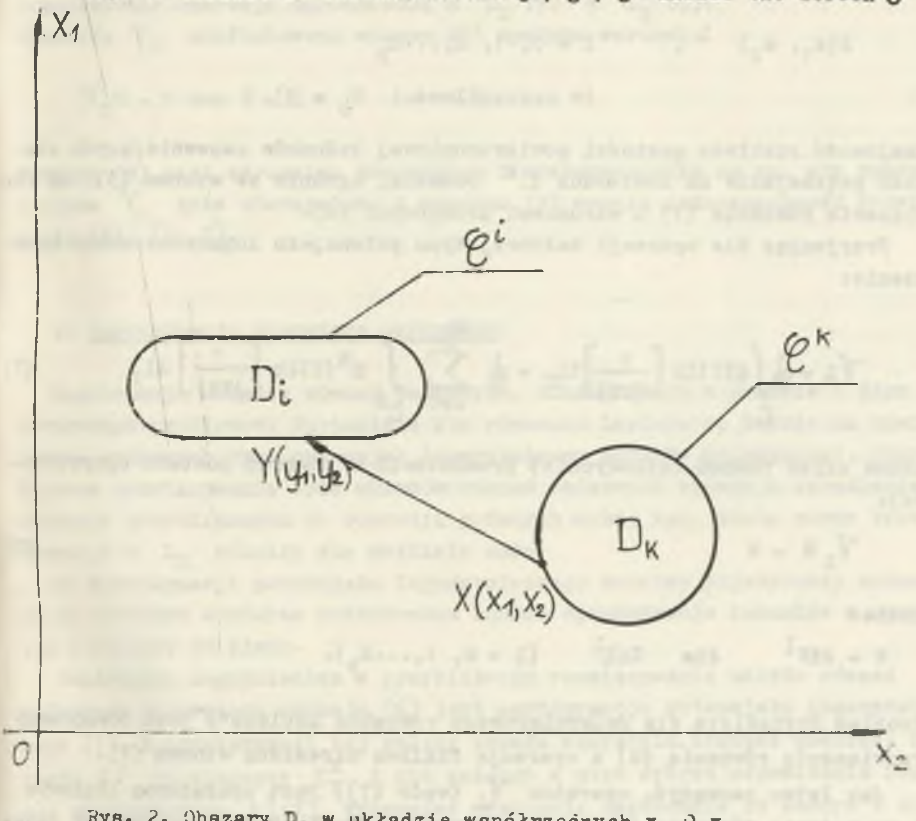
Łatwo zauważyć, że w przypadku gdy punkt X zmierza do nieskończoności (rys. 1) to funkcja $V(X)$ zmierza do zera (wynika to z występowania ekranu).

W przypadku braku ekranu $\mathcal{C}^0$ podczas badania pola elektrycznego linii trójfazowej zakłada się dodatkowo, że rozłączne obszary D_i znajdują się w półpłaszczyźnie $x_2 > 0$ (rys. 2).



Rys. 1. Układ przewodników $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{C}^2$, $\mathscr{C}^3$, wewnątrz ekranu $\mathscr{C}^0$

Fig. 1. Corcuit of the conductors $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{C}^2$, $\mathscr{C}^3$ inside the screen $\mathscr{C}^0$



Rys. 2. Obszary D_i w układzie współrzędnych x_1 0 x_2

Fig. 2. The D_i regions in the coordinate system x_1 0 x_2

W tym przypadku warunki brzegowe (2) pozostają bez zmian, natomiast dla $x_2 = 0$ przyjmuje się potencjał $V(x_1, x_2)$ równy zeru:

$$V(x_1, 0) = 0 \, . \tag{5}$$

Rozwiązanie tak postawionego zagadnienia Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a można otrzymać stosując metodę obrazów elektrycznych względem prostej $x_2 = 0$.
Należy więc tak określić funkcję $\sigma(Y)$ na brzegu $\mathcal{L} = \mathcal{L}^0 \cup \mathcal{L}^1 \cup \ldots \cup \mathcal{L}^{N_p}$, aby potencjał $V(X)$ spełniał warunki brzegowe (2) (i ewentualnie (5) w przypadku braku ekranu $\mathcal{L}^0$), a na to potrzeba, by spełniony był następujący układ równań całkowych pierwszego rodzaju:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{N_p} \int_{\mathcal{L}^k} \sigma^k(y_1, y_2) \ln \frac{1}{\sqrt{(y_1 - y_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}} \, dl_Y = 2\varepsilon V^l, \tag{6}$$

$$X(x_1, x_2) \; {}^{l} \, , \qquad l = 0, 1, 2, \ldots N_p$$

(w szczególności $N_p = 3$).

Znajomość rozkładu gęstości powierzchniowej ładunków zapewniających stałość potencjałów na konturach $\mathcal{L}^k$ pozwala, zgodnie ze wzorem (3), na rozwiązanie równania (1) z warunkami brzegowymi (2).

Przyjmując dla operacji całkowej typu potencjału logarytmicznego oznaczenie:

$$\mathcal{V}_L = \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{L}} \sigma(Y) \ln \left[\frac{1}{|XY|} \right] dl_Y = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{N_p} \int_{\mathcal{L}^k} \sigma^k(Y) \ln \left[\frac{1}{|XY|} \right] dl_Y \tag{7}$$

można układ równań całkowych (6) przedstawić w zwartej postaci operatorowej:

$$\mathcal{V}_L \sigma = W \tag{8}$$

gdzie:

$$W = 2\varepsilon V^l \quad \text{dla} \quad X \in \mathcal{L}^l \quad (l = 0, 1, \ldots N_p).$$

Problem Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a jest równoważny rozwiązaniu równania (8) z operacją liniową określoną wzorem (7).

Jak łatwo zauważyć, operator $\mathcal{V}_L$ (wzór (7)) jest operatorem liniowym i do badania równania (8) można zastosować teorię Banacha z analizy funkcjonalnej [1, 9]. W zagadnieniach elektrostatyki dziedziną i przeciwdziedziną operatora $\mathcal{V}_L$ są przestrzenie funkcji rzeczywistych współrzędnych punktu X, np. przestrzeń funkcji ciągłych C, całkowalnych L_1 i całkowalnych z kwadratem L_2 odpowiednio na powierzchni S i konturze τ. Jeżeli jednak rozpatrywać pole elektryczne quasi-statyczne sinusoidalnie zmienne, wówczas należałoby dziedzinę i przeciwdziedzinę operatora $\mathcal{V}_L$ rozpatrywać w przestrzeniach zespolonych funkcji punktu na konturze , np. w przestrzeni funkcji całkowalnych z modułem L_1^* lub z kwadratem L_2^*. Jak wiadomo z analizy funkcjonalnej, rozpatrywane przestrzenie C^*, L_1^*, L_2^* są przestrzeniami Banacha [1].

Jądro operatora całkowego (7) ma słabą osobliwość w przypadku, gdy punkty X i Y pokrywają się. Jeżeli jednak operator $\mathcal{V}_L$ jest określony w przestrzeni funkcji σ całkowalnych z modułem $(\sigma \in L_1^*)$, to - jak wiadomo z teorii potencjału [10] - operatory te przyjmują wartości przestrzeni funkcji ciągłych C^* odpowiednio na konturach τ.

Można wykazać, że operacja $\mathcal{V}_L$ jest ograniczona z C^* w C^*,a jako taka jest ciągła. Ponadto dowodzi się [8], że liniowa operacja $\mathcal{V}_L$ jest równocześnie operacją ograniczoną z $L_2^*(\varphi)$ w $L_2^*(\tau)$.
Operacja $\mathcal{V}_L$ zdefiniowana wzorem (7) spełnia warunek:

$$\mathcal{V}_L \sigma = 0 \Longleftrightarrow \sigma = 0 \,. \tag{9}$$

Warunek (9) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby operacja liniowa $\mathcal{V}_L$ była odwracalna. Z warunku (9) wynika jednoznaczność rozwiązania (8), [1, 7].

2. Aproksymacja operatora całkowego

Konstrukcja układów równań całkowych, sformułowana w punkcie 1 jako równoważna problemowi Dirichleta dla równania Laplace'a, bazuje na operatorach całkowych typu potencjał logarytmiczny warstwy pojedynczej. Przybliżone rozwiązywania tych układów równań całkowych wymagają określenia operacji przybliżonych do operacji podanych wyżej tak, ażeby normy tych operacji w L_2 różniły się możliwie mało.

Do aproksymacji potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej zadanego na dowolnym konturze zastosowana będzie aproksymacja ładunków w oparciu o funkcje sklejane.

Centralnym zagadnieniem w przybliżonym rozwiązywaniu układu równań całkowych pierwszego rodzaju (6) jest aproksymacja potencjału logarytmicznego (7). W aproksymacji tej należy przede wszystkim dokonać podziału konturów τ^k na elementy τ_i^k i dla każdego z nich wybrać odpowiednią funkcję aproksymującą $\tau_i^k(X)$. Wykonując następnie całkowanie po każdym z ele-

mentów τ_i^k i sumując uzyskane wyniki, otrzymujemy operację przybliżoną operacji (7). Jeżeli kontury τ^k są zadane w postaci parametrycznej i wynik całkowania po τ^k da się przedstawić w postaci kombinacji funkcji standardowych, to tzw. funkcje kształtu można przedstawić w postaci gotowych wzorów. Otrzymanie gotowych wzorów jest tym trudniejsze, im wyższy jest stopień funkcji aproksymujących. W takich przypadkach należałoby stosować całkowanie numeryczne.
Jeżeli jednak punkt $X\in\tau_i^k$, to całka po elemencie τ_i^k jest całką niewłaściwą i jej numeryczne obliczenie jest utrudnione.
Ponieważ jednak całki te decydują o dokładności aproksymowanego operatora V_L, należy je wyznaczyć możliwie najdokładniej metodami analitycznymi.

Jeżeli kontury przewodów τ^k nie są zadane analitycznie, lecz w postaci ciągu punktów $Y_i^k (i = 1, 2,\dots,N_k)$ $(k = 0, 1,\dots,N_p)$, to w konstrukcji operacji bliskiej dla operacji (3) należy również dokonać aproksymacji konturów.

Formalnie rzecz biorąc, całkowanie po elementach τ_i^k można dokonać jakąkolwiek metodą kwadratury [11]. Jednakże przy całkowaniu na dużych odcinkach metody te dają duże błędy. Są one uwarunkowane słabą osobliwością jądra operacji typu potencjału logarytmicznego V_L, które maleją dostatecznie szybko przy oddalaniu się od rozpatrywanego punktu.

Zwiększenie dokładności aproksymacji potencjału (7) może być osiągnięte przez zastosowanie tzw. funkcji sklejanych do aproksymacji funkcji gęstości ładunków $\sigma_i^k(X)$ na elementach podziału konturów τ^k [5].

2.1. Potencjał logarytmiczny warstwy pojedynczej zadanej na dowolnych konturach

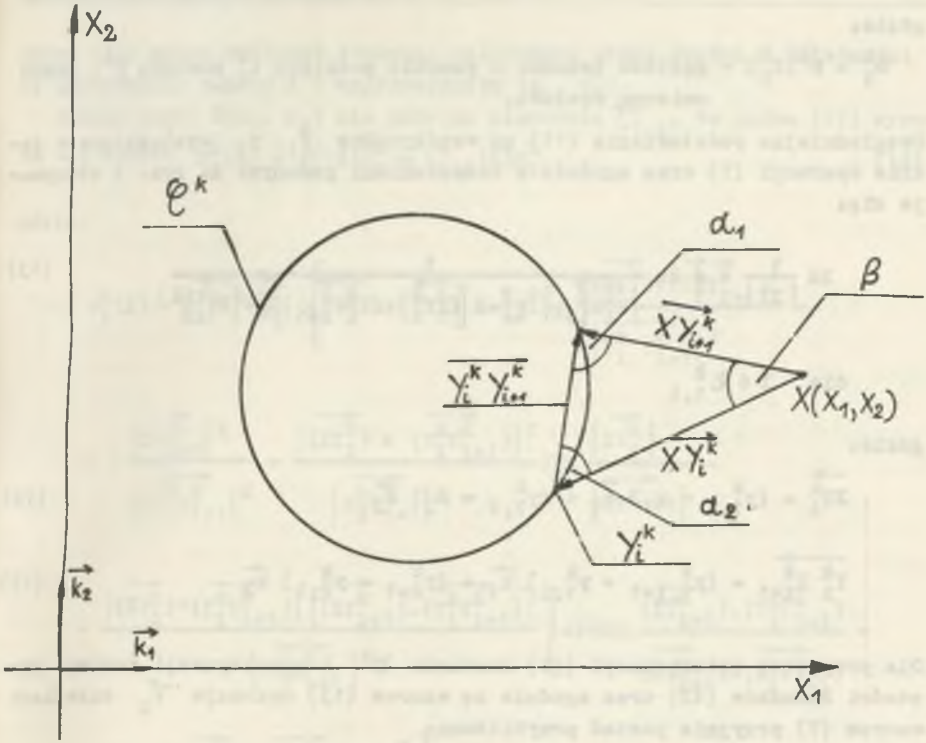
Punktem wyjścia dla dyskretyzacji potencjału logarytmicznego jest określenie dla zadanych punktów $Y_i^k\in\tau^k (i = 1, 2,\dots,N_k)$ poszczególnych konturów τ^k przewodów, funkcji aproksymujących kształt tych konturów. Najprostsza aproksymacja danego konturu τ^k polega na zastąpieniu go krzywą łamaną składającą się z odcinków łączących sąsiednie punkty Y_i^k podziału konturu τ^k. W ten sposób zbiór punktów (y_1, y_2) konturu τ^k został zastąpiony zbiorem punktów (rys. 3):

$$\tau_1^k = \bigcup_{i=1}^{N_k} \tau_{1,i}^k \tag{10}$$

gdzie:

$$\tau_{1,i}^k=\Big\{(y_1,y_2): y_1=y_{1,i}^k+(y_{1,+1}^k-y_{1,i}^k)\xi;\ y_2=y_{2,i}^k+(y_{2,i+1}^k-y_{2,i}^k)\xi;$$

$$k = 0, 1,\dots,N_p \qquad 0\le\xi\le 1\Big\}\ . \tag{11}$$



Rys. 3. Oznaczenie wektorów wodzących

Fig. 3. Designation of the radius-vectors

Tak przedstawione funkcje sklejane pierwszego stopnia (11) interpolujące współrzędne $y_{1,i}^k$, $y_{2,i}^k$ punktów $Y_i^k \in \mathcal{C}_i^k (i = 1,2,\dots,N_k)$ $(k = 0,1,\dots N_p)$ są dane jednoznacznie [5].

W przypadku interpolacji konturów $\mathcal{C}^k$ w postaci zbioru (10) funkcje gęstości ładunków będą aproksymowane funkcją sklejaną stopnia pierwszego interpolującą dane wartości σ_i^k w punktach podziału Y_i^k konturu $\mathcal{C}^k$. Podobnie jak we wzorze (11) w zapisie funkcji interpolującej zastosowany będzie parametr ξ, tj.:

$$\sigma_i^k(y_1,y_2) = \begin{cases} \sigma_i^k + (\sigma_{i+1}^k - \sigma_i^k)\xi & \text{dla } (y_1,y_2) \in \mathcal{C}_{1,i}^k \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1 \\ 0 & \text{dla } (y_1,y_2) \notin \mathcal{C}_{1,i}^k \end{cases} \tag{12}$$

gdzie:

$\sigma_i^k = \sigma^k(Y_i^k)$ – gęstość ładunku w punkcie podziału Y_i^k konturu $\mathcal{C}^k$, zwana zmienną węzłową.

Uwzględniając podstawienie (11) na współrzędne y_1, y_2 występujące w jądrze operacji (7) oraz zgodnie z oznaczeniami podanymi na rys. 3 otrzymuje się:

$$\ln \frac{1}{|XY|} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\left|\overrightarrow{Y_i^k Y_{i+1}^k}\right|^2 \xi^2 + 2\left[(\overrightarrow{XY_i^k})\cdot(\overrightarrow{Y_i^k Y_{i+1}^k})\right]\xi + \left|\overrightarrow{XY_i^k}\right|^2} \tag{13}$$

dla $Y \in \mathcal{C}_{1,i}^k$

gdzie:

$$\overrightarrow{XY_i^k} = (y_{1,i}^k - x_1)\,\vec{k}_1 + (y_{2,i}^k - x_2)\,\vec{k}_2 \tag{14}$$

$$\overrightarrow{Y_i^k\, Y_{i+1}^k} = (y_{1,i+1}^k - y_{1,i}^k)\,\vec{k}_1 + (y_{2+1}^k - y_{2,i}^k)\,\vec{k}_2\,. \tag{15}$$

Dla przyjętej interpolacji (10) konturów $\mathcal{C}^k$ i aproksymacji funkcji gęstości ładunków (12) oraz zgodnie ze wzorem (13) operacja $\mathcal{V}_L$ określana wzorem (7) przyjmie postać przybliżoną:

$$\mathcal{V}_{Lp} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} \int_0^1 \frac{1}{2} \left|\overrightarrow{Y_i^k\, Y_{i+1}^k}\right| \left[\sigma_i^k + (\sigma_{i+1}^k - \sigma_i^k)\xi\right] \times$$

$$\times \ln \frac{1}{\left|\overrightarrow{Y_i^k\, Y_{i+1}^k}\right|^2 \xi^2 + 2\left[(\overrightarrow{XY_i^k})\cdot(\overrightarrow{Y_i^k\, Y_{i+1}^k})\right]\xi + \left|\overrightarrow{XY_i^k}\right|^2}\, d\xi\,. \tag{16}$$

Dyskusję całki występującej we wzorze (16) jako funkcji współrzędnych punktu X można ograniczyć do następującej całki:

$$w_i^k(X) = \frac{1}{2\pi} \left|\overrightarrow{Y_i^k\, Y_{i+1}^k}\right| \int_0^1 \left[\sigma_i^k + (\sigma_{i+1}^k - \sigma_i^k)\xi\right] \times$$

$$\times \ln \frac{1}{\left|\overrightarrow{Y_i^k\, Y_{i+1}^k}\right|^2 \xi^2 + \left[(\overrightarrow{XY_i^k})\cdot(\overrightarrow{Y_i^k\, Y_{i+1}^k})\right]\xi + \left|\overrightarrow{XY_i^k}\right|^2}\, d\xi\,.$$

Całkę (17) można obliczyć stosując całkowanie przez części w zależności od usytuowania punktu X o współrzędnych (x_1, x_2).

Jeżeli punkt $X(x_1, x_2)$ nie leży na elemencie $\zeta^k_{1,i}$, to całka (17) wyraża się wzorem $w^k_i(X) = a^k_i(X)\sigma^k_i + b^k_{i+1}(X)\sigma^k_{i+1}$, (18)

gdzie:

$$a^k_i(X) = \frac{1}{\pi}\left|\overrightarrow{A^k_i Y^k_{i+1}}\right|\Bigg\{-\frac{1}{2}\ln\left|\overrightarrow{XY^k_i}\right| + \frac{1}{4}\Bigg(3+\frac{2(\overrightarrow{XY^k_i})\cdot(\overrightarrow{Y^k_i Y^k_{i+1}})}{\left|\overrightarrow{Y^k_i\, Y^k_{i+1}}\right|^2} +$$

$$+\Bigg(\frac{\left|\overrightarrow{XY^k_{i+1}}\right|^2}{2\left|\overrightarrow{Y^k_i Y^k_{i+1}}\right|^2} - \frac{\left|(\overrightarrow{XY^k_i}) \times (\overrightarrow{Y^k_i Y^k_{i+1}})\right|^2}{\left|\overrightarrow{Y^k_i Y^k_{i+1}}\right|^4}\Bigg)\ln\frac{\left|\overrightarrow{XY^k_i}\right|}{\left|\overrightarrow{XY^k{}_{i+1}}\right|} -$$

$$-\frac{\left|(\overrightarrow{XY^k_i})\times(\overrightarrow{Y^k_i Y^k_{i+1}})\right|\left[(\overrightarrow{XY^k_{i+1}})\cdot(\overrightarrow{Y^k_i Y^k_{i+1}})\right]}{\left|\overrightarrow{Y^k_i Y^k_{i+1}}\right|^4}\Bigg[\operatorname{arctg}\frac{(\overrightarrow{XY^k_{i+1}})\cdot(\overrightarrow{Y^k_i Y^k_{i+1}})}{(\overrightarrow{XY^k_{i+1}})\times(\overrightarrow{Y^k_i Y^k_{i+1}})} -$$

$$-\operatorname{arctg}\frac{(\overrightarrow{XY^k_i})\cdot(\overrightarrow{Y^k_i Y^k_{i+1}})}{(\overrightarrow{XY^k_{i+1}})\times(\overrightarrow{Y^k_i Y^k_{i+1}})}\Bigg]\Bigg\} \tag{19}$$

$$b^k_{i+1}(X) = \frac{1}{\pi}\left|\overrightarrow{Y^k_i Y^k_{i+1}}\right|\Bigg\{-\frac{1}{2}\ln\left|\overrightarrow{XY^k_{i+1}}\right| + \frac{1}{4}\Bigg(3-\frac{2(\overrightarrow{XY^k_{i+1}})\cdot(\overrightarrow{Y^k_i Y^k_{i+1}})}{\left|\overrightarrow{Y^k_i Y^k_{i+1}}\right|^2}\Bigg) +$$

$$+\Bigg(\frac{\left|\overrightarrow{XY^k_i}\right|^2}{2\left|\overrightarrow{Y^k_i Y^k_{i+1}}\right|^2} - \frac{\left|(\overrightarrow{XY^k_i}) \times (\overrightarrow{Y^k_i Y^k_{i+1}})\right|^2}{\left|\overrightarrow{Y^k_i Y^k_{i+1}}\right|^4}\Bigg)\ln\frac{\left|\overrightarrow{XY^k_{i+1}}\right|}{\left|\overrightarrow{XY^k_i}\right|} +$$

$$+\frac{\left|(\overrightarrow{XY^k_i})\times(\overrightarrow{Y^k_i Y^k_{i+1}})\right|\left[(\overrightarrow{XY^k_i})\cdot(\overrightarrow{Y^k_i Y^k_{i+1}})\right]}{\left|\overrightarrow{Y^k_i Y^k_{i+1}}\right|^4}\Bigg[\operatorname{arctg}\frac{(\overrightarrow{XY^k_{i+1}})\cdot(\overrightarrow{Y^k_i Y^k_{i+1}})}{(\overrightarrow{XY^k_{i+1}})\times(\overrightarrow{Y^k_i Y^k_{i+1}})} -$$

$$-\operatorname{arctg}\frac{(\overrightarrow{XY^k_i})\cdot(\overrightarrow{Y^k_i Y^k_{i+1}})}{(\overrightarrow{XY^k_{i+1}})\times(\overrightarrow{Y^k_i Y^k_{i+1}})}\Bigg]\Bigg\}, \tag{20}$$

Jeżeli punkt X leży na elemencie $\tau^{k}_{1,i}$, to obliczenie całki (17) znacznie się upraszcza, należy jednak zauważyć, że staje się ona całką niewłaściwą, gdyż dla $0 \leq \xi \leq 1$ wyrażenie występujące pod logarytmem przyjmuje dla pewnego ξ wartość zerową. Zbieżność tej całki wynika z ogólnego twierdzenia [10] dotyczącego potencjału logarytmicznego.

Jeżeli punkt $X(x_1, x_2)$ leży na końcach elementu $\tau^{k}_{1,i}$ (tj. $X=Y^k_i$, Y^k_{i+1}), to całka (17) wyraża się wzorami:

$$W^k_i(Y^k_i) = a^k_i(Y^k_i)\sigma^k_i + b^k_{i+1}(Y^k_i)\sigma^k_{i+1} \tag{21}$$

gdzie:

$$a^k_i(Y^k_i) = \frac{1}{\pi}\left|\overrightarrow{Y^k_iY^k_{i+1}}\right|\cdot\left(\frac{1}{2}\ln\left|\overrightarrow{Y^k_iY^k_{i+1}}\right| + \frac{3}{4}\right) \tag{22}$$

$$b^k_{i+1}(Y^k_i) = \frac{1}{\pi}\left|Y^k_iY^k_{i+1}\right|\cdot\left(-\frac{1}{2}\ln\left|Y^k_iY^k_{i+1}\right| + \frac{1}{4}\right) \tag{23}$$

oraz:

$$W^k_i(Y^k_{i+1}) = a^k_{i+1}(Y^k_{i+1})\sigma^k_i + b^k_{i+1}(Y^k_{i+1})\sigma^k_{i+1} \tag{24}$$

gdzie:

$$a^k_i(Y^k_{i+1}) = \frac{1}{\pi}\left|Y^k_iY^k_{i+1}\right|\left(-\frac{1}{2}\ln\left|Y^k_iY^k_{i+1}\right| + \frac{1}{4}\right) \tag{25}$$

$$b^k_{i+1}(Y^k_{i+1}) = \frac{1}{\pi}\left|Y^k_iY^k_{i+1}\right|\cdot\left(-\frac{1}{2}\ln\left|Y^k_iY^k_{i+1}\right| + \frac{3}{4}\right). \tag{26}$$

Uwzględniając wynik całkowania (17) we wzorze (16) otrzymuje się:

$$\mathcal{V}_{Lp}\sigma = \sum_{k=0}^{N_p}\sum_{i=1}^{N_k}\left[a^k_i(x)\sigma^k_i + b^k_{i+1}(X)\sigma^k_{i+1}\right] = \sum_{k=0}^{N_p}\sum_{i=1}^{N_k} c^k_i(X)\sigma^k_i \tag{27}$$

gdzie:

$$c^k_i(X) = a^k_i(X) + b^k_i(X)\ . \tag{28}$$

W ten sposób otrzymano ogólne wyrażenie (27) na operator przybliżony dla operatora typu potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej (7). Funkcje kształtu $c^k_i(X)$ dla tego przybliżenia wyrażają się poprzez funkcje ln, arctg o argumentach będących funkcją iloczynów wektorowych oraz skalarnych na odpowiednich wektorach (14), (15). Ta ogólna procedura obliczania $\mathcal{V}_L$ sprowadza się tylko do podania współrzędnych punktów Y^k_i podziału konturów τ^k $(k=0,1,\ldots,N_p)$ oraz odpowiadających im zmiennych węzłowych σ_i^k będących gęstością ładunków w rozpatrywanych punktach, ażeby zgodnie ze wzorami (27), (28), (19) i (20) otrzymać potencjał logarytmiczny w dowolnym punkcie.

3. Algebraizacja układu równań całkowych pierwszego rodzaju

Zastosowanie metody elementów brzegowych pozwala na dyskretyzację układów równań całkowych sformułowanych w rozdziale 2. Stosując mianowicie aproksymację operatorów całkowych, występujących w tych równaniach, dokonaną w punkcie 2 na bazie elementów brzegowych oraz zapisując te układy równań całkowych w tylu punktach, ile jest zmiennych węzłowych ustalonych do aproksymacji tych operatorów, otrzymuje się algebraiczne układy równań będące przybliżeniem układu równań całkowych.

Przybliżając operator typu potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej (punkt 2, wzór (27)), a następnie zapisując układ równań (6) w tylu punktach $X = Y_i^k$, ile jest zmiennych węzłowych (najwygodniej jest wybrać te punkty Y_i^k, które posłużyły do przybliżenia operacji V_L (7)), otrzymujemy następujące przybliżenie równania całkowego układem równań liniowych:

$$\sum_{k=0}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} C_i^k(Y_j^l)\sigma_i^k = 2\varepsilon V^l \quad (l=0,1,\ldots,Np) \quad (j=1,2,\ldots,N_l). \tag{29}$$

Układ (29) należy do źle uwarunkowanych, tj. nieduże odchylenie elementów macierzy $C_i^k(Y_j^l)$ prowadzi do znacznych odchyleń w elementach macierzy odwrotnej. Paradoksalność sytuacji przy rozwiązaniu układu (29) polega na tym, że im mniejsze elementy podziału τ_i^k konturów τ^k, tym większy może być błąd rozwiązania przy stosowaniu niedokładnych metod przybliżenia operatora V_L (np. stosując całkowanie numeryczne). Praktycznie rzecz biorąc, należy przyjąć dostatecznie gruby podział konturów, natomiast dostateczną dokładność rozwiązania należy zabezpieczyć dużą dokładnością w obliczeniach współczynników $C_i^k(Y_j^l)$ układu (29). Otrzymane w pracy wzory na elementy $C_i^k(Y_j^l)$ macierzy układów równań (29) zapewniają zachowanie dokładności obliczeń, co potwierdza poniższy eksperyment numeryczny.

4. Obliczenia testujące

Opracowany algorytm przetestowano na przykładzie obliczeniowym dla danych z rys. 4, tj. dla przewodnika umieszczonego wewnątrz ekranu. Do obliczeń przyjęto:

$R_1 = 0,2$ m

$R_2 = 0,4$ m

$N_1 = 16$

$N_2 = 16$ liczba punktów węzłowych podziału przewodów

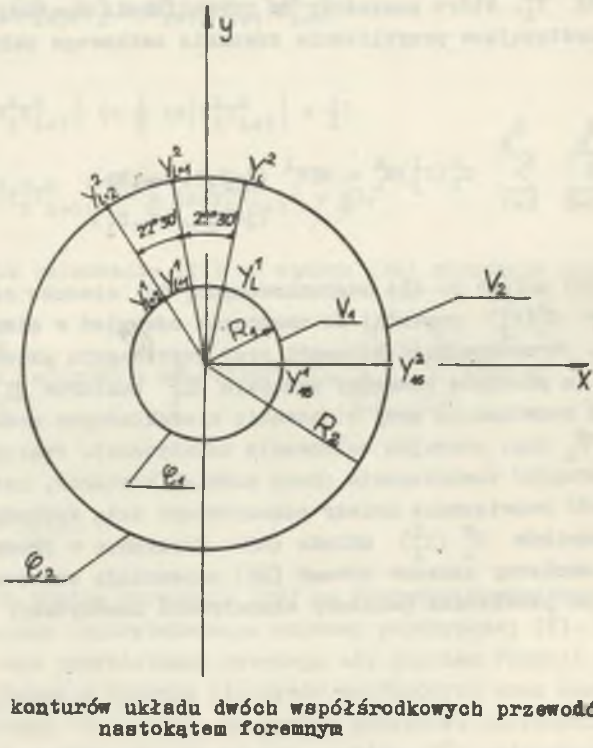
$V_1 = 10000$ V

$V_2 = 0$ V

$k=1,2$ - numery przewodów

$l=1,2,\ldots,16$ - numery punktów węzłowych

Y_l^k - punkty węzłowe podziału konturów przewodów.



Rys. 4. Aproksymacja konturów układu dwóch współśrodkowych przewodów szesnastokątem foremnym

Fig. 4. Approximation of the circuit of two concentric conductors with a regular sixteen

Dla dwóch współśrodkowych przewodów walcowych rozkład składowej E_r wektora natężenia pola elektrycznego ($R_1 \leq r \leq R_2$) dany jest dokładnym wzorem analitycznym:

$$E_r = \frac{V_1 - V_2}{r \ln \frac{R_2}{R_1}} . \tag{30}$$

Natomiast potencjał $V(r)$ dla $R_1 \leq r \leq R_2$ wyraża się wzorem analitycznym:

$$V(r) = (V_1 - V_2) \frac{\ln \frac{R_2}{r}}{\ln \frac{R_2}{R_1}} . \tag{31}$$

Obliczenia zrealizowane wg algorytmu (29) na minikomputerze IBM porównano z obliczeniami otrzymanymi na podstawie wzorów analitycznych (30) i (31). Wyniki obliczeń składowej normalnej wektora natężenia pola w punktach węzłowych podziału konturów Y_i^k zestawiono w tabeli I.

Tabela 1

Porównanie rozkładów natężenia pola na powierzchni przewodów o danych z rys. 4 obliczonych zgodnie z algorytmem (29) oraz w oparciu o wzór analityczny (30)

$E_n(Y_l^k)$ k=1,2 l=1,2,...,16	$E_n(r)$ wg wzoru (30)	Błąd względny $\delta = \left\lvert \frac{E_n(r) - E_n(Y_k^l)}{E_n(r)} \right\rvert \cdot 100\%$
$\frac{V}{m}$	$\frac{V}{m}$	%
$E_n(Y_l^1) = 72613,396$ dla l=1,2,...,16	$E_n(R_1) = 72139,662$	0,66
$E_n(Y_l^2) = 36058,288$ dla l=1,2,...,16	$E_n(R_2) = 36069,831$	0,03

5. Uwagi i wnioski

Opracowany algorytm do numerycznego rozwiązania układu równań całkowo-brzegowych pól elektrycznych pozwala wyznaczyć rozkłady natężenia pola elektrycznego na powierzchni przewodów ($\sigma = \varepsilon E_n$) jako wynik bezpośredniego rozwiązania układu równań algebraicznych (29).

Wyznaczone w pracy ogólne wzory (28) na funkcje kształtu $C_i^k(X)$ pozwalają zgodnie ze wzorem (27) wyznaczyć potencjał, a tym samym wektor natężenia pola elektrycznego w dowolnym punkcie X rozpatrywanego układu. Ponadto wyrażenie funkcji $C_i^k(X)$ jako współrzędnych punktu X poprzez kombinację funkcji standardowych wyeliminowało potrzebę wielotysięcznych odwołań do procedury całkowania numerycznego na poszczególnych elementach brzegowych, co w bardzo istotny sposób skróciło czas obliczeniowy oraz zapewniło bardzo dużą dokładność generacji macierzy dyskretyzującej operator całkowy, co z kolei jest warunkiem koniecznym efektywności stosowanej metody.

LITERATURA

[1] Alexiewicz A.: Analiza funkcjonalna. PWN, Warszawa 1969.

[2] Bachwałow W.S.: O swojstwach optimalnych mietodow rieszenija zadacz matiematiczeskoj fiziki. Żurn. Wycz. Mat. i Matiem. Fiziki 1970, No 3, s. 555-568.

[3] Baron B.: Analiza numeryczna równań całkowo-brzegowych pól elektrycznych pewnej klasy modeli obliczeniowych. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Elektryka, z. 97, 1985, s. 118.

[4] Brebbia C.A., Walker S.: Boundary Element Techniques in Ebgineering. Newnes-Butterworths, London. Boston 1980.

[5] Dahlquist G., Björek A.: Metody numeryczne. PWN, Warszawa 1983.

[6] Delves L.M., Walsh J.: Numerical solution of integral equations. Clarendon Press. Oxford 1974.

[7] Jaswon M.A.: Integral equationme thods in potential theory I. Proc. Roy. Soc. London No 1360, 1963, s. 23-32.

[8] Koleczickij E.S.: Rasczot elektriczeskich polej ustrojstw wysokogo napriażenija. Energoatomizdat, Moskwa 1983.

[9] Krejn S.G.: Analiza funkcjonalna. PWN, Warszawa 1967.

[10] Krzyżański M.: Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego. PWN, Warszawa 1957.

[11] Legras J.: Praktyczne metody analiza numerycznej. WNT, Warszawa 1974.

[12] Michlin S.G., Smolicki C.L.: Metody przybliżone rozwiązania równań różniczkowych i całkowych. PWN, Warszawa 1972.

[13] Piskorek A.: Równania całkowe. WNT, Warszawa 1980.

[14] Pogorzelski W.: Równania całkowe i ich zastosowanie. PWNT, Warszawa 1960.

[15] Szulkin P., Pogorzelski S.: Podstawy teorii pola elektromagnetycznego, WNT, Warszawa 1964.

[16] Tozoni O.W., Majergojz I.D.: Rasczot trischmiernych elektromagnitnych polej. Izd. Tiechnika. Kijew 1974.

[17] Wolska-Bochenek J., Borzymowski A., Chmaj J., Tryjarska M.: Zarys teorii równań całkowych i równań różniczkowych cząstkowych. PWN, Warszawa 1981.

[18] Zimny P.: Zastosowanie metody równań całkowych i elementów skończonych dla obliczania quasi-stacjonarnego pola elektromagnetycznego w ośrodkach przewodzących. Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej Elektryka Nr 50, Gdańsk 1980.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Stanisław Krzemiński

Wpłynęło do redakcji dnia 20 maja 1988 r.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КРАЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ДВУХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА

Р е з ю м е

В работе в ее первой части, сформулирована проблема Дирихле для двухмерного уравнения Лапласа в виде равносильной системы интегро-краевых решений 1 рода опираясь на теории логарифмического потенциала простого слоя. Согласно идеи метода краевых элементов дана аппроксимация логарифмического потенциала заданного на произвольных контурах. Элементы матрицы полученые в результате аппроксимации представляются в виде комбинации стандартных функций зависимых от координат узловых точек контуров. Таким образом получена общая процедура для численного решения электрических полей в двухмерных уравнениях.

APPLICATION OF THE BOUNDARY ELEMENTS METHOD FOR SOLVING THE DIRICHLET PROBLEM OF THE TWO - DIMENSIONAL LAPLACE EQUATION

S u m m a r y

The Dirichlet problem for the two-dimensional Laplace equation has been formulated on the basis of the theory of singular layer logarithmic potential in the Part I of the work in the form of equivalent set of the first kind integral equations.

In accordance with the idea of the boundary elements method an approximation of the logarithmic potential given along some arbitrary contours has been done.

Elements of a matrix obtained in consequence of the approximation have been shown in the form of a combination of standard functions dependent on the coordinates of the contour nodes.

A general procedure for solving numerically two-dimensional electric fields has been obtained in this way.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: ELEKTRYKA z. 113 Nr kol. 983

Tadeusz SKOCZKOWSKI

WPŁYW ZMIAN CZĘSTOTLIWOŚCI, TEMPERATURY I PARAMETRÓW MATERIAŁOWYCH NA REZYSTANCJĘ I REAKTANCJĘ WSADU RUROWEGO

Streszczenie. W artykule omówiono wpływ zmian pewnych wielkości konstrukcyjnych i eksploatacyjnych na parametry elektromagnetyczne wsadu ferromagnetycznego nagrzewanego indukcyjnie. Rozważania przeprowadzono wykorzystując znaną z literatury metodę iteracyjną, której idea polega na podziale grubego elementu ferromagnetycznego na cienkie warstwy o ustalonych wartościach stałych materiałowych ϱ i μ. Przedstawiono i szczegółowo przedyskutowano wpływ zmian rezystywności i jej współczynnika temperaturowego, charakterystyki magnesowania, wymiarów geometrycznych, temperatury i jej rozkładu, częstotliwości na rezystancję i reaktancję wsadu w postaci nieskończenie długiej rury ferromagnetycznej. Uzasadniono potrzebę znajomości spodziewanych zmian obciążenia przy projektowaniu tyrystorowych źródeł zasilania. Zaprezentowane wyniki są przykładem charakterystyk, jakie powinien posiadać projektant nagrzewnicy indukcyjnej.

1. Wstęp

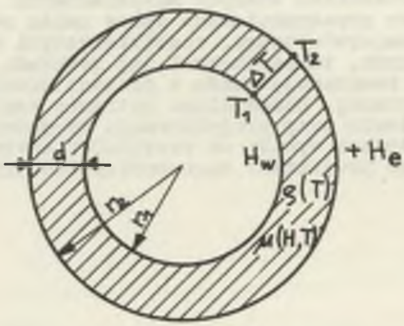
Podstawowym źródłem zasilania nagrzewnic indukcyjnych średniej częstotliwości są obecnie przekształtniki tyrystorowe. Nagrzewnica indukcyjna z uwagi na swój polowy, nieliniowy i niestacjonarny charakter stanowi interesujące i specyficzne obciążenie zasilaczy tyrystorowych. Zaprojektowanie takiego zasilacza nie stanowi z punktu widzenia energoelektroniki problemu, o ile tylko projektant zna parametry obciążenia w czasie całego cyklu nagrzewania. Musi on umieć oszacować wartość obciążenia przy zmianach asortymentu wsadu, rozrzucie jego właściwości materiałowych, zmianach warunków zasilania, a nade wszystko temperatury. Ważna jest więc znajomość nie tylko wartości obciążenia w pewnym punkcie pracy, ale i obszaru spodziewanych jego zmian.

Pożądane wydaje się być określenie wpływu różnych czynników konstrukcyjnych i eksploatacyjnych na parametry wsadu. Próbę określenia zależności rezystancji i reaktancji od częstotliwości w przypadku nagrzewania masywnego walca zaprezentowano w pracy [1].

2. Ocena wpływu pewnych czynników na parametry wsadu

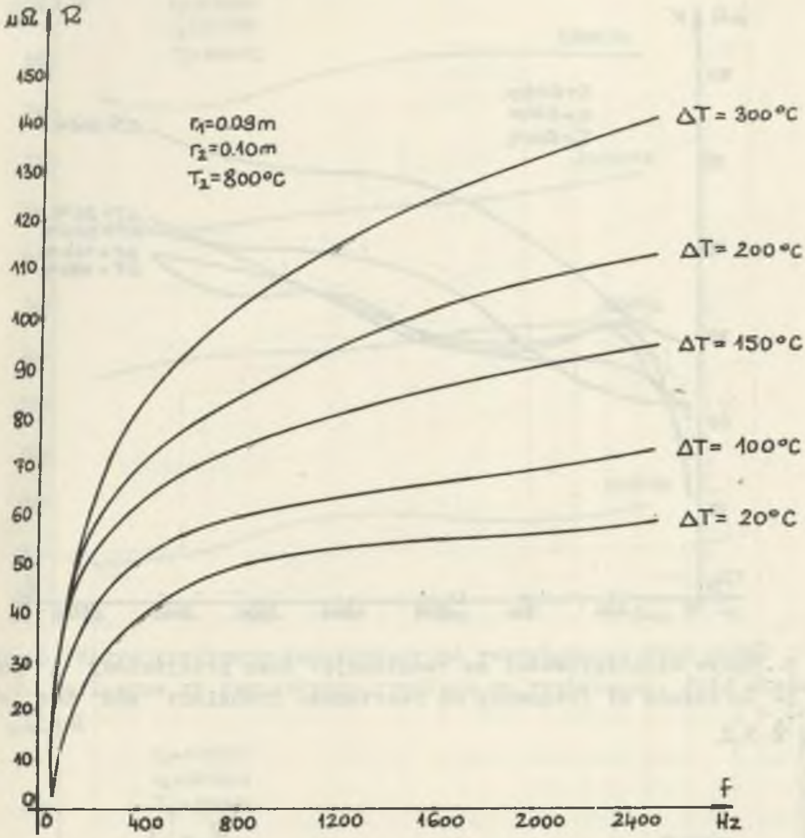
Opisana w pracy [2] metoda wyznaczania parametrów elektromagnetycznych wsadu ferromagnetycznego może zostać wykorzystana do realizacji tego celu. Na podstawie algorytmu tej metody napisany został w języku FORTRAN program na EMC (ODRA 1305 lub IBM PC). Wykorzystany on został do określenia wpływu zmian rezystancji i jej współczynnika temperaturowego, charakterystyki magnesowania, wymiarów geometrycznych, temperatury i jej rozkładu, częstotliwości na rezystancję i reaktancję wsadu w postaci nieskończenie długiej rury ferromagnetycznej.

Uzyskane przykładowe wyniki zostaną zaprezentowane na kolejnych rysunkach. Przedstawione na nich wartości R i X wsadu są obliczone dla 1 m jego długości. Podstawowe parametry układu, o ile nie zostało to inaczej zaznaczone na rysunkach, były następujące (rys. 1): promień zewnętrzny rury r_2 = 0,10 m, natężenie pola magnetycznego na zewnętrznej powierzchni rury H_e = 10^5 A/m, rezystywność materiału rury w temperaturze 20°C ϱ_{20^oC} = $2x10^{-7}$ Ωm, współczynnik temperaturowy rezystywności β = 0,000421 1/K, wykorzystywano uśrednioną charakterystykę magnesowania obowiązującą dla stali o zawartości węgla od 0,22 do 0,99%. Obliczenia prowadzono dla zakresu częstotliwości od 50 do 2500 Hz, gdzie górna granica odpowiada mniej więcej zakresowi częstotliwości krajowych jednotaktowych falowników prądu. Określając wpływ charakterystyki magnesowania w obliczeniach posługiwano się charakterystykami "+20%" i "-20%" otrzymanymi z charakterystyki uśrednionej odpowiednio przez zmniejszenie lub zwiększenie rzędnych krzywej o 20%. Przy analizie wpływu ϱ zakres przyjmowanych wartości ϱ_{20^oC} wynosił od $1x10^{-6}$ do $2x10^{-6}$ Ωm, a współczynnika β od 0,00421 do 0,00620x1/K.



Rys. 1. Przekrój nagrzewanej rury
Fig. 1. Cross section of the heated pipe

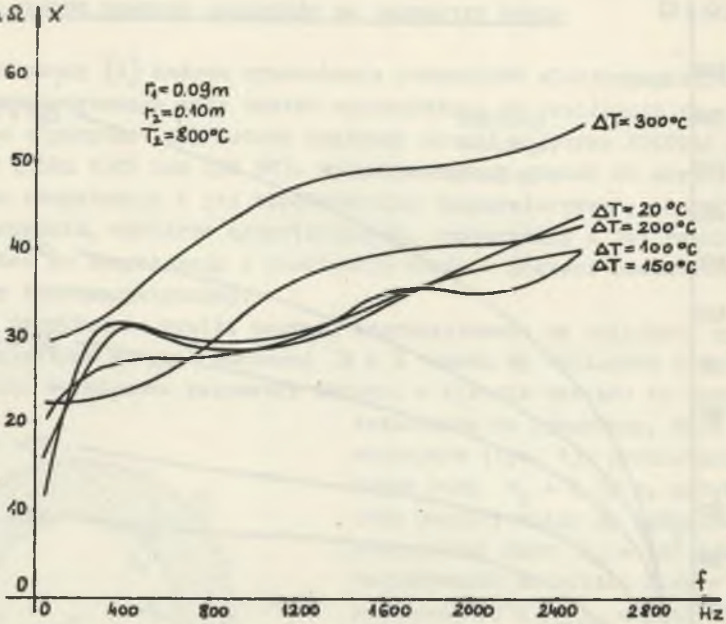
A oto omówienie uzyskanych wyników. Ze wzrostem częstotliwości rezystancja wsadu rośnie, reaktancja w zależności od gradientu temperatury w ściance rury może posiadać kilka ekstremów lokalnych, szczególnie w stanie przejściowych (rys. 2.3). Ze wzrostem temperatury rezystancja, reaktancja i impedancja maleją, a stosunek tych zmian nie przekracza stosunku 3:1 (rys. 4).



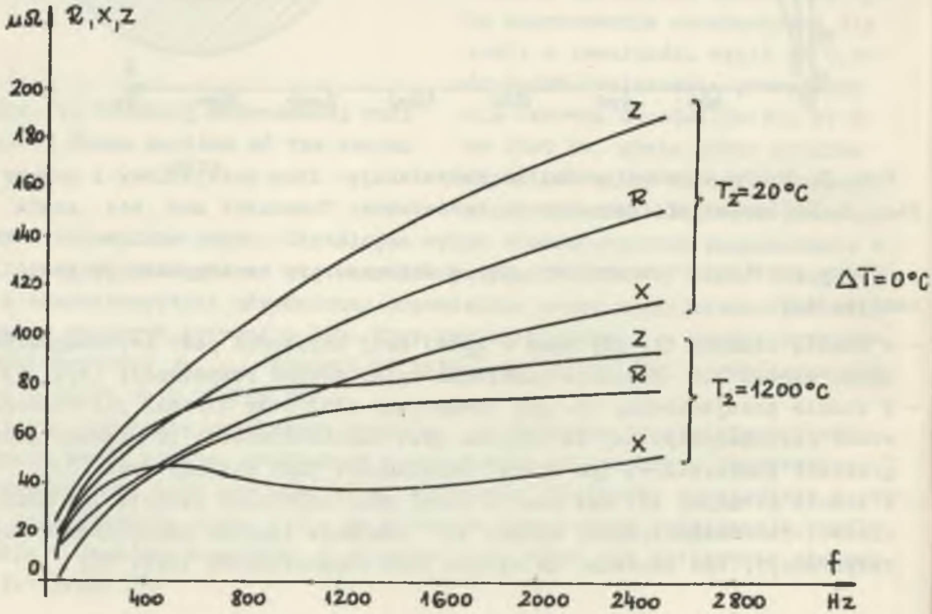
Rys. 2. Wpływ częstotliwości na rezystancję. Stan przejściowy i gorący
Fig. 2. Influence of frequency on resistance. Transient and hot state

Wpływ gradientu temperatury ΔT w ściance rury na rezystancję jest następujący:

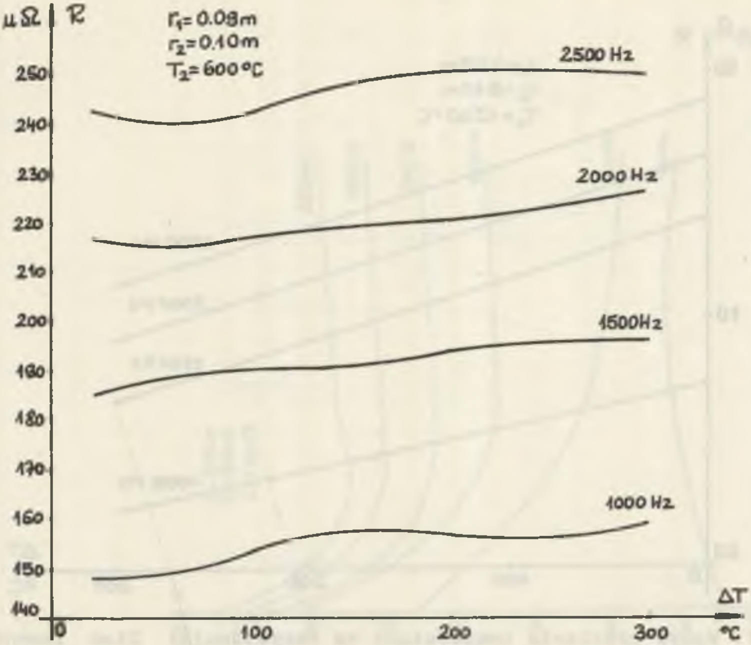
- w stanie zimnym, tj. gdy wsad w całej swej objętości jest ferromagnetykiem, wzrost ΔT powoduje niewielki tylko wzrost rezystancji (rys. 5)
- w stanie przejściowym, tj. gdy zewnętrzny słój rury utracił już właściwości ferromagnetyczne, im większa jest częstotliwość i im większy jest gradient temperatury, tym wzrost rezystancji jest większy (rys. 6),
- w stanie gorącym, tj. gdy wsad w całej swej objętości utracił już właściwości ferromagnetyczne, wzrost ΔT powoduje liniowe zmniejszenie się rezystancji, tym szybsze, im wyższa jest częstotliwość (rys. 7),



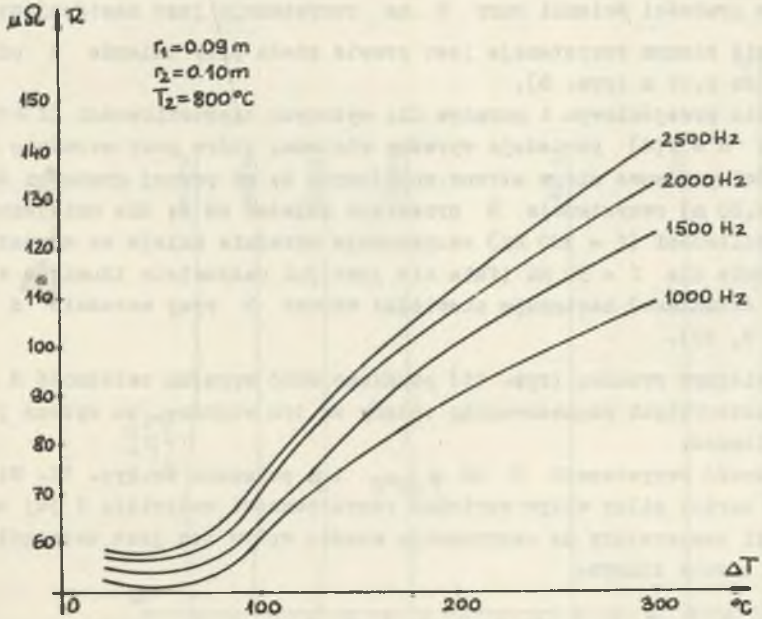
Rys. 3. Wpływ częstotliwości na reaktancję. Stan przejściowy i gorący
Fig. 3. Influence of frequency on reactance. Transient and hot state



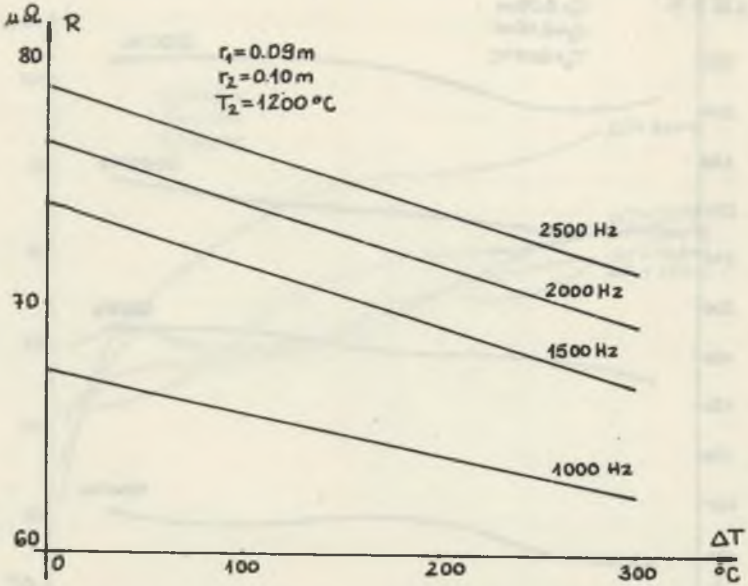
Rys. 4. Wpływ częstotliwości na R, X, Z rury. Stan zimny i gorący
Fig. 4. Influence of frequency on R, X, Z of the pipe. Transient and hot state



Rys. 5. Wpływ gradientu temperatury na rezystancję. Stan zimny
Fig. 5. Influence of temperature gradient on resistance. Cold state



Rys. 6. Wpływ gradientu temperatury na rezystancję. Stan przejściowy
Fig. 6. Influence of temperature gradient on resistance. Transient state



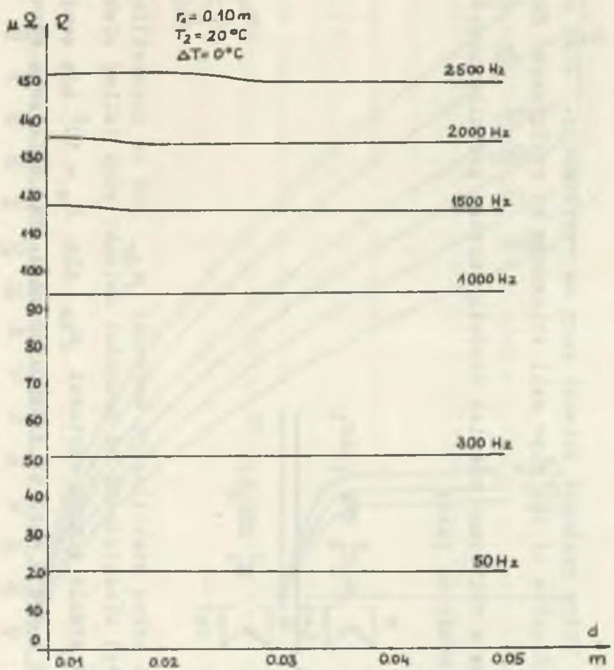
Rys. 7. Wpływ gradientu temperatury na rezystancję. Stan gorący
Fig. 7. Influence of temperature gradient on resistance. Hot state

Wpływ grubości ścianki rury d na rezystancję jest następujący:

- w stanie zimnym rezystancja jest prawie stała przy zmianie d od 0,001 do 0,05 m (rys. 8),
- w stanie przejściowym i gorącym dla wyższych częstotliwości ($f \geq 1000$ Hz) krzywe $R = f(d)$ posiadają wyraźne minimum, które przy wzroście częstotliwości przesuwa się w stronę mniejszych d; od pewnej grubości ścianki ($d = 0,03$ m) rezystancja R przestaje zależeć od d; dla mniejszych częstotliwości ($f = 300$ Hz) rezystancja wyraźnie maleje ze wzrostem d, a jedynie dla $f = 50$ Hz (fala nie jest już całkowicie tłumiona w cieńszych ściankach) następuje niewielki wzrost R przy wzroście d (rysunek 9, 10).

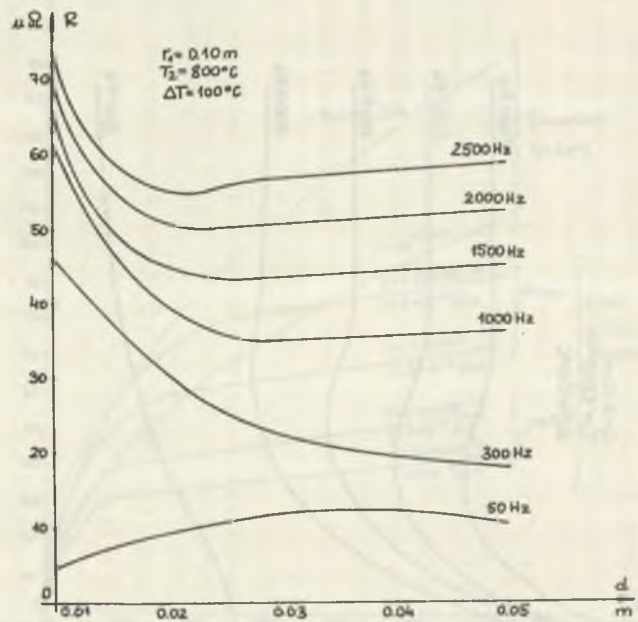
Na kolejnym rysunku (rys. 11) pokazano dość wyraźną zależność R i X od charakterystyki magnesowania; zmiany są tym większe, im wyższa jest częstotliwość.

Zależność rezystancji R od $\rho_{20°C}$ i β pokazano na rys. 12. Widać wyraźny bardzo silny wpływ wartości rezystywności materiału i jej zmian w funkcji temperatury na rezystancję wsadu; wpływ ten jest szczególnie silny w stanie zimnym.



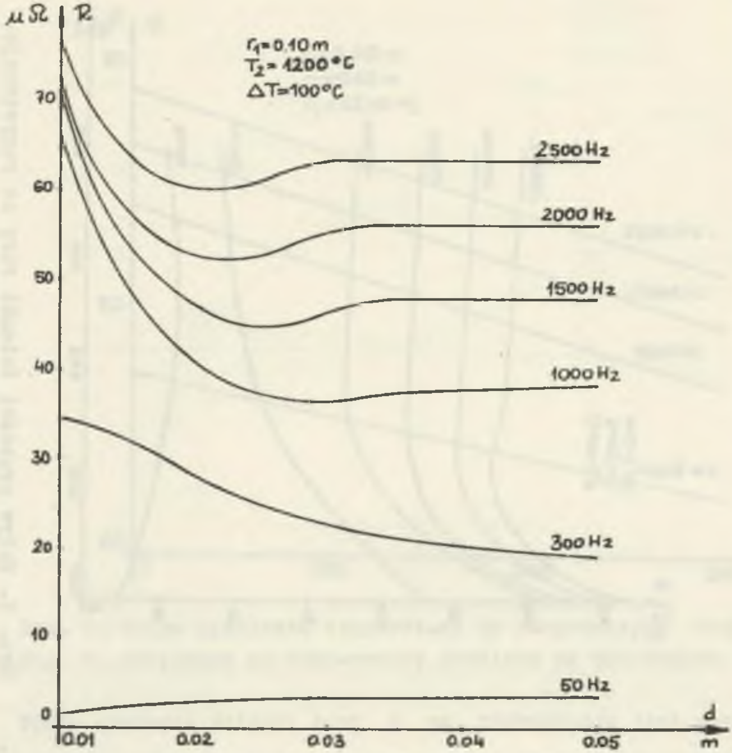
Rys. 8. Wpływ grubości ścianki rury na rezystancję. Stan zimny

Fig. 8. Influence of the pipe wall thickness on resistance. Cold state



Rys. 9. Wpływ grubości ścianki rury na rezystancję. Stan przejściowy

Fig. 9. Influence of the pipe wall thickness on resistance. Transient state

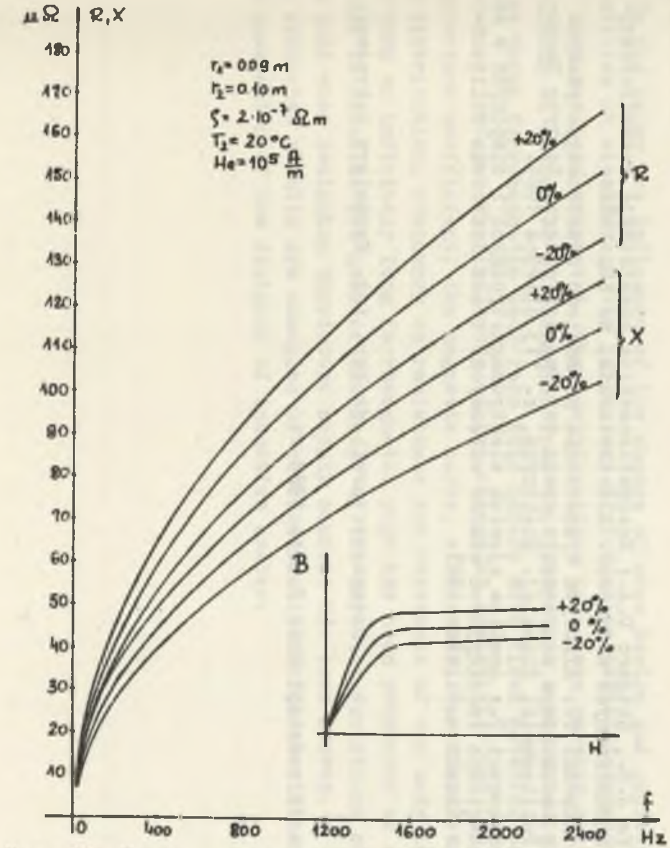


Rys. 10. Wpływ grubości ścianki rury na rezystancję. Stan gorący
Fig. 10. Influence of the pipe wall thickness on resistance. Hot state

W programie obliczano również średnią wartość przenikalności magnetycznej wsadu określoną jako:

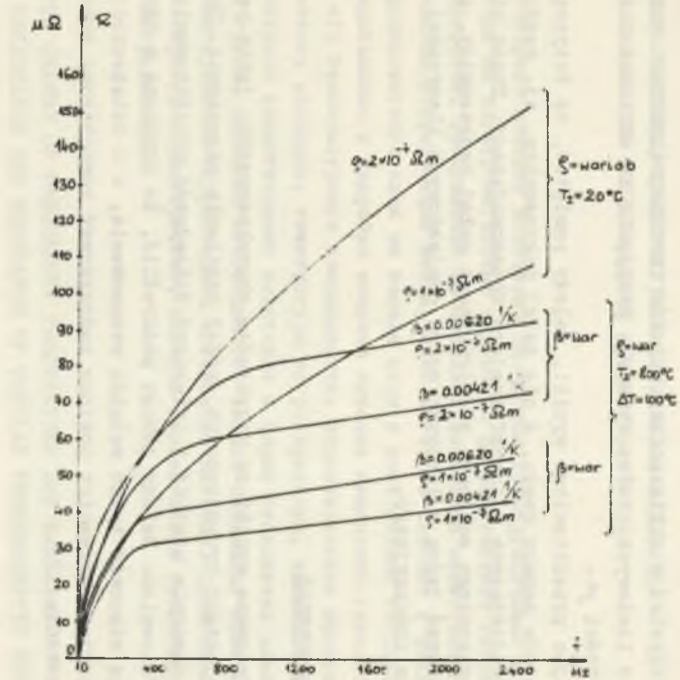
$$\mu_{śr} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i H_i^2 \, 2\pi r_i \, \Delta r_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} H_i^2 \, 2\pi r_i \Delta r_i}$$

Stwierdzono pewną stabilizację wartości $\mu_{śr}$ już od częstotliwości ok. 300 Hz i jej niezależność od grubości ścianki rury (silny efekt powierzchniowy). W stanie zimnym wartości $\mu_{śr}$ dla $H_e = 10^5$ A/m zawierają się pomiędzy 20 a 36, a więc są stosunkowo małe. Tak obliczoną wartość $\mu_{śr}$



Rys. 11. Wpływ charakterystyki magnesowania na rezystancję i impedancję

Fig. 11. Influence of the magnetization curve on resistance and impedance



Rys. 12. Wpływ rezystywności i jej współczynnika temperaturowego na rezystancję. Stan zimny i przejściowy

Fig. 12. Influence of resistivity and its temperature coefficient on resistance. Cold and transient state

można wykorzystać w obliczeniach układów ferromagnetycznych przy zastosowaniu metod liniowych, które wymagają przyjęcia do obliczeń określonej stałej wartości μ.

Analizując przedstawione wyniki, należy pamiętać, że dotyczą one jedynie parametrów samego wsadu, a nie całej nagrzewnicy, tj. wsadu, wzbudnika, szyn doprowadzających i transformatora dopasowującego. Chcąc otrzymać parametry zastępczego schematu elektrycznego całej nagrzewnicy, projektant musi zastosować jedną z licznych metod projektowych klasycznej teorii grzejnictwa indukcyjnego.

3. Podsumowanie

Zaprezentowane wyniki są przykładem charakterystyk, jakie powinien posiadać projektant tyrystorowych źródeł zasilania nagrzewnic. Ich znajomość może znacznie ułatwić i zwiększyć dokładność projektowania obwodów siłowych falownika. Należy jednak podkreślić, że uzyskane w ten sposób wyniki mogą stanowić tylko wstępne oszacowanie, a o ostatecznej poprawności projektu nagrzewnicy powinna zadecydować komputerowa symulacja procesu nagrzewania.

LITERATURA

[1] Joffe J.S., Gitgarc D.A.: Energeticzeskije czastotnyje charakterystyki indukcionnych ustanowok. Elektrotermia, nr 52, 1966.

[2] Skoczkowski T.: Algorytm wyznaczania parametrów elektromagnetycznych przy indukcyjnym nagrzewaniu wsadu ferromagnetycznego. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Elektryka, z. 113 Gliwice 1989.

[3] Skoczkowski T.: Analiza zjawisk elektromagnetycznych i cieplnych w nagrzewnicach indukcyjnych wsadów walcowych. Praca doktorska Politechnika Śląska - Gliwice 1985.

Recenzent: prof. dr hab. inż. Kazimierz Zakrzewski

Wpłynęło do redakcji dnia 2 maja 1988 r.

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ ЧАСТОТЫ, ТЕМПЕРАТУРЫ И ПАРАМЕТРОВ МАТЕРИАЛА НА ОМИЧЕСКОЕ И РЕАКТИВНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ТРУБНОЙ ЗАГОТОВКИ

Р е з ю м е

В статье оговорено влияние изменений некоторых конструкционных и эксплуатационных величин на электромагнитные параметры ферромагнитной заготовки с индукционным нагревом. Рассуждения проводились используя известный по литературным источникам итерационный метод, идея которого состоит в разделении массивного ферромагнитного слоя на тонкие слои с постоянными коэффициентами материала. Представлено и подробно описано влияние изменений удельного сопротивления и его температурного коэффициента, характеристики намагничивания, геометрических размеров, температуры ее распреления, частоты на омического и реактивное сопротивление заготовки в форме бесконечно длинной ферромагнитной трубы, Доказана необходимость знания ожидаемых изменений нагрузки при проектировании территорных источников питания. Представленные результаты, это пример характеристик, которые должен иметь проектировщик индукционного нагревателя.

INFLUENCE OF THE CHANGE OF FREQUENCY, TEMPERATURE AND MATERIAL PARAMETERS ON RESISTANCE AND REACTANCE OF TUBULAR FERROMAGNETIC BODY

S u m m a r y

In the paper the influence of the change of some design and operating quantities on electromagnetic parameters of induction heated ferromagnetic body has been presented. The considerations have been carried out employing an iterative method known from the literature which idea is to slice thick ferromagnetic body into thin layers with fixed material constants ρ and μ. The influence of the change of resistivity and its temperature coefficient, the magnetic curve, dimensions, temperature and its distribution, frequency on resistance and reactance of the body in the form an infinitely long ferromagnetic pipe has been presented an discussed in details. The need of knowledge of the expected variations of the load when designing thyristory supply sources has been proved. The presented results are examples of characteristics which should be in the possession of the designer of induction heater.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: ELEKTRYKA z. 113 Nr kol. 983

Tadeusz SKOCZKOWSKI

ALGORYTM WYZNACZANIA PARAMETRÓW ELEKTROMAGNETYCZNYCH PRZY INDUKCYJNYM NAGRZEWANIU WSADU FERROMAGNETYCZNEGO

Streszczenie. W artykule omówiono pewną metodę obliczania parametrów wsadu ferromagnetycznego nagrzewanego indukcyjnie. Idea metody polega na podziale masywnego elementu ferromagnetycznego na cienkie warstwy o ustalonych wartościach stałych materiałowych ϱ i μ i powiązaniu wartości natężenia pola megnetycznego na zewnętrznej i wewnętrznej ściance każdej warstwy z jej rezystancją i reaktancją. Metoda zakłada harmoniczność pól, uwzględnia nieliniowość charakterystyki magnesowania, zależność przenikalności magnetycznej i rezystywności od temperatury i dowolny, ale z góry zadany rozkład temperatury w nagrzewanym ciele. Ma ona charakter iteracyjny, a jej realizacja komputerowa zapewnia dużą szybkość obliczeń. Może ona być uzupełnieniem klasycznych metod projektowania nagrzewnic lub stanowić samodzielny blok obliczeń elektromagnetycznych w modelach pól sprzężonych. Zastosowanie metody zilustrowano obliczeniami intensywności zjawiska tłumienia fali elektromagnetycznej w ściance rury przy różnych stopniach jej nagrzania.

1. Wstęp

Z uwagi na złożoność zjawisk fizycznych występujących w nagrzewnicach indukcyjnych zadanie obliczania parametrów elektrycznych nagrzewnicy stanowi trudne zagadnienie teoretyczne i obliczeniowe. Współczesne modele procesów nagrzewania indukcyjnego oparte są głównie na MRS lub MES i umożliwiają analizę wielowymiarowych pól nieliniowych i niestacjonarnych [1].

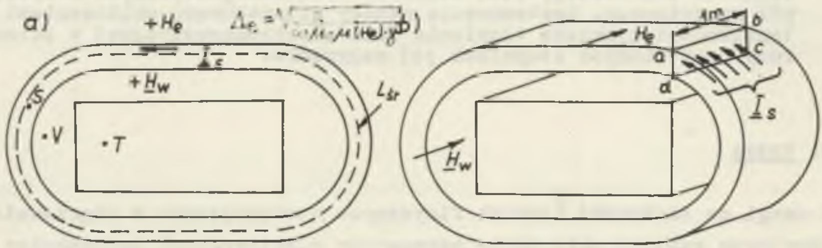
Modele takie są jednak bardzo złożone, a ich użycie bardzo kosztowne. Istnieje cały szereg zagadnień praktyki inżynierskiej, które wymagają modeli prostszych, szybszych i tańszych. Takimi zagadnieniamo mogą być np. symulacja komputerowa procesu zagrzewania z uwzględnieniem wpływu źródła zasilania lub optymalizacja nagrzewnic. Dlatego też w dalszym ciągu stosuje się klasyczne metody obliczania nagrzewnic indukcyjnych, które pozwalają dość dokładnie wyznaczyć parametry nagrzewnicy, o ile tylko potrafimy z małym błędem obliczyć parametry samego wsadu, szczególnie ferromagnetycznego [2].

W niniejszej pracy zostanie omówiony sposób obliczania parametrów wsadu ferromagnetycznego, który w powiązaniu z jedną ze znanych metod obliczania nagrzewnic może stanowić jej cenne uzupełnienie.

2. Zarys metody

Do wyznaczenia parametrów elektromagnetycznych wsadu ferromagnetycznego nagrzewanego indukcyjnie można wykorzystać metodę, której idea polega na podziale grubego elementu ferromagnetycznego na cienkie warstwy o ustalonych wartościach stałych materiałowych ϱ i μ i powiązaniu wartości natężenia pola magnetycznego na zewnętrznej ściance każdego elementu z parametrami jego magnetycznego, a następnie elektrycznego schematu zastępczego [3, 4, 5].

Zadanie nasze i jego założenia sformułujemy w sposób następujący: Wewnątrz ciała S o cienkich ściankach ($d \ll \Delta e$) i dowolnym kształcie znajduje się ciało T o znanej impedancji. Zakładamy, że ciało S jest nieskończenie długie, wszystkie przebiegi są harmoniczne, na zewnętrznej powierzchni ciała S wymuszane jest pole magnetyczne H_e, pomija się reakcję prądów wirowych ciała T. Celem naszym jest obliczenie wartości natężenia pola H_w na wewnętrznej powierzchni ciała S, prądu I_s płynącego w ciele S, mocy czynnej wydzielanej w S oraz impedancji układu ciał S i T. Szkic układu obliczeniowego przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Szkic układu obliczeniowego

Fig. 1. Schematic diagram of the analytical system

Dla uproszczenia zapisu załóżmy, że rozpatrujemy jedynie fragment o długości jednostkowej np. 1 metra nieskończenie długiego ciała S.

Związek między natężeniami H_e i H_w na zewnętrznej i wewnętrznej powierzchni ciała S można znaleźć stosując prawo Ampera.

$$\oint_{L(abcda)} (\vec{H}_e - \underline{\vec{H}}_w)\,\vec{dl} = \underline{I}_S \, . \tag{1}$$

Zastąpmy teraz nasze cienkie ciało S bardzo cienką powłoką o długości średniej $L_{śr}$ i rezystancji R_S:

$$R_S = \oint_{L_{śr}} \frac{\varrho}{d}\, dl . \tag{2}$$

Przy założonej harmoniczności pola dla konturu $L_{śr}$ można zapisać:

$$\underline{U}_1 = j\omega\underline{\Phi}_1 = j\omega(\underline{\Phi}_T + \Phi_V + \underline{\Phi}_{wew}) = j\omega\left(\frac{1}{\underline{Z}_{MT}} + \frac{1}{R_{MV}} + \frac{1}{R_{MS_{wew}}}\right)\underline{H}_w . \tag{3}$$

Po uwzględnieniu związku między impedancją elektryczną i magnetyczną $Z = \frac{j\omega}{Z_M}$ zapiszmy równanie (3) w postaci:

$$\underline{U}_1 = (\underline{Z}_T + jX_V + jX_{S_{wew}})\underline{H}_w \tag{4}$$

gdzie: Φ_1 – całkowity strumień magnetyczny skojarzony z ciałami T,V wewnętrzną częścią (od ścianki wewnętrznej do $L_{śr}$) ciała S, $\underline{\Phi}_T$, $\underline{\Phi}_V$, $\underline{\Phi}_{S_{wew}}$ – składowe strumienia $\underline{\Phi}_1$, skojarzone odpowiednio z ciałami T, V, i wewnętrzną częścią S, Z_{MT}, Z_T – impedancja magnetyczna i elektryczna ciała T, R_{MV}, R_V, $R_{MS_{wew}}$, $R_{S_{wew}}$ – rezystancja magnetyczna i elektryczna odpowiednio ciała V i wewnętrznej części S, $\underline{U}_1$ – napięcie indukowane wzdłuż konturu $L_{śr}$ przez zmianę strumienia $\underline{\Phi}_1$.

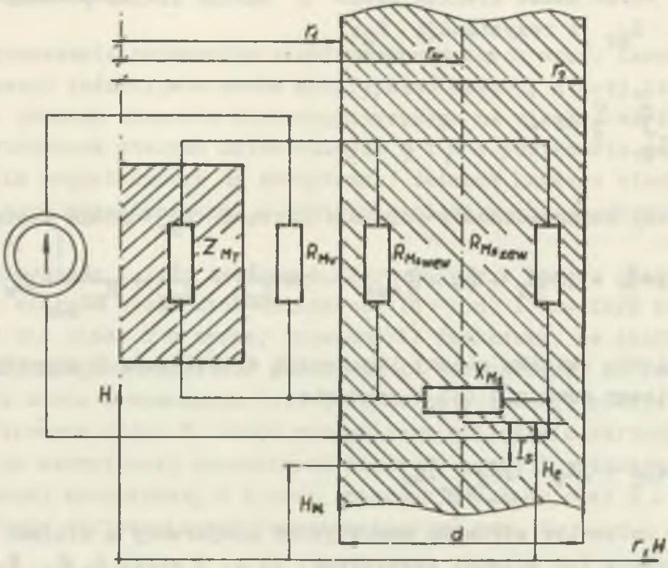
Napięcie $\underline{U}_1$ jest równoważone przez spadek napięcia wywołany przepływem prądu $\underline{I}_s$ przez rezystancję R_S:

$$\underline{I}_S R_S = (\underline{Z}_T + jX_V + jX_{S_{wew}})\underline{H}_w . \tag{5}$$

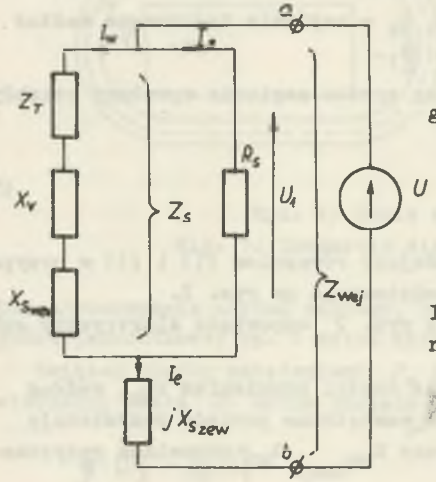
Magnetyczny schemat zastępczy odpowiadający równaniom (1) i (3) w przypadku rury o promieniach r_1 i r_2 przedstawiono na rys. 2.
Magnetycznemu schematowi zastępczemu z rys. 2 odpowiada elektryczny schemat zastępczy z rys. 3.
Ścianka rury została podzielona na dwie części promieniem $r_{śr}$, według wzorów w dalszej części pracy, warstwa wewnętrzna posiada rezystancję magnetyczną $R_{MS_{wew}}$, a warstwa zewnętrzna $R_{MS_{zew}}$, X_{MS} odpowiada rezystancji elektrycznej R_S.

Z równań (1) i (5) można zapisać:

$$\underline{H}_W = H_e \frac{R_S}{R_S + \underline{Z}_S} \tag{6}$$



Rys. 2. Podział rury na warstwy
Fig. 2. Pipe division into layers



Rys. 3. Magnetyczny schemat zastępczy
Fig. 3. Magnetic equivalent circuit

$$\underline{I}_S = H_e \frac{\underline{Z}_S}{R_S + \underline{Z}_S} \tag{7}$$

gdzie:

$$\underline{Z}_S = \underline{Z}_T + jX_V + jX_{S_{wew}} \tag{8}$$

X_V - reaktancja szczeliny powietrznej między T i S.

Impedancja wyjściowa Z_{wej} układu widziana z zacisków a - b wynosi:

$$\underline{Z}_{wej} = \frac{R_S \underline{Z}_S}{R_S + \underline{Z}_S} + jX_S. \tag{9}$$

Moc czynna wydzielona w ciele S wynosi:

$$P_S = I_S^2 R_S \tag{10}$$

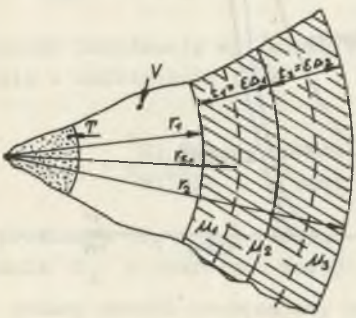
moc czynna wydzielona w ciele T wynosi:

$$P_T = H_W^2 \mathrm{Re}\{Z_T\}. \tag{11}$$

3. Zastosowanie metody do analizy wsadów ferromagnetycznych

Przedstawiony sposób obliczania parametrów elektrycznych bardzo cienkich warstw można stosować w przypadku cylindrycznych ciał ferromagnetycznych, dla których głębokość wnikania jest mniejsza lub porównywalna z grubością ścianki wsadu. Wystarczy wtedy podzielić ściankę cylindra na cienkie warstwy, z których każda spełnia warunek:

$d_i \ll \Delta_e$ ze stałymi wartościami ρ_i i μ_i,



Rys. 4. Elektryczny schemat zastępczy

Fig. 4. Electrical equivalent circuit

a następnie stosując kolejno zależności (6), (7), (9) można obliczać parametry układów ferromagnetycznych o dowolnej grubości ścianki. Należy wtedy postępować w sposób następujący. Na rys. 4 przedstawiono rurę ferromagnetyczną, wewnątrz której znajduje się ciało T o impedancji Z_T. Rozkład $\rho(T)$, a więc i rozkład temperatury w ściance rury S uważamy za znany. Zakładamy pewną wartość H_w na wewnętrznej powierzchni rury i znajdujemy z krzywej nagrzewania odpowiadającą jej przenikalność μ_1, a następnie głębokość wnikania Δ_1. Wprowadzamy warstwę o szerokości $t_1 = \varepsilon\Delta_1$, gdzie $\varepsilon \ll 1$ i zakładamy, że na grubości t_1 rezystywność ma stałą wartość ρ_1. Przyjmujemy, że na promieniu $r_{s1} = r_1 + \frac{1}{2} t_1$ przepływa cały prąd $\underline{I}_1$, jaki indukuje się w warstwie o szerokości t_1. Oznacza to, że natężenie pola zmienia się skokowo na promieniu r_{s1} od wartości $\underline{H}_w$ do $\underline{H}_{e1}$. Przenikalność magnetyczna będzie miała wartość:

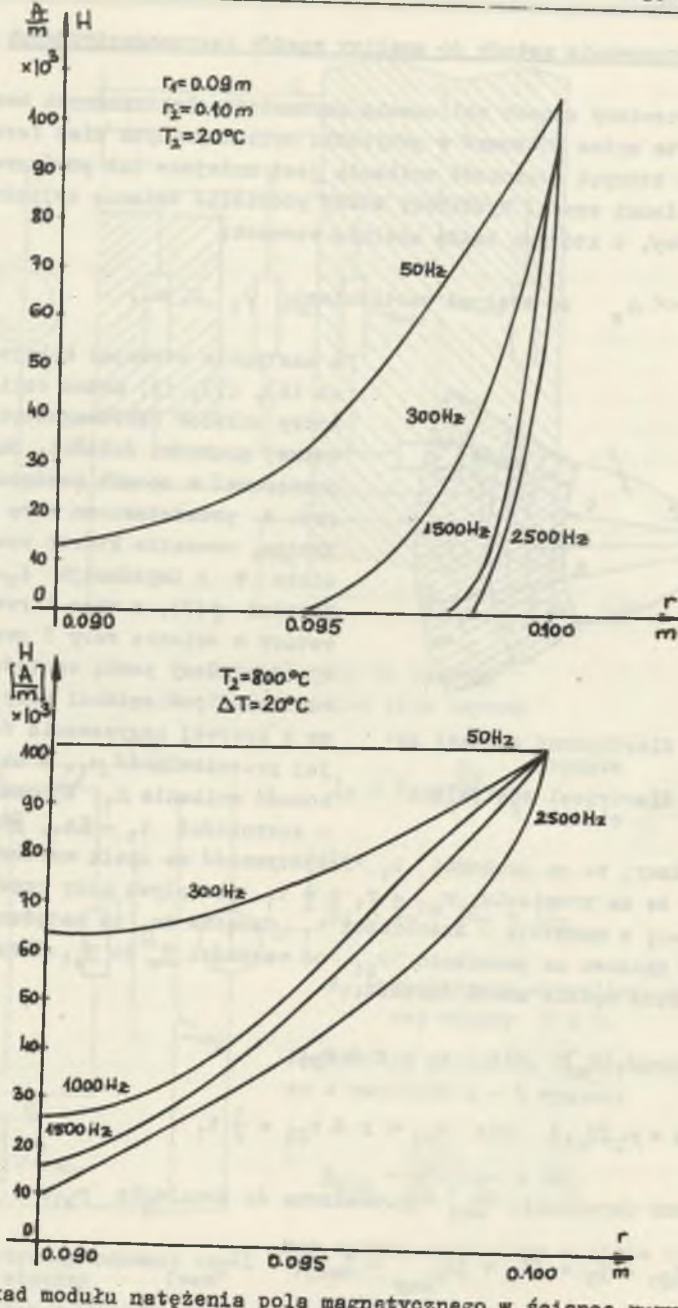
$$\mu = \mu_1(H_w) \quad \text{dla} \quad r_1 \leq r \leq r_{S1}$$

$$\mu = \mu_2(H_{e1}) \quad \text{dla} \quad r_{S1} < r \leq r_{S1} + \frac{1}{2} t_1 \,. \tag{12}$$

Obliczamy impedancję $\underline{Z}_{s1}$ sprowadzoną do promienia r_{S1}:

$$\underline{Z}_{S1} = \underline{Z}_T + jX_V + jX_{S_{wew}} = \underline{Z}_{wej1} + jX_{S_{wew1}} \tag{13}$$

gdzie: $X_{S_{wew1}} \cong \omega\mu_o\mu_1\pi r_{s1}\, t_1$ reaktancja wewnętrznego słoja pierwszej warstwy.



Rys. 5. Rozkład modułu natężenia pola magnetycznego w ściance rury dla różnych częstotliwości
a) stan zimny, b) stan gorący

Fig. 5. Distribution of magnetic field strength in the pipe wall for different frequencies
a) cold state, b) hot state

Zgodnie z zależnością (6) obliczamy:

$$\underline{H}_{e1} = \underline{H}_{w}\left(1 + \frac{\underline{Z}_{S1}}{R_{S1}}\right) \tag{14}$$

gdzie: $R_{S1} = \frac{2\pi\varrho_1 \, r_{S1}}{t_1}$ - rezystancja pierwszej warstwy.

Następnie obliczamy $\mu_2 = f(H_{e1})$ i reaktancję zewnętrznego słoja pierwszej warstwy:

$$X_{S_{zew}} \cong \omega \mu_0 \mu_2 \, r_{S1} \, t_1 \, . \tag{15}$$

Obliczamy impedancję wyjściową dla promienia $(r_1 + t_1)$ pierwszej warstwy zgodnie z zależnością (9):

$$\underline{Z}_{wyj1} = \frac{R_{S1} \, \underline{Z}_{S1}}{R_{S1} + \underline{Z}_{S1}} + jX_{S_{wew1}} = \underline{Z}_{wej2} \, . \tag{16}$$

Dla promienia $(r_1 + t_1)$, znając ϱ_2 i μ_2, znajdujemy nową głębokość wnikania Δ_2 i szerokość nowej warstwy $t_2 = \varepsilon \Delta_2$.

W podany sposób postępujemy aż do momentu osiągnięcia zewnętrznej powierzchni rury. Porównujemy obliczoną wartość H_e z wartością zadaną i jeżeli te wartości różnią się nieznacznie, obliczenia przerywamy. Jeżeli błąd obliczeń jest zbyt duży, wybieramy nową wartość H_w i powtarzamy procedurę.

Program napisany na EMC wg powyższego algorytmu został wykorzystany do określenia wpływu zmian rezystywności i jej współczynnika temperaturowego, charakterystyki magnesowania, wymiarów geometrycznych rury, temperatury powierzchni i jej gradientu w ściance rury oraz częstotliwości na parametry wsadu [5].

Zastosowanie metody zilustrowano obliczeniami intensywności zjawiska tłumienia fali elektromagnetycznej w ściance rury przy różnych stopniach jej nagrzania (rys. 5).

4. Podsumowanie

Przedstawiona metoda oparta jest na bardzo prostych podstawach teoretycznych i może być łatwo zrealizowana na EMC. Pozwala ona uwzględnić w obliczeniach nieliniowość charakterystyki magnesowania ferromagnetyka i nierównomierny stopień nagrzania wsadu. Może być traktowana jako uzupełnienie klasycznych metod obliczania nagrzewnic lub jako blok obliczeń elektromagnetycznych w modelach pól sprzężonych procesu nagrzewania indukcyjnego.

LITERATURA

[1] Lavers J.D.: Numerical solution methods for electroheat problems, IEEE Trans. on Magnetics, Vol. MAG - 19, No 6, November 1983.

[2] Słuchockij A.A., Ryskin S.E.: Induktory dla indukcjonnogo nagriewa. Leningrad, Energija, 1974.

[3] Niemkow W.S.: Indukcjonnyj nagriew obłoczok s proizwolnoj tolszczinoj stienki. Izw. AN SSSR "Energetika i Transport" nr 3 1979.

[4] El. - Markaby M.S., Fawzi T.H., Ahmed M.T.: Approximate treatment of nonlinear current problems, IEEE Trans on Magnetics, Vol. MAG - 18 No 6, November 1983.

[5] Skoczkowski T.: Wpływ zmian częstotliwości, temperatury i parametrów materiałowych na rezystancję i reaktancję wsadu rurowego. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Elektryka, z. 113, Gliwice 1989.

Recenzent: prof. dr hab. inż. Kazimierz Zakrzewski

Wpłynęło do redakcji dnia 2 maja 1988 r.

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРИ ИНДУКЦИОННОМ НАГРЕВЕ ФЕРРОМАГНИТНОЙ ЗАГОТОВКИ

Р е з ю м е

В статье описан метод определения параметров индукционно нагреваемой ферромагнитной заготовки. Идея метода заключается в разделении массивного ферромагнитного элемента на такие слои с постоянными коэффициентами материала и связи значений напряженности магнитного поля на внешней и внутренней стенке каждого слоя с ее омическим и реактивным сопротивлением. В методе предполагаются гармонические поля, учитывается нелинейная характеристика намагничивания, зависимость магнитной проницаемости и удельного сопротивления от температуры и произвольное наперед заданное распределение температуры в нагреваемом теле.

Метод имеет итерационный характер а его реализация на ЭВМ обеспечивает большую скорость расчетов. Может он быть дополнением классических методов проектирования индукционных установок или быть независимым блоком электромагнитных расчетов в моделах связянных полей. Применение метода проиллюстрировано расчетом интенсивности затухания электромагнитной волны в стенке трубы при различных степенях ее нагрева.

ALGORITHM OF ELECTROMAGNETIC PARAMETERS EVALUATION IN THE INDUCTION HEATED FERROMAGNETIC BODY

S u m m a r y

A method of calculating the electromagnetic parameters of induction heated ferromagnetic body has been presented in this paper. The idea of the method consists in diving thick ferromagnetic body into thin layers with fixed material constants ρ and μ and in connecting the values of electromagnetic field strength at external and internal walls of each layer with its resistance and reactance. The method assumes harmonic fields, takes into account the nonlinearity of the magnetic curve, dependence of magnetic permeability and resistivity on temperature and arbitraty but given in advance, temperature distribution in the heated body. It is of iterative type and its computer application enables fast computations. The method can be treated as an appendix to the classical methods of designing induction heaters or as an independent block of electromagnetic computations in coupled field models. Its application has been illustrated by evaluation of the intensity of electromagnetic wave damping in the pipe wall for different thermal states.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: ELEKTRYKA z. 113 Nr kol. 983

Marek BRODZKI
Marian PASKO
Magdalena UMIŃSKA-BORTLICZEK
Janusz WALCZAK

PROPOZYCJA NOWEGO WSKAŹNIKA JAKOŚCI ENERGII ELEKTRYCZNEJ DLA UKŁADÓW DWUZACISKOWYCH Z PRZEBIEGAMI ODKSZTAŁCONYMI

Streszczenie. W pracy zdefiniowano nowy wskaźnik jakości prądów odkształconych dla odbiorników dwuzaciskowych.
Wskaźnik ten ustala zadany kompromis pomiędzy oceną własności energetycznych (strat mocy czynnej na doprowadzeniu do odbiornika) i odkształceń przebiegu prądu (zawartością wyższych harmonicznych). Proponowany wskaźnik określono jako kwadrat normy odpowiednio zdefiniowanej przestrzeni Sobolewa. Minimalizacja tego wskaźnika jakości przy ograniczeniu równościowym na moc czynną dostarczaną do odbiornika umożliwia wyróżnienie składowej prądu odbiornika, odpowiedzialnej za całkowity przesył mocy czynnej do rozpatrywanego odbiornika.

1. Wstęp

Problematyka obejmująca zagadnienia energetyczne obwodów z przebiegami odkształconymi wiąże się ściśle z różnymi definicjami wskaźników jakości energii elektrycznej oraz możliwościami ich minimalizacji.
Dotychczasowe prace z elektrotechniki teoretycznej [3], [4], [8], [9], [10] dotyczyły wskaźników energii elektrycznej o charakterze energetycznym. Wskaźniki te dotyczą prądów odbiornika i umożliwiają ocenę strat mocy czynnej na doprowadzeniach do odbiorników, tak jednofazowych, jak i wielofazowych. Techniczne warunki określające jakość energii elektrycznej w energetyce zawodowej dotyczą właściwości energetycznych obwodu lub też cech jakościowych (odkształceń przebiegów elektrycznych prądu i napięcia) [5], [7], [11], [12], [13], [14], [17].

Brak jest wskaźników jakości przebiegów odkształconych ujmujących równocześnie ich właściwości energetyczne i jakościowe.

Korzystne będzie wprowadzenie wskaźnika jakości przebiegów odkształconych, który umożliwiałby równoczesną ocenę właściwości energetycznych i ocenę odkształceń przebiegów oraz umożliwiałby ustalenie zadanego kompromisu między wymienionymi ocenami.

Wydaje się, że wskaźnik taki można by zaproponować w postaci wzoru:

$$\frac{J}{s} = \sqrt{\sum_{r=0}^{l} \alpha_r \frac{1}{T} \int_0^T (i^{(r)}(t))^2 \, dt}. \qquad (1)$$

gdzie:

α_r - współczynniki wagi ustalające kompromis pomiędzy oceną właściwości energetycznych i jakościowych funkcji prądu i,

$i^{(r)}$ - r-ta pochodna funkcji prądu względem zmiennej czasu t, $r \in \{0,1,2,\ldots,l\}$.

Pierwszy składnik wzoru (1) dla $r=0$ jest proporcjonalny do strat mocy czynnej na doprowadzeniu do odbiornika. Pozostałe składniki wzoru (1) ($r > 0$) ujmują cechy jakościowe (odkształcenia) funkcji prądu, ponieważ wyższe pochodne funkcji prądu uwypuklają silnie wpływ odkształceń wyższych harmonicznych w tym prądzie.

Całkowa postać wprowadzonego wskaźnika jakości (1) ma dodatkowo zaletę z punktu widzenia metrologicznego, gdyż - jak wiadomo - pomiarowe rozróżnienie dwóch wielkości różniących się na zbiorze miary zero jest niemożliwe.
Konstrukcja zaproponowanego w sposób intuicyjny wskaźnika jakości (1) wymaga uzasadnienia, co uczyniono poniżej.

2. Konstrukcja przestrzeni Sobolewa

Oznaczmy przez $W^{l}_{2,\alpha}(0;T)$ zbiór prądów (napięć) opisanych funkcjami rzeczywistymi zmiennej rzeczywistej (czasu).
Przyjmujemy w dalszym ciągu, że funkcje prądu oraz funkcje napięcia jako elementy zbioru $W^{l}_{2,\alpha}(0;T)$ są pozbawione wymiarów fizykalnych, można je więc traktować jako elementy tego samego zbioru [2].
Funkcje te winny spełniać warunki:

- winny być funkcjami okresowymi o tym samym okresie T,
- posiadać na przedziale $\langle 0;T\rangle$ prawie wszędzie pochodne (rozumiane w sensie klasycznym) do rzędu l-tego włącznie,
- być mierzalne w sensie Lebesgue'a na przedziale $\langle 0;T\rangle$,
- posiadać całkowalny kwadrat w sensie Lebesgue'a,
- ich pochodne do rzędu l-tego włącznie winny spełniać wyżej wymienione warunki.

Ściśle biorąc, elementami zbioru $W^{l}_{2,\alpha}(0;T)$ są klasy funkcji:

- różniących się na zbiorach miary zero,
- takich, że ich pochodne do rzędu l-tego włącznie różnią się na zbiorach miary zero.

W celu uproszczenia zapisów wzorów, operując właściwie klasami funkcji, do ich zapisu używać będziemy tego samego symbolu, który określa daną funkcję.

Zbiorowi $\underline{W}^1_{2,\alpha}(0;T)$ nadajemy strukturę przestrzeni liniowej nad ciałem liczb rzeczywistych R_c definiując w nim działania:

- dodawania "+" funkcji

$$f + g \quad \underline{W}^1_{2,\alpha}(0;T), \quad \text{gdy} \quad f,g \in \underline{W}^1_{2,\alpha}(0;T) \tag{2}$$

- mnożenia "." przez liczby rzeczywiste

$$c \cdot f = cf \quad \underline{W}^1_{2,\alpha}(0;T), \quad \text{gdy} \quad f \in \underline{W}^1_{2,\alpha}(0;T); \quad c \in R. \tag{3}$$

Można wykazać, że działania dodawania "+" i mnożenia "." są wewnętrzne w zbiorze $\underline{W}^1_{2,\alpha}(0;T)$, tak więc uporządkowana czwórka $(\underline{W}^1_{2,\alpha}(0;T), R_c, +, \cdot)$ tworzy przestrzeń liniową nad ciałem liczb rzeczywistych R_c. W przestrzeni liniowej $(W^1_{2,}\ (0;T), R_c, +, \cdot)$, wprowadzamy operator iloczynu skalarnego zgodnie ze wzorem:

$$(\,|\,)_w : \underline{W}^1_{2,\alpha}(0;T) \times \underline{W}^1_{2,\alpha}(0;T) \longrightarrow R\,, \tag{4}$$

gdzie:

$$(f|g)_w = \sum_{k=0}^{1} \alpha_k \frac{1}{T} \int_0^T f^{(k)}(t)\, g^{(k)}(t)dt \tag{5}$$

$f, g \in \underline{W}^1_{2,\alpha}(0;T)$; $\alpha_k \geq 0$ dla $k \geq 1$; $\alpha_0 > 0$;

$f^{(k)}, g^{(k)}$ - k-te pochodne funkcji f, g,

$f^{(o)} = f$; $g^{(o)} = g$.

Tak więc uporządkowana para $((\underline{W}^1_{2,\alpha}(0;T), R_c, +, \cdot), (\,|\,)_w)$ tworzy przestrzeń unitarną, którą oznaczamy przez $W^1_{2,\alpha}(0;T)$.
W wymienionej przestrzeni liniowej operator określony wzorem (4) indukuje normę:

$$\|\ \|_w : W^1_{2,\alpha}(0;T) \longrightarrow R\,; \tag{6}$$

gdzie:

$$\|f\|_w = \sqrt{\sum_{k=0}^{1} \alpha_1 \frac{1}{T} \int_0^T (f^{(k)}(t))^2\, dt}\,. \tag{7}$$

Zupełność przestrzeni $W^{1}_{2,\alpha}$ (0;T) wykazuje się w sposób podobny jak dla klasycznych przestrzeni Sobolewa (dla $\alpha = 1$) [1].
Można sprawdzić, że zbiór elementów określonych wzorem:

$$\{e_k\} = \{\Delta_0, \quad \Delta_1\sqrt{2}\cos\omega(\cdot), \quad \Delta_1\sqrt{2}\sin\omega(\cdot), \ldots, \quad \Delta_k\sqrt{2}\cos k\omega(\cdot), \quad \Delta_k\sqrt{2}\sin k\omega(\cdot), \ldots\} \tag{8}$$

gdzie:

$$\Delta_k = \left(\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1(k\omega)^2 + \alpha_2(k\omega)^4 + \ldots + \alpha_l(k\omega)^{2l}}\right)^{-1}, \tag{9}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

l - maksymalny rząd pochodnej występującej w normie przestrzeni $W^{1}_{2,\alpha}$ (0;T), stanowi bazę (układ ortonormalny) przestrzeni $W^{1}_{2,\alpha}$ (0;T), a więc dowolny element $f \in W^{1}_{2,\alpha}$ (0;T) tej przestrzeni można przedstawić w postaci szeregu Fouriera:

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} (f|e_k)_W \cdot e_k, \tag{10}$$

zbieżnego w sensie normy przestrzeni $W^{1}_{2,\alpha}$ (0;T) do funkcji f.
Wprowadzając metodę symboliczną, wzór (10) można zapisać w postaci:

$$f = \underset{s}{F}_0\Delta_0 + \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\underset{s}{F}_k\Delta_k \exp(jk\omega(\cdot)), \tag{11}$$

gdzie:

$$\underset{s}{F}_k = \frac{1}{\Delta_k}\frac{\sqrt{2}}{T}\int_0^T f(t)\exp(-jk\omega t)dt \tag{12}$$

$$\underset{s}{F}_0 = \frac{1}{\Delta_0}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt. \tag{13}$$

Z uwagi że $W^1_{2,\alpha}(0;T) \subset L_2(0;T)$, to każdy element $f \in W^1_{2,\alpha}(0;T)$ posiada w przestrzeni $L_2(0;T)$ rozwinięcie w szereg Fouriera określone wzorem:

$$f = F_0 + \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty} F_k \exp(jk\omega(\cdot)), \tag{14}$$

gdzie:

$$F_k = \frac{\sqrt{2}}{T}\int_0^T f(t)\exp(-jk\omega t)dt \tag{15}$$

$$F_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt\ . \tag{16}$$

Z porównania wzorów (12) i (15) uzyskujemy zależność pomiędzy współczynnikami szeregu Fouriera funkcji f w przestrzeniach $W^1_{2,\alpha}(0;T)$, $L_2(0;T)$:

$$\underset{s}{F}_k = \frac{1}{\Delta_k} F_k = \nabla_k F_k\ ; \qquad \nabla_k = \frac{1}{\Delta_k} \tag{17}$$

Na podstawie wzoru Parsevala:

$$\| f\|_w = \sum_{k=0}^{\infty} (f|e_k)_w)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \underset{s}{f}_k^2\ , \tag{18}$$

oraz prostych przekształceń można wykazać wzory [5]

$$(f|g)_w = \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{\infty} \underset{s}{F}_k\, \underset{s}{G}_k^* \ , \tag{19}$$

$$(f|g)_{L_2} = \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{\infty} F_k\, G_k^* \ , \tag{20}$$

$$(f|g)_w = \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{\infty} \nabla_k^2\, F_k\, G_k^* \ , \tag{21}$$

gdzie:

F_{s^k}, G_{s^k} określa wzór (12),

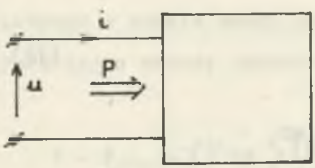
F_k, G_k określa wzór (15).

Symbol G_k^* oznacza liczbę zespoloną sprzężoną z liczbą G_k.
Wzory (19), (20), (21) zapisane dla funkcji $f,g \in W^1_{2,\alpha}(0;T)$ są oczywiście słuszne dla dowolnych funkcji prądu i napięcia spełniających warunki podane na początku rozdziału i należące do przestrzeni $W^1_{2,\alpha}(0;T)$.
Należy zauważyć, że zaproponowany we wstępie pracy wskaźnik jakości (7) (por. (1)) stanowi kwadrat normy skonstruowanej powyżej przestrzeni Sobolewa.

3. Minimalizacja wskaźnika jakości

Załóżmy, że funkcje prądu i oraz napięcia u odbiornika jednofazowego przedstawionego na rys. 1 należą do przestrzeni $W^1_{2,\alpha}(0;T)$ oraz, że odbiornik znajduje się w jednym stanie prądowo-napięciowym i jest opisany ciągiem admitancji:

$$Y_k = G_k + j\,B_k, \quad k \in \{0,1,2,\dots\}. \tag{22}$$



Rys. 1
Fig. 1

Przyjmujemy ponadto, że moc czynna P doprowadzana do odbiornika jest stała i równa wartości zadanej.
Sformalizujmy następujący problem optymalizacyjny.
Wyznaczyć minimum funkcjonału:

$$(\| \;\|_w)^2 , \tag{23}$$

przy ograniczeniu równościowym stwierdzającym, że moc czynna doprowadzona do odbiornika winna być stała i równa wartości zadanej P:

$$P - (u|i)_{L_2} = 0 . \tag{24}$$

Funkcjonał Lagrange'a dla omawianego problemu posiada postać:

$$L(i,\lambda) = (\| i \|_w)^2 - \lambda((u\ i)_{L_2} - P). \tag{25}$$

Ponieważ przyporządkowanie funkcjom omawianej przestrzeni Sobolewa ich współczynników Fouriera jest bijekcją, więc problem optymalizacyjny możemy przenieść z przestrzeni $W^1_{2,\alpha}(0;T)$ do przestrzeni l^2 operując funkcjonałem.
Wyznaczyć minimum funkcji α względem zmiennych A_k, B_k, λ określonej wzorem:

$$\alpha((A_k),(B_k),\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \nabla_k^2 (A_k^2+B_k^2) - \lambda\left(\sum_{k=0}^{\infty}(A_kC_k+B_kD_k) - P\right), \tag{26}$$

gdzie:

$$I_k = A_k - jB_k = \frac{\sqrt{2}}{T}\int_0^T i(t)\exp(-jk\omega t)dt\ , \tag{27}$$

$$U_k = C_k - jD_k = \frac{\sqrt{2}}{T}\int_0^T u(t)\exp(-jk\ t)dt, \qquad k \geq 1\ . \tag{28}$$

Z twierdzenia Lusternika [15], [18], określającego warunki konieczne istnienia ekstremum warunkowego, wynika, że warunki te są zawsze spełnione, jeśli tylko wszystkie współczynniki U_k funkcji napięcia u są różne od zera.
Wykorzystując wymienione twierdzenie, uzyskujemy:

$$2\nabla_k^2 A_k - \lambda C_k = 0\ , \tag{29}$$

$$2\nabla_k^2 B_k - \lambda D_k = 0\ , \tag{30}$$

$$P = \sum_{k=0}^{\infty}(A_kC_k + B_kD_k), \tag{31}$$

$$k \in \{1,2,\ldots,\}\ ;\quad B_0 = D_0 = 0\ ;\quad \lambda \in R\ .$$

Można wykazać, że warunki wystarczające istnienia minimum funkcji (26) są spełnione [18].

Po przekształceniach wzorów (29-31) uzyskujemy:

$$P = \frac{P}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^2 + D_k^2}{2\ \nabla_k^2}} = \frac{P}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{|U_k|^2}{2\ \nabla_k^2}}, \tag{32}$$

oraz

$$A_k - jB_k = \frac{P}{\nabla_k^2 \sum\limits_{h=0}^{\infty} \frac{C_h^2 + D_h^2}{\nabla_h^2}} (C_k - jD_k) = I_k \; . \tag{33}$$

czyli

$$I_k = {}_{a}{I_s}_k = A_k - jB_k = {G_e}_k (C_k - jD_k) = {G_e}_k U_k, \tag{34}$$

gdzie:

$${G_e}_k = \frac{P}{\nabla_k^2 \sum\limits_{h=0}^{\infty} \frac{C_h^2 + D_h^2}{\nabla_h^2}} = \frac{P}{\nabla_k^2 \sum\limits_{h=0}^{\infty} \left(\frac{|U_h|^2}{\nabla_h^2}\right)} \tag{35}$$

Wielkość ${G_e}_k$ określoną wzorem (35) nazwiemy konduktancją zastępczą k-tej harmonicznej.

Minimum funkcjonału (23), przy warunku (24), wystąpi wtedy, gdy prąd zawierać będzie wyłącznie składowe ${}_{a}{I_s}_k$ transportujące moce czynne P wydzielające się na konduktancjach zastępczych ${G_e}_k$. Ze wzoru (34) wynika, że poszczególne harmoniczne prądu ${}_{a}{I_s}_k$ oraz napięcia U_k są proporcjonalne, natomiast funkcje u, ${}_{a}i_s$ [5] nie są proporcjonalne, jak to było w przypadku przestrzeni $L_2(0;T)$ [3], [4], [9].

Prąd aktywny określony wzorem:

$$ {}_{a}i_s = {}_{a}{I_s}_o \nabla_o + \sqrt{2}\, \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \nabla_k \, {U_s}_k \, {G_e}_k \exp(jk\omega(\cdot)) = $$

$$ = {}_{a}I_o + \sqrt{2}\, \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{\infty} U_k \, {G_e}_k \exp(jk\omega(\cdot)) \tag{36}$$

stanowi element minimalizujący funkcjonał $(\| \; \|_w)^2$.

Ponadto na podstawie wzoru (36) mamy:

$$(u|{}_{a}i_s)_{L_2} = \mathrm{Re} \sum_{k=0}^{\infty} U_k ({G_e}_k U_k)^* = \sum_{k=0}^{\infty} {G_e}_k |U_k|^2 = P, \tag{37}$$

a więc prąd ${}_{a}i_s$ transportuje całkowitą moc czynną do odbiornika.

Rozkład widmowy mocy czynnej transportowanej przez poszczególne harmoniczne funkcji prądu $_{a_s}i$ (minimalizującego funkcjonał (25)) zasadniczo różni się od rozkładu widmowego mocy transportowanej przez prąd $_{a}i$ będący elementem minimalizującym funkcjonał [4], [9]:

$$(\| \quad \|_{L_2})^2 .$$

Widmo mocy czynnej transportowanej przez prąd $_{a}i$ jest proporcjonalne do widma kwadratu napięcia zasilającego odbiornik, natomiast moc czynna transportowana przez pierwszą harmoniczną prądu $_{a_s}i$ jest zawsze większa (przy założeniu, że przebieg napięcia u jest odkształcony i nie zawiera składowej stałej) od mocy czynnej transportowanej przez pierwszą harmoniczną prądu $_{a}i$; wynika to z nierówności:

$$G_{e1} > G_e$$

gdzie:

$$G_e = \frac{P}{(\|u\|_{L_2})^2}, \text{ a } G_{ek} \text{ określone jest wzorem (35).}$$

Tak więc w przypadku prądu $_{a_s}i$ następuje przesunięcie widma mocy czynnej o wyższych amplitudach w kierunku niższych częstotliwości.
Powyższe stwierdzenie zostanie zilustrowane przykładem.

P.1 Odbiornik przedstawiony na rys. 2 zasilany jest z idealnego źródła napięcia o znormalizowanej pulsacji $\omega = 1$ rad/s i napięciu u określonych wzorem:

$$u = 100\sqrt{2}\sin(\cdot) + 50\sqrt{2}\sin 2\omega(\cdot) + 30\sqrt{2}\sin 3\omega(\cdot).$$

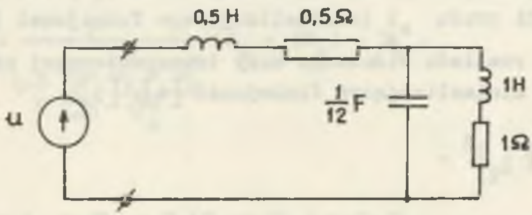
Admitancje odbiornika dla poszczególnych harmonicznych wynoszą:

$$Y_1 = G_1 + jB_1 = (0{,}02749 - j\,0{,}007419)\text{S}, \quad |Y_1| = 0{,}007912\ \text{S},$$

$$Y_2 = G_2 + jB_2 = (0{,}001231 + j\,0{,}009060)\text{S}, \quad |Y_2| = 0{,}09143\ \text{S},$$

$$Y_3 = G_3 + jB_3 = (0{,}04264 + j\,0{,}26819)\text{S}, \quad |Y_3| = 0{,}2715\ \text{S}.$$

W celu wyraźnego uwypuklenia zalet i efektów uzyskiwanych za pośrednictwem nowego wskaźnika jakości energii elektrycznej dane do powyższego przykładu zaczerpnięto z pracy [9].



Rys. 2
Fig. 2

Wykonując obliczenia, otrzymujemy:

$$\|u\|^2_{L_2} = 13\ 400\ V^2.$$

Moc czynna odbiornika $P = \sum_{k=1}^{3} G_k |U_k|^2 = 344,23$ W .

Konduktancja równoważna G_e (dla przestrzeni $L_2(0;T)$):

$$G_e = \frac{P}{(\|u\|_{L_2})^2} = 0,02568\ S.$$

Moc czynna transportowana przez poszczególne harmoniczne $_1P_1 = G|U_1|^2 = 256,8$ W, $_1P_2 = G_e|U_2|^2 = 64,2$ W, $_1P_3 = G|U_3|^2 = 23,1$ W.

Udział procentowy mocy czynnej transportowanej przez pierwszą harmoniczną wynosi:

$$_1\delta = \frac{_1P_1}{P} = 74,6\%$$

Prąd aktywny odbiornika określa wzór:

$$_ai = G_e u = 2,568\sqrt{2}\sin(.) + 1,284\sqrt{2}\sin 2(.) + 0,77\sqrt{2}\sin 3(.).$$

Natomiast moc czynna transportowana przez poszczególne harmoniczne prądu $_ai_s$ uzyskanego drogą minimalizacji funkcjonału (25) przy założeniu, że $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 1$ wynosi:

$$_2P_1 = G_{e1}|U_1|^2 = 331\ W,\quad _2P_2 = G_{e2}|U_2|^2 = 11,82\ W,\quad _2P_3 = G_{e3}|U_3|^2 = 0,98\ W$$

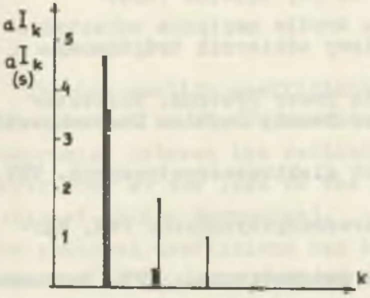
gdzie: G_{ek} obliczamy na podstawie wzoru (35). Udział procentowy mocy czynnej transportowanej przez pierwszą harmoniczną wynosi:

$$_2\delta = 96,1\%.$$

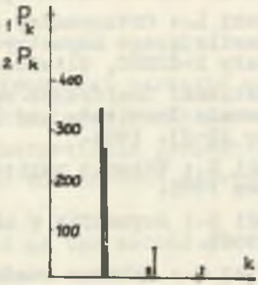
Prąd aktywny odbiornika określa wzór:

$$_{a_s}i = 4,68 \sin(\cdot) + 0,3346 \sin 2(\cdot) + 0,0462 \sin 3\,(\cdot).$$

Rozkład widmowy składowych $_{a}i$ i $_{a_s}i$ przedstawiono na rys. 3, natomiast rozkład widmowy mocy czynnej na rys. 4.



Rys. 3
Fig. 3



Rys. 4
Fig. 4

Mając na uwadze, że składowa aktywna prądu odbiornika $_{a_s}i$ (36) posiada inną postać w porównaniu ze składową czynną prądu $_{a}i$ (wyróżnioną w wyniku minimalizacji wskaźnika jakości $(\|\ \|_{L_2})^2$ por. [8], [9], korzystne byłoby rozłożenie prądu odbiornika na dalsze składniki (oprócz składnika $_{a_s}i$) oraz zbadanie ich właściwości.
Problem ten rozpatrzono w oddzielnej pracy.

LITERATURA

[1] Adams R.A.: Sobolev Spaces, Acad. Press N.Y. 1975.

[2] Brodzki M.: Kilka uwag o matematycznej naturze wielkości fizykalnych. Z.N. Pol. Śl. Elektryka, z. 100, Gliwice 1985.

[3] Brodzki M., Pasko M.: Definicje pewnych mocy dla układów wielozaciskowych. Rozprawy elektrotechniczne z. 1. 1989 Warszawa.

[4] Brodzki M., Pasko M., Umińska-Bortliczek M.: Jednolita teoria mocy dla obwodów trójfazowych o przebiegach odkształconych w oparciu o ortogonalny rozkład prądu w przestrzeni $L_2^s(\langle 0;T\rangle)$. Materiały X-SPETO, Gliwice - Wisła 1987.

[5] Brodzki M., Pasko M., Umińska-Bortliczek M., Walczak J.: Analiza właściwości energetycznych układów dwuzaciskowych o przebiegach odkształconych z uwagi na właściwy wybór wskaźników jakości. Opracowanie CPBR 5.7, Gliwice 1987.

[6] Cegielski M.: Jakość energii elektrycznej. Prace Naukowe JEPW nr 58, Wrocław 1984.

[7] Gepart A., Pollaczek A., Smajek L.: Wahania napięcia w sieciach elektroenergetycznych zasilających piece łukowe, napędy tyrystorowe oraz sposoby ograniczenia tych wahań. Energetyka nr 2, 1984.

[8] Czarnecki L.: Power Theories of Periodic Nonsinusoidal Systems. Rozprawy Elektrotechniczne z. 3-4. 1985.

[9] Czarnecki L.: Interpretacja, identyfikacja i modyfikacja właściwości energetycznych obwodów jednofazowych z przebiegami odkształconymi. Z.N. Politechniki Śląskiej, Elektryka, z. 91, Gliwice 1984.

[10] Czarnecki L.: Ortogonalny rozkład prądu źródła napięcia odkształconego zasilającego asymetryczny, nieliniowy odbiornik trójfazowy. Materiały X-SPETO, Gliwice-Wisła 1987.

[11] International Conference on Harmonics in Power Systems. Worcester Polytechnic Institute and IEEE Worcester County Section Massachusetts. October 22-23. 1984.

[12] Kowalski Z.: Wahania napięcia w układach elektroenergetycznych. WNT, Warszawa 1985.

[13] Kowalski Z.: Asymetria w układach elektroenergetycznych. PWN, Warszawa 1987.

[14] Kołodziej W.: Wybrane rozdziały analizy matematycznej. PWN, Warszawa 1982.

[15] Kudrewicz J.: Analiza funkcjonalna dla automatyków i elektroników. PWN, Warszawa 1976.

[16] Materiały konferencji Naukowo-Technicznej nt.: Jakość energii elektrycznej w warunkach krajowego systemu elektroenergetycznego. Łódź 1987.

[17] Materiały międzynarodowego Sympozjum. Jakość zasilania z układów sieciowych. Gliwice-Kozubnik 1986.

[18] Maurin K.: Analiza Cz. I. Elementy. PWN, Warszawa 1971.

Recenzent: prof. dr inż. Stanisław Bolkowski

Wpłynęło do redakcji dnia 30 maja 1988 r.

НОВЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ КАЧЕСТВА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НА ЗАЖИМАХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

Р е з ю м е

В работе дается определение нового показателя качества несинусоидальных токов приемника в виде двухполюсника. Показатель этот определяет заданный компромис между правильной оценкой энергетических свойств (потери активной мощности на приводе к приемнику) и качественных черт (гармонические дкформации характеристик несинусоидального тока). Предлагаемый показатель представляется в виде нормы соответственно определенного пространства Соболева. Минимизайия этого показателя качества при равенственном ограничении для

активной мощности P подведенной к приемнику дает возможность оформления такой слагаемой тока приемника, которая соответствует всей активной мощности приведенной к приемнику.

THE PROPOSAL OF THE NEW QUALITY COEFFICIENT OF ELECTRICAL ENERGY FOR THE TWO-TERMINAL NETWORKS WITH NONSINUSOIDAL PERIODIC CURRENTS

S u m m a r y

The new quality coefficient of the nonsinusoidal periodic currents for two-terminal receivers has been defined. This index establishes the given compromise between the estimation of the energetistic properties (active pover loss at the lead to the receiver) and the current deformation (contents of higher harmonics).
The proposed coefficient has been qualified as the second power of the standard of properly defined Sobolev's space.
Minimization of this quality coefficient at the invariably limited active power being supplied to the receiver, enables to distinguish the receiver current component which causes entire transmission of the active power to the considered receiver.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: ELEKTRYKA z. 113 Nr kol. 983

Marek BRODZKI
Marian PASKO
Magdalena UMIŃSKA-BORTLICZEK
Janusz WALCZAK

ORTOGONALNY ROZKŁAD PRĄDU ODBIORNIKA DWUZACISKOWEGO ZASILANEGO NAPIĘCIEM ODKSZTAŁCONYM, W PRZESTRZENI SOBOLEWA

Streszczenie. Niniejsza praca jest kontynuacją pracy [1]. W artykule przeprowadzono rozkład prądu odbiornika dwuzaciskowego zasilanego napięciem odkształconym na trzy wzajemnie ortogonalne składniki względem iloczynu skalarnego w przestrzeni Sobolewa $W^1_{2,\alpha}(0;T)$ i podano ich interpretacje fizykalne.
Zdefiniowano nowe pojęcia mocy związane z ortogonalnym rozkładem prądu odbiornika.

1. Wstęp

Artykuł niniejszy stanowi kontynuację pracy [1]. W pracy tej, w wyniku przeprowadzonej minimalizacji wskaźnika jakości prądu odbiornika, ujmującego równocześnie ocenę strat mocy czynnej na doprowadzeniu do odbiornika oraz ocenę odkształceń przebiegu prądu, przy ograniczeniu równościowym na moc czynną doprowadzoną do odbiornika, wyróżnionego składową prądu odpowiedzialną za całkowity przesył mocy czynnej P. Składową tę nazwano aktywną i określono wzorem:

$$
{}_a i_s = {}_o I\Delta_0 {}_s + \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k \, {}_s U_k \, {}_e G_k \exp(jk\omega(.)) =
$$

$$
= {}_a I_0 + \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty} U_k \, {}_e G_k \exp(jk\omega(.)), \tag{1}
$$

gdzie:

$$
U_k = \frac{\sqrt{2}}{T}\int_0^T u(t)\exp(-jk\omega t)dt, \qquad k \geqslant 1\,, \tag{2}
$$

$$\Delta_k = \left(\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 (k\omega)^2 + \alpha_2 (k\omega)^4 + \ldots + \alpha_{\alpha} (k\omega)^{2l}}\right)^{-1}, \tag{3}$$

$${}_{s}U_k = \frac{1}{\Delta_k} U_k = \nabla_k U_k, \tag{4}$$

$${}_{e}G_k = \frac{P}{\nabla_k^2 \sum\limits_{h=0}^{\infty} \left(\frac{|U_h|^2}{\nabla_h^2}\right)}, \tag{5}$$

$\alpha_k \geqslant 0$ dla $k \geqslant 1$; $\alpha_0 > 0$

l – maksymalny rząd pochodnej występującej w normie przestrzeni $W^l_{2,\alpha}(0;T)$,

${}_{s}^{a}i \in W^l_{2,\alpha}(0;T)$.

Zagadnienie kompensowalności niepożądanego składnika prądu odbiornika równego $(i - {}_{2}^{a}i)$ stanowi motywację do poszukiwań innych składowych prądu odbiornika (oprócz składowej ${}_{s}^{a}i$) wzejemnie ortogonalnych.

2. Rozkład ortogonalny prądu odbiornika

Załóżmy podobnie jak w pracy [1], że funkcje prądu i oraz napięcia u odbiornika jednofazowego należą do przestrzeni $W^l_{2,\alpha}(0;T)$, odbiornik znajduje się w jednym stanie prądowo-napięciowym i jest opisany ciągiem admitancji:

$$Y_k = G_k + jB_k, \quad k \in (0,1,2,\ldots,), \quad B_0 = 0. \tag{6}$$

Zakładamy również, że moc czynna doprowadzona do odbiornika jest stała i równa wartości zadanej P. Całkowity prąd odbiornika określa wzór:

$$i = G_0 U_0 + \sqrt{2}\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{\infty} (G_k + jB_k) U_k \exp(jk\omega(\cdot)). \tag{7}$$

Zdefiniujmy prąd:

$$i - {}_{s}^{a}i = (G_0 - {}_{e}G_0) U_0 + \sqrt{2}\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{\infty} (G_k + jB_k - {}_{e}G_k) U_k \exp(jk\omega(\cdot)). \tag{8}$$

Prąd przedstawiony wzorem (8) można przedstawić w postaci wzoru:

$$i - {}_{a_s}i = {}_{r_s}i + {}_{s_s}i\ . \tag{9}$$

Prądy ${}_{r_s}i$, ${}_{s_s}i \in W^1_{2,\alpha}(0;T)$ określają wzory:

$${}_{r_s}i = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty} jB_k\,U_k\,\exp(jk\omega(\cdot)), \tag{10}$$

$${}_{s_s}i = (G_o - {}_{e}G_o)U_o + \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty}(G_k - {}_{e}G_k)U_k\,\exp(jk\omega(\cdot)). \tag{11}$$

Prąd ${}_{r_s}i$ nazywamy prądem reaktancyjnym. Prąd ten jest kompensowalny z dowolną dokładnością w sensie użytej normy za pomocą skończonej liczby elementów L, C.
Prąd ${}_{s_s}i$ nazywamy prądem rozproszenia; można go interpretować jako prąd częstotliwościowego rozrzutu konduktancji odbiornika G_k wokół konduktancji ${}_{e}G_k$ (por. wzór (5)).
W celu wykazania wzajemnej ortogonalności składników prądu odbiornika i $({}_{a_s}i,\ {}_{r_s}i,\ {}_{s_s}i)$ wykorzystujemy wzór (por. [1]):

$$(f|g)_w = \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{\infty}\nabla_k^2\,F_k\,G_k^*\ . \tag{12}$$

Symbol G_k^* oznacza liczbę zespoloną sprzężoną z liczbą G_k. Wykorzystując powyższy wzór oraz wzory (1), (10), (11), mamy:

$$({}_{a_s}i\,|\,{}_{r_s}i)_w = \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\nabla_k^2\,U_k\,{}_{e k}G\,(-jB_k)U_k^* =$$

$$= \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\nabla_k^2\,|U_k|^2\,{}_{e}G_k(-jB_k) = 0\ , \tag{13}$$

$$({}_{a}i_{s} \mid {}_{s}i_{s})_{w} = \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{\infty}\nabla_k^2 U_k \, {}_{e}G_k (G_k - {}_{e}G_k) U_k^{*} = \sum_{k=0}^{\infty}\nabla_k^2 |U_k|^2 \, {}_{e}G_k (G_k - {}_{e}G_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\nabla_k^2 |U_k|^2 \frac{P}{\nabla_k^2 \sum\limits_{h=0}^{\infty}\frac{|U_h|^2}{\nabla_h^2}} \left(G_k - \frac{P}{\nabla_k^2 \sum\limits_{h=0}^{\infty}\frac{|U_h|^2}{\nabla_h^2}}\right) = \frac{P}{\sum\limits_{h=0}^{\infty}\frac{|U_h|^2}{\nabla_h^2}} (P - P) = 0 \tag{14}$$

$$({}_{r}i_{s} \mid {}_{s}i_{s})_{w} = \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\nabla_k^2 (jB_k) U_k (G_k - {}_{e}G_k) U_k^{*} =$$

$$= \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\nabla_k^2 (jB_k) \left|U_k\right|^2 (G_k - {}_{e}G_k) = 0\,. \tag{15}$$

Z powyższych wzorów wynika, że prądy ${}_{a}i_{s}$, ${}_{r}i_{s}$, ${}_{s}i_{s}$ są wzajemnie ortogonalne. Porównując dla tego samego odbiornika opisanego tym samym ciągiem admitancji Y_k, $k \in \{0,1,\ldots\}$ oraz znajdującego się w tym samym stanie prądowo-napięciowym, składowe ortogonalne prądu wyróżnione drogą:

- minimalizacji funkcjonału $(\| \quad \|_{w})^2$ [1], [2],
- minimalizacji funkcjonału $(\| \quad \|_{L_2})^2$ [3]; należy stwierdzić, że:

  składowe ${}_{a}i$ oraz ${}_{a}i_{s}$ mają różną postać i transportują całkowitą moc czynną do odbiornika.

Składowa ${}_{a}i$ odtwarza kształt napięcia zasilającego u, ze współczynnikiem proporcjonalności ${}_{e}G$, zatem stopień odkształcenia tego prądu (w odniesieniu do napięcia) jest taki sam.

Odkształcenie składowej ${}_{a}i_{s}$ od przebiegu sinusoidalnego w porównaniu ze składową ${}_{a}i$ przy tym samym napięciu zasilającym jest znacznie mniejsze.

- Składowe reaktancyjne ${}_{r}i$, ${}_{r}i_{s}$ mają taką samą postać, skąd wynika, że możliwości LC kompensacji w obydwu przypadkach są takie same,
- Składowe ${}_{s}i$, ${}_{s}i_{s}$ posiadają różną postać.

Zakładając, że składowe ${}_{s}i$ i ${}_{s}i_{s}$ są przynajmniej częściowo kompensowalne w szerszej klasie elementów (aktywne, parametryczne, nieliniowe), należy zauważyć, że prąd wypadkowy dopływający do odbiornika przy kompensacji prądu ${}_{s}i_{s}$ będzie znacznie mniej odkształcony (mniejszy udział wyższych harmonicznych) niż przy kompensacji prądu ${}_{s}i$ wyrażonego wzorem:

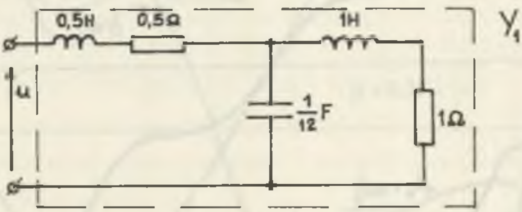
$$ {}_{s}i = (G_o - G_e)U_0 + \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty}(G_k - G_e)\,U_k \exp(jk\omega(\cdot)), \tag{16}$$

gdzie:

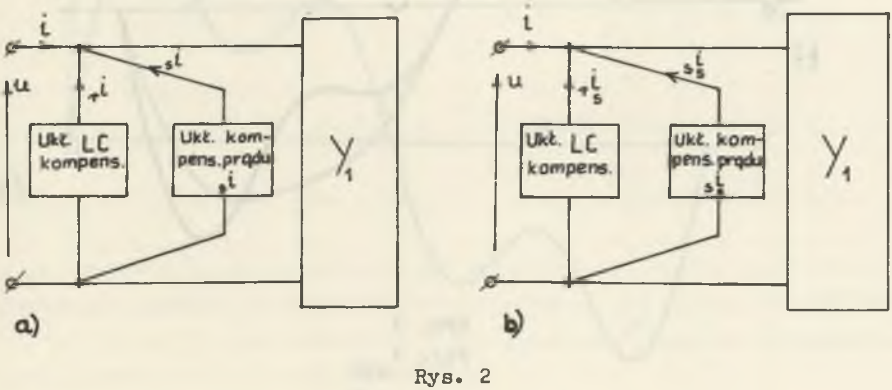
$$G_e = \frac{P}{(\|u\|_{L_2})^2}\,.$$

Stwierdzenie to ilustrujemy poniższym przykładem.

P.1. Do odbiornika Y (rys. 1) o danych dla lepszego porównania zaczerpniętych z pracy[3, s. 91] - dołączono układy kompensujące składową reaktancyjną $_{r}i$ oraz $_{s}i$ (w sensie minimalizacji funkcjonału $(\|\ \|_{L_2})^2$ (rys. 2a)) oraz:
do tego samego odbiornika Y (rys. 1) - dołączono układy kompensujące składową reaktancyjną $_{r}i_{s}$ oraz składową $_{s}i_{s}$ (w sensie minimalizacacji funkcjonału $(\|\ \|_{w})^2$ (rys. 2b)).



Rys. 1
Fig. 1



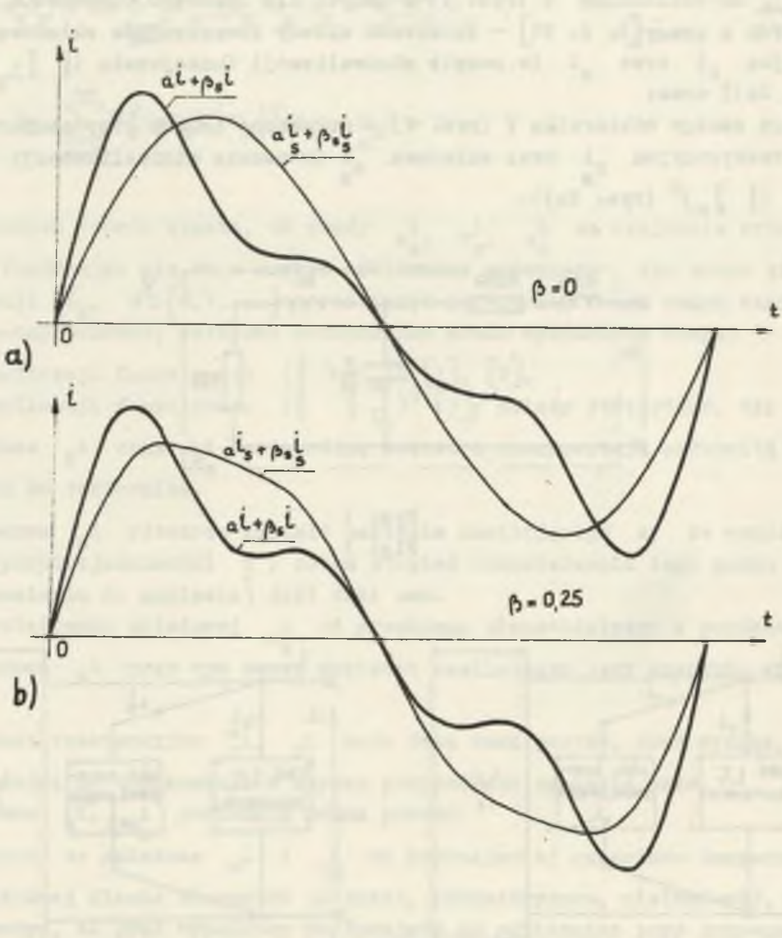
Rys. 2
Fig. 2

Obliczono składowe ortogonalnego rozkładu prądu i w obydwu przypadkach i stwierdzono, że: dla min $(\| \|_{L_2})^2$:

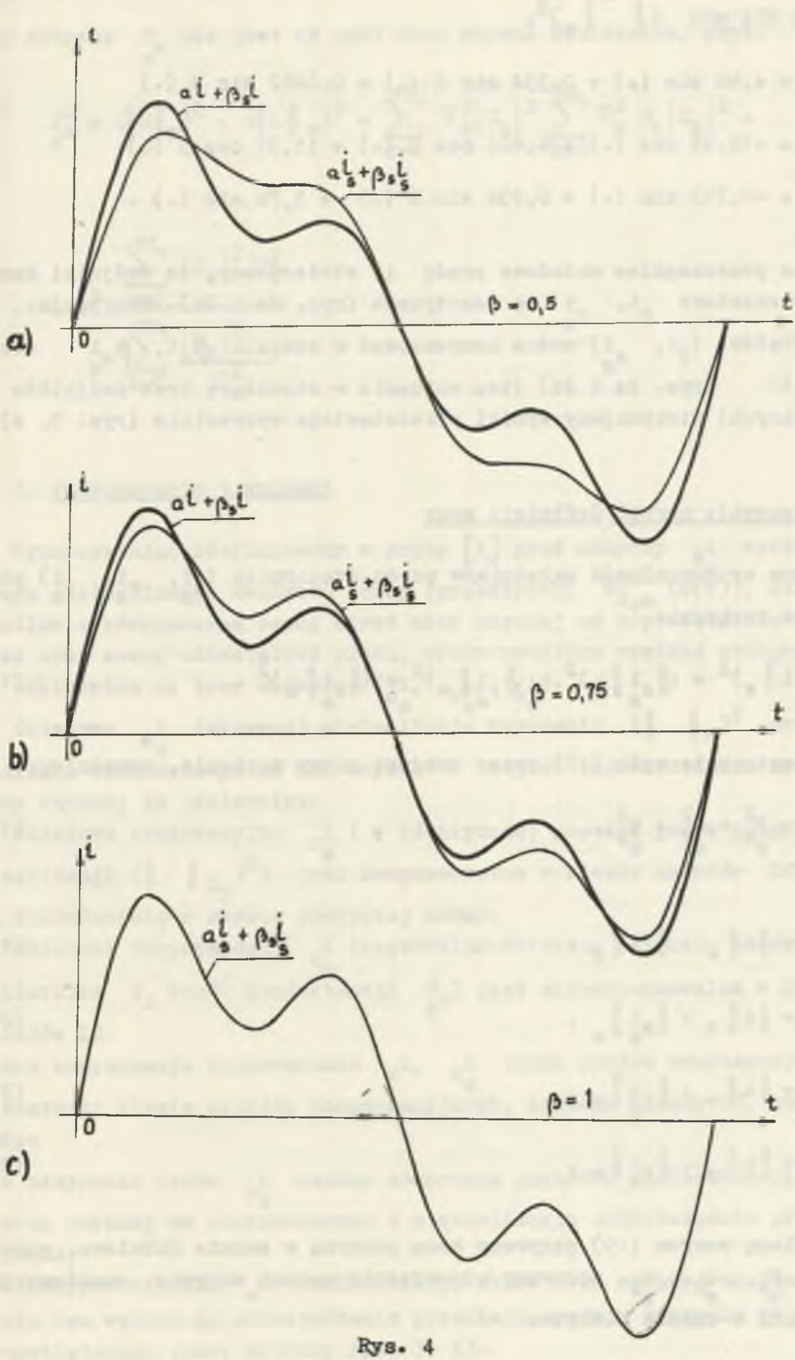
$$_{a}i = 3{,}63 \sin(\cdot) + 1{,}815 \sin 2(\cdot) + 1{,}09 \sin 3(\cdot),$$

$$_{r}i = -10{,}49 \cos(\cdot) + 6{,}406 \cos(\cdot) + 11{,}37 \cos 4(\cdot),$$

$$_{s}i = 0{,}256 \sin(\cdot) - 0{,}945 \sin 2(\cdot) + 0{,}719 \sin 3(\cdot),$$



Rys. 3
Fig. 3



i
$a i + \beta_s i$
$a \dot{i}_s + \beta_s i_s$
$\beta = 0,5$
t
a)
0
i
$a i + \beta_s i$
$a \dot{i}_s + \beta_s i_s$
$\beta = 0,75$
t
b)
0
i
$a \dot{i}_s + \beta_s i_s$
$\beta = 1$
t
0
c)

Rys. 4
Fig. 4

natomiast dla min $(\| \quad \|_w)^2$:

$${}_{a_s}i = 4{,}68 \sin(\cdot) + 0{,}334 \sin 2(\cdot) + 0{,}0462 \sin 3(\cdot)$$

$${}_{r_s}i = -10{,}49 \cos(\cdot) + 6{,}406 \cos 2(\cdot) + 11{,}37 \cos 3(\cdot)$$

$${}_{s_s}i = -0{,}793 \sin(\cdot) + 0{,}536 \sin 2(\cdot) + 1{,}76 \sin(\cdot) .$$

Porównując poszczególne składowe prądu i, stwierdzamy, że dwójniki kompensujące składowe ${}_ri$, ${}_{r_s}i$ są identyczne (rys. 2a i 2b). Przyjmując, że każdy z prądów $({}_si, {}_{s_s}i)$ można kompensować w stopniu $\beta_s i$, $\beta_{s_s} i$ dla $\beta \in \langle 0; 1\rangle$ (rys. 2a i 2b) (bez wnikania w strukturę tych dwójników kompensujących) otrzymujemy wyniki przedstawione wykreślnie (rys. 3, 4).

3. Propozycje nowych definicji mocy

Wykazana ortogonalność składników prądu odbiornika $({}_{a_s}i, {}_{r_s}i, {}_{s_s}i)$ powoduje, że zachodzi:

$$(\| i \|_w)^2 = (\| {}_{a_s}i \|_w)^2 + (\| {}_{r_s}i \|_w)^2 + (\| {}_{s_s}i \|_w)^2 . \tag{17}$$

Mnożąc obustronnie wzór (17) przez kwadrat normy napięcia, uzyskujemy:

$${}_sS_m^2 = {}_sP_a^2 + {}_sQ_r^2 + {}_sQ_s^2 , \tag{18}$$

gdzie:

$${}_sS_m = \| u \|_w \cdot \| i \|_w , \tag{19}$$

$${}_sP_a = \| u \|_w \cdot \| {}_{a_s}i \|_w , \tag{20}$$

$${}_sQ_r = \| u \|_w \cdot \| {}_{r_s}i \|_w , \tag{21}$$

$${}_sQ_s = \| u \|_w \cdot \| {}_{s_s}i \|_w , \tag{22}$$

Moc określoną wzorem (19) nazywamy mocą pozorną w sensie Sobolewa, podobnie moce ${}_sP_a$, ${}_sQ_r$, ${}_sQ_s$ nazywamy odpowiednio mocami aktywną, reaktancyjną, rozproszenia w sensie Sobolewa.

Moc aktywna P_{a_s} nie jest na ogół mocą czynną odbiornika, gdyż:

$$P_{a_s}^2 = (\| u \|_w)^2 \cdot (\| i \|_w)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \nabla_k^2 |U_k|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \nabla_k^2 G_k |U_k|^2 =$$

$$= P^2 \frac{\sum_{k=0}^{\infty} |U_k|^2 \nabla_k^2}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|U_k|^2}{\nabla_k^2}} . \tag{23}$$

4. Podsumowanie i wnioski

Wykorzystując zdefiniowany w pracy [1] prąd aktywny $_{a}i_s$ wyróżniony drogą minimalizacji kwadratu normy (przestrzeni $W^1_{2,\alpha}$ (O;T)), która to umożliwia równoczesną ocenę strat mocy czynnej na doprowadzeniu do odbiornika oraz ocenę odkształceń prądu, przeprowadzono rozkład ortogonalny prądu odbiornika na trzy składowe ($_{a}i_s$, $_{r}i_s$, $_{s}i_s$).

Składowa $_{a}i_s$ (aktywna) minimalizuje wyrażenie $(\| \; \|_w)^2$ przy ograniczeniu równościowym na moc czynną P i jest odpowiedzialna za przesył mocy czynnej do odbiornika.

Składowa reaktancyjna $_{r}i_s$ (o identycznej postaci jak w przypadku minimalizacji $(\| \; \|_{L_2})^2$) jest kompensowalna w klasie układów LC z dowolną dokładnością w sensie przyjętej normy.

Składowa rozproszenia $_{s}i_s$ (częstotliwościowego rozrzutu konduktancji odbiornika G_k wokół konduktancji G_{e^k}) jest niekompensowalna w klasie układów LC.

Pełna kompensacja rozproszenia $_{s}i$, $_{s}i_s$ (oraz prądów reaktancyjnych) w szerszej klasie układów kompensacyjnych, aniżeli układy LC, umożliwiałaby:

- w przypadku prądu $_{s}i_s$ zadany kompromis pomiędzy minimalizacją strat mocy czynnej na doprowadzeniu i minimalizacją odkształcenia przebiegu prądu,
- w przypadku prądu $_{s}i$ minimalizację strat mocy czynnej na doprowadzeniu bez wpływu na odkształcenie przebiegu prądu w stosunku do napięcia zasilającego (por. wykresy rys. 3, 4).

LITERATURA

[1] Brodzki M., Pasko M., Umińska-Bortliczek M., Walczak J.: Propozycja nowego wskaźnika jakości energii elektrycznej dla układów dwuzaciskowych z przebiegami odkształconymi. Materiały XI - SPETO Gliwice-Wisła, 1988 oraz Z.N. Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 113. Gliwice 1991.

[2] Brodzki M., Pasko M., Umińska-Bortliczek M., Walczak J.: Analiza właściwości energetycznych układów dwuzaciskowych o przebiegach odkształconych z uwagi na właściwy wybór wskaźników jakości. Opracowanie CPBR 5.7, Gliwice 1987.

[3] Czarnecki L.: Interpretacja, identyfikacja i modyfikacja właściwości energetycznych obwodów jednofazowych z przebiegami odkształconymi. ZN Politechniki Śląskiej Elektryka z. 91. Gliwice 1984.

[4] Czarnecki L.: Power Theories of Periodic Nonsinusoidal Systems. Rozprawy Elektrotechniczne z. 3-4 1985.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Kazimierz Mikołajuk

Wpłynęło do redakcji dnia 30 maja 1988 r.

ОРТОГОНАЛЬНОЕ - В НЕКОТОРОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА - РАЗЛОЖЕНИЕ ТОКА ПРИЕМНИКА В ВИДЕ ДВУХПОЛЮСНИКА К КОТОРОМУ ПРИВОДИТСЯ НЕСИНУСОИДАЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ

Р е з ю м е

В работе, в соответствии с работой [1], дается ортоготальное разложение несинусоидального тока приемника в виде двухполюсника. Питание этого двухполюсника - несинусоидальное напряжение. Разложение тока по взвимно ортогональным слагаемым дается в смысле свойств скалярного произведения в пространстве Соболева $W^1_{2,\rho}(0;T)$. Дается также физическая интерпретация этих слагаемых несинусоидального тока приемника. На базе ортогонального разложения несинусоидального тока выводятся новые формулы и определения мощности для однофазных электрических систем.

ORTHOGONAL DECOMPOSITION OF THE CURRENT OF THE TWO-TERMINAL RECEIVER SUPPLIED WITH NONSINUSOIDAL PERIODIC VOLTAGE IN THE SOBOLEV'S SPACE

S u m m a r y

This paper is the continuation of [1]. The decomposition of the current of the two-terminal receiver supplied with nonsinusoidal periodic voltage, into three orthogonal components in relation to scalar product

in the Sobolev's space $W^{1}_{2,\alpha}(0;T)$ has been done and their physical interpretations have been given.

The new notions of power connected with the orthogonal decomposition have been defined.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: ELEKTRYKA z. 113 Nr kol. 983

Marek BRODZKI
Janusz WALCZAK

OCENA PRĄDÓW ODKSZTAŁCONYCH ODBIORNIKÓW WIELOZACISKOWYCH WYKORZYSTUJĄCA POJĘCIE PRZESTRZENI SOBOLEWA

Streszczenie. W pracy zdefiniowano wskaźnik jakości prądów odkształconych odbiorników wielozaciskowych ustalający kompromis pomiędzy oceną strat mocy czynnej na doprowadzeniu do pojedynczego odbiornika i oceną odkształceń (zawartości wyższych harmonicznych) prądów odbiornika.

Wskaźnik ten zdefiniowano jako kwadrat normy pewnej specjalnie skonstruowanej przestrzeni Sobolewa.

Rozwiązano problem minimalizacji tego wskaźnika przy ograniczeniu równościowym dotyczącym doprowadzenia zadanej mocy czynnej do odbiornika.

Następnie przeprowadzono rozkład prądów odbiornika wielozaciskowego na cztery wzajemnie ortogonalne składniki, podając ich interpretację fizykalną.

Wprowadzono nowe definicje mocy wiążące się z uzyskanym rozkładem ortogonalnym prądów odbiornika.

1. Wstęp

Zagadnienie sygnalizowane w tytule niniejszej pracy było już częściowo podejmowane w pracach [3], [6]. Tam ocena ta polegała na znalezieniu prądu minimalizującego straty na symetrycznym doprowadzeniu mocy czynnej P do odbiornika wielozaciskowego tzn. - każdemu z przewodów doprowadzających tę moc przyporządkowana była rezystancja ΔR (z wyjątkiem przewodu zerowego o rezystancji zerowej) i straty te związane były z ww. rezystancjami. Oprócz wspomnianego minimalizującego prądu wyróżnione były jeszcze dwa lub trzy dalsze, dające w sumie całkowity prąd odbiornika. Prądy te są wobec tego niepożądane (oczywiście oprócz pierwszego przenoszącego moc czynną) i należy z kolei zastanowić się, czy i jakimi sposobami można je skompensować. Funkcje (macierzowe) tych prądów były elementami pewnej przestrzeni Hilberta $L_n^2(0;T)$. Były one parami ortogonalne i każda z nich posiadała określoną interpretację fizykalną. Minimalizowany funkcjonał, oceniający jakość prądu, miał jako swą dziedzinę zbiór tworzący przestrzeń $L_n^2(0;T)$.

Jednak oprócz strat zagadnieniem istotnym jest odkształcenie prądu pobieranego przez odbiornik, ponieważ w sieci, która nie może być traktowana jako napięciowo sztywna, prąd taki powoduje wzrost odkształceń napięć zasilających inne odbiorniki. Widać więc, że na razie w obrębie jednego odbiornika należy znaleźć jakiś wskaźnik, który oceniałby jednocześnie zarówno odkształcenie prądu, jak i straty występujące na doprowadzeniu doń mocy czynnej. Obserwując naszkicowane tu rozwiązanie poprzedniego zagadnienia, dochodzimy do przekonania, że ze względu na pożądaną ortogonalność rozkładu funkcji prądów powinniśmy umiejscowić je również w pewnej przestrzeni Hilberta, na której z kolei będzie zdefiniowany minimalizowany funkcjonał (omawiany problem, dla odbiorników dwuzaciskowych, został przeanalizowany w pracach [4], [5]). Przestrzeń ta powinna być na tyle podobna do przestrzeni $L_n^2(0;T)$, by dało się ująć wspomniane zagadnienie strat oraz dysponować pewnymi współczynnikami pozwalającymi na uzyskanie kompromisu pomiędzy oceną strat i odkształceniami prądu. Ponieważ kolejne pochodne funkcji prądu uwypuklają wyższe harmoniczne, więc wydaje się, że proponowana ocena może być dokonywana za pomocą wzoru:

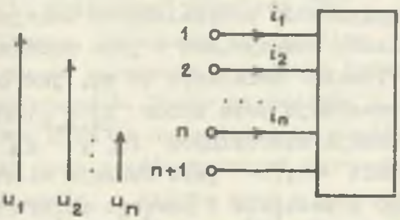
$$\sum_{r=0}^{l} \lambda_r \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{T} \int_0^T (f_\alpha^{(r)}(t))^2 dt \,, \tag{1}$$

gdzie wskaźnik α numeruje zaciski wejściowe odbiornika (rozpatrujemy $n \in N$ takich zacisków), wskaźnik $r \in N$ jest rzędem pochodnej funkcji $f_\alpha (f_\alpha^{(0)} = f_\alpha)$ oraz $\lambda_r \geq 0$, $\lambda_0 > 0$. Za wyborem takiego wzoru przemawia dodatkowo fakt, że funkcje (lub też ich pochodne) różniące się na zbiorze miary Lebesque'a zero nie są metrologicznie rozróżnialne. Oczywiście trzeba teraz sprecyzować, dla jakich funkcji f wzór (1) ma sens. Doprowadzi nas to do definicji pewnej przestrzeni Hilberta - mianowicie do przestrzeni Sobolewa, a właściwie do całej ich rodziny ze względu na dobór ciągów λ oraz liczb l, a wzór (1) będzie określać ich normy.

Nie będziemy teraz rozstrzygać zagadnienia, czy przestrzenie te z punktu widzenia wymienionych zamierzeń posiadają konkurentki. Wydaje się natomiast, że przedstawione argumenty wystarczająco motywują ich rozpatrywanie. Przystąpmy więc do formalizacji zagadnienia.

2. Konstrukcja pewnych przestrzeni Sobolewa

Załóżmy, że dany jest odbiornik przedstawiony na rys. 1. Ponieważ rozpatrujemy jeden stan napięciowo-prądowy odbiornika opisany parą funkcji macierzowych $u=(u_1,\ldots,u_n)$, $i=(i_1,\ldots,i_n)$, więc jest rzeczą obojętną, czy gdyby dopuścić do rozważań inne jego stany byłby on liniowym czy też nie. Istotne jest, że funkcje u_α, i_α, $\alpha \in \{1,\ldots,n\}$ są okresowymi funkcjami zmiennej rzeczywistej (czasu) o wspólnym okresie T. Będziemy o nich zakładać, że są mierzalne w sensie Lebesgue'a o całkowalnym kwadracie na przedziale domkniętym $\langle 0;T \rangle$ oraz że są różniczkowalne



Rys. 1. Odbiornik (n + 1) zaciskowy
Fig. 1. The (n + 1) - terminal receiver

prawie wszędzie (prawie wszędzie w sensie miary Lebesgue'a) l-krotnie i wszystkie ich pochodne posiadają te same własności co różniczkowane funkcje. Jeśli we wzorze (1) któryś ze współczynników λ_r byłby równy zeru, to wówczas oczywiście o odpowiedniej funkcji $u_\alpha^{(r)}$, $i_\alpha^{(r)}$ nie trzeba czynić ww. założeń.

Ze względów wymienionych w pracy [3] należy operować klasami takich funkcji f_α, które są równe na przedziale $\langle 0;T\rangle$ prawie wszędzie oraz posiadają kolejne pochodne do l-go rzędu włącznie odpowiednio równe prawie wszędzie. (Wówczas, gdy jest nieistotne, czy chodzi o funkcję u_α, czy też i_α, będziemy używać symbolu f_α). Klasy takich funkcji oznaczamy $[f_\alpha]$. Aby uprościć zapis wzorów, których użyjemy, będziemy oznaczać klasę $[f_\alpha]$ tym samym symbolem f_α co odpowiednią funkcję. Jest oczywiste, że klasy te są niepuste i rozłączne, czyli tworzą podział zbioru funkcji o opisanych właściwościach, generujący odpowiednią relację równoważności w tym zbiorze.

Utwórzmy z takich klas ciągi $f=(f_1,\ldots,f_n)$. Zbiór wszystkich takich ciągów oznaczymy $W^l_{2,\lambda,n}(0;T)$. Będziemy używać tego oznaczenia zamiast dokładniejszego, lecz dłuższego $\underline{W}^l_{2,\alpha,n}(\langle 0;T\rangle)$.

Aby uczynić zeń przestrzeń Sobolewa (dokładniej: n-krotną przestrzeń Sobolewa o indeksach $l,2,\lambda$), trzeba zbiór ten zaopatrzyć w strukturę przestrzeni liniowej, a następnie w iloczyn skalarny.

Uwaga 1. Często w literaturze, definiując przestrzeń Sobolewa, używa się, w miejsce pochodnej klasycznej, pojęcia pochodnej dystrybucyjnej, dającej w wyniku różniczkowania dystrybucji regularnych, dystrybucje regularne. Ponieważ mamy wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie pomiędzy omawianymi klasami funkcji $[f_\alpha]$ a dystrybucjami regularnymi oraz w tym przypadku, pomiędzy różniczkowaniem klasycznym i dystrybucyjnym [12], s. 39, 40, 43, 44), więc zrezygnowaliśmy w definicji przestrzeni Sobolewa z ujęcia dystrybucyjnego. □

Dodawanie elementów zbioru $\underline{W}^l_{2,\lambda,n}(0;T)$ oraz mnożenie ich przez liczby rzeczywiste określamy wzorami:

$$f + g = (f_1 + g_1,\ldots,f_n + g_n), \tag{2}$$

$$c \cdot f = (cf_1,\ldots,cf_n), \tag{3}$$

gdzie:

$$f,g \in \underline{W}^l_{2,\lambda,n}(0;T), \qquad c \in R.$$

Ściślej, dodawanie wspomnianych klas $[f_\alpha]$, $[g_\alpha]$ rozumiemy jako otrzymanie nowej klasy poprzez dodawanie dowolnych elementów przynależnych kolejno do jednej i drugiej, a mnożenie przez liczbę rzeczywistą - jako mnożenie dowolnego elementu danej klasy przez tę liczbę. Działania te są, jak łatwo zauważyć, poprawnie określone i nie wyprowadzają poza zbiór $W^1_{2,\lambda,n}(0;T)$. Wnioskujemy o tym, ponieważ suma dwu funkcji mierzalnych $f^{(r)}_\alpha$, $g^{(r)}_\alpha$ (określonych prawie wszędzie) na przedziale $\langle 0;T\rangle$ jest funkcją mierzalną określoną na różnicy mnogościowej tego przedziału i pewnego zbioru miary zero i ponieważ ze spełnienia nierówności $(f^{(r)}_\alpha(t) + g^{(r)}_\alpha(t))^2 \leqslant \leqslant 2((f^{(r)}_\alpha(t))^2 + (g^{(r)}_\alpha(t))^2)$ wynika całkowalność kwadratu sumy dwu funkcji posiadających tę własność. Prześledzenie poprawności określenia działania jest prostym ćwiczeniem.

Mamy więc określoną przestrzeń liniową $(W^1_{2,\lambda,n}(0;T), R_c, +, \cdot)$ nad ciałem liczb rzeczywistych R_c. Potrzebne tu wiadomości z teorii miary i całki Lebesgue'a Czytelnik może znaleźć np. w książkach [10], [11].

Podkreślamy, że argumenty i wartości funkcji prądów i napięć u, i pozbawiamy wymiarów fizykalnych i dlatego funkcje te możemy traktować jako elementy wspólnego zbioru powyższej przestrzeni liniowej. Motywacja takiego stanowiska podana jest w pracach [2], [3].

Zdefiniujmy teraz iloczyn skalarny w ten sposób, by indukował on normę określoną wzorem (1). Iloczyn ten ma być odwzorowaniem: $(|)_w : W^1_{2,\lambda,n}(0;T) \times W^1_{2,\lambda,n}(0;T) \to R$. Jest on określony wzorem:

$$(f|g)_w = \sum_{r=0}^{l} \lambda_r \frac{1}{T} \int_0^T f^{(r)}_\alpha(t)\, g^{(r)}_\alpha(t)dt, \tag{4}$$

w którym zastosowano konwencję sumacyjną (w zakresie od 1 do n) odnośnie do wskaźnika α powtarzającego się w iloczynie i numerującego wejścia odbiornika. Odnośnie do tego rodzaju wskaźników α, β, γ przyjmujemy tę konwencję w dalszym ciągu artykułu. Łatwo sprawdzić, że cztery aksjomaty iloczynu skalarnego ([7], s. 62) są spełnione. W przypadku czwartego z nich istotny jest fakt operowania klasami funkcji $[f_\alpha]$ tworzącymi wspomniane ciągi oraz założenie: $\lambda_0 > 0$, $\lambda_r \geqslant 0$, $r \in \{1,\ldots,l\}$. Oczywiście norma jest określona za pomocą tego iloczynu skalarnego:

$$\|f\|^2_w = (f\,|\,f)_w \tag{5}$$

wzorem (1).

Badanie zupełności omawianej przestrzeni sprowadzamy najpierw do badania zupełności przestrzeni $W^1_{2,\lambda}(0;T)$ (przypadek n=1, [13], s. 55). Z kolei badanie zupełności przestrzeni $W^1_{2,\lambda}(0;T)$ opiera się na wykorzystaniu pochodnej dystrybucyjnej dystrybucji regularnych (por. Uwaga 1) oraz wykorzystaniu faktu zupełności przestrzeni $L^2(0;T)$ ([1], s. 214, 215).

Czyli przestrzeń Sobolewa $((\underline{W}^1_{2,\lambda,n}(0;T), R_c, +, \cdot), (|)_w)$ jest przestrzenią Hilberta. Oznaczamy ją symbolem $W^1_{2,\lambda,n}(0;T)$. Jak wspomnieliśmy już, mamy tu do czynienia z rodziną przestrzeni ze względu na wybór liczb 1, n oraz ciągu λ. Wybór parametrów 1, λ służy do wspólnego ujęcia zagadnienia strat mocy na doprowadzeniu prądów do odbiornika oraz zagadnienia "skażenia" tych prądów wyższymi harmonicznymi (w ten sposób realizowany jest ów kompromis, o którym mowa w streszczeniu).

Dalsza analiza prądów odbiornika odbywać się będzie w oparciu o pewien szczególnie wygodny układ ortonormalny w przestrzeni $W^1_{2,\lambda,n}(0;T)$. Jest on następujący:

$$\{(\Delta_0, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, \Delta_0), \ldots, \tag{6}$$

$$(\Delta_h \sqrt{2} \cos h\omega(\cdot), 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, \Delta_h \sqrt{2} \cos\omega(\cdot)),$$

$$(\Delta_h \sqrt{2} \sin h\omega(\cdot), 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, \Delta_h \sqrt{2} \sin\omega(\cdot)), \ldots\}$$

gdzie:

$$\Delta_h = \sqrt{(\lambda_0 + \lambda_1 (h\omega)^2 + \ldots + \lambda_l (h\omega)^{2l})^{-1}}, \tag{7}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad h \in N_0 = N \cup \{0\}.$$

Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy ortonormalność układu (6), czyli:

$$(e_k | e_l)_w = \delta_{kl}, \qquad k, l \in N_0, \tag{8}$$

przy czym zgodnie ze wzorem (8) numerujemy elementy tego układu (zbioru) kolejnymi liczbami podstawowymi.

Wykorzystując wzór (1) oraz powiązanie współczynników Fouriera funkcji i jej pochodnych, w prosty sposób sprowadzamy dowód zamkniętości układu (6) do dowodu zamkniętości zwykłego układu trygonometrycznego w przestrzeni $L^2(0;T)$ ([7], s. 78, 79).

Jak w każdej przestrzeni Hilberta mamy rozkład dowolnego jej elementu względem przeliczalnego układu ortonormalnego zamkniętego ([5], s. 75, 76):

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} (f | e_k)_w \cdot e_k, \quad f \in \underline{W}^1_{2,\lambda,n}(0;T), \quad ((f|e_k)_w) \in l^2. \tag{9}$$

Dostrzegając podobieństwo układu (6) do zwykłego układu trygonometrycznego w przestrzeni $L_n^2(0;T)$ ([3]), możemy zamiast wzoru (9) napisać:

$$f_\alpha = {}_sF_{\alpha 0}\Delta_0 + \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{h=1}^{\infty} {}_sF_{\alpha h}\Delta_h \exp(jh\omega(\cdot)), \tag{10}$$

gdzie:

$${}_sF_{\alpha h} = \nabla_h F_{\alpha h}, \quad F_{\alpha h} = \frac{\sqrt{2}}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-jh\omega t}dt$$

dla

$$h = 0, \quad F_{\alpha 0} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt, \quad (|{}_sF_{\alpha h}|) \in \underline{l}^2, \tag{11}$$

$$\nabla_h = \Delta_h^{-1}, \quad h \in N_0, \quad \alpha \in \{1,\dots,n\}. \tag{12}$$

Wyrażenia ${}_sF_{\alpha h}$ nazywać będziemy współczynnikami Sobolewa.

Zamkniętość układu (6) oznacza w tej nowej notacji, użytej we wzorze (10), spełnienie wzoru:

$$\|f\|_w^2 = \sum_{h=0}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{n}|{}_sF_{\alpha h}|^2 = \sum_{h=1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{n}\nabla_h^2|F_{\alpha h}|^2 \tag{13}$$

dla dowolnego elementu $f \in \underline{W}^1_{2,\lambda,n}(0;T)$.

W oparciu o ten fakt, metodą podobną do zastosowanej w pracy [9], s. 5, 6, wykazujemy, dla dowolnych elementów $f,g \in \underline{W}^1_{2,\lambda,n}(0;T)$, wzór:

$$(f|g)_w = \mathrm{Re}\sum_{h=0}^{\infty} {}_sF_{\alpha h}\, {}_sG^*_{\alpha h} = \mathrm{Re}\sum_{h=0}^{\infty}\nabla_h^2 F_{\alpha h} G^*_{\alpha h}, \tag{14}$$

z którego będziemy często korzystać, albowiem z jego pomocą można orzekać o ortogonalności funkcji f i g w powyższej przestrzeni Sobolewa, używając ich sobolewowskiego lub zwykłego fourierowskiego widma.

3. Problem optymalizacyjny

Problem ten polega na znalezieniu funkcji prądu $i \in W^1_{2,\lambda,n}(0;T)$ minimalizującej kwadrat funkcjonału normy ($\| \ \|^2_w$) we wprowadzonej przestrzeni Sobolewa, przy ubocznym warunku orzekającym, że moc czynna dostarczona do odbiornika jest stała i równa P:

$$P = (u|i)_L , \tag{15}$$

gdzie symbol $(\,|\,)_L$ oznacza iloczyn skalarny w przestrzeni $L^2_n(0;T)$ określający właśnie tę moc. □

Uwaga 2. Warto zaznaczyć, że milcząco godzimy się tu na pewne przybliżenie, charakterystyczne dla lokalnego potraktowania problemu optymalizacji (tzn. dotyczącego jednego odbiornika), polegające na założeniu sztywności napięcia na samym odbiorniku (zadanie funkcji $u \in W^1_{2,\lambda,n}(0;T)$ - rys. 1). □

Uwaga 3. Minimum omawianego funkcjonału odpowiada, pod względem strat występujących na doprowadzeniu mocy do odbiornika, stanowisku opisanemu w punkcie 1, gdy n przewodów doprowadzających do niego prądy posiada rezystancję ΔR a (n+1)-szy - zerową. Gdyby (n+1)-szy miał również rezystancję ΔR, to w sumach określających iloczyn skalarny i normę przestrzeni Sobolewa dodawanie powinno odbywać się w zakresie od 1 do n+1, a prądy spełniać równanie

$$\sum_{\alpha=1}^{n+1} i_\alpha = 0.$$

Równanie to wyznacza podprzestrzeń Hilberta naszej przestrzeni Sobolewa (jest ona liniowa i domknięta). Przyjmując takie stanowisko, należałoby zastąpić w całej pracy wprowadzoną przestrzeń Sobolewa tą jej podprzestrzenią.

Powstaje też pytanie: jak wyglądałoby zagadnienie optymalizacji w przypadku, gdy rezystancje poszczególnych przewodów nie byłyby równe? Widać, że we wzorach (1), (4) należałoby, w analogii do nieujemnych współczynników wagi λ_r. wprowadzić inne, dotyczące, dla ustalonej harmonicznej, kolejnych przewodów odbiornika. Mielibyśmy wówczas również do czynienia z iloczynem skalarnym i normą; lecz z innym układem ortonormalnym i nieco bardziej skomplikowanymi rachunkami występującymi w zagadnieniu optymalizacyjnym. Natomiast trudno przewidzieć, jak wyglądałoby wówczas zagadnienie ortogonalnego rozkładu funkcji prądu odbiornika, którym w przypadku symetrii rezystancyjnej zamierzamy się zająć. Sygnalizujemy powyższą możliwość asymetrii, lecz nie będziemy jej w niniejszej pracy rozpatrywać.

□

Uwaga 4. Minimalizowany funkcjonał może być również funkcjonałem o wartości $(u_R|i)_w$, gdzie u_R jest macierzą funkcji napięć na przewodach o rezystancji ΔR. Można wówczas, utrzymując to samo oznaczenie ∇_h^2 - lecz zmieniając jego definicję, łatwo uwzględnić zjawisko naskórkowości dla tych przewodów, za pomocą takich samych rozumowań jak przeprowadzone w całej pracy. □

Ponieważ przyporządkowanie funkcjom $f \in W^1_{2,\lambda,n}(0;T)$ ich współczynników $(f|e_k)_w$ jest bijekcją pomiędzy zbiorami $W^1_{2,\lambda,n}(0;T)$ i l^2 (por.: [7], s. 74-76)), więc podany problem optymalizacyjny można wyrazić w przestrzeni l^2. Mianowicie, polega on na znalezieniu minimum funkcji $\underset{s}{f} : l^2 \to R$:

$$\underset{s}{f}(\tilde{A}) = \underset{s}{f}(A,B) = \sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 \sum_{\alpha=1}^{n} \left| I_{\alpha h} \right|^2 = \tag{16}$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 \sum_{\alpha=1}^{n} (A_{\alpha h}^2 + B_{\alpha h}^2), \quad B_{\alpha 0} = 0 ,$$

$$f(A,B) = \| i \|_w^2 ,$$

gdzie:

$$J_{\alpha h} = A_{\alpha h} - jB_{\alpha h} , \quad A = (A_{\alpha h}), \quad B = (B_{\alpha h}),$$

$$\tilde{A} = (\tilde{A}_{\tilde{\gamma} h}), \quad \tilde{A}_{\tilde{\gamma} h} = \begin{cases} A_{\alpha h} & \text{dla } \tilde{\gamma} = \alpha , \\ B_{\alpha h} & \text{dla } \tilde{\gamma} = n + \beta , \end{cases} \tag{17}$$

$$\alpha, \beta \in \{1,\dots,n\} , \quad h \in N_0 ,$$

$$\underset{s}{A} = (\underset{s}{A}_{\alpha h}) = (\nabla_h A_{\alpha h}) \in l^2 , \quad \underset{s}{B} = (\underset{s}{B}_{\alpha h}) = (\nabla_h B_{\alpha h}) \in l^2 ,$$

(i analogicznie do $\tilde{A}$ określamy $\underset{s}{\tilde{A}}$), przy warunku:

$$\underset{s}{g}(\tilde{A}) = \underset{s}{g}(A,B) = P - \sum_{h=0}^{\infty} (C_{\alpha h} A_{\alpha h} + D_{\alpha h} B_{\alpha h}) = 0 , \tag{18}$$

$$g(A,B) = P - (u|i)_L ,$$

gdzie:

$$U_{\alpha h} = C_{\alpha h} - jD_{\alpha h}, \quad D_{\alpha o} = 0, \quad \underset{s}{C} = (\underset{s}{C}_{\alpha h}) = (\nabla_h C_{\alpha h}) \in \underline{l}^2 \tag{19}$$

$$\underset{s}{D} = (\underset{s}{D}_{\alpha h}) = (\nabla_h D_{\alpha h}) \in \underline{l}^2$$

i np. zapis $(A_{\alpha h})$ oznacza ciąg pojedynczy utworzony, powiedzmy, przez uporządkowanie, przy kolejno wzrastających wskaźnikach $h \in N_o$, wskaźników α rosnących od 1 do n. Uporządkowanie to jest obojętne, albowiem szeregi występujące we wzorach (16) i (18) są bezwzględnie zbieżne.

Warunek konieczny dla istnienia ekstremum związanego podaje następujące twierdzenie ([8], s. 199, 200), dostosowane tu do rozpatrywanych odwzorowań.

Niech funkcja $g : \underline{l}^2 \to R$ będzie różniczkowalna w sposób ciągły w pewnym otoczeniu punktu $\underset{so}{\widetilde{A}}$, punkt $\underset{so}{\widetilde{A}}$ jest punktem regularnym zbioru $\underset{s}{\vec{g}}{}^{-1}(\{0\})$, funkcja $f : \underline{l}^2 \to R$ różniczkowalna w punkcie $\underset{so}{\widetilde{A}}$. Jeśli funkcja $\underset{s}{f}$ posiada w punkcie $\underset{so}{\widetilde{A}}$ ekstremum, to istnieje taka stała $\mu \in R$, że:

$$\underset{s}{f}'(\underset{so}{\widetilde{A}}) + \mu \underset{s}{g}(\underset{so}{\widetilde{A}}) = 0 , \tag{20}$$

gdzie symbol $'$ oznacza pochodną Frécheta ([8], s. 125, 126) - (zarówno przestrzeń l^2, jak i R posiadają strukturę banachowską).

Warunek wystarczający dla istnienia ekstremum związanego podaje z kolei twierdzenie ([8], s. 201).

Niech funkcje $\underset{s}{f}$ oraz $\underset{s}{g}$ będą w pewnym otoczeniu punktu $\underset{so}{A}$ dwukrotnie różniczkowalne w sposób ciągły, niech punkt ten będzie punktem regularnym zbioru $\underset{s}{\vec{g}}{}^{-1}(\{0\})$. Jeśli istnieje taka stała $\mu \in R$, że spełnione jest dla niej równanie (20), oraz taka stała $c \in R$, $c > 0$, że zachodzi:

$$(\underset{s}{f}''(\underset{so}{\widetilde{A}}) + \mu \underset{s}{g}''(\underset{so}{\widetilde{A}}))\,(\underset{s}{\widetilde{B}}, \underset{s}{\widetilde{B}}) \geqslant c \left\| \underset{s}{\widetilde{B}} \right\|_{l^2} \tag{21}$$

dla $\underset{s}{\widetilde{B}} \in \underset{s}{\vec{g}}{}^{-1}(\{0\})$,

to funkcja $\underset{s}{f}$ ma w punkcie $\underset{so}{\widetilde{A}}$ minimum związane.

Trzeba teraz zastosować oba przytoczone twierdzenia do zdefiniowanych wzorami (16) i (18) funkcji $\underset{s}{f}$ i $\underset{s}{g}$.

Zajmijmy się najpierw warunkiem koniecznym. Funkcje $\underset{s}{f}$, $\underset{s}{g}$ są oczywiście różniczkowalne w sposób ciągły dowolną liczbę razy w każdym punkcie swojej dziedziny. Zbiór $\vec{g}_s^{\,-1}(\{0\})$ jest zbiorem tych sobolewowskich współczynników prądowych z przestrzeni l^2, które przy zadanych sobolewowskich współczynnikach napięcia z tej przestrzeni realizują moc czynną P dostarczaną odbiornikowi. Dowolny punkt dziedziny funkcji g_s jest punktem regularnym, jeśli tylko nie wszystkie współczynniki $C_{\alpha h}$, $D_{\alpha h}$ są równe zeru – czyli wykluczamy przypadek, gdy $\|u\|_L = 0$, lub w sposób równoważny $\|u\|_W = 0$. Założenie to oczywiście przyjmujemy, gdyż oznacza ono, że w ogóle jakieś (niezerowe) napięcie zasila odbiornik. Wypisujemy z kolei równanie (20), a właściwie jego odpowiednik, gdzie zastosowano powiązanie współczynników Sobolewa ze zwykłymi Fouriera (wzór (11)). Mamy więc:

$$2\nabla_h^2 A_{\alpha h} - \mu C_{\alpha h} = 0\,, \tag{22}$$

$$2\nabla_h^2 B_{\alpha h} - \mu D_{\alpha h} = 0\,, \tag{23}$$

gdzie:

$$A_{h} = \frac{\mu}{2\nabla_h^2} C_{\alpha h}\,, \tag{24}$$

$$B_{\alpha h} = \frac{\mu}{2\nabla_h^2} D_{\alpha h}\,. \tag{25}$$

(Widać, że ponieważ: $\lambda_b > 0$, więc: $\nabla_h > 0$ dla dowolnego $h \in N_o$).
Podstawiając prawe strony wzorów (24), (25) do wzoru (18), mamy:

$$\frac{\mu}{2}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{\nabla_h^2}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(C_{\alpha h}^2 + D_{\alpha h}^2\right) = P\,, \tag{26}$$

skąd:

$$\mu = \frac{2P}{\sum\limits_{h=0}^{\infty}\frac{1}{\nabla_h^2}U_h^2}\,,\ \text{gdzie}\ U_h^2 = \sum_{\alpha=1}^{n}\left|U_{\alpha h}\right|^2 = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(C_{\alpha h}^2 + D_{\alpha h}^2\right). \tag{27}$$

Ze wzorów (17), (19), (24)–(26) otrzymujemy współczynniki $A_{o\alpha h}$, $B_{o\alpha h}$ podejrzane o realizację minimum związanego funkcji f_s i w ślad za tym współczynniki $I_{o\alpha h}$, które będziemy oznaczać teraz ${}_{a_s}I_{\alpha h}$ (sens wyboru takiego oznaczenia niebawem okaże się jasny). Więc:

$$ {}_{a_s}I_{\alpha h} = {}_eG_h \, U_{\alpha h} \, , \tag{28} $$

gdzie:

$$ {}_eG_h = \frac{P}{\nabla_h^2 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\nabla_k^2} U_k^2} \tag{29} $$

oraz czasowa funkcja prądu określona tymi współczynnikami jest następująca:

$$ {}_{a_s}i_\alpha = {}_eG_0 \, U_{\alpha 0} + \sqrt{2}\,\mathrm{Re} \sum_{h=1}^{\infty} {}_eG_h \, U_{\alpha h} \exp(jh\omega(\cdot)) \tag{30} $$

i widać, że ${}_ai \in W^1_{2,\lambda,n}(0;T)$.

Analizując z kolei warunek wystarczający widzimy, że lewa strona nierówności (21) przyjmuje postać:

$$ 2 \sum_{h=1}^{\infty} \nabla_h^2 \sum_{\alpha=1}^{\infty} \left| I_{\alpha h} \right|^2 , $$

prawa zaś jest podobna, tylko zamiast współczynnika 2 występuje c. Zatem wystarczy dobrać jakikolwiek współczynnik c spełniający nierówność $0 < c < 2$ i wówczas nierówność (21) będzie spełniona.

Wnioskujemy stąd, że funkcja prądu ${}_{a_s}i$ rzeczywiście minimalizuje funkcjonał $\| \ \|_W^2$ przy warunku ubocznym (15).

Otrzymany rezultat zilustrujemy pewnym przykładem. Mianowicie, porównanie prądu ${}_{a_s}i$, gdy wszystkie współczynniki λ_r spełniają nierówności $\lambda_r > 0$, z prądem ${}_ai$, dla ktprego mamy: $\lambda_0 = 1, \lambda_2 = \dots = \lambda_l = 0$, jest pouczające.
(Mamy wówczas równość $W^0_{2,(\lambda_0),n}(0;T) = L^2_n(0;T)$). Prąd ${}_ai$ minimalizuje jedynie straty na doprowadzeniu mocy do odbiornika, prąd ${}_{a_s}i$ - jak już wspomniano - stanowi kompromis pomiędzy minimalizacją tych strat i skażenia go wyższymi harmonicznymi. Ze wzoru (29) widać, że dla prądu ${}_ai$ mamy stały (niezależny od h) współczynnik:

$$ {}_eG = \frac{P}{\|u\|_L^2} \, , \tag{31} $$

a dla omawianego prądu ${}_{a_s}i$ współczynniki ${}_eG_h$ maleją szybko wraz ze wzrostem numeru harmonicznej:

$$ {}_eG_{h+1} < {}_eG_h \, , \tag{32} $$

(tym samym amplitudy harmonicznych tego prądu ${}_{a_s}i$ maleją w porównaniu do odpowiednich amplitud harmonicznych napięcia u), lecz zachodzi nierówność:

$$ {}_eG \leqslant {}_eG_0 \, . \tag{33} $$

Gdyby obliczyć moc czynną, jaką transportuje prąd ${}_{a_s}i$, to okaże się, że jest to całkowita moc czynna odbiornika - taka sama jak w przypadku prądu ${}_ai$. Pokazuje to prosty rachunek:

$$ (u|{}_{a_s}i)_L = \mathrm{Re} \sum_{h=0}^{\infty} U_{\alpha h} \, {}_eG_h^* \, U_{\alpha h} = P \sum_{h=0}^{\infty} \frac{U_h^2}{\nabla_h^2 \sum\limits_{k=0} \frac{1}{\nabla_k^2} U_k^2} = P. \tag{34} $$

Wyodrębniliśmy więc z całego prądu odbiornika i prąd ${}_{a_s}i$. Podobnie, jak w rozważaniach przeprowadzanych w przestrzeni $L_n^2(0;T)$, pojawia się teraz problem rozkładu prądu $i - {}_{a_s}i$ na dalsze składniki wraz z podaniem motywacji fizykalnej tego postępowania oraz problem zbadania wzajemnej prostopadłości tak otrzymanych składników, ważny ze względu na powiązanie każdego z nich z pojęciem pewnej mocy.

4. Rozkład prądu odbiornika

Prąd $i - {}_ai$ rozłożymy na następujące składniki:

$$ {}_{r_s}i_\alpha = \sqrt{2}\, \mathrm{Re} \sum_{h=1}^{\infty} jB_{\alpha\beta h} \, U_{\beta h} \exp(jh\omega(\cdot)), \tag{35} $$

$$ {}_{s_s}i_\alpha = (G_{\alpha\beta 0} - {}_eG_0 \delta_{\alpha\beta})U_{\beta 0} + \sqrt{2}\, \mathrm{Re} \sum_{h=1}^{\infty} (G_{\alpha\beta h} - {}_eG_h \delta_{\alpha\beta})U_{\beta h} \exp(jh\omega(\cdot)), \tag{36} $$

(δ jest macierzą jednostkową), lub też rozkładając składniki s_s^i na dwa dalsze mamy:

$$as_s^i = (G_{\alpha\beta o} - G_o\delta_{\alpha\beta})U_{\beta o} + \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{h=1}^{\infty}(G_{\alpha\beta h} - G_h\delta_{\alpha\beta})U_{\beta h}\exp(jh\omega(\cdot)), \tag{37}$$

$$d_s^i{}_\alpha = (G_o - \underset{e}{G_o})\delta_{\alpha\beta}U_{\beta o} + \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{h=1}^{\infty}(G_h - \underset{e}{G_h})\delta_{\alpha\beta}U_{\beta h}\exp(jh\omega(\cdot)). \tag{38}$$

Podstawą do sformułowania wzorów (35)-(38) jest wzór:

$$I_{\alpha h} = (G_{|\alpha|h} + jB_{|\alpha|h})U_{\alpha h}, \tag{39}$$

(przypominamy, że sumujemy tu podług wskaźnika $\beta \in \{1,...n\}$). Wzór (39) jest charakterystyczny dla odbiornika liniowego. W przypadku gdy, jak to już stwierdziliśmy, mamy do czynienia z jednym napięciem u i prądem i odbiornika, można również, przy założeniu $U_{\alpha h} \neq 0$ dla $\alpha \in \{1,...,n\}$, $h \in N_o$, przyjąć:

$$I_{\alpha h} = (G_{|\alpha|h} + jB_{|\alpha|h})U_{\alpha h}, \quad B_{\alpha o} = 0, \tag{40}$$

gdzie pionowe kreski, w które ujmujemy wskaźnik α, oznaczają zakaz sumowania podług niego. Wzór (40) staje się wówczas dla parametrów $G_{\alpha h}$, $B_{\alpha h}$ definicyjny. Gdyby dla pewnych wskaźników α, h był spełniony warunek $U_{\alpha h} = 0$, to wówczas funkcje prądów określone odpowiadającymi niezerowymi wyrażeniami $I_{\alpha h}$ należałoby przedstawić w postaci osobnego składnika dołączonego do wzorów (30), (35)-(38). Sytuacja taka może być spowodowana nieliniowością odbiornika.

Następnie mamy:

$$G_h = \frac{P_h}{U_h^2}. \tag{41}$$

$$P_h = \mathrm{Re}(U_{\alpha h}\, I_{\alpha h}^*). \tag{42}$$

<u>Uwaga 5</u>. Gdyby dla pewnego h zachodził przypadek $U_h = 0$, wówczas odpowiedni współczynnik (41) nie byłby zdefiniowany i nie występowałby we wzorach (37), (38). □

Jeśli założyć:

$$B_{\alpha\beta h} = B_{\beta\alpha h}, \quad \alpha,\beta \in \{1,\dots,n\}, \quad h \in N, \tag{43}$$

to wzór (42) możemy przedstawić:

$$P_h = \mathrm{Re}(G_{\alpha\beta h}\, U_{\alpha h}\, U^*_{\beta h}). \tag{44}$$

Łatwo zorientować się, że z założenia $u, i \in \underline{W}^1_{2,\lambda,n}(0;T)$ wynika wniosek:

$$a^i_s,\ r^i_s,\ as^i_s,\ d^i_s \in \underline{W}^1_{2,\lambda,n}(0;T).$$

Widać również, że zachodzą wzory:

$$i = a^i_s + r^i_s + s^i_s, \tag{45}$$

$$s^i_s = as^i_s + d^i_s. \tag{46}$$

Sens składnika a^i_s został omówiony. Potrzeba wyodrębnienia składnika r^i_s o takim samym kształcie, jak w przypadku analizy odbiornika dokonywanej w przestrzeni $L^2_n(0;T)$, opiera się na możliwości jego kompensacji, z dowolną dokładnością w sensie użytej normy, w klasie skończonych układów LC (ta intuicyjnie sformułowana hipoteza wymaga oczywiście dowodu). Natomiast zagadnienie kompensacji składników as^i_s, d^i_s (podobnie jak w przestrzeni $L^2_n(0;T)$ składników as^i, d^i) wymaga prześledzenia i stwierdzenia, w jakiej ewentualnie klasie elementów jest ona możliwa oraz jakie konsekwencje praktyczne to pociąga. Jest to jednak zagadnienie syntezy, którego nie będziemy tu poruszać. Składnik s^i_s pojawia się na skutek asymetrii fazowej i dyspersji częstotliwościowej konduktancji odbiornika. Można go rozłożyć na składnik as^i_s związany z asymetrią fazową tych konduktancji dla ustalonej harmonicznej i składnik d^i_s fazowo symetryczny, lecz związany z dyspersją częstotliwościową konduktancji.

Zajmiemy się teraz, w oparciu o wzór (14), wykazaniem ortogonalności dowolnej spośród par złożonych z różnych elementów zbioru $\{a^i_s, r^i_s, as^i_s, d^i_s\}$

$$(a^i_s | r^i_s)_W = \mathrm{Re}\sum_{h=1}^{\infty} -j\nabla^2_h\, G_{eh}\, U_{\alpha h}\, B_{\alpha\beta h}\, U^*_{\beta h}, \tag{47}$$

$$(a_s^i|as_s^i)_w = \mathrm{Re}\sum_{h=0}^{\infty}\nabla_h^2 \, {}_e G_h \, U_{\alpha h}\,(G_{\alpha\beta h} - G_h\delta_{\alpha\beta})U_{\beta h}^*, \tag{48}$$

$$(a_s^i|d_s^i)_w = \mathrm{Re}\sum_{h=0}^{\infty}\nabla_h^2 \, {}_e G_h \, U_{\alpha h}\,(G_h - {}_e G_h)U_{\alpha h}^*, \tag{49}$$

$$(r_s^i|as_s^i)_w = \mathrm{Re}\sum_{h=1}^{\infty} j\nabla_h^2 \, B_{\alpha\beta h}\, U_{\beta h}\,(G_{\alpha\gamma h} - G_h\delta_{\alpha\gamma})U_{\gamma h}^*, \tag{50}$$

$$(r_s^i|d_s^i)_w = \mathrm{Re}\sum_{h=1}^{\infty} j\nabla_h^2 \, B_{\alpha\beta h}\, U_{\beta h}\,(G_h - {}_e G_h)U_{\alpha h}^*, \tag{51}$$

$$(as_s^i|d_s^i)_w = \mathrm{Re}\sum_{h=0}^{\infty}\nabla_h^2(G_{\alpha\beta h} - G_h\delta_{\alpha\beta})U_{\beta h}(G_h - {}_e G_h)U_{\alpha h}^*. \tag{52}$$

W przekształceniach wzorów (47)-(52) wykorzystujemy definicję konduktancji ${}_e G_h$, pamiętając o uwadze 5. W przekształceniu wzoru (47) wykorzystujemy wzór (43) stwierdzając, że dowolnego $h \in N$ wyrażenie $B_{\alpha\beta h}\, U_{\alpha h}\, U_{\beta h}^*$ jest rzeczywiste i stąd:

$$(a_s^i|r_s^i)_w = 0\,. \tag{53}$$

Wykorzystując wzory (43), (44), (41), (15), (29), przekształcamy prawą stronę wzoru (48) otrzymując:

$$(a_s^i|as_s^i)_w = \frac{P^2}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\nabla_k^2}U_k^2} - \frac{P^2}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\nabla_k^2}U_k^2} = 0\,. \tag{54}$$

W przypadku wzoru (49), podobnie wykorzystujemy wzory (29), (41), (44), (15):

$$(a_s^i|d_s^i)_w = \frac{P^2}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\nabla_k^2}U_k^2} - \frac{P^2}{\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\nabla_k^2}U_k^2\right)^2}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{\nabla_h^2}U_h^2 = 0 \tag{55}$$

Jeśli dodatkowo, oprócz wzoru (43), założymy spełnienie warunku:

$$G_{\alpha\beta h}\, B_{\alpha\gamma h} = G_{\alpha\gamma h}\, B_{\alpha\beta h}\,, \quad \alpha,\beta \in \{1,\dots,n\}\,, \quad h \in N \tag{56}$$

to idea wykazania wzoru:

$$(r_s^i | as_s^i)_w = 0 \tag{57}$$

pozostaje taka sama jak w przypadku wzoru (53). To samo założenie (43) wystarcza do wykazania wzoru:

$$(r_s^i | d_s^i)_w = 0 \tag{58}$$

(znów w podobny sposób jak w przypadku wzoru (53)).

Wreszcie wykorzystując te same wzory (29), (41), (44), mamy:

$$(as_s^i | d_s^i)_w = \mathrm{Re}\sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 (G_h\, G_{\alpha\beta h}\, U_{\alpha h}^{*}\, U_{\beta h} -$$

$$- \underset{e}{G}_h\, G_{\alpha\beta h}\, U_{\alpha h}^{*}\, U_{\beta h} - G_h^2\, U_{\alpha h}\, U_{\alpha h}^{*} + \underset{e}{G}_h\, G_h\, U_{\alpha h}\, U_{\alpha h}^{*}) =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \left(\nabla_h^2 \frac{P_h^2}{U_h^2} - \frac{P\, P_h}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\nabla_k^2} U_k^2} - \nabla_h^2 \frac{P_h^2}{U_h^2} + \frac{P\, P_h}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\nabla_k^2} U_k^2}\right) = 0 \tag{59}$$

W przypadku rozważania jednego stanu napięciowo-prądowego odbiornika i przyjęcia w miejsce wzoru (39) wzoru (40), warunki (43), (56) są automatycznie spełnione. Spełnione one są oczywiście również w przypadku n=1.

Czyli mamy:

$$a_s^i \underset{w}{\perp} r_s^i\,, \quad a_s^i \underset{w}{\perp} as_s^i\,, \quad a_s^i \underset{w}{\perp} d_s^i\,, \quad r_s^i \underset{w}{\perp} as_s^i\,, \quad r_s^i \underset{w}{\perp} d_s^i\,, \quad as_s^i \underset{w}{\perp} d_s^i \tag{60}$$

i stąd oczywiście w przypadku rezygnacji z rozkładu s_s^i na składniki as_s^i, d_s^i:

$$a_s^i \underset{w}{\perp} s_s^i\,, \quad r_s^i \underset{w}{\perp} s_s^i\,. \tag{61}$$

Do tej pory zajmowaliśmy się prądem i pewnego indywidualnego odbiornika. Wyobraźmy sobie teraz, że mając zadaną pewną funkcję napięcia $u \in \underline{W}^1_{2,\lambda,n}(0;T)$, o którym zakładamy, że:

$$U_{\alpha h} \neq 0 \ , \quad \alpha \in \{1,\dots,n\} \ , \qquad h \in N_0 \tag{62}$$

dysponujemy wszelkimi odbiornikami realizującymi dowolne funkcje prądu $i \in \underline{W}^1_{2,\lambda,n}(0;T)$. (Nazwa odbiornik jest tu cały czas umowna, gdyż niektóre z nich mogą wydawać moc czynną). Opisaną sytuację możemy osiągnąć dobierając ciągi parametrów $(G_{\alpha\beta h})$, $(B_{\alpha\beta h})$ (lub $(G_{\alpha h})$, $(B_{\alpha h})$ - sprawiające, że warunki (43), (56) nie krępują wówczas ich doboru) w ten sposób, by współczynniki $\tilde{\underset{s}{A}}$ dla tych funkcji prądu względem układu ortonormalnego (6) były dowolnymi elementami zbioru $\underline{l}^2$ (po to też potrzebne jest założenie (62)). Zauważmy, że wszystkie uzyskane w ten sposób funkcje prądów $_a i_s$ tworzą jednowymiarową podprzestrzeń liniową przestrzeni $W^1_{2,\lambda,n}(0;T)$. Jednowymiarowość ta wynika z faktu, iż wszystkie współczynniki $\underset{s}{G_h}$ różnią się, dla ustalonego numeru h, stałą P. Można dowieść, że jest to podprzestrzeń domknięta. Jest więc ona przestrzenią Hilberta. Oznaczamy ją symbolem H_a. Analogicznie dowodzimy, że funkcje prądów $_r i_s$ tworzą podprzestrzeń Hilberta H_r, prądów $_s i_s - H_s$, prądów $_{as} i_s - H_{as}$, prądów $_d i_s - H_d$ (są one nieskończenie wymiarowe). Ponieważ ww. przestrzenie są parami ortogonalne (fakt ten dowodzimy bardzo podobnie jak wzory (53), (54), (55), (57), (58), (59), trzeba jednak pamiętać, że poszczególne składniki, będące elementami ortogonalnych podprzestrzeni, są teraz zdefiniowane przez różne ciągi parametrów, tzn.: $(\underset{1}{G}_{\alpha\beta h})$, $(\underset{1}{B}_{\alpha\beta h})$ lub $(\underset{2}{G}_{\alpha\beta h})$, $(\underset{2}{B}_{\alpha\beta h})$) oraz dowolna funkcja prądu $i \in \underline{W}^1_{2,\lambda,n}(0;T)$ jest przedstawialna za pomocą wzorów (45), (46) w sposób jednoznaczny (na mocy twierdzenia o rzucie ortogonalnym - por. pozycję [7], s. 69, 70), więc przestrzeń Hilberta $W^1_{2,\lambda,n}(0;T)$ rozkładamy sumę prostą ([7], s. 15) odpowiednich podprzestrzeni parami ortogonalnych. Czyli:

$$W^1_{2,\lambda,n}(0;T) = H_a \oplus H_r \oplus H_s \ , \tag{63}$$

$$H_s = H_{as} \oplus H_d , \tag{64}$$

$$H_a \perp H_r, \quad H_a \perp H_{as}, \quad H_a \perp H_d, \quad H_r \perp H_{as}, \quad H_r \perp H_d, \quad H_{as} \perp H_d, \quad (H_a \perp H_s, \quad H_r \perp H_s). \tag{65}$$

Zajmowanie się nie indywidualnymi prądami, a całymi podprzestrzeniami Hilberta jest racjonalne choćby z tego względu, że przy zadanym napięciu u, podprzestrzeń H_r jest tą, która składa się z prądów kompensowalnych, z dowolną dokładnością w sensie normy, skończonymi układami LC. Zauważmy, że gdyby nie założyć spełnienia warunku (62) (tzn. dla pewnego wskaźnika h_o zachodziłyby równości $U_{\alpha h_o} = 0$ dla dowolnych wskaźników α) - wzór (przy żadnym wyborze parametrów $(G_{\alpha\beta h})$, $(B_{\alpha\beta h})$) nie byłby spełniony i w przedstawionej sumie prostej mielibyśmy jeszcze jeden składnik (ortogonalny do pozostałych), dotyczący prądów nierealizowalnych w liniowych odbiornikach (w stanie ustalonym) przy tak zadanych napięciach.

5. Moce

Z chwilą wyprowadzenia wzorów (45), (46), (60), (61) zagadnienie zdefiniowania odpowiednich mocy staje się standardowe. Natychmiastową konsekwencją tych wzorów jest fakt:

$$\|i\|_w^2 = \|a_s i\|_w^2 + \|r_s i\|_w^2 + \|s_s i\|_w^2 , \tag{66}$$

$$\|s_s i\|_w^2 = \|as_s i\|_w^2 + \|d_s i\|_w^2 . \tag{67}$$

Mnożąc obie strony wzorów (66), (67) przez $\|u\|_w^2$ i wprowadzając definicje:

$$_sP_a = \|u\|_w \|a_s i\|_w , \tag{68}$$

$$_sQ_r = \|u\|_w \|r_s i\|_w , \tag{69}$$

$$_sQ_s = \|u\|_w \|s_s i\|_w , \tag{70}$$

$$_sQ_{as} = \|u\|_w \|as_s i\|_w , \tag{71}$$

$$_sQ_d = \|u\|_w \|d_s i\|_w , \tag{72}$$

$$_sS_m = \|u\|_w \|i\|_w , \tag{73}$$

mamy:

$$_sS_m = {_sP_a^2} + {_sQ_r^2} + {_sQ_s^2} , \tag{74}$$

$$_sQ_s^2 = {_sQ_{as}^2} + {_sQ_d^2} . \tag{75}$$

Wprowadzone moce nazywamy kolejno aktywną, reaktancyjną, rozproszenia, asymetrii, desperaji oraz pozorną w sensie Sobolewa. Interpretacja prądów przenosi się na interpretację mocy. Sens geometryczny wzorów (74), (75) jest jasny. W ślad za zdefiniowanymi mocami można podać definicje wielu współczynników mocy, czego nie będziemy tu czynić.

Interesujące jest zagadnienie zasad zachowania dla zdefiniowanych mocy. Przypuśćmy, że odbiorniki będziemy łączyć równolegle, rozumiejąc przez to łączenie ze sobą ich zacisków o numerach α od 1-go do m-go odbiornika. Wówczas na mocy I prawa Kirchhoffa mamy:

$$i = \underset{1}{i} + \dots + \underset{m}{i}, \quad \underset{1}{i}, \dots, \underset{m}{i}, \quad i \in \underline{W}^1_{2,\lambda,n}(0;T). \tag{76}$$

Przypuśćmy, że m=2. Z aksjomatów dowolnej przestrzeni unitarnej wynika nierówność:

$$\| i \|_w < \| \underset{1}{i} \|_w + \| \underset{2}{i} \|_w . \tag{77}$$

Nierówność ta przechodzi w równość (przy założeniu $\underset{1}{i}$, $\underset{2}{i} \neq 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy ([7], s. 64) : $\underset{2}{i} = c \in R$, $c > 0$. Sytuacja taka nie musi zachodzić dla żadnego z prądów $\underset{a}{i}_s$, $\underset{r}{i}_s$, $\underset{s}{i}_s$, $\underset{as}{i}_s$, $\underset{d}{i}_s$, i; za wyjątek można uznać prąd $\underset{a}{i}_s$, gdy: $P > 0$. Mnożąc obustronnie nierówność (77) przez $\| u \|_W$ ($\| u \|_W = 0$) widzimy, że zdefiniowane moce nie są zachowawcze.

<u>Uwaga 6</u>. Obserwując negatywny wynik, dotyczący zasady zachowania wprowadzonych mocy, można spytać, czy są jakieś definicje innych mocy oparte na używanej przestrzeni Sobolewa, sprawiające, że moce te zadość czynią zasadzie zachowania? Konstrukcja takich mocy opiera się na pojęciu sobolewowskiego iloczynu skalarnego i I prawie Kirchhoffa dla odbiorników połączonych równolegle (wobec lokalnego postawienia zagadnień optymalizacyjnego i mocy rozpatrujemy tylko takie połączenia). Wystarczy zauważyć, że jeśli określimy parametry prądów $\underset{\varkappa}{i}_s$ o charakterze admitancji jako sumy parametrów odpowiednich prądów częściowych $\underset{\varkappa}{i}_{sj}$, $\varkappa \in \{a, r, as, d\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, to mamy:

$$\varkappa^i_s = \varkappa^i_{s1} + \dots + \varkappa^i_{sm}, \tag{78}$$

gdzie:

$$\underset{j}{i} = \sum_{\varkappa} \varkappa^i_{sj}, \quad i = \sum_{\varkappa} \varkappa^i_s . \tag{79}$$

Obie strony równań (45), (46), (78) mnożymy lewostronnie skalarnie przez u i otrzymujemy:

$$(u|_{\chi_s} i)_w = (u|_{\chi_{s1}} i)_w + \dots + (u|_{\chi_{sm}} i)_w \; , \tag{80}$$

$$(u|i)_w = (u|_1 i)_w + \dots + (u|_m i)_w \; . \tag{81}$$

Niestety, te zachowawcze moce nie wiążą się z prostopadłościanem mocy (wzory (66), (67)) uzyskanym w oparciu o rozważany problem optymalizacyjny.

Dla pewnej orientacji w wielkościach tych mocy podajemy, przykładowo, dla prądów całkowitych, proste do wyprowadzenia wzory (w oparciu o wzory (13), (14), (29), (41), (30), (35), (37), (38), (72), (68)):

$$(u|_{a_s} i)_w = \frac{\sum\limits_{h=0}^{\infty} U_h^2}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{U_k^2}{\nabla_k^2}} \, P \; , \tag{82}$$

$$(u|_{r_s} i)_w = 0, \quad (u \underset{w}{\perp} r_s i) \; , \tag{83}$$

$$(u|_{as_s} i)_w = 0, \quad (u \underset{w}{\perp} as_s i) \; , \tag{84}$$

$$(u|_{d_s} i)_w = \sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 P_n - \frac{\sum\limits_{h=0}^{\infty} U_h^2}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{U_k^2}{\nabla_k^2}} \tag{85}$$

$$(u| \, i)_w = \sum_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 P_h \; , \tag{86}$$

$$
{}_{s}P_{a} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{h=0}^{\infty} \nabla_h^2 U_h^2}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{U_k^2}{\nabla_k^2}}}\,|P|, \tag{87}
$$

$$
{}_{s}Q_{d} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \nabla_k^2 U_k^2}\,\sqrt{\sum_{h=0}^{\infty} \frac{P_h^2}{\frac{U_h^2}{\nabla_h^2}} - \frac{P^2}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{U_k^2}{\nabla_k^2}}}. \tag{88}
$$

Jak widać ze wzorów (83), (84), równość (80) dla $\varkappa = r$ lub $\varkappa = as$ stanowi równość $0 = 0$.

6. Podsumowanie

Przedstawiona praca pokazuje, że rzeczywiście norma w przestrzeni Sobolewa $W^{1}_{2,\lambda,n}(0;T)$ określona wzorem (1) za pomocą iloczynu skalarnego (wzór (4)) spełnia rolę wskaźnika ustalającego kompromis pomiędzy oceną strat na doprowadzeniu mocy czynnej do odbiornika a zawartością wyższych harmonicznych w jego prądach. Minimalizacja kwadratu tej normy doprowadza do wyróżnienia funkcji prądu ${}_{a}i_{s}$, posiadającej w stosunku do widma funkcji napięcia u stłumione wyższe harmoniczne (wzór (32)). Podany jest rozkład całkowitej funkcji prądu i na cztery składowe. Oprócz składowej ${}_{a}i_{s}$ występuje składowa ${}_{r}i_{s}$, związana z możliwością kompensacji układami LC, oraz składowa ${}_{as}i_{s}$, ${}_{d}i_{s}$.
W oparciu o nie zdefiniowane są odpowiednie moce. W ślad za tym powinny pójść rozważania pozwalające stwierdzić, ile z pozostałego prądu $i - {}_{a}i$ i z pomocą jakich środków da się skompensować. Jest to, jak wspomnieliśmy, zagadnienie syntezy nie rozpatrywane tutaj.

Porównanie rozważań zamieszczonych w niniejszej pracy oraz w artykule [3], wskazuje na pewne wspólne cechy postępowania w procesie definiowania nowych mocy, związanych z pojedynczym odbiornikiem (a nie z całą siecią). Centralnym zagadnieniem jest wybór, dla danego typu przebiegów napięciowych i prądowych oraz układu o pewnej liczbie zacisków, odpowiedniej przestrzeni Hilberta. Odpowiedniej - to znaczy dysponującej normą, której kwadrat chcemy zminimalizować, wyróżniając w ten sposób pożądany prąd, zapewniający jednocześnie dostarczenie określonej mocy czynnej do odbiornika. Następnie wykorzystujemy iloczyn skalarny naszej przestrzeni Hilberta, rozkładając funkcję całkowitego prądu odbiornika na pewną liczbę parami prostopadłych składowych, pomiędzy którymi jest oczywiście funkcja prądu będąca rozwiązaniem powyższego problemu optymalizacyjnego. Składowe te powinny posiadać jasną motywację fizykalną, najlepiej związaną z możliwościami syntezy w takiej lub innej klasie elementów i mającej na celu kompensację niepożądanego prądu. Można też stosować, w sposób opisany w pracy, operację rozkładu ww. przestrzeni Hilberta na sumę prostą parami prostopadłych podprzestrzeni. Po dokonaniu tego definicja odpowiednich mocy jest już zwykłą formalnością. Natomiast otwartym zagadnieniem jest znalezienie tych przestrzeni Hilberta, które mogłyby nastąpić z punktu widzenia nakreślonych celów przestrzenie $L_n^2(0;T)$, $W^1_{2,\lambda,n}(0;T)$. Jest rzeczą znamienną, że problem optymalizacyjny rozważany jest nie w ww. przestrzeniach, a w skojarzonej z nimi przestrzeni l^2 z użyciem wyróżnionych zamkniętych baz (układów ortonormalnych). Jest to w przestrzeni $L_n^2(0;T)$ zwykła baza trygonometryczna, a w przestrzeni $W^1_{2,\lambda,n}(0;T)$ - baza bardzo podobna do niej. Uprzywilejowanie tych baz jest faktem psującym estetykę rozumowania oraz sugerującym pewne tylko metody kompensacji niepożądanych prądów w dziedzinie częstotliwościowej. Również otwartym zagadnieniem jest skonstruowanie właściwego wskaźnika jakości, jego optymalizacja oraz kompensacja pewnych prądów w sensie globalnym w całej sieci.

LITERATURA

[1] Alexiewicz A.: Analiza funkcjonalna. PWN, Warszawa 1969.

[2] Brodzki M.: Kilka uwag o matematycznej naturze wielkości fizykalnych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 100, Gliwice 1985.

[3] Brodzki M.,Pasko M.: Definicje pewnych mocy dla układów wielozaciskowych o przebiegach odkształconych. Rozprawy Elektrotechniczne (w druku).

[4] Brodzki M., Pasko M., Umińska-Bortliczek M., Walczak J.: Propozycja nowego wskaźnika jakości energii elektrycznej dla układów dwuzaciskowych z przebiegami odkształconymi. XI SPETO. Wisła 1988.

[5] Brodzki M., Pasko M., Umińska-Bortliczek M., Walczak J.: Ortogonalny Rozkład prądu odbiornika dwuzaciskowego, zasilanego napięciem odkształconym, w przestrzeni Sobolewa. XI SPETO. Wisła 1988.

[6] Czarnecki L.: Ortogonalny rozkład prądu źródła napięcia odkształconego zasilającego asymetryczny, nieliniowy odbiornik trójfazowy. Prace Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, X-SPETO, Wisła 1987.

[7] Kołodziej W.: Wybrane rozdziały analizy matematycznej. PWN, Warszawa 1970.

[8] Maurin K.: Analiza. Cz. I. PWN, Warszawa 1971.

[9] Nowomiejski Z.: Moc i energia elektryczna w układach elektrycznych o dowolnych ustalonych przebiegach. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 15, Gliwice 1963.

[10] Sikorski R.: Funkcje rzeczywiste. T. I. PWN, Warszawa 1958.
[11] Sikorski R.: Rachunek różniczkowy i całkowy. PWN, Warszawa 1977.
[12] Szmydt Z.: Transformacja Fouriera i równania różniczkowe liniowe. PWN, Warszawa 1972.
[13] Yosida K.: Functional analysis. Springer-Verlag, Berlin 1965.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Stanisław Krzemiński

Wpłynęło do redakcji dnia 30 maja 1988 r.

МЕТОД ОЦЕНКИ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ТОКОВ МНОГОЗАЖИМНЫХ ПРИЕМНИКОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОНЯТИЯ ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА

Р е з ю м е

В работе определен показатель качества несинусоидальных токов многозажимных приемников, определяющий компромисс между оценкой потерь активной мощности при подведений к одному приемнику и оценкой деформации (наличие высших гармоник) токов приемника.

Этот показатель определен как квадрат нормы специально сконструированого пространства Соболева. Решена проблема минимализации этого показателя при ограничении равенства относящегося к подведению заданной активной мощности к приемнику.

Далее в работе произведено разложение токов многозажимного приемника на четыре взаимно ортогональные составляющие, представляя их физическую интерпретацию.

Введены новые определения мощности, связанные с полученными ортогональным разложением токов приемника.

THE METHOD OF EVALUATING DISTORTED CURRENTS OF MULTITERMINAL RECEIVERS APPLYING SOBOLEV'S NOTION OF SPACE

S u m m a r y

The quality coefficient of distorted currents of multiterminal receivers, determining a compromise between an assessment of the active power losses at the lead to a single receiver and evaluation of the distortions (the higher harmonics contents) of the receiver currents, has been defined.

The above coefficient has been determined as a square of the norm of a certain, specially constructed Sobolev's space.

The problem of minimization of this coefficient, with equality limitation referring to the application of the assigned active power has been solved.

A distribution of the currents of a multiterminal receiver into four reciprocally orthogonal components has been carried out, and their physical interpretation has been given.

New definitions of power associated with the obtained orthogonal distribution of the receiver currents have been introduced.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: ELEKTRYKA z. 113 Nr kol. 983

Marian PASKO

Janusz WALCZAK

METODA SYNTEZY UKŁADÓW KOMPENSACJI SKŁADOWEJ REAKTANCYJNEJ PRĄDU ODBIORNIKA DWUZACISKOWEGO ZASILANEGO NAPIĘCIEM ODKSZTAŁCONYM

Streszczenie. W pracy opracowano metodę syntezy układów kompensacji składowej reaktancyjnej ($_r i$) prądu odbiornika dwuzaciskowego zasilanego napięciem odkształconym. Wykazano, że spełnione są warunki konieczne i wystarczające realizowalności układu kompensacji w postaci dwójników LC.
Układ kompensacji, w ogólnym przypadku składa się z dwóch dwójników LC opisanych funkcjami reaktancyjnymi n-tego stopnia i kompensuje n-1 harmonicznych składowej reaktancyjnej prądu odbiornika.

1. Wprowadzenie

Problematyka obejmująca zagadnienia energetyczne obwodów jedno i wielofazowych z przebiegami odkształconymi wiąże się ściśle z problemem minimalizacji wskaźników jakości tych przebiegów. Minimalizacja wskaźników jakości przebiegów odkształconych, definiowanych w postaci pewnych funkcjonałów w przestrzeniach Hilberta $L^2(0;T)$, $L^2_h(0;T)$, $W^1_{2,\alpha}(0;T)$, $W^1_{2,\alpha,n}(0;T)$, umożliwia [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9] rozkład prądów odbiornika na wzajemnie ortogonalne składowe:

- aktywną odpowiedzialną za transport całkowitej mocy czynnej do odbiornika i minimalizującą wybrany wskaźnik jakości prądów odbiornika,
- rozproszenia, związaną z częstotliwościową fazową dyspersją konduktancji odbiornika wokół pewnych konduktancji zastępczych,
- reaktancyjną $_r i$, określoną wzorem (dla odbiornika dwuzaciskowego):

$$_r i = \sqrt{2}\,\mathrm{Re} \sum_{h=1}^{\infty} j\, B_h\, \underline{U}_h \exp jh\omega(\cdot), \tag{1}$$

gdzie:

B_h - susceptancja odbiornika dwuzaciskowego dla kolejnej harmonicznej,

$\underline{U}_h$ - współczynniki szeregu Fouriera (w postaci symbolicznej) funkcji napięcia u zasilającego odbiornik, określone wzorem:

$$\underline{U}_h = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T u(t)\exp(-jh\omega t)dt, h\in\{1,2,\ldots,\} \quad . \tag{2}$$

Postać składowej reaktancyjnej (1) prądu odbiornika w odróżnieniu od dwóch pozostałych składowych nie zależy od tego, czy przeprowadzimy minimalizację funkcjonału $(\| \quad \|_{L^2(0;T)})^2$ czy też funkcjonału $(\| \quad \|_{W^1_{2,\alpha}(0;T)})^2$ [4], [7], [8], w przypadku odbiorników dwuzaciskowych oraz minimalizację funkcjonałów $(\| \quad \|_{L^2_n(0;T)})^2$ $(\| \quad \|_{W^1_{2,\alpha,n}(0;T)})^2$ w przypadku odbiorników wielozaciskowych [2], [3], [9], przy tym samym ograniczeniu równościowym na zadaną moc czynną doprowadzaną do odbiornika.

Ze wzoru (1) wynika, że składową reaktancyjną prądu odbiornika dwuzaciskowego można kompensować dwójnikiem reaktancyjnym LC o skończonej liczbie elementów, gdyż w tym celu wystarczy (dla skończonej liczby harmonicznych) zaprojektować dwójnik, którego susceptancje będą równe co do wartości i przeciwne co do znaku w stosunku do susceptancji odbiornika B_h dla pewnej zadanej liczby harmonicznych.

Kompensacja taka zachodzi z dowolną dokładnością w sensie normy przyjętej przestrzeni funkcyjnej, tzn.:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n\in N} \bigwedge_{u\in L^2(0;T)} \left\| r^i - r^{i^n} \right\|_{L^2(0;T)} < \varepsilon \, , \tag{3}$$

lub

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n\in N} \bigwedge_{u\in W^1_{2,\alpha}(0;T)} \left\| r^i - r^{i^n} \right\|_{W^1_{2,\alpha}(0;T)} < \varepsilon \, , \tag{4}$$

gdzie:

$$r^{i^n} = \sqrt{2}\, \mathrm{Re} \sum_{h=1}^{n} j\, B_h\, \underline{U}_h \exp jh\omega(\cdot). \tag{5}$$

Kompensacja składowej reaktancyjnej prądu odbiornika zwiększa wartość współczynnika mocy źródła zasilającego [7] i zmniejsza straty mocy czynnej na doprowadzeniu do odbiornika [3]. Z powyższych stwierdzeń wynika potrzeba i celowość opracowania metod syntezy układów kompensacyjnych składowej reaktancyjnej prądu odbiornika, złożonych ze skończonej liczby elementów LC. Zagadnienie to, nierozwiązalne w sposób ogólny do chwili obecnej [7], [8], zostało podjęte w niniejszym artykule.

2. Formalizacja problemu syntezy i jego analiza

W teorii syntezy układów liniowych proces syntezy przeprowadza się [1], [10], [13] z reguły w dwóch, kolejno po sobie następujących etapach:

- etapie aproksymacji, polegającym na określeniu transmitancji (immitancji) dwójnika spełniającej warunki jego realizowalności fizycznej,
- etapie przyporządkowania danej transmitancji (immitancji) konkretnego modelu dwójnika,
- analiza uzyskanego modelu fizycznego pod względem wrażliwości i realizacji technicznej.

W pracy zagadnienie syntezy sprowadza się do rozwiązania pierwszego z wymienionych etapów, gdyż do chwili obecnej nie znaleziono [7] jego ogólnego rozwiązania.
Drugi etap syntezy jest dobrze znany w literaturze dotyczącej teorii syntezy, np. [1], [10], [13], i nie będzie w pracy rozpatrywany.
Sformalizujmy obecnie problem syntezy układu kompensacji składowej reaktancyjnej prądu odbiornika (w sensie omówionym we wstępie pracy) w postaci ogólnej.

Problem syntezy I (PSI)

Wyznaczyć funkcję reaktancyjną o postaci:

$$B_r : R \longrightarrow R , \tag{6}$$

gdzie:

$$B_r(\omega) = \frac{A(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2)\ldots.(\omega^2 - \omega_{2n-1}^2)}{\omega(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2)\ldots.(\omega^2 - \omega_{2n}^2)} = \frac{A\prod\limits_{i=1}^{n}(\omega^2 - \omega_{2i-1}^2)}{\omega\prod\limits_{i=1}^{n}(\omega^2 - \omega_{2i}^2)}, \tag{7}$$

$A \in R$, $n \in N$,

$$\omega_i = \begin{cases} \text{dla} \quad i = 2k-1, \ k \in N, \text{ zera funkcji reaktancyjnej,} \\ \text{dla} \quad i = 2k, \ k \in N, \text{ bieguny funkcji reaktancyjnej,} \end{cases}$$

której zera i bieguny posiadają własność określoną wzorem:

$$0 \leqslant \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \ldots. < \omega_{2n-1} < \omega_{2n}, \tag{8}$$

przy założeniu, że dane są wartości tej funkcji:

$$B_r(\omega)\Big|_{\omega=\omega_h} = B_r(\omega_h') = - B_h\,, \tag{9}$$

gdzie:

B_h - susceptancja odbiornika (por. wzór (1)),

$\omega_h = h\omega, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$,

w skończonej liczbie punktów ω_h, $h\in\{1,2,\ldots m\}$.

Funkcja określona wzorem (7) spełnia warunek:

$$\lim_{\omega\to 0^+} B_r(\omega) = -\infty\,, \qquad \lim_{\omega\to\infty} B_r(\omega) = 0\,. \tag{10}$$

Przyjęcie funkcji określonej wzorem (7), która spełnia warunek (10), stanowi dodatkowe ograniczenie możliwych realizacji struktur dwójników LC. Wiąże się ono z koniecznością kompensacji składowej reaktancyjnej prądu odbiornika (z dowolną dokładnością w sensie wprowadzonej normy por. wzory (3), (4)), gdyż wtedy:

$$\lim_{h\to\infty} |B_h||U_h| = 0 \quad \text{gdy} \quad \sup_{h\in N}\{|U_h|\} = C\,, \tag{11}$$

a zatem liczba wprowadzonych przez dwójnik kompensacyjny wyższych harmonicznych (do prądu odbiornika) maleje ze wzrostem indeksu h.

Przedstawiony problem syntezy (PSI) sprowadza się zatem do rozwiązania układu równań algebraicznych nieliniowych o postaci:

$$B_r(h\omega)h\omega \prod_{i=1}^{n} ((h\omega)^2 - \omega_{2i}^2) = A \prod_{i=1}^{n} ((h\omega)^2 - \omega_{2i-1}^2), \tag{12}$$

gdzie:

$B_r(h\omega)$ - jest znane i spełnia zależność określoną wzorem (9)

względem niewiadomych A, $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{2n-1}, \omega_{2n}$, przy czym niewiadome ω_i ($i\in\{1,2,\ldots,m\}$) winny spełniać warunek określony wzorem (8). Układ równań (12) można zapisać w sposób następujący:

$$A_h \prod_{i=1}^{n} (a_h - x_{2i}) = \prod_{i=1}^{n} (a_h - x_{2i-1})\,, \tag{13}$$

gdzie:

$$h \in \{1,\dots,2m\},$$

$$A_h = -\frac{B_h(h\omega)h\omega}{A}, \quad a_h = (h\omega)^2, \quad x_i = \omega_i^2 .$$

Rozwiązanie układu równań (13) względem zmiennych $x_i (i \in \{1,\dots,m\})$ pozwala wyznaczyć zera i bieguny funkcji wymiernej o postaci określonej wzorem (7). Funkcja ta będzie funkcją reaktancyjną, gdy będzie spełniony warunek (8).

Rozwiązanie postawionego problemu (PSI) wymaga więc:

- wykazania istnienia rozwiązania silnie nieliniowego układu równań (13) wraz z konstrukcją efektywnej procedury rozwiązywania tego układu równań, zawierającej sposób doboru punktu startowego (przybliżenia początkowego),
- wykazania, że przy odpowiednio dobranym punkcie startu rozwiązania wymienionego układu równań spełniają warunek określony wzorem (8).

Po wykazaniu powyższego, syntezę konkretnego modelu dwójnika kompensacyjnego przeprowadza się znanymi metodami, np. Cauera, Fostera [1], [10] itp.

Ponieważ rozwiązanie postawionego problemu (PSI) jest rzeczą bardzo trudną [17], sprowadźmy omawiany problem syntezy do postaci umożliwiającej wykorzystanie teorii równań liniowych, następnie do jego rozwiązania. Pozwoli to ominąć trudności związane z analizą istnienia rozwiązań układu równań (13) oraz problemy związane z doborem odpowiedniego punktu startowego (przybliżenia początkowego rozwiązania), co ma duże znaczenie przy praktycznym rozwiązywaniu wymienionego układu równań.

Funkcję reaktancyjną określoną wzorem (7) i spełniającą warunek (8) można przedstawić w następującej postaci:

$$B_r(\omega) = \frac{L(\omega^2)}{M(\omega^2)} = H\,\frac{a_{2n}\omega^{2n} - a_{2n-2}\omega^{2n-2} + a_{2n-4}\omega^{2n-4} - \dots - a_2\omega^2 + a_o}{\omega(a_{2n+1}\omega^{2n} - a_{2n-1}\omega^{2n-2} + \dots - a_3\omega^2 + a_1)}, \quad (14)$$

gdzie:

$$\omega, \quad a_k \in R^+, \quad k \in \{0,1,\dots,2n+1\}, \quad n \in N, \quad H = -1,$$

co pozwala na sformułowanie problemu syntezy (PSI) w następujący sposób.

<u>Problem syntezy II (PS II)</u>

Wyznaczyć współczynniki wielomianów $L(\omega^2)$, $M(\omega^2)$ określonych wzorem (14) mając dane wartości funkcji (14) w m ($m \in N$) punktach.

Zera i bieguny tak uzyskanej funkcji wymiernej winny być tak dobrane, aby funkcja wymierna (14) była funkcją reaktancyjną.

Rozwiązanie problemu syntezy (PSII) sprowadza się do rozwiązania układu równań liniowych o postaci:

$$\begin{bmatrix} -B_1\omega_1^{2n+1}, & -H\omega_1^{2n}, & B_1\omega_1^{2n-1}, & H\omega^{2n-2}, & \dots, & -B_1\omega_1, & -H \\ -B_2\omega_2^{2n+1}, & -H\omega_2^{2n}, & B_2\omega_2^{2n-1}, & H\omega_2^{2n-2}, & \dots, & -B_2\omega_2, & -H \\ \vdots & & & & & & \\ -B_h\omega_h^{2n+1}, & -H\omega_h^{2n}, & B_h\omega_h^{2n-1}, & H\omega_h^{2n-2}, & \dots, & -B_h\omega_h, & -H \\ \vdots & & & & & & \\ -B_m\omega_m^{2n+1}, & -H\omega_m^{2n}, & B_m\omega_m^{2n-1}, & H\omega_m^{2n-2}, & \dots, & -B_m\omega_m, & -H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2n+1} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = 0 \qquad (15)$$

gdzie:

$a_k > 0$; $B_h \in R$, $H = -1$,

B_h – susceptancja odbiornika dla kolejnej harmonicznej $(h \in \{1,2,\dots,m\}$ por. wzór (1)),

oraz do wykazania, że uzyskana funkcja wymierna (14) jest funkcją reaktancyjną.

Przyjmijmy, że prąd reaktancyjny odbiornika $r^i(1)$ posiada pełne widmo harmonicznych, więc:

$$\omega_h = h\omega, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}; \qquad h \in \{1,2,\dots,m\}. \qquad (16)$$

Uwzględniając wzór (16) we wzorze (15), możemy ten wzór zapisać w postaci macierzowej:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{0}\ . \qquad (17)$$

gdzie:

$$\mathbf{X} = \left[a_{2n+1}\omega^{2n+1},\ a_{2n}\omega^{2n},\ \dots\ a_1\omega,\ a_0\right]^t, \qquad (18)$$

$\dim \mathbf{X} = 2n+2$,

$$
A = \begin{bmatrix}
-B_1 & 1, & B_1 & -1 & ,\dots, & -B_1 & ,\ 1 \\
-B_2 2^{2n+1}, & 2^{2n}, & B_2 2^{2n-1}, & -2^{2n-2} & ,\dots, & -B_2 2 & ,\ 1 \\
\cdot & & & & & & \\
\cdot & & & & & & \\
\cdot & & & & & & \\
-B_h h^{2n+1}, & h^{2n}, & B_h h^{2n-1}, & -h^{2n-2} & ,\dots, & -B_h h, & 1 \\
\cdot & & & & & & \\
\cdot & & & & & & \\
\cdot & & & & & & \\
-B_m m^{2n-1}, & m^{2n}, & -B_m m^{2n-1}, & -m^{2n-2} & ,\dots, & -B_m m & ,\ 1
\end{bmatrix} \tag{19}
$$

Można wykazać, że rząd każdej podmacierzy (o wymiarze $(2n+2,\ 2n+2)$) macierzy A określonej wzorem (19) jest równy $2n+2$.
Zatem każdy układ równań liniowych przyporządkowany tym podmacierzom posiada wyłącznie rozwiązania zerowe [15].
Z wymienionego powodu interesujący jest przypadek:

$$
m < 2n+2 , \tag{20}
$$

sprowadzający się do założenia pewnej liczby zer i biegunów funkcji (14). Chcąc wykorzystać do syntezy teorię równań liniowych, konieczne jest założenie znajomości wszystkich zer (lub wszystkich biegunów funkcji (14)). Wygodniej jest przyjąć jako znane bieguny funkcji (14), zakładając tym samym, że odpowiedni wielomian mianownika $M(\omega^2)$ jest wielomianem stabilnym (Hurwitza [18]).

Z przedstawionych rozważań wynika, że problem syntezy (PSII) można sprowadzić do następującego problemu PSIII.

<u>Problem syntezy III (PSIII)</u>

Niech

$$
\bigwedge_{h \in \{1,\dots,n+1\}} B_h > 0; \quad n = 2l+1; \quad l, n \in N, \tag{21}
$$

gdzie:

B_h - susceptancja odbiornika (por. wzór (1)).

Należy wyznaczyć współczynniki wielomianu $L(\omega^2)$ (wzór (14)) mając dane n (n - liczbe biegunów) biegunów ω_{bh} funkcji $M(\omega^2)$ dobranych zgodnie ze wzorem:

$$\bigwedge_{h\in\{1,\dots n\}} \omega_{bh-1} < \omega_h < \omega_{bh} \tag{22}$$

oraz mając dane n+1 wartości funkcji reaktancyjnej (14) dla częstotliwości ω_h równej:

$$\bigwedge_{h\in\{1,\dots,n+1\}} B_r(\omega_h) = -B_h\,, \quad \omega_h = h\omega. \tag{23}$$

Dobór biegunów przeprowadza się zgodnie ze wzorem (22), mając jednak na uwadze techniczne warunki realizowalności dwójnika reaktancyjnego (np. konieczność stosowania cewek o niezbyt dużych dobrociach).
Zera wielomianów $L(\omega^2)$, $M(\omega^2)$ winny spełniać warunek przeplatania (8) [10], [16].

Rozwiązanie problemu syntezy (PSIII) wiąże się z zagadnieniem istnienia pewnych rozwiązań następującego układu równań liniowych:

$$\mathbf{V}\mathbf{X}' = \mathbf{b} \tag{24}$$

gdzie:

$$\mathbf{X}' = \left[x_1, x_2 \dots x_{n+1}\right]^t = \left[a_{2n}\omega^{2n}, -a_{2n-2}\omega^{2n-2}, a_{2n-4}\omega^{2n-4}, \dots, -a_2\omega^2, a_o\right]^t \tag{25}$$

$$\dim \mathbf{X}' = n+1; \quad a_k > 0 \quad \text{dla} \quad k\in\{0,\dots,2n\},$$

$$\mathbf{b} = \left[b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n+1}\right]^t = \left[B_1\, M(\omega^2), B_2 2\omega(M(2\omega)^2), \dots,\right.$$
$$\left.\dots, B_{n+1}(n+1)\omega(M(n+1)\omega)^2)\right]^t . \tag{26}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2^{2n} & 2^{2n-2} & 2^{2n-4} & 1 \\ h^{2n} & h^{2n-2} & h^{2n-4} & 1 \\ (n+1)^{2n} & (n+1)^{2n-2} & (n+1)^{2n-4} & 1 \end{bmatrix} . \tag{27}$$

Macierz V jest macierzą Vandermonde'a [15] rzędu n+1, zatem:

$$\det \mathbf{V} \neq 0 . \tag{28}$$

Układ równań (24) jest układem Cramera [15] i posiada zawsze rozwiązanie niezerowe. Twierdzenie Cramera [15] nie pozwala na określenie warunków istnienia rozwiązań układu równań (24) o postaci określonej wzorem (25) (tzn. o znakach zmieniających się na przemian).

Zauważmy, że spełnienie warunków określonych wzorami (21), (22), (23) implikuje zależności:

$$\left.\begin{array}{l} M(\omega^2) > 0 \\ M(2\omega)^2) < 0 \\ M((3\omega)^2) > 0 \\ \vdots \\ M((n+1)\omega)^2) < 0 . \end{array}\right\} \tag{29}$$

Zatem:

$$\left.\begin{array}{l} B_1\, M(\omega^2) > 0 \\ B_2\, M((2\omega)^2) < 0 \\ \vdots \\ B_{n+1} M((n+1)\omega)^2) < 0 . \end{array}\right\} \tag{30}$$

Składowe wektora $\mathbf{b}$ posiadają taką samą strukturę jak składowe wektora $\mathbf{X}'$ (rozumianą jako zgodność znaków współrzędnych wektorów $\mathbf{b}$, $\mathbf{X}'$ o tym samym wskaźniku oraz tę samą liczbę zmiany znaków); tak więc mamy:

$$\mathbf{b} = \Big[\left|B_1\, M(\omega^2)\right|, -\left|B_2 2\omega M((2\omega)^2)\right|, \left|B_3 3\omega M((3\omega)^2)\right|, \ldots$$

$$\ldots - \left|B_n n\omega M((n\omega)^2)\right|, \left|B_{n+1}(n+1)\omega M((n+1)\omega)^2\right|\Big]^t . \tag{31}$$

Wykażemy, że operacja liniowa określona wzorem:

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{X}',$$

gdzie: $\mathbf{X}'$, $\mathbf{b}$ określają wzory (25), (26), odwzorowuje stożek [11], [12] T(n-1), R^{n+1}) zdefiniowany następująco:

$$T(n-1,\ R^{n+1}) = \left\{\mathbf{b} = \left[b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}\right]^t : b_1 > 0, b_2 > 0, \ldots, b_{n+1} > 0\right\}, \tag{33}$$

gdzie:

$$|b_k| \in R^+, \qquad k \in \{1,\dots,n+1\},$$

na siebie.

Macierz Vendermonde'a o wymiarze n+1 jest regularna co do znaku [14], tzn. wszystkie minory tej macierzy do rzędu n+1 włącznie posiadają ten sam znak, stąd na podstawie pewnego twierdzenia [11], [12] dotyczącego operatorów dodatnich można stwierdzić, że operacja liniowa określona wzorem (24) odwzorowuje stożek, $T(k,R^{n+1})$ na stożek $VT(k,R^{n+1})$

$$\bigwedge_{k\in\{1,2\dots n-1\}} V{:}T(k,R^{n+1}) \longrightarrow VT(k,R^{n+1}) \subset T(k,R^{n+1}). \tag{34}$$

Ponieważ operator V (por. wzór (28) jest bijekcją, stąd:

$$\bigwedge_{k\in\{1,\dots,n-1\}} T(k,\ R^{n+1}) = VT(k,R^{n+1}), \tag{35}$$

a zatem operatory V i V^{-1} nie zmieniają stożka.

Rozwiązania układu równań (24), tzn. współczynniki wielomianu $L(\omega^2)$, spełniają warunek konieczny realizowalności funkcji reaktancyjnej (dwójnika kompensacyjnego).

Drogą analogicznych rozważań można wykazać, że spełniony jest warunek konieczny rozwiązalności następującego problemu syntezy PSIV.

Problem syntezy IV (PSIV)

Niech:

$$\bigwedge_{h\in\{1,\dots,n+1\}} B_h < 0 \tag{36}$$

gdzie:

B_h - susceptancja odbiornika (por. wzór (1)).

Należy wyznaczyć współczynniki wielomianu $L(\omega^2)$ (14), mając dane n-biegunów ω_{b_h} funkcji $M(\omega^2)$ dobranych zgodnie ze wzorem (22) oraz dane n+1 wartości funkcji reaktancyjnej (14) określonych wzorem (23).

Zera wielomianów $L(\omega^2)$ winny spełniać warunek przeplatania (8). ■

Obecnie wykażemy, że zaproponowane procedury syntezy dwójnika kompensacyjnego spełniają warunek wystarczający realizowalności funkcji reaktancyjnej. W rozważaniach przyjęliśmy postać funkcji reaktancyjnej:

$$B_r(\omega) = -\frac{L(\omega^2)}{M(\omega^2)},$$

gdzie:

$$st(L(\omega^2)) = st(M(\omega^2)).$$

Zatem

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{L(\omega^2)}{M(\omega^2)} = c, \quad c > 0 \tag{37}$$

i

$$\lim_{\omega\to 0^+} B_r(\omega) = -\infty . \tag{38}$$

Jeśli

$$\lim_{\omega\to 0^+} B_r(\omega) = -\infty \quad i \quad \frac{\partial B_r(\omega)}{\partial \omega} \neq 0, \tag{39}$$

to tym samym funkcja $B_r(\omega)$ jest ściśle rosnąca.
Tak więc wystarczy wykazać, że dla przyjętej przez nas funkcji (1) zachodzi:

$$\frac{\partial B_r(\omega)}{\partial \omega} \neq 0, \quad \bigwedge_{\omega \neq \omega_{bh}} . \tag{40}$$

Zauważmy, że:

$$\frac{\partial B_r(\omega)}{\partial \omega} = \frac{L'(\omega^2)\omega M(\omega^2) - L(\omega^2)\ M(\omega^2) + M'(\omega^2)}{\omega^2\left[M(\omega^2)\right]^2} . \tag{41}$$

Mianownik wyrażenia (41) jest ściśle dodatnio określony z wyjątkiem przypadku $\omega = 0$, $M(\omega^2) = 0$ (znanych biegunów).

Zatem

$\frac{\partial B_r(\omega)}{\partial \omega} = 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$L'(\omega^2)\omega M(\omega^2) - L(\omega^2)\left[M(\omega^2) + \omega M'(\omega^2)\right] = 0 . \tag{42}$$

Przekształćmy równanie (42) w następujący sposób:

$$L(\omega^2)\,\zeta(\omega^2) - L'(\omega^2)\omega = 0 , \tag{43}$$

gdzie:

$$\zeta(\omega^2) = 1 + \omega\frac{M'(\omega^2)}{M(\omega^2)} . \tag{44}$$

Równanie (43) jest słuszne w każdym punkcie osi rzeczywistej (ω), z wyjątkiem punktów, dla których $M(\omega^2) = 0$.
Na współczynniki wielomianu $L(\omega^2)$ narzucone jest $n+1$ więzów; jest to układ równań, z którego wyznaczamy te współczynniki (por. równanie (24)).

Przyjmijmy, że istnieje punkt na osi ω, w którym spełnione jest równanie (42). Współrzędne tego punktu oznaczmy przez ω_x. Wtedy na współczynniki wielomianu $L(\omega^2)$ oprócz $n+1$ warunków określonych równaniem (24) byłby narzucony dodatkowy warunek:

$$\omega_x^{2n}(\zeta(\omega_x^2)-2n)a_{2n} - \omega_x^{2n-2}(\zeta(\omega_x^2) - (2n-2))a_{2n-2} + \dots$$

$$\dots - \omega_x^2(\zeta(\omega_x^2) - 2)a_2 + a_0\,\zeta(\omega_x^2) = 0 . \tag{45}$$

Wykażemy, że równanie (45) oraz dowolne z równań (24), są liniowo niezależne.
Aby równania (24) i (45) były liniowo zależne, musiałby być spełniony ciąg warunków:

$$\begin{aligned}
C\omega_x^{2n} + \omega_x^{2n}(\zeta(\omega_x^2) - 2n) &= 0\\
C\omega_x^{2n-2} + \omega_x^{2n-2}(\zeta(\omega_x^2) - (2n-2)) &= 0\\
\vdots\qquad &\quad \vdots\\
C\omega_x^2 + \omega_x^2(\zeta(\omega_x^2) - 2) &= 0\\
C + \zeta(\omega_x^2) &= 0
\end{aligned} \tag{46}$$

oraz warunek dotyczący prawych stron równań (24), (45):

$$C\omega_x\, B_r(\omega_x)M(\omega_x^2) = 0 . \tag{47}$$

Z założenia, że $M(\omega_x^2) \neq 0$ wynika $C = 0$, (48)

a stąd

$$\zeta(\omega_x^2) = 0 , \tag{49}$$

co prowadziłoby do warunków:

$$
\begin{aligned}
&\omega_x^2\, 2 = 0\,,\\
&\omega_x^2\, 4 = 0\,,\\
&\vdots\\
&\omega_x^{2n}\, 2n = 0\,.
\end{aligned}
\tag{50}
$$

Wzory (50) dla $\omega_x \neq 0$ nigdy nie będą spełnione, a więc zachodzi wzór (40), który łącznie ze wzorem (38) pozwala stwierdzić, że:

$$\frac{\partial B_x(\omega)}{\partial \omega} > 0 \qquad \bigwedge_{\omega \neq \omega_b} .$$

Tak więc wykazano warunek wystarczający realizowalności problemów syntezy (PSIII), (PSIV).

Wykorzystajmy obecnie wykazane zagadnienia syntezy do syntezy układów kompensacji składowej reaktancyjnej prądu odbiornika.

Składową reaktancyjną prądu odbiornika przedstawiamy w postaci wzoru:

$$
\begin{aligned}
{}_r i &= \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{h=1}^{k} j\, B_h\, \underline{U}_h \exp jh\omega(\cdot) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{h=1}^{k} jA_h \underline{U}_h \exp jh\omega(\cdot)\, + \\
&+ \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{h=1}^{k} jC_h U_h \exp jh\omega(\cdot) = {}_r i_1 + {}_r i_2\,,
\end{aligned}
\tag{51}
$$

gdzie:

$$A_h = \begin{cases} B_h + \Delta_h & \text{jeśli} \quad B_h > 0 \\ \Delta_h & \text{jeśli} \quad B_h \leqslant 0 \end{cases} \tag{52}$$

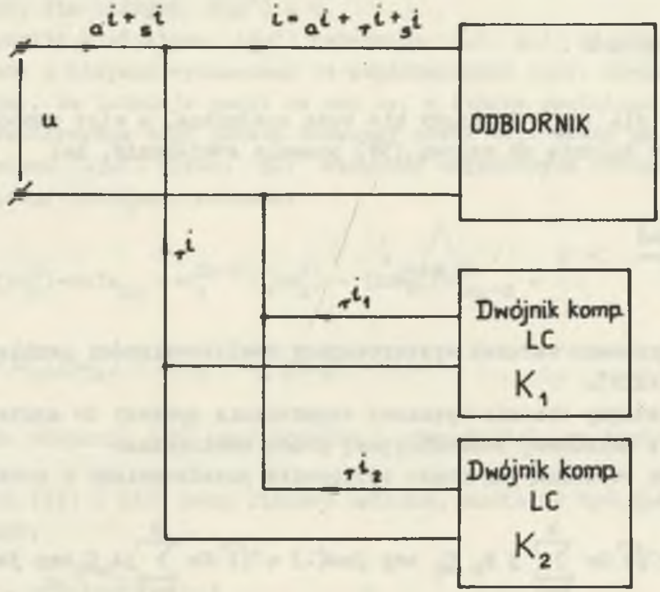
$$C_h = \begin{cases} -\Delta_h & \text{jeśli} \quad B_h \geqslant 0 \\ -B_h - \Delta_h & \text{jeśli} \quad B_h < 0 \end{cases} \tag{53}$$

$$\Delta_h > 0, \quad h \in \{1, \ldots, n+1\}\,.$$

Na dobór stałych Δ_h nie narzucamy żadnych warunków.

Rozwiązując problem (PSIII), określamy strukturę dwójnika kompensującego prąd $_ri_1$, natomiast rozwiązując problem (PSIV), określamy strukturę dwójnika kompensującego prąd $_ri_2$.
Bieguny dwójników kompensujących składowe $_ri_1$ i $_ri_2$ są takie same.

Strukturę układu kompensacji prądu odbiornika opracowanego na podstawie powyższych rozważań przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1
Fig. 1

Układ kompensacji K_1 kompensuje harmoniczne składowej reaktancyjnej prądu odbiornika, przyporządkowane dodatnim susceptancjom odbiornika, dla odpowiednich harmonicznych, natomiast układ kompensacji K_2 kompensuje harmoniczne składowej reaktancyjnej prądu odbiornika przyporządkowane ujemnym susceptancjom odbiornika.

3. Podsumowanie

1. W artykule sformalizowano problemy syntezy układów kompensacji składowej reaktancyjnej prądu odbiornika dwuzaciskowego zasilanego napięciem odkształconym:
(PSI) - sprowadzający się do rozwiązania układu równań nieliniowych (12),
(PSII), (PSIII), (PSIV) - sprowadzające się do rozwiązania układów równań liniowych.

2. Rozwiązaniom problemów (PSIII), (PSIV) można zawsze przyporządkować funkcje reaktancyjne, realizowalne w postaci dwójników LC.

3. Zaproponowano strukturę układu kompensacji składowej reaktancyjnej prądu odbiornika dwuzaciskowego złożoną z dwóch połączonych równolegle dwójników kompensacyjnych LC opisanych funkcjami reaktancyjnymi. Jeden z tych dwójników kompensuje harmoniczne składowej reaktancyjnej prądu odbiornika, którym przyporządkowane są dodatnie susceptancje B_h odbiornika, natomiast drugi kompensuje harmoniczne składowej reaktancyjnej, którym przyporządkowane są ujemne susceptancje B_h. Zaproponowany układ kompensacji umożliwia wyeliminowanie skończonej liczby harmonicznych składowej reaktancyjnej prądu odbiornika.

4. Układ kompensacji umożliwia kompensację skończonego widma składowej reaktancyjnej prądu odbiornika w przypadku, gdy widmo to zawiera wszystkie harmoniczne prądu oraz w przypadku, gdy niektóre harmoniczne składowej reaktancyjnej prądu odbiornika nie występują.

Zaproponowany sposób syntezy dwójników kompensacyjnych składowej reaktancyjnej prądu odbiornika umożliwia konstrukcję prostego algorytmu numerycznego (sprowadzającego się w zasadzie do rozwiązania układu równań liniowych i poszukiwanie zer rzeczywistych wielomianów), który w skończonej liczbie kroków (brak procedur iteracyjnych) pozwala na określenie struktury dwójników.

Proponowane metody syntezy są ogólne w tym sensie, że umożliwiają one wyznaczenie admitancji dwójników kompensujących dowolnie wysokiego rzędu. W szczególnych przypadkach można dla niewielkiej liczby harmonicznych drogą prób i błędów określić admitancję jednego dwójnika kompensacyjnego (zamiast dwóch).

LITERATURA

[1] Balabanian N.: Network Synthesis. Prentice-Hall, Inc. Engl. Cliffs 1958.

[2] Brodzki M., Pasko M.: Definicje pewnych mocy dla układów wielozaciskowych. Rozprawy Elektrotechniczne z 1. 1989.

[3] Brodzki M., Pasko M., Umińska-Bortliczek M.: Jednolita teoria mocy dla układów trójfazowych o przebiegach w oparciu o ortogonalny rozkład prądu w przestrzeni $L_3^2(0;T)$ Materiały X - SPETO, Wisła 1987.

[4] Brodzki M., Pasko M., Umińska-Bortliczek M., Walczak J.: Propozycja nowego wskaźnika, jakość energii elektrycznej dla układów dwuzaciskowych z przebiegami odkształconymi. Materiały XI - SPETO, Wisła 1988.

[5] Brodzki M., Pasko M., Umińska-Bortliczek M., Walczak J.: Ortogonalny rozkład prądu odbiornika dwuzaciskowego, zasilanego napięciem odkształconym, w przestrzeni Sobolewa. Materiały XI - SPETO, Wisła 1988.

[6] Brodzki M., Walczak J.: O pewnym sposobie oceny prądów odkształconych odbiorników wielozaciskowych wykorzystujących pojęcie przestrzeni Sobolewa. Materiały XI - SPETO, Wisła 1988.

[7] Czarnecki L.: Interpretacja, identyfikacja i modyfikacja właściwości energetycznych obwodów jednofazowych z przebiegami odkształconymi. Praca habilitacyjna ZN Elektryka, Pol. Sl. Z. 91, Gliwice 1984.

[8] Czarnecki L.: Power Theories of Periodic Nonsinusoidal Systems. Rozprawy Elektrotechniczne, nr 31. Z. 3-4. 1985.

[9] Czarnecki L.: Ortogonalny rozkład prądu źródła napięcia odkształconego zasilającego asymetryczny nieliniowy odbiornik trójfazowy. Materiały X - SPETO, Wisła 1987.

[10] Guillemin E.A.: Synthesis of Passive Networks New York 1957.

[11] Karlin S.: Total positivity. Vol 1. Stanford, Calif. Univ. Press. 1968.

[12] Karlin S.: Positive operators. J. Math. Mech. 1959, 8n 6.

[13] Karni Sz.: Network Theory, Analysis ans Synthesis. Boston. Mass. 1966.

[14] Krasnosielskij M.A., Lifszic E.A., Sobolew A.W.: Pozitivnyje liniejnyje sistemy. G. R. F. ML. Moskwa 1985.

[15] Mostowski A., Stark M.: Elementy algebry wyższej. PWN, Warszawa 1970.

[16] Osiowski J.: Zarys rachunku operatorowego. WNT, Warszawa 1965.

[17] Ostrowski A.M.: Solutions of equations and systems of equations. New York 1960.

[18] Turowicz A.: Geometria zer wielomianów. PWN, Warszawa 1967.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Stanisław Osowski

Wpłynęło do redakcji dnia 30 maja 1988 r.

МЕТОД СИНТЕЗА ЦЕПЕЙ КОМПЕНСИРУЮЩИХ РЕАКТИВНУЮ СОСТАВЛЯЮЩУЮ ТОКА ДЛЯ ОДНОФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ С НЕСИНУСОИДАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Р е з ю м е

В работе представлен метод синтеза цепей компенсирующих реактивную составляющую тока для однофазных приемников с несинусоидальным напряжением источника. Доказаны необходимые и достаточные условия для реализации цепей компенсирующих реактивний ток с прмрщью реактивных двухполюсников C.

Компенсирующая цепь в общем случае состоит из двух двухполюсников C соединенных параллельно для компенсации - гармоник реактивной составляющей тока.

THE METHOD OF THE SYNTHESIS OF THE COMPENSATION NETWORKS FOR THE REACTIVE COMPONENT OF THE CURRENT OF THE TWO-TERMINAL RECEIVER SUPPLIED FROM THE PERIODIC NONSINUSOIDAL VOLTAGE SOURCE

S u m m a r y

The method of the synthesis of the network compensating the reactive component (${}_{r}i$) of the current of two-terminal receiver supplied with periodic nonsinusoidal voltage has been worked out.
It has been proved that the necessary and sufficient conditions of its realizability as LC one-ports are fulfilled.
Generally the compensation network consists of two LC one-ports described with reactance functions of the n-th order and compensates n-1 harmonics of the reactive component of the receiver (load) current.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991
Seria: ELEKTRYKA z. 113 Nr kol. 983

Krystyna STEC

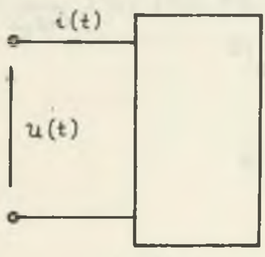
PROPOZYCJA ROZKŁADU MOCY W UKŁADACH Z OKRESOWYMI PRZEBIEGAMI NIESINUSOIDALNYMI

Streszczenie. W artykule przedstawiono propozycję nowego rozkładu mocy w układach liniowych z przebiegami okresowymi niesinusoidalnymi. Proponuje się rozkład mocy pozornej $|S| = |U||I|$ na cztery składowe wytworzone przez dwie ortogonalne składowe prądu pobieranego przez układ. Moce te oznaczono P, P_d, Q i Q_d, przy czym P jest mocą czynną, a Q mocą bierną Budeanu. Prąd, który związany jest z poborem przez układ mocy czynnej, powoduje również pobór mocy P_d. Natomiast prąd związany z mocą bierną wytwarza również moc Q_d. Składowa P_d bywa czasem oznaczona Q_s [1].
W pracy podano wzór na wprowadzoną nową składową mocy Q_d oraz uzasadniono potrzebę wprowadzenia nowego rozkładu mocy. Proponowany rozkład porównano z lansowanym ostatnio rozkładem mocy L. Czarneckiego [1]. Pokazano przykłady układów, w których proponowany rozkład mocy zapewnia uzyskanie bardziej pełnego obrazu stanu energetycznego układu.
Wykazano, jaka część mocy pozornej |S| może zostać skompensowana za pomocą pasywnego dwójnika reaktancyjnego.

Istnieje wiele koncepcji teorii mocy dla układów z niesinusoidalnymi przebiegami okresowymi. Liczni autorzy proponują różne rozkłady mocy na składowe [1][2].

Wady większości z tych rozkładów omówione zostały w pracy L. Czarneckiego [1].

W proponowanym rozkładzie moc pozorną $|S| = |U||I|$ rozbija się na cztery składowe: P, Q, P_d, Q_d, gdzie: P jest mocą czynną, a Q jest mocą bierną (Budeanu).



Rys. 1
Fig. 1

Rozpatrzmy pasywny dwójnik liniowy pokazany na rys. 1. Dwójnik ten jest zasilany napięciem

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} |U_{km}| \sin(k\omega t + \alpha_k)$$

oraz pobiera prąd

$$i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} |I_{km}| \sin(k\omega t + \alpha_k + \varphi_k).$$

Prąd ten można rozdzielić na dwie ortogonalne składowe [3]:

$$i_G(t) = \sum_{k=1}^{\infty} |U_{km}| G_k \sin(k\omega t + \alpha_k)$$

oraz

$$i_B(t) = \sum_{k=1}^{\infty} |U_{km}| B_k \cos(k\omega t + \alpha_k)$$

gdzie G_k oznacza konduktancję, a B_k susceptancję dwójnika dla k-tej harmonicznej.

Ponieważ

$$i(t) = i_G(t) + i_B(t)$$

oraz

$$\int_0^T i_G(t) i_B(t) dt = 0$$

mamy

$$|I|^2 = |I_G|^2 + |I_B|^2$$

oraz

$$|S|^2 = |S_G|^2 + |S_B|^2$$

gdzie

$$|S_G| = |U||I_G| \text{ i } |S_B| = |U||I_B|$$

Wiadomo, że

$$|S|^2 \geqslant P^2 + Q^2$$

oraz

$$|S_G|^2 \geqslant P^2 \tag{1}$$

i

$$|S_B|^2 \geqslant Q^2$$

Z zależności (1) widać, że prąd $i_G(t)$ powoduje pobieranie przez układ mocy czynnej P oraz dodatkowo pewnej mocy, którą oznaczono P_d, a prąd $i_B(t)$ jest odpowiedzialny za pobór mocy biernej (Budeanu) oraz pewnej mocy, dla której przyjęto oznaczenie Q_d. Moce P_d i Q_d można wyznaczyć porównując moce $|S_G|$ i P oraz $|S_B|$ i Q.
Moc P_d jest tożsama z mocą Q_s [1] i można ją wyrazić wzorem:

$$P_d^2 = |S_G|^2 - P^2 = \frac{1}{2}\sum_{\substack{k,n=1\\ k\neq n}}^{\infty} |U_k|^2|U_n|^2(G_k - G_n)^2 \tag{2}$$

Jeżeli we wzorze (2) dla wszystkich k i n mamy $G_k = G_n$, to moc $P_d = 0$ i prąd $i_G(t)$ ma taki sam kształt jak napięcie (nie jest odkształcony).
Podobnie jak P_d można również wyznaczyć moc Q_d.
Ponieważ

$$Q_d^2 = |S_B|^2 - Q^2$$

oraz

$$|S_B|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|U_k|^4B_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k,n=1}^{\infty} |U_k|^2|U_n|^2(B_k^2 + B_n^2)$$

i

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^2B_k$$

a więc

$$Q^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |U_k|^4 B_k^2 + \sum_{k,n=1}^{\infty} |U_k|^2 |U_n|^2 B_k B_n$$

wobec tego

$$Q_d^2 = \frac{1}{2} \sum_{k,n=1}^{\infty} |U_k|^2 |U_n|^2 (B_k - B_n)^2 \tag{3}$$

Suma $P_d^2 + Q_d^2 = K^2$, gdzie K jest tzw. mocą odkształcenia w rozkładzie Budeanu.

Moc K nie powinna być jednak rozpatrywana jako jedna moc, ponieważ jej składowe mają różny sens fizyczny. Moc P_d ma charakter mocy wydzielanej na elemencie rezystancyjnym, a moc Q_d ma charakter mocy wydzielanej na elemencie reaktancyjnym.

Moc P_d może być uważana za całkowitą miarę odbiegania kształtu prądu $i_G(t)$ od kształtu napięcia $u(t)$. Natomiast moc Q_d może być wskaźnikiem tylko jednej z przyczyn odkształcenia prądu $i_B(t)$ względem napięcia $u(t)$, tzn. zmiany susceptancji w funkcji częstotliwości. Druga przyczyna, którą jest przesunięcie każdej z harmonicznych prądu $i_B(t)$ o $\frac{\pi}{2}$ nie wpływa na Q_d. Q_d nie może być więc uważana za moc odkształcenia.

Moc $|S_B|$ jest tożsama z mocą Q_r w rozkładzie L. Czarneckiego, o której to mocy autor twierdzi, że jest kompensowalna równolegle włączonym dwójnikiem pasywnym.

Ze wzoru (3) widać jednak, że np. całkowita kompensacja k-tej harmonicznej prądu $i_B(t)$ powoduje kompensację k-tej składowej mocy biernej Q (Budeanu). Nie kompensuje natomiast żadnej ze składowych mocy Q_d. Składowe te mogą wzrastać, jeżeli przed kompensacją $B_k B_n > 0$, a maleją gdy przed kompensacją $B_k B_n < 0$. Moc $|S_B|^2 = Q^2 + Q_d^2$.

Ponieważ kompensowalne są tylko moce bierne poszczególnych harmonicznych, nie można w ogóle mówić o kompensowalności mocy $|S_B|(Q_r)$.

Moc ta nie dostarcza żadnych informacji przydatnych przy doborze dwójnika kompensacyjnego.

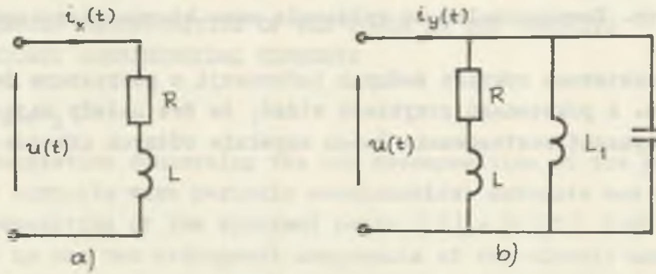
Jako przykład rozpatrzmy dwójniki pokazane na rys. 2a i 2b.

Dwójniki te zasilane są napięciem

$$u(t) = |U_{1m}| \sin(\omega t + \alpha_1) + |U_{2m}| \sin(2\omega t + \alpha_2)$$

Wartości elementów w tych układach spełniają zależności:

$$G = \frac{4G}{5}\ ;\quad L = \frac{R}{\omega}\ ;\quad L_1 = \frac{5R}{4\omega}$$



Rys. 2
Fig. 2

W tabeli 1 podano zależności między konduktancjami (susceptancjami) poszczególnych harmonicznych.

Tabela 1

k	Układ a	Układ b
1	G_1	G_1
1	B_1	B_1
2	G_2	G_2
2	B_2	$-B_2$

Z wartości tych widać, że w obu układach jednakowe są wartości skuteczne składowych prądów $|I_G|$ i $|I_B|$. Równe są również moce P, P_d i $|S_B|(Q_r)$. Różne są natomiast moce Q i Q_d (tabela 2).

Tabela 2

Moc	Układ a	Układ b
Q	$\lvert U_1\rvert^2 B_1 + \lvert U_2\rvert^2 B_2$	$\lvert U_1\rvert^2 B_1 - \lvert U_2\rvert^2 B_2$
Q_d^2	$\lvert U_1\rvert^2 \lvert U_2\rvert^2 (B_1 - B_2)^2$	$\lvert U_1\rvert^2 \lvert U_2\rvert^2 (B_1 + B_2)^2$

Podsumowanie

Rozłożenie mocy $|S_B|$ na dwie składowe Q i Q_d pozwoliło stwierdzić, że moc $|S_B|$ nie jest kompensowalna za pomocą równolegle dołączanych dwójników pasywnych. Kompensowalne są wyłącznie moce bierne poszczególnych harmonicznych.

Moc $|S_B|$ nie dostarcza również żadnych informacji o potrzebnym dwójniku kompensacyjnym. Z pokazanego przykładu widać, że dwa układy mające tę samą moc $|S_B|$ mogą wymagać zastosowania dwóch zupełnie różnych układów kompensacyjnych.

LITERATURA

[1] L.S. Czarnecki: Interpretacja, identyfikacja i modyfikacja właściwości energetycznych obwodów jednofazowych z przebiegami odkształconymi. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej seria Elektryka, nr 91 1984.

[2] Z.J. Nowomiejski: Moc i energia elektryczna w układach elektryoznych o dowolnych ustalonych przebiegach, ibid nr 77 1983.

[3] W. Shepherd, P. Zakikhani: Suggested definition of reactive power for nonsinusoidal systems. Proc. IEE, vol. 19 no 9 Sept. 1972.

[4] W. Shepherd, P. Zakikhani: Suggested definition of reactive power for nonsinusoidal systems, ibid vol. 120 no 7, July 1973.

Recenzent: Doc. dr hab. inż. Maciej Siwczyński

Wpłynęło do redakcji dnia 12 maja 1988 r.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ МОЩНОСТИ В ЦЕПЯХ С НЕСИНУСОИДАЛЬНЫМИ ПЕРЕДИЧЕСКИМИ ТОКАМИ

Р е з ю м е

Дано предложение нового разложения мощности в электрических линейных целях с переодическими несинусоидальными токами. Предлагается разложение полной мощности $|S| = |U||I|$ на четыре слагаемых, возникающих из двух слагаемых тока проходящего через цепь. Эти мощности обозначены P, P , и Q_d . Мощность P это активная мощность, мощность Q - реактивная Будеану Ток связанный с активной мощностью производит тоже мощность P_d, а ток связанный с реактивной мощностью производит также мощность Q_d. Слагаемое P_d обозначется также Q_s [1] .

В статье дана формула для новой слагаемой мощности Q_d и доказана необходимость нового разложения мощности. Представленное разложение сравнено с разложением мощности Л. Чарнецкого [1]. Псказаны примеры цепей, в которых представленное разложение мощности дает лучшую информацию об энергетическом состоянии цепи. Указано, которая часть польной мощности может быть компенсирована реактивным двухполюсником.

THE SUGGESTED DECOMPOSITION OF THE POWER IN THE CIRCUITS WITH PERIODIC NONSINUSOIDAL CURRENTS

S u m m a r y

The suggestion concerning the new decomposition of the power in linear electric circuits with periodic nonsinusoidal currents has been presented. The decomposition of the apparent power $|S| = |U||I|$ into four components produced by the two orthogonal components of the circuit current has been suggested. The power components has been denoted P, P_d, Q and Q_d, where P is the active power, and Q is the reactive power in a Budeanu sense. The current producing the active power produces also the power P_d, and the current producing the reactive power produces also the power Q_d. The component P_d is sometimes denoted Q_s [1].

The formula for the calculation of the new power component Q_d has been given and the need for the introduction of the new decomposition of the power has been proved.

The suggested decomposition of the power has been compared with the one suggested by L. Czarnecki [1]. The examples of the circuits in which the suggested decomposition gives more information about the energetic state of the circuit have been presented.

It has been also shown what part of the apparent power $|S|$ can be compensated by means of the reactive two-terminal network.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: ELEKTRYKA z. 113 Nr kol. 983

Zygmunt GARCZARCZYK

GLOBALNIE ZBIEŻNA ANALIZA HYBRYDOWA

Streszczenie. W pracy przedstawiono globalnie zbieżny algorytm analizy hybrydowej sieci rezystancyjnych nieliniowych oparty na metodzie kontynuacji. Algorytm ten posiada dwie fazy.
W fazie pierwszej związany jest z rozwiązywaniem zagadnienia początkowego dla układu równań różniczkowych zwyczajnych stowarzyszonych ze zmodyfikowanymi homotopijnie równaniami hybrydowymi sieci. W fazie drugiej rozwiązuje się równania hybrydowe sieci metodą Newtona-Raphsona z przybliżeniem początkowym otrzymanym w fazie pierwszej. Użyteczność algorytmu zademonstrowano na przykładzie obliczeń numerycznych wybranego obwodu nieliniowego.

1. Wstęp

W pracy rozważone zostanie zagadnienie rozwiązania równań hybrydowych nieliniowej sieci rezystancyjnej o postaci:

$$F(x) = f(x) - Ax - b = 0$$

$$A = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, n_1 \\ \}\, n_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \quad n_1 \quad & \quad n_2 \quad \end{array} \end{array}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \hline b_2 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

gdzie:

$x \in R^n$ - nieznany wektor napięć i prądów rezystorów nieliniowych,

A - macierz $n \times n$ reprezentująca część liniową obwodu,

$f(.)$ - odwzorowanie na R^n reprezentujące charakterystyki rezystorów nieliniowych,

b - stały wektor źródeł,

n_1 - liczba uzależnionych napięciowo rezystorów należących do drzewa grafu sieci,

n_2 - liczba uzależnionych prądowo rezystorów należących do przeciwdrzewa [1].

Skuteczne rozwiązanie równania (1) wybraną metodą iteracyjną wiąże się z wyborem punktu startowego.

W przypadku metody Newtona-Raphsona pojawia się zasadnicza przeszkoda związana z brakiem systematycznej metody wyboru punktu startowego. Trudność ta może być pokonana przez wykorzystanie metody kontynuacji, w której zamiast funkcji $F : D \to R^n$, gdzie $D \subset R^n$, rozważa się specjalną funkcję $H(x, t) : D \times T \to R^n$, gdzie $T = \{t \mid 0 \leq t \leq 1\}$, zwaną homotopią, tzn.:

$$H(x(t), t) = 0 , \quad x \in D, \quad t \in T \tag{2}$$

$$H(x, 1) = F(x) , \quad H(x, 0) = E(x) \quad \forall x \in D \tag{3}$$

taką, że:

a) rozwiązanie $x^0 = x(0)$ równania $E(x) = 0$ jest znane lub łatwo je uzyskać,
b) rozwiązania $x(t)$ wyznaczane dla t rosnącego tworzą ścieżkę łączącą punkt $x(0)$ z rozwiązaniem $x^* = x(1)$ funkcji $F(x)$.

Niech

$$H^{-1} = \{[x,t] \mid H(x,t) = 0\} \tag{4}$$

oznacza zbiór wszystkich rozwiązań $[x,t] \in R^n$ układu $H(x,t) = 0$.

Z twierdzenia o funkcji niejawnej [2] wynika, że ścieżka homotopii istnieje, jeśli H jest regularna, tzn. macierz Jacobiego $H'(x,t) = \left[H'_x(x,t), \frac{\partial H}{\partial t}\right]$ ma maksymalny rząd dla każdego $[x,t] \in H^{-1}$.

2. Wyznaczanie ścieżki homotopii

Wprowadźmy oznaczenie:

$$w = [x,t] \tag{5}$$

tak, aby:

$$w_i = x_i, \quad i = 1,\ldots,n, \quad w_{n+1} = t .$$

Następnie, niech H'_{-i} oznacza częściową macierz Jacobiego utworzoną z pełnej macierzy H przez usunięcie i-tej kolumny.
Zauważmy, że istnieje $n + 1$ macierzy H'_{-i}, ponadto:

$$H'_{-(n+1)} = H'_x(x,t). \tag{6}$$

Przyjmujemy, że $w = [x,t]$ zależy od parametru s, który można interpretować jako drogę przebytą wzdłuż ścieżki homotopii, tzn.:

$$w(s) = [x(s) t(s)] \quad \text{dla} \quad w(s) \in H^{-1} \tag{7}$$

Pokażemy, że jeśli funkcja H jest regularna i jest klasy C^2, można wyznaczyć ścieżkę homotopii w H^{-1} rowziązując zagadnienie początkowe o postaci [5]:

$$\dot{w}_i = (-1)^i \det H'_{-i}(w) = \varphi(w(s), s) \quad i = 1,\dots,n+1 \tag{8}$$

$$w(s^o) = w^o = [x^o, 0] \tag{9}$$

gdzie:

$$\dot{w}_i = \dot{w}_i(s) = \frac{dw_i}{ds} .$$

Ponieważ $H \in C^2$, więc $\det H'_{-i} \in C^1$ $i = 1,\dots,n+1$, zatem jeśli dodatkowo przyjąć, że funkcja $\varphi(w(s),s)$ spełnia warunek Lipschitza, to wiadomo [3], że istnieje dokładnie jeden układ funkcji $w_1(s),\dots,w_{n+1}(s)$ będących rozwiązaniem równania (8) i spełniających warunki początkowe (9).
Rozwiązanie to istnieje na pewnym przedziale zmiennej s obejmującym wartość początkową s^o.
Jeżeli $w(s) \in H^{-1}$, to:

$$H(w(s)) = 0 . \tag{10}$$

Różniozkując równanie (10) względem s, otrzymuje się:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial H}{\partial w_i} \dot{w}_i(s) = 0 . \tag{11}$$

Podstawiając wzór (8) do (11), mamy:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial H}{\partial w_i} \left[(-1)^i \det H'_{-i}\right] = 0 . \tag{12}$$

Ponieważ H jest regularna, więc np. dla $i = 1$ macierz H'_{-1} jest nieosobliwa.

Zatem:

$$\sum_{i=2}^{n+1} \frac{\partial H}{\partial w_i}\left[(-1)^i \det H'_{-i}\right] = \frac{\partial H}{\partial w_1} \det H'_{-1} . \tag{13}$$

Na podstawie wzorów Cramera dla $i = 2,\ldots,n+1$ zachodzi:

$$(-1)^i \det H'_{-1} = \frac{1}{\det H'_{-1}} \det\left[\frac{\partial H}{\partial w_2}, \frac{\partial H}{\partial w_3}, \ldots - \frac{\partial H}{w_{i-1}}, \frac{\partial H}{\partial w_1} \det H'_{-1}, \frac{\partial H}{\partial w_{n+1}}, \ldots \frac{\partial H}{\partial w_{n+1}}\right]. \tag{14}$$

Po wyłączeniu czynnika $\det H'_{-1}$ i przestawieniu kolumn otrzymuje się:

$$(-1)^i \det H'_{-i} = \frac{\det H'_{-1}(-1)^i \det H'_{-i}}{\det H'_{-1}} = (-1)^i \det H'_{-i}, \tag{15}$$

a zatem równanie (8) spełnia (11), co oznacza, że rozwiązując równanie (8) dla danego $w(s^o) = w^o$, otrzymuje się ścieżkę homotopii $w(s) \in H^{-1}$. Warto zauważyć, że podejście to pozwala wyznaczać ścieżkę homotopii także wtedy, gdy dla pewnej wartości t macierz $H'_x(x,t)$ jest osobliwa, co - jak wiadomo - stanowi główne ograniczenie dla ciągłej metody kontynuacji opartej na tzw. równaniu Dawidenki [2].

Przy rozwiązywaniu równania (8) należy zwrócić uwagę, jak zmienia się $\dot{t} = (-1)^{n+1} \det H'_x(x,t)$ przy zmianach parametru s, gdyż zależy nam na tym, by $t \in \langle 0,1\rangle$.

Proces obliczeniowy rozpoczyna się od $t = 0$.
Jeżeli więc $\dot{t} > 0$, to zwiększając s, zwiększamy t, jeśli natomiast $\dot{t} < 0$, należy zmniejszać s, by zwiększać t.
Zatem jeśli $\dot{t}(s^o) < 0$, należy rozwiązywać układ równań:

$$\dot{w}_i = (-1)^{i+1} \det H'_{-i}, \quad i = 1,2,\ldots,n+1. \tag{16}$$

Uzyskanie dokładniej wartości rozwiązania $x(1)$ może wymagać stosowania małego kroku przy rozwiązywaniu równania (8), co zwiększyłoby czasochłonność procesu obliczeniowego. Dlatego całkuje się równanie (8) z maksymalnym krokiem Δs, by uzyskać rozwiązanie dla pewnej wartości $t_x \approx 1$, by następnie przyjąć je jako przybliżenie początkowe dla ciągu iteracji Newtona-Raphsona:

$$x^{k+1} = x^k - \left[\frac{\partial f(x^k)}{\partial x} - A\right]^{-1} (f(x^k) - Ax^k - b), \quad x^o = x(t_x) . \tag{17}$$

3. Homotopie równań hybrydowych

Aby uzyskać rodzinę równań (2), modyfikuje się obwód nieliniowy zastępując wszystkie rezystory uzależnione napięciowo przez równoległe połączenie liniowe rezystora o konduktancji $(1-t)y_k$ z rezystorem nieliniowym o charakterystyce $i_k = tg_k(u_k)$, $k = 1,\ldots,n_1$. Podobnie wszystkie rezystory uzależnione prądowo są zastąpione szeregowym połączeniem liniowego rezystora o rezystancji $(1-t)z_k$ z rezystorem nieliniowym o charakterystyce $u_k = tr_k(i_k)$, $k = n_1+1,\ldots,n_1+n_2$ [4].

Równania hybrydowe tego obwodu są następujące:

$$H(x, t) = tf(x) - Bx - b = 0 \tag{17}$$

z

$$B = A - (1-t)\,K \tag{18}$$

$$K = \left[\begin{array}{c|c} Y & 0 \\ \hline 0 & Z \end{array}\right] \tag{19}$$

gdzie:

$$Y = \mathrm{diag}\left[y_1,\ y_2,\ldots,y_{n_1}\right]$$

$$Z = \mathrm{diag}\left[z_{n_1+1},\ldots,z_{n_1+n_2}\right]. \tag{20}$$

Przybliżenie początkowe x^o uzyskuje się łatwo rozwiązując dla $t = 0$ układ równań liniowych:

$$E(x) = \left[A - K\right] x^o + b = 0\ . \tag{21}$$

Macierz Jacobiego, która stanowi podstawę do formułowania układu równań, jest równa:

$$H'(x, t) = \left[t\,\frac{\partial f(x)}{\partial x} - A,\ f(x) - Kx\right]. \tag{22}$$

Równanie (2) można uzyskać również w następujący sposób:

$$H(x, t) = F(x) - (1 - t)F(x^o) \tag{23}$$

Ponieważ

$$E(x) = F(x) - F(x^o)\ , \tag{24}$$

zatem rozwiązanie $x^o \in D$ może być dowolnie przyjęte.

Macierz Jacobiego w tym przypadku jest równa:

$$H'(x, t) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x} - A,\ f(x^o) - Ax^o - b\right]. \tag{25}$$

W obwodzie z elementami rezystancyjnymi pasywnymi $f(0) = 0$, więc przyjmując $x^o = 0$, otrzymuje się:

$$H'(x, t) = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x} - A, - b\right]. \tag{26}$$

4. Przykłady

A) Przedstawione rezultaty wykorzystano do rozwiązania równań hybrydowych o postaci [4] :

$$\begin{bmatrix} g(u_1) \\ r(i_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$g(u_1) = 0,5\, u_1|u_1|,$$

$$r(i_2) = 0,25\, i_2|i_2|.$$

Macierze Jacobiego, na podstawie których formowane są równania (8), mają postać:

macierz (22)

$$H'(x, t) = \begin{bmatrix} t\dot{g}(u_1)+0,5+(1-t)y & 0,5 & g(u_1)-y\, u_1 \\ -0,5 & t\dot{r}(i_2)+1,5+(1-t)z & r(i_2)-z\, i_2 \end{bmatrix} \tag{a}$$

macierz (25)

$$H'(x, t) = \begin{bmatrix} \dot{g}(u_1)+0,5 & 0,5 & g(u_1^o)+0,5\, u_1^o + 0,5\, i_2^o - 1 \\ -0,5 & \dot{r}(i_2)+1,5 & r(i_2^o)-0,5\, u_1^o + 1,5\, i_2^o - 3 \end{bmatrix} \tag{b}$$

gdzie:

$$\dot{g}(u_1) = \frac{dg(u_1)}{du_1}, \quad \dot{r}(i_2) = \frac{dr(i_2)}{di_2}.$$

W szczególności opierając się na macierzy (26) otrzymano układ równań o postaci:

$$
\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= - \dot{r}(i_2) \\
\dot{i}_2 &= - 2 - \dot{g}(u_1) \\
\dot{t} &= - 1 - \dot{g}(u_1)\dot{r}(i_2) - 1{,}5\, \dot{g}(u_1) - 0{,}5\, \dot{r}(i_2)
\end{aligned}
\qquad \text{(c)}
$$

z warunkiem początkowym:

$$u_1(0) = 0, \quad i_2(0) = 0\ , \quad t(0) = 0\ .$$

Ponieważ $\dot{t}(0) < 0$, rozwiązywano układ (c) w postaci (16). W tabeli zestawiono wyniki uzyskane przy rozwiązywaniu równań (8) utworzonych na podstawie macierzy (a) i (b).

Tabela 1

Macierz Jacobiego	x(0)	S	u_1	i_2	t_x
(a)	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}^{(1)}$	0,005	0,2802544	1,6422668	t(0,725) = 0,9994
	$\begin{bmatrix} 0{,}153846 \\ 1{,}230769 \end{bmatrix}^{(2)}$	0,005	0,2718017	1,6371297	t(0,265) = 0,9924
(b)	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	0,025	0,2640274	1,6201000	t(0,725) = 0,9747
		0,005	0,2771341	1,6422924	t(0,725) = 0,9976
	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	0,01	0,2750000	1,6512000	t(0,55) = 0,9798
		0,005	0,2775000	1,6464167	t(0,555) = 0,9918
	$\begin{bmatrix} 0{,}153846 \\ 1{,}230769 \end{bmatrix}$	0,005	0,2787483	1,6423877	t(0,545) = 0,9977

(1) $y = 0, \quad z = 0$,

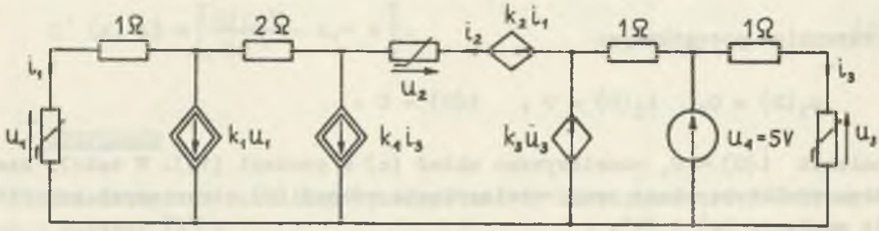
(2) $y = 2, \quad z = 1$.

Przyjmując wszystkie wyniki jako przybliżenie początkowe dla ciągu iteracji (17), uzyskiwano rozwiązanie:

$$u_1 = 0{,}2790562, \quad i_2 = 1{,}6430714$$

z błędem $\| \Delta x \|_1 < 10^{-7}$.

B) Rozważano także obwód nieliniowy przedstawiony na rys. 1.



$k_1 = -1$, $k_2 = -2$, $k_3 = 2$, $k_4 = 1$

Rys. 1. Obwód nieliniowy
Fig. 1. Nonlinear circuit

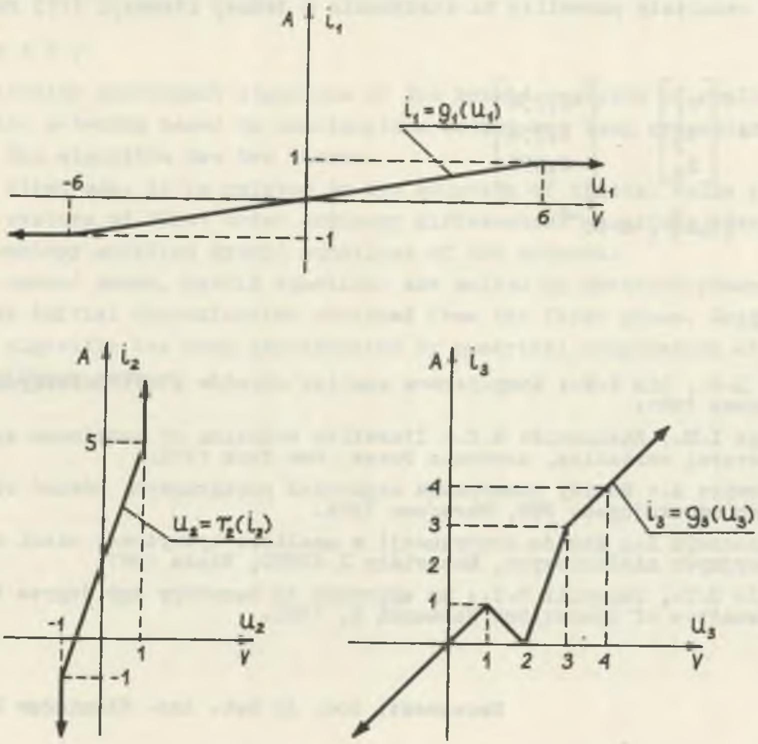
Równania hybrydowe tego obwodu mają następującą postać [1]:

$$\begin{bmatrix} g_1(u_1) \\ g_3(u_3) \\ r_2(i_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ i_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{(d)}$$

gdzie $g_1(u_1)$, $g_3(u_3)$, $r_2(i_2)$ reprezentują charakterystyki rezystorów nieliniowych pokazane na rys. 2.
Równanie (d) rozwiązywano wykorzystując opracowany ogólny program komputerowy rozwiązywania równań o postaci (1), zmodyfikowanych do homotopii (17) lub (23), na podstawie zależności (16) i (17). Program napisano w języku Fortran, wykorzystując procedury biblioteki systemu Odra 1305:

a) obliczania wyznacznika macierzy - F4DET; do formowania równań różniczkowych o postaci (16) na podstawie macierzy (22) i (25),
b) rozwiązywania równań (16) metodą Runge-Kutty 4-rzędu - F4RUNG,
c) rozwiązywania układu równań liniowych - FPINDE, przy rozwiązywaniu równania (21) oraz przy poszukiwaniu kolejnych przybliżeń rozwiązania równania (1) na podstawie zależności (17).

W tabeli 2 przedstawiono wyniki rozwiązania równania (d) na podstawie zależności (16) dla przybliżenia startowego $x^0 = [0\ 5\ 0]$, co odpowiada macierzy K=0.



Rys. 2. Charakterystyki rezystorów nieliniowych
Fig. 2. Characteristics of nonlinear resistors

Tabela 2

Homotopia	Δs	$s(t_x)$	t_x
(17)	0,05	$\begin{bmatrix} -0,1263494 \\ 2,6167815 \\ 2,4899940 \end{bmatrix}$	t(0,80 = 1,077
	0,01	$\begin{bmatrix} -0,1369311 \\ 2,7315580 \\ 2,3834697 \end{bmatrix}$	t(0,76) = 1,004
(23)	0,05	$\begin{bmatrix} -0,1611111 \\ 2,6388889 \\ 2,4953704 \end{bmatrix}$	t(0,85) = 1,046
	0,01	$\begin{bmatrix} -0,1422222 \\ 0,2722222 \\ 2,3962963 \end{bmatrix}$	t(0,82) = 1,020

Uzyskane rezultaty pozwoliły na otrzymanie w jednej iteracji (17) rozwiązania:

$$x^{*} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,150 \\ 2,750 \\ 2,375 \end{bmatrix}$$

z błędem $\|\Delta x\|_1 \leq 10^{-8}$.

LITERATURA

[1] Chua L.O., Lin P.M.: Komputerowa analiza układów elektronicznych, WNT, Warszawa 1981.

[2] Ortega I.M., Rheinboldt W.C.: Iterative solution of nonlinear equations in several variables, Academic Press, New York 1970.

[3] Krupowicz A.: Metody numeryczne zagadnień początkowych równań różniczkowych zwyczajnych. PWN, Warszawa 1986.

[4] Garczarczyk Z.: Metoda kontynuacji w analizie hybrydowej sieci rezystancyjnych nieliniowych, Materiały X SPETO, Wisła 1987.

[5] Garcia C.B., Zangwill W.I.: An approach to homotopy and degree theory, Mathematics of Operations Research 4, 1980.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Stanisław Osowski

Wpłynęło do redakcji dnia 21 kwietnia 1988 r.

ГЛОБАЛЬНО СХОДИМЫЙ ГИБРИДНЫЙ АНАЛИЗ

Р е з ю м е

В статье представлен алгритм гибридного анализа нелинейных резистивных цепей. Алгоритм основан на методе продолжения решения по параметру. Алгоритм имеет две фазы. В первой он связан с решением задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка сопряженных с гомотопийно модифицированными гибридными уравнениями цепи. Во второй фазе решаются гибридные уравнения методом Ньютона - Рафсона с первоначальным приближением, полученным в первой фазе. Полезность алгоритма показывает пример численного расчета нелинейной цепи.

A GLOBALLY CONVERGENT HYBRID ANALYSIS

S u m m a r y

A globally convergent algorithm of the hybrid analysis of nonlinear resistive networks based on continuation method has been presented in the paper. The algorithm has two phases.
In the first one, it is related to the solution of initial value problem of the systems of first order ordinary differential equations associated with homotopy modified hybrid equations of the network.
In the second phase, hybrid equations are solved by Newton-Raphson method with the initial approximation obtained from the first phase. Usefulness of the algorithm has been demonstrated by numerical computation of a chosen nonlinear network.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: ELEKTRYKA z. 113 Nr kol. 983

Maciej SIWCZYŃSKI
Jadwiga KRYCH
Krystyna HANUSIK

KOMPUTEROWA ANALIZA ANALOGOWYCH FILTRÓW PRZESTRAJANYCH

Streszczenie. W pracy opisano nową metodę komputerowego modelowania dynamiki i drgań liniowych układów parametrycznych. We wstępie omówiono metodę cyfrowego modelowania operatora splotu. Polega ona na równoczesnym próbkowaniu w dziedzinie czasu i częstotliwości i posiada dobrą dokładność, gdy w układzie nie występują ostre rezonanse amplitudowe i fazowe. Czasową zależność parametrów wprowadzono w formie dodatkowego sprzężenia zwrotnego. Prowadzi to bezpośrednio do równania całkowego Volterry. W pracy opisano metodę cyfrowego modelowania jądra równania Volterry i efektywnego jego rozwiązania. Istniejące w układzie warunki początkowe uwzględniono w postaci dodatkowego sygnału wejściowego. Przeprowadzono przykładową analizę filtru selektywnego z przestrajaną częstotliwością rezonansową. Podana tu metoda znajdzie zastosowanie do badania dynamiki układów nieliniowych opisanych równaniami Voltery. Nieliniowe równania całkowe zamieniane są wówczas na przyrostowe równania liniowe, które modelowane są układem z parametrycznym sprzężeniem zwrotnym.

1. Modelowanie czasowe liniowych operatorów czasowo niezmienniczych

Operator liniowego układu czasowo niezmienniczego jest splotem:

$$H\,x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-r)x(r)dr\ , \tag{1}$$

gdzie h jest tzw. pojedynczą odpowiedzią impulsową układu spełniającą warunek przyczynowości:

$$h(t) = 0 \qquad \text{dla} \qquad t < 0\ .$$

Równomierne próbkowanie w dziedzinie czasu zmienia operator (1) na równoważny operator splotowy dyskretny:

$$H_D\, x_D(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_D(n-m)x_D(m)\ , \tag{2}$$

gdzie h_D jest przyczynową dyskretną odpowiedzią impulsową układu, którą można otrzymać numerycznie z charakterystyki częstotliwościowej $\bar{h}$ układu oryginalnego za pomocą wzoru przybliżonego:

$$h_D(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{j2\pi\frac{mn}{N}} \bar{h}\left(j \frac{2}{\tau} \operatorname{tg} \pi\frac{m}{N}\right) , \tag{3}$$

gdzie:

τ – krok dyskretyzacji,

N – ilość punktów równomiernego podziału okręgu jednostkowego.

Wzór (3) posiada dobrą dokładność, gdy w układzie nie występują ostre rezonanse amplitudowe i fazowe.

Przejście sygnału T-okresowego przez układ liniowy czasowo niezmienniczy opisuje operator splotu cyklicznego:

$$\tilde{H}\, x(t) = \int_0^T h(t - r)x(r)dr , \tag{4}$$

gdzie $\tilde{h}$ jest tzw. cykliczną odpowiedzią impulsową układu związaną z pojedynczą odpowiedzią impulsową związkiem:

$$\tilde{h}(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h(t + pT) , \tag{5}$$

skąd wynika T-okresowość funkcji $\tilde{h}$.

Przez próbkowanie z odstępem τ splot cykliczny (4) można zamienić na dyskretny splot cykliczny:

$$\tilde{H}_D\, x_D(n) = \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{h}_D(n - m)x_D(m) , \tag{6}$$

gdzie M jest liczbą próbek w okresie T. Cykliczną odpowiedź impulsową $\tilde{h}_D$ modelu dyskretnego można otrzymać z pojedynczej odpowiedzi impulsowej h_D:

$$\tilde{h}_D(n) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h_D(n + pM) , \tag{7}$$

gdzie $n = 0,1,\ldots,N-1$ i $N > M$.

2. Modelowanie czasowe liniowych operatorów czasowo zależnych

Liniowy operator czasowo zależny ma postać:

$$H\,x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t,\ t-r)x(r)dr\ . \tag{8}$$

Operator ten przekształca sygnał T-okresowy w sygnał T-okresowy, gdy jądro jest okresowe względem pierwszego argumentu:

$$h(t+T,\ t-r) = h(t,\ t-r). \tag{9}$$

Jeśli podstawić:

$$g(t,r) = h(t,\ t-r),$$

to warunek okresowości przyjmie postać:

$$g(t+T,\ r+T) = g(t,r)\ .$$

Oznacza to, że jądro g musi być okresowe względem obu argumentów.

Operator cykliczny odwzorowujący zbiór sygnałów okresowych w siebie można zapisać w formie:

$$\tilde{H}\,x(t) = \int_{0}^{T} \tilde{h}(t,\ t-r)x(r)dr\ , \tag{10}$$

gdzie:

$$\tilde{h}(t,\ t-r) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h(t,\ t-r+pT) \tag{11}$$

jest jądrem okresowym względem zmiennych t i $t-r$.

Dla sygnałów spróbkowanych liniowy operator czasowo zależny przyjmie postać:

$$H_D\,x_D(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_D(n,\ n-m)x_D(m) \tag{12}$$

gdzie:

$$h_D(n,\ n-m) = \tau h\left[n\tau, (n-m)\tau\right]. \tag{13}$$

3. Równanie całkowe Volterry liniowych układów czasowo zależnych

Model rzeczywistego układu liniowego o zmiennych parametrach i zerowych warunkach początkowych przedstawić można w postaci układu z jednym wejściem x i wyjściem y. Związek między sygnałem wejściowym x i wyjściowym y opisany jest równaniem różniczkowym:

$$\sum_{k=0}^{p}\left[a_k - b_k(t)\right] y^{(k)}(t) = x(t) \tag{14}$$

z warunkiem początkowym $y^{(k)}(0) = 0$ dla $k = 0,\ldots,p-1$
lub

$$\sum_{k=0}^{p} a_k\, y^{(k)}(t) = x(t) + \sum_{k=0}^{p} b_k(t) y^{(k)}(t) \tag{15}$$

przy

$$y^{(k)}(0) = 0 \quad \text{dla} \quad k = 0,\ldots,p-1.$$

Wprowadzając sygnał pomocniczy $v(t)$:

$$v(t) = \sum_{k=0}^{p} b_k(t) y^{(k)}(t) \tag{16}$$

równanie (15) można zapisać w formie:

$$\sum_{k=0}^{p} a_k\, y^{(k)}(t) = x(t) + v(t). \tag{17}$$

Wyrażenie (17) jest równaniem liniowym o stałych parametrach. Może być zatem rozwiązane za pomocą operatora splotowego:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_o(t - r)x(r)dr + \int_{-\infty}^{\infty} h_o(t - r)v(r)dr \tag{18}$$

gdzie:

$$\bar{h}_o(s) = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{p} a_k\, s^k}.$$

Wykonując przekształcenie Laplace'a na równaniu (18), otrzymuje się:

$$\overline{y}(s) = \overline{h}_o(s)\cdot\overline{x}(s) + \overline{h}_o(s)\cdot\overline{v}(s)\ , \tag{19}$$

skąd:

$$s^k\ \overline{y}(s) = s^k\ \overline{h}_o(s)\overline{x}(s) + s^k\ \overline{h}_o(s)\overline{v}(s)\ . \tag{20}$$

Po przedstawieniu:

$$\overline{h}_k(s) = s^k\ \overline{h}_o(s) = \frac{s^k}{\sum\limits_{q=0}^{k} a_q\ s^q}\ , \qquad k = 0,1,\dots,p\ . \tag{21}$$

Z wyrażeń (16) i (20) otrzymuje się:

$$v(t) = \sum_{k=0}^{p} b_k(t) \int_{-\infty}^{\infty} h_k(t-r)x(r)dr + \sum_{k=0}^{p} b_k(t) \int_{-\infty}^{\infty} h_k(t-r)v(r)dr \tag{22}$$

albo

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} b(t,\ t-r)x(r)dr + \int_{-\infty}^{\infty} b(t,\ t-r)v(r)dr\ , \tag{23}$$

gdzie:

$$b(t,\ t-r) = \sum_{k=0}^{p} b_k(t)h_k(t-r)\ , \tag{24}$$

a funkcje impulsowe h_k są k-tymi pochodnymi dystrybucyjnymi funkcji impulsowej h_o układu czasowo niezależnego o parametrach $a_o,\dots,a_k$.

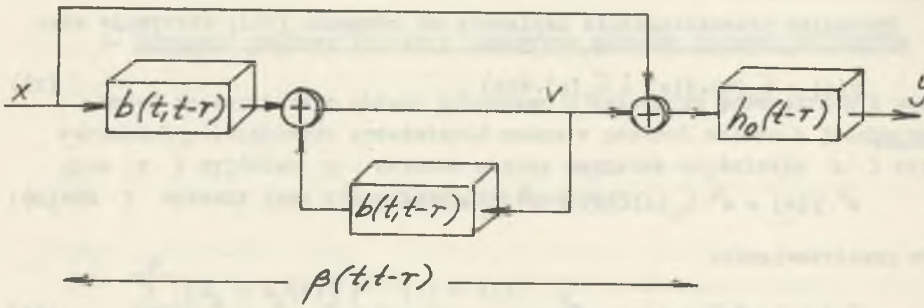
Równanie całkowe (23) jest równaniem Volterry.
Przyczynowość funkcji h_k:

$$h_k(t-r) = 0 \qquad \text{dla} \qquad r > t \qquad k = 0,1,\dots,p$$

pociąga za sobą warunek przyczynowości:

$$b(t,\ t-r) = 0 \qquad \text{dla} \qquad r > t\ .$$

Rysunek 1 przedstawia schemat blokowy układu opisanego równaniem całkowym (23). Poszczególne bloki schematu zawierają jądra odpowiadających im operatorów całkowych.



Rys. 1
Fig. 1

Ten schemat blokowy można zredukować. Z równania:

$$\beta = \delta + (\delta - b)^{-1} \circ b ,$$

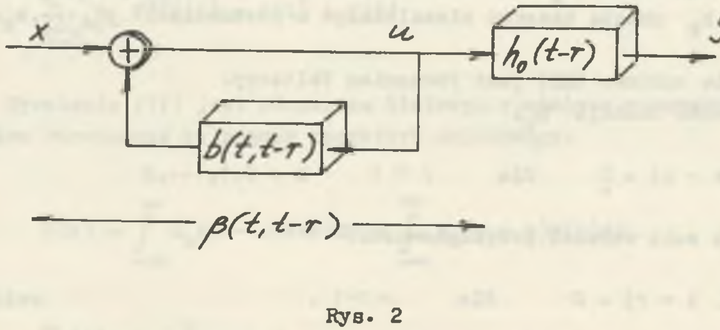
gdzie δ (funkcja Diraca) jest jądrem całkowego operatora tożsamościowego, a β jest jądrem operatora zastępczego (patrz rys. 1), otrzymuje się:

$$(\delta - b) \cdot \beta = (\delta - b) \cdot \delta + b = \delta - b + b = \delta$$

skąd:

$$\beta = (\delta - b)^{-1}. \tag{25}$$

Ze wzoru (25) wynika uproszczony schemat blokowy układu przedstawiony na rys. 2.



Rys. 2
Fig. 2

Zredukowana część schematu blokowego może być opisana równaniem całkowym Volterry:

$$u(t) = x(t) + \int_{-\infty}^{\infty} b(t,\ t - r)u(r)dr\ . \tag{26}$$

Próbkowanie czasowe zmienia równanie (26) w równanie dyskretne:

$$u_D(n) = x_D(n) + \sum_{m=-\infty}^{n} b_D(n,\ n - m)u_D(m)\ , \tag{27}$$

gdzie:

$$b_D(n,\ n - m) = \sum_{k=0}^{p} b_k(n\tau)h_{kD}(n - m)\ , \tag{28}$$

$$h_{kD}(n) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} e^{j2\pi\frac{mn}{N}}\,\overline{h}_k\left(j\,\frac{2}{\tau}\,\mathrm{tg}\,\pi\frac{m}{N}\right)\ , \tag{29}$$

$k = 0,1,\ldots,p.$

Kolejne przekształcenia równania (27) dają:

$$u_D(n) = x_D(n) + \sum_{m=-\infty}^{n-1} b_D(n,\ n - m)u_D(m) + b_D(n,\ 0)u_D(n)\ ,$$

skąd:

$$U_D(n) = \frac{1}{1-b_D(n,0)}\,x_D(n) + \frac{1}{1-b_D(n,0)}\sum_{m=-\infty}^{n-1} b_D(n,n-m)u_D(m). \tag{30}$$

Wzór (30) w sposób rekursywny pozwala wyznaczyć kolejne próbki sygnału u_D. Próbki sygnału wyjściowego określa wzór:

$$y_D(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} h_{oD}(n - m)u(m)\ . \tag{31}$$

Związek między sygnałem wejściowym x a wyjściowym y można opisać równaniem różniczkowym odpowiadającym postaci (14):

$$\sum_{k=0}^{p}\left[f_k\,y\right]^{(k)}(t) = x(t) \tag{32}$$

przy warunkach początkowych $y^{(k)}(0) = y_k$ dla $k = 0,1,\dots,k-1$, gdzie $f_k(t) = a_k - b_k(t)$ jest funkcją ograniczoną, a współczynniki a_k są stałe i takie, że wyrażenie $\dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{p} a_k s^k}$ jest rekursywnie stabilne.

Czyli można zapisać:

$$\sum_{k=0}^{p} a_k\, y^{(k)}(t) = x(t) + \sum_{k=0}^{p}\Big[b_k(t)y(t)\Big]^{(k)} \tag{33}$$

przy warunkach początkowych

$$y^{(k)}(0) = y_k\,,$$

Na równaniu (33) wykonano przekształcenie Laplace'a, oznaczając $(b_k\, a)^{(k)}(0) = (b_k\, y)_k$:

$$\sum_{k=0}^{p} a_k\Big[s^k\, y(s) - \sum_{l=1}^{k} s^{k-1}\, y_{l-1}\Big] + a_0\, \overline{y}(s) = \overline{x}(s) +$$

$$= \sum_{k=1}^{p}\Big[s^k(\overline{b_k\, y})(s) - \sum_{l=1}^{k} s^{k-1}(b_k\, y)_{l-1}\Big] + (\overline{b_0\, y})(s)\,. \tag{34}$$

Wtedy transformata Laplace'a sygnału wyjściowego ma postać:

$$\overline{y}(s) = \sum_{k=0}^{p} \overline{h}_k(s)(\overline{b_k\, y})(s) + \overline{h}_0(s)\Big\{\overline{x}(s) +$$

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{k}\Big[a_k\, s^{k-1}\, y_{l-1} - s^{k-1}(b_k\, y)_{l-1}\Big]\Big\} \tag{35}$$

gdzie:

$$\overline{h}_0(s) = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{p} a_k\, s^k}\,,\qquad \overline{h}_k(s) = s^k\, \overline{h}_0(s),\qquad k = 0,1,\dots,p.$$

Po przekształceniu odwrotnym:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{p} \int_{-\infty}^{\infty} h_k(t - r)b_k(r)y(r)dr + \int_{-\infty}^{\infty} h_o(t - r)x(r)dr +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{k} h_{k-l}(t)\left[a_k\, y_{l-1} + (b_k\, y)_{l-1}\right] \tag{36}$$

gdzie:

$$h_{k-l}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[h_{k-l}(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^{k-l}}{\sum_{k=0}^{p} a_k s^k}\right], \quad k = 0,1,\dots,p\,, \quad l = 1,2,\dots,k\,.$$

Po zmianie kolejności sumowania oraz całkowania i przy oznaczeniu:

$$bg(t,\ t - r) = \sum_{k=0}^{p} h_k(t - r)b_k(r)\,, \tag{37}$$

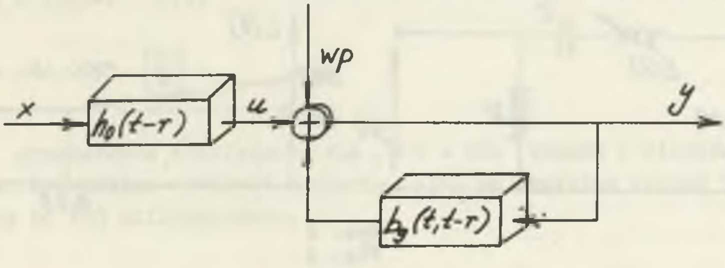
$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_o(t - r)x(r)dr \tag{38}$$

otrzymuje się:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} bg(t,\ t-r)y(r)dr + u(t) + \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{k} h_{k-l}(t)\left[a_k y_{l-1} + (b_k y)_{l-1}\right], \tag{39}$$

Otrzymane równanie (39) jest równaniem Volterry. Funkcje impulsowe h_k są przyczynowe. Warunek przyczynowości $h_k(t-r) = 0$ dla $r > t$, $k=0,1,\dots p$ pociąga za sobą warunek $bg(t,t-r)=0$ dla $r > t$.

Schemat blokowy równania (39) przedstawia rys. 3.



Rys. 3
Fig. 3

Niezerowe warunki początkowe wprowadzone są sygnałem oznaczonym przez wp:

$$wp = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{k} h_{k-l}(t)\left[a_k\, y_{l-1} + (b_k\, y)_{l-1}\right]$$

Po dyskretyzacji czasu wyrażenia (37)-(39) przyjmują postać:

$$y(n\tau) = \sum_{m=0}^{n-1} \tau bg\left[n\tau,\ (n-m)\tau\right] y(m\tau) + u(n\tau) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{k} h_{k-l}(n\tau)\left[a_k\, y_{l-1} + (b_k\, y)_{l-1}\right], \tag{40}$$

gdzie:

$$bg\left[n\tau, (n-m)\tau\right] = \sum_{k=0}^{p} h_k\left[(n-m)\tau\right] b_k(m\tau),$$

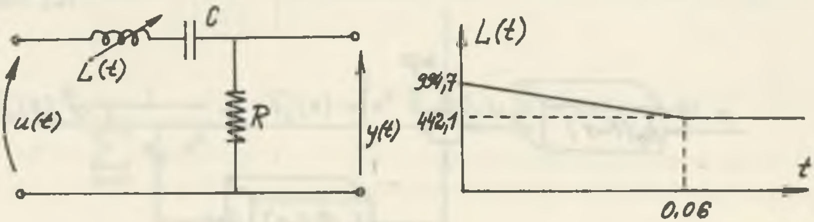
$$u(n\tau) = \sum_{m=0}^{n-1} \tau h_o\left[(n-m)\tau\right] x(m\tau),$$

$n = 0, 1, \ldots, N-1.$

Przed autorami stoi zadanie wykazania, kiedy i na ile przedstawiona metoda jest efektywna.

4. Przykład

W obwodzie, w którym indukcyjność L zależy od czasu (rys. 4), należy wyznaczyć napięcie y(t) na oporniku R:



Rys. 4
Fig. 4

$u(t) = 10 \sin 2\pi 50\, t\ [V]$, $C = 0{,}16\ 10^{-6} F$, $R = 10\,\Omega$.

Wg prawa Kirchoffa:

$$y(t) + \frac{1}{RC}\int_0^t y(\vartheta)d\vartheta + \frac{1}{R}\frac{d}{dt}\left[y(t)L(t)\right] = u(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{L(t)}{R}\,y(t)\right] + \frac{d}{dt}\,y(t) + \frac{1}{RC}\,y(t) = \frac{d}{dt}\,u(t)\,.$$

Przyjęto poniższe oznaczenia:

$$a2 - b2(t) = \frac{L(t)}{R} = \begin{cases} 99,47\ 10^{-3} - 0,921\ t\ \left[\frac{H}{\Omega}\right] & \text{dla} \quad 0 \leqslant t < 0,06\ s \\ 44,21\ 10^{-3}\left[\frac{H}{\Omega}\right] & \text{dla} \quad t \geqslant 0,06\ s \end{cases}$$

$$\frac{du}{dt} = x(t) = 3140\cos 314\ t,$$

$$a1 = 1,$$

$$a0 = \frac{1}{RC} = 6280\ \frac{1}{s}\,.$$

Wtedy równanie obwodu przyjmie postać:

$$a2\,\frac{d^2}{dt^2}\,y(t) + a1\,\frac{d}{dt}\,y(t) + a0\,y(t) = x(t) + \frac{d^2}{dt^2}\left[b2(t)y(t)\right],$$

gdzie:

$$a2 = 79,47\ 10^{-3}\ \frac{H}{\Omega}$$

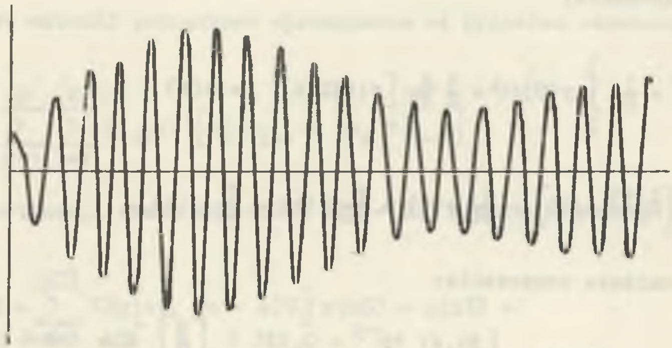
$$b2(t) = \begin{cases} -20\ 10^{-3} + 0,921\ t & \text{dla} \quad 0 \leqslant t < 0,06\ s \\ 35,26\ 10^{-3} & \text{dla} \quad t \geqslant 0,06\ s\,. \end{cases}$$

Warunki początkowe:

$$y(0) = 0,8767\quad [V],$$

$$\frac{dy}{dt} = -24,0095\ \left[\frac{V}{s}\right].$$

Rys. 5 przedstawia rozwiązanie dla N-1 = 256 kroków o długości τ = 1,5 ms. Maksymalna wielkość napięcia y(t) na oporniku wynosi 5,4 V i występuje po 120 milisekundach.



Rys. 5
Fig. 5

LITERATURA

[1] Marczuk G.J.: Analiza numeryczna zagadnień fizyki matematycznej. PWN, Warszawa 1983.

[2] Oppenheim A.W., Schafer R.M.: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. WKiŁ, Warszawa 1979.

[3] Siwczyński M.: Problemy i zadania z teorii obwodów i układów w ujęciu funkcjonalnym. Cz. I. Układy liniowe o stałych skupionych. Zielona Góra 1986.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Bernard Baron

Wpłynęło do redakcji dnia 20 maja 1988 r.

КОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРЕНАЛАЖИВАЕМЫХ ФИЛЬТРОВ

Р е з ю м е

В работе описывается новый метод компьютерного моделирования динамики и линейных колебаний параметрических систем. В введении описывается метод цифрового моделирования оператора свертки. Метод заключается в одновременной дискретизации по времени и по частоте. Метод достаточно точен в случае недостатка острых амплитудных и фазовых резонансов. Временная зависимость параметров введена в виде обратной связи. Это непосредственно ведет к интегральному уравнению Вольтерры. В работе описывается метод цифрового моделирования ядра уравнения Вольтерры и эффективного его решения. Начальные условия учитываются в виде добавочного входного сигнала. Проведен примерный анализ избирательного фильтра с переналажеваемой резонансной частотой. Предложенный метод найдет применение в исследовании динамики нелинейных систем описанных уравнениями Вольтерры. Нелинейные интегральные уравнения замещаются разностными линейными уравнениями, которые моделируются системой с параметрической обратной связью.

COMPUTER-AIDED ANALYSIS OF RETUNED ANALOG FILTERS

S u m m a r y

New computer-aided method of the linear time-varying systems modelling has been described in the work. The convolution operator numerical modelling has been discussed in the preface. It consists in time and frequency sampling, simultaneously, and has sufficient accuracy when there are no frequency peaks in the circuit. Time - varying parameters have been introduced in the form of additional feedback. It leads directly to the Volterra integral equation. The method of numerical modelling the Volterra equation's kernel and solving it effectively has been described in the work.

The initial conditions existing in the circuit have been taken into account in the form of additional input signal. An example of the analysis of the selective filter with pretuned resonance frequency has been presented.

The method given herein may be applied to testing dynamics of nonlinear systems described by Volterra equtions. Then the nonlinear integral equations are changed for incremental linear equations with time-varying parametric feedback.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: ELEKTRYKA z. 113 Nr kol. 983

Jan CHOJCAN
Lucjan KARWAN

NIEZMIENNIKI WRAŻLIWOŚCI W OBWODACH SKOLIGACONYCH

Streszczenie. Rozszerzono właściwości obwodów podobnych o związki między wrażliwościami transmitancji na zmiany parametrów tych obwodów.
Rozpatrzono dwie klasy obwodów podobnych, mianowicie: obwody skoligacone z inwersją impedancji oraz skoligacone z konwersją impedancji i przeanalizowano związki między wrażliwościami w tych obwodach. Otrzymano zależności pomiędzy wrażliwościami czterech typów transmitancji. Wrażliwości transmitancji względem identycznie położonych impedancji w obwodach skoligaconych z inwersją impedancji są ze sobą związane przez uogólnioną inwersję. Natomiast dla obwodów skoligaconych z konwersją impedancji te wrażliwości są równe dla każdego z czterech typów transmitancji. Zależności te można nazwać - w odróżnieniu od niezmienniczych właściwości sum wrażliwości - niezmienniczymi właściwościami składników wrażliwości (szczegółowymi niezmiennikami) w obwodach podobnych.
Podano przykład liczbowy i zwrócono uwagę na możliwości praktycznego wykorzystania szczegółowych niezmienników wrażliwości.

1. Wstęp

W pracach prof. Zagajewskiego dotyczących teorii podobieństwa obwodów wyróżnione są cztery typy podobieństwa obwodów elektrycznych, mianowicie:

Ia - obwody dualne z inwersją impedancji,
Ib - obwody dualne z konwersją impedancji,
IIa - obwody skoligacone z inwersją impedancji,
IIb - obwody skoligacone z konwersją impedancji.

Przez podobieństwo Autor rozumie "ścisłą zależność między określonymi właściwościami dwóch obwodów" [2]. W pracach prof. Zagajewskiego są podane następujące właściwości obwodów podobnych:

1^{o} - związki między prądami,
2^{o} - związki między napięciami,
3^{o} - związki między transmitancjami obwodów podobnych.

Ponieważ "wrażliwość jest immanentną cechą obwodu, tak jak transmitancja" [4], należy do teorii podobieństwa dodać związki między wrażliwościami w tych obwodach. Ten kierunek badań, zainspirowany pracami prof. Zagajewskiego, został zapoczątkowany w pracach [6] i [3]. Zauważmy, że obwody skoligacone są podklasą obwodów dołączonych [6].

W pracy rozpatrywane są obwody skoligacone z inwersją i konwersją impedancji. Obwody takie podlegają ogólnej zasadzie podobieństwa obwodów elektrycznych i znane są dla nich zależności między prądami, napięciami i transmitancjami [1, 2]. Rozważania w niniejszej pracy pozwalają określić związki między wrażliwościami transmitancji względem odpowiadających sobie gałęzi obwodów skoligaconych i można je uważać za naturalne rozszerzenie podanych w pracach [1] i [2] zależności dotyczących transmitancji. Uzyskane wyniki są uzupełnieniem pracy [3], w której przeprowadzono podobne rozważania dotyczące wrażliwości obwodów dualnych z inwersją i konwersją impedancji.

Rozważmy kolejno wrażliwości dla dwóch klas obwodów podobnych:

- obwodów skoligaconych (topologicznie jednakowych) z inwersją impedancji

$$z'_j\, z''_j = z_i^2 \tag{1}$$

gdzie z_i jest impedancją inwersji, z'_j impedancją gałęzi j' obwodu oryginalnego, z''_j impedancją identycznie położonej gałęzi j'' w obwodzie skoligaconym,

- obwodów skoligaconych (topologicznie jednakowych) z konwersją impedancji

$$\frac{z'_j}{z''_j} = A \tag{2}$$

gdzie A jest stałą konwersji.

2. Obwody skoligacone z inwersją impedancji

Obwody o identycznej strukturze (topologii) mają macierze impedancyjne o tej samej strukturze. Stąd:

$$K'_{uu} = \frac{u'_2}{u'_1} = f(z'_1,\ldots,z'_j,\ldots,z'_n) \tag{3}$$

$$K''_{uu} = \frac{u''_2}{u''_1} = f(z''_1,\ldots,z''_j,\ldots,z''_n) \tag{4}$$

gdzie K'_{uu} odnosi się do obwodu oryginalnego, K''_{uu} do obwodu z nim skoligaconego.

Uwzględniając we wzorze (4) zależność (1) mamy:

$$K''_{uu} = f(z_i^2/z'_1,\ldots,z_i^2/z'_j,\ldots,z_i^2/z'_n).$$

Ponieważ transmitancja napięciowa jest funkcją jednorodną stopnia zerowego, więc:

$$K''_{uu} = f(1/z'_1,\ldots,1/z'_j,\ldots,1/z'_n)\ . \tag{5}$$

Przekształcenie zależności (3) w (5) jest nazywane uogólnioną inwersją [1] i oznaczane następująco:

$$K''_{uu} = i(K'_{uu}). \tag{6}$$

Zatem na ogół transmitancje napięciowe obu obwodów będą różne. Przejdźmy teraz do wrażliwości transmitancji napięciowych w obu obwodach.

Wprowadzając następujące oznaczenia dla wrażliwości transmitancji w pierwszym obwodzie względem impedancji gałęzi j':

$$S_{z'_j}^{K'_{uu}} = \frac{\partial f(z'_1,\ldots,z'_j,\ldots,z'_n)}{\partial z'}\ \frac{z'_j}{f(z'_1,\ldots,z'_j,\ldots,z'_n)} =$$

$$= \frac{g(z'_1,\ldots,z'_j,\ldots,z'_n)}{f(z'_1,\ldots,z'_j,\ldots,z'_n)}\ z'_j = h(z'_1,\ldots,z'_j,\ldots,z'_n)\ , \tag{7}$$

Obliczamy wrażliwości w drugim obwodzie względem identycznie położonej impedancji w gałęzi j'':

$$S_{z''_j}^{K''_{uu}} = \frac{\partial f(z''_1,\ldots,z''_j,\ldots,z''_n)}{\partial z''_j}\ \frac{z''_j}{f(z''_1,\ldots,z''_j,\ldots,z''_n)}\ . \tag{8}$$

Uwzględniając inwersję impedancji $z''_j = z_i^2/z'_j = z_i^2 Y'_j$ mamy:

$$S_{z''_j}^{K''_{uu}} = \frac{\partial}{\partial z_j}\ f(z_i^2 Y'_1,\ldots,z_i^2 Y'_j,\ldots,z_i^2 Y'_n)\ \frac{z_i^2\ Y'}{f(z_i^2\ Y'_1,\ldots,z_i^2\ Y'_n)}\ .$$

Ale f jest funkcją jednorodną stopnia zerowego, więc:

$$S_{z_j''}^{K_{uu}''} = \frac{\partial}{\partial z_j''} f(Y_1',\ldots,Y_j'(z_j''),\ldots,Y_n') \frac{z_i^2 Y_j'}{f(Y_1',\ldots,Y_j',\ldots,Y_n')} =$$

$$= \frac{\partial f(Y_1',\ldots,Y_j',\ldots,Y_n')_1}{\partial Y_j'} \frac{z_i^2 Y_j'}{z_i^2 f(Y_1',\ldots,Y_j',\ldots,Y_n')} =$$

$$= \frac{g(Y_1',\ldots,Y_j',\ldots,Y_n')}{f(Y_1',\ldots,Y_j',\ldots,Y_n')} Y_j' = h(Y_1',\ldots,Y_j',\ldots,Y_n') =$$

$$= h(1/z_1',\ldots,1/z_j',\ldots,1/z_n') = i\{h(z_1',\ldots,z_j',\ldots,z_n')\}.$$

Zatem:

$$S_{z_j''}^{K_{uu}''} = i(S_{z_j'}^{K_{uu}'}). \tag{9}$$

Wrażliwości transmitancji napięciowych względem identycznie położonych impedancji w obu obwodach są podobnie jak transmitancje związane przez uogólnioną inwersję. Podobnie można wykazać, że dla transmitancji prądowych:

$$K_{II}'' = \frac{I_2''}{I_1''} = i(K_{II}') \tag{10}$$

$$S_{z_j''}^{K_{II}''} = i(S_{z_j'}^{K_{II}'}) . \tag{11}$$

Dla transadmitancji mamy:

$$K_{UI}'' = \frac{I_2''}{U_1''} = \frac{1}{z_i^2} i(K_{UI}') \tag{12}$$

$$S_{z_j''}^{K_{UI}''} = i(S_{z_j'}^{K_{UI}'}) . \tag{13}$$

Podobnie dla transimpedancji:

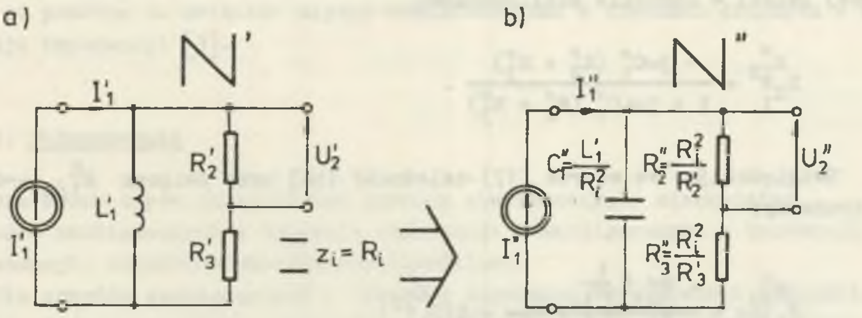
$$K''_{IU} = \frac{U''_2}{I''_1} = z_i^2 i(K'_{IU}) \tag{14}$$

$$S_{z''_j}^{K''_{IU}} = i(S_{z'_j}^{K'_{IU}}) \tag{15}$$

Zwróćmy uwagę, że zależności (9), (11), (13), (15) są analogiczne do zależności między wrażliwościami obwodów dualnych z konwersją impedancji [3].

Przykład

Sprawdzić słuszność zależności (15) wrażliwości transimpedancji dla obwodu podstawowego N' przedstawionego na rys. 1a oraz obwodu z nim skoligaconego z inwersją impedancji dla impedancji inwersji $z_i = R_i$, na zmianę parametru pierwszej gałęzi.



Rys. 1. Obwód podstawowy N' (a) i skoligacony z nim z inwersją impedancji obwód N" (b) dla impedancji inwersji $z_i = R_i$

Fig. 1. The basic network N' (a) and the affined network with impedance inversion N" (b) (impedance inversion $z_i = R_i$)

Obwód skoligacony N" przedstawiono na rys. 1b. Transimpedancja obwodu podstawowego N' równa się:

$$K'_{IU} = \frac{j\omega L'_1 R'_2}{j\omega L'_1 + R'_2 + R'_3}$$

natomiast transimpedancja obwodu skoligaconego N" określona jest zależnością:

$$K''_{IU} = \frac{R'_2}{1 + j\omega C''_1 \left(R''_2 + R''_3\right)} \tag{16}$$

gdzie:

$$C''_1 = \frac{L'_1}{R_1^2}, \quad R''_2 = \frac{R_1^2}{R'_2}, \quad R''_3 = \frac{R_1^2}{R'_3}.$$

Wrażliwość transimpedancji obwodu oryginalnego względem parametru pierwszej gałęzi:

$$S_{L'_1}^{K'_{IU}} = \frac{R'_2 + R'_3}{j\omega L'_1 + R'_2 + R'_3}$$

Natomiast wrażliwość podobnej transimpedancji względem parametru pierwszej gałęzi w obwodzie skoligaconym:

$$S_{C''_1}^{K''_{IU}} = \frac{-\,j\omega C''_1 \left(R''_2 + R''_3\right)}{1 + j\omega C''_1 \left(R''_2 + R''_3\right)}. \tag{17}$$

Uwzględniając we wzorze (17) zależność (16) oraz związek $S_{1/x}^{K} = -S_{x}^{K}$ otrzymamy:

$$S_{1/C''_1}^{K''_{IU}} = \frac{\frac{1}{R'_2} + \frac{1}{R'_3}}{\frac{1}{j\omega L'_1} + \frac{1}{R'_2} + \frac{1}{R'_3}} = 1\left(S_{L'_1}^{K'_{IU}}\right). \tag{18}$$

3. <u>Obwody skoligacone z konwersją impedancji</u>

Rozpatrzmy na przykład wrażliwości transadmitancji wzgledem odpowiadających sobie impedancji gałęzi j' oraz j'':

$$S_{z''_j}^{K''_{UI}} = \frac{z''_j}{K''_{UI}(z'_1,\ldots,z'_j,\ldots,z'_n)\,\partial z''_j}\, \partial\, K''_{UI}(z'_1,\ldots,z'_j,\ldots,z'_n).$$

Uwzględniając konwersję impedancji $z''_j = \frac{z'_j}{A}$ oraz zależności między transmitancjami obwodów skoligaoonych z konwersją impedancji $K''_{UI} = A\,K'_{UI}$, gdzie A - stała konwersji impedancji mamy:

$$S^{K''_{UI}}_{z''_j} = \frac{z'_j}{A^2\,K'_{UI}(z'_1,\ldots,z'_j,\ldots,z'_n)}\frac{\partial}{\partial z''_j}\left(AK'_{UI}[z'_1,\ldots,z'_j(z''_j),\ldots,z_n]\right) =$$

$$= \frac{z'_j}{A^2\,K'_{UI}(z'_1,\ldots,z'_j,\ldots,z'_n)}\,A\,\frac{\partial K'_{UI}(z'_1,\ldots,z'_j,\ldots,z'_n)}{\partial z'_j}\,A =$$

$$= \frac{z'_j}{K'_{UI}(z'_1,\ldots,z'_j,\ldots,z'_n)}\,\frac{\partial K'_{UI}(z'_1,\ldots,z'_j,\ldots,z'_n)}{\partial z'_j} = S^{K'_{UI}}_{z'_j}\,. \tag{19}$$

Podobnie można wykazać równość wrażliwości trzech pozostałych rodzajów transmitancji względem odpowiadających sobie gałęzi. Zwróćmy uwagę, że uzyskane zależności dla wrażliwości obwodów skoligaconych z konwersją impedancji są podobne do związków między wrażliwościami w obwodach dualnych z inwersją impedancji [3].

4. Podsumowanie

Dla dwóch typów podobieństwa obwodów elektrycznych, mianowicie: obwodów skoligaconych z inwersją impedancji i skoligaconych z konwersją impedancji, określono związki wrażliwościowe.

Dla obwodów skoligaconych z inwersją impedancji wrażliwości transmitancji względem parametrów identycznie położonych gałęzi są związane przez uogólnioną inwersję, tj. $S^{T''}_{z''_j} = i(S^{T'}_{z'_j})$, gdzie T oznacza jedną z czterech transmitancji K_{UU}, K_{II}, K_{IU}, K_{UI}. Otrzymana zależność jest podobna do zależności między wrażliwościami w obwodach dualnych z konwersją impedancji.

Dla obwodów skoligaconych z konwersją impedancji analogiczne wrażliwości są sobie wprost równe, tj. $S^{T''}_{z''_j} = S^{T'}_{z'_j}$, podobnie jak w obwodach dualnych z inwersją impedancji. Uzyskane rezultaty dla tych dwóch typów podobieństwa obwodów można by nazwać niezmienniczymi właściwościami składników sumy wrażliwości, w odróżnieniu od znanych niezmienniczych własności całej sumy wrażliwości [4-8], obowiązujących dla szerszej klasy obwodów.

Podane w pracy niezmiennicze właściwości składników sumy wrażliwości obwodów podobnych można wykorzystać do określania optymalnych struktur, np. układów generacyjnych.

LITERATURA

[1] Zagajewski T.: General Principles of Similarity of Electric Networks, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn., 20 (1972), p. 417.

[2] Zagajewski T.: Ogólne zasady podobieństwa obwodów elektrycznych, Arch. Elektr., T. XXII, Z. 2, 1973.

[3] Chojcan J., Karwan L.: Wrażliwości obwodów dualnych, Mat. X, KKTOiUE, Gdańsk, 1987, s. 289-294.

[4] Geher K.: Teoria tolerancji i wrażliwości układów elektronicznych, WNT, Warszawa 1976.

[5] Fidler J.K.: Some topics in network sensitivity, Pr. Nauk. ITiA Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1977.

[6] Chojcan J.: Niektóre problemy wrażliwości wyższych rzędów układów elektronicznych, ZN Politechniki Śląskiej, Automatyka Z. 88, Gliwice 1987.

[7] Tadeusiewicz M., Tworko M.: Obliczanie wrażliwości drugiego rzędu nieliniowych obwodów elektrycznych, Mat. X SPETO, Wisła 1987, s. 293-302.

[8] Chojcan J., Karwan L.: Wrażliwości wyższych rzędów względem częstotliwości, Mat. X SPETO, Wisła 1987, s. 303-308.

[9] Chojcan J., Karwan L.: Wrażliwości obwodów skoligaconych, Mat. XI SPETO Wisła 1988, s. 345-349.

Recenzent: doc. dr inż. Zdzisław Trzaska

Wpłynęło do redakcji dnia 20 maja 1988 r.

ИНВАРИАНТЫ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ В АФФИННЫХ ЦЕПЯХ

Р е з ю м е

Работа посвящена инвариантом чувствительности в аффинных цепях с инверсией и конверсией импедансов.

Для каждово типа подобия получены связи между чувствительностями трансмитансов четирех типов. Чувствительности трансмитансов соотстветствующих друг другу элементов аффинных цепей с инверсией импеданса связяны общен инверсией. В цепях аффинных с конверсией импеданса эти чуствительности ровны для четырех типов трансмитанса.

SENSITIVITY INVARIANTS IN AFFINED NETWORKS

S u m m a r y

The features of similar networks have been extended by the relations between transmittance sensitivities to the changes in these networks parameters.
Two types of similar networks have been discussed, viz, the affined networks with impedance inversion and the affined ones with impedance conversion; the relations between sensitivities in these networks have been analysed.
The relations between sensitivities of four types of transmittance have been obtained.
Transmittance sensitivities in relation to identically situated impedances of the affined networks with impedance inversion are related to one another through a generalized inversion whereeas for the affined networks with impedance conversion these sensitivities are equal for each of the types of transmittance.
The relations may be called, as opposed to invariant features of sensitivities totals, the invariant features of sensitivity components (detailed invariants) in affined networks.
A numerical example has been given and our attention has been drawn to possibilities of practical use of the detailed invariants of sensitivity.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: ELEKTRYKA z. 113 Nr kol. 983

Andrzej DRYGAJŁO

MODUŁOWA POSTAĆ ALGORYTMÓW SZYBKIEJ TRANSFORMACJI WALSHA

Streszczenie. W pracy przeanalizowano algorytmy szybkiej transformacji Walsha pod kątem widzenia ich modułowości. Przedstawiono odpowiadające im struktury drzew pozwalające na bieżące równoległe wykonywanie podstawowych operacji motylkowych złożonych z operacji dodawania i odejmowania. Rozpatrzono dwie odmiany wielostopniowego przetwarzania, jedną wykorzystującą opóźnienia czasowe między próbkami sygnału, drugą opartą na zmianie częstotliwości próbkowania w kolejnych stopniach przetwarzania. Liczba operacji arytmetycznych wymagana dla otrzymania bieżącej N-punktowej transformaty jest proporcjonalna do $N\log_2 N$. Podano struktury dla naturalnego, diadycznego i sekwencyjnościowego uporządkowania w algorytmach szybkiej transformacji Walsha i porównano je z odpowiadającymi im strukturami algorytmów szybkiej transformacji Fouriera.

1. Wprowadzenie

Praktyczna przydatność dyskretnych transformacji, przede wszystkim dla potrzeb cyfrowego przetwarzania sygnałów, jest uwarunkowana możliwością budowy skutecznych algorytmów obliczeniowych do wyznaczania prostych i odwrotnych transformat. Z tego powodu istotne znaczenie mają algorytmy obliczeniowe redukujące liczbę operacji mnożenia i dodawania, które przyjęto nazywać algorytmami szybkich transformacji [1]. Do najbardziej efektywnych należą algorytmy szybkiej transformacji Walsha (FWT - Fast Walsh Transform) wymagające jedynie $N\log_2 N$ operacji dodawania i odejmowania [2]. Oprócz złożoności obliczeniowej coraz częściej rozpatrywana jest modułowość i możliwość bieżącego wykonywania algorytmów szybkich transformacji [3][4][5]. Struktury zapewniające modułowość algorytmów szybkich transformacji można złożyć ze struktur prostych filtrów cyfrowych. Podejście to, wykorzystane w przypadku algorytmów szybkiej transformacji Fouriera (FFT - Fast Fourier Transform), oparte jest na rekursywnej faktoryzacji wielomianów [6][7].

W niniejszej pracy zastosowano podejście wielomianowe w celu przekształcenia wybranych algorytmów FWT do postaci modułowej.

2. Algorytm modułowy z uporządkowaniem naturalnym

Jeden z podstawowych algorytmów szybkiej transformacji Walsha z uporządkowaniem naturalnym [8] wykorzystujący operacje motylkowe z podstawianiem można otrzymać za pomocą faktoryzacji macierzy Hadamarda w następujący sposób:

$$\underline{H}_N = \prod_{i=0}^{p-1} (\underline{I}_{2^{p-1-i}} \otimes \underline{H}_2 \otimes \underline{I}_{2^i}) \tag{1}$$

gdzie:

$\underline{H}_N$ - macierz Hadamarda o wymiarach $N \times N$,

$\underline{I}_{2^i}$ - macierz jednostkowa o wymiarach $2^i \times 2^i$.

Stąd dla N=8 macierz $\underline{H}_8$ można przedstawić w postaci następującej iloczynu macierzy i odpowiadającego mu grafu przepływu sygnału (rys. 1).

$$\underline{H}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Tak wyprowadzony algorytm FWT odpowiada ogólnej postaci transformacji ortogonalnej mającej strukturę drzewa (rys. 2) i opisanej następującym iloczynem macierzy [9]:

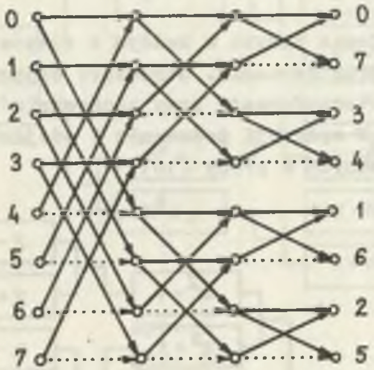
$$\left[\begin{array}{c:c} \underline{B}_1 & \underline{0}_N \\ \hdashline \underline{0}_N & \underline{B}_2 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c:c} a_{11}\underline{I}_N & a_{12}\underline{I}_N \\ \hdashline a_{21}\underline{I}_N & a_{22}\underline{I}_N \end{array}\right] \tag{3}$$

dla

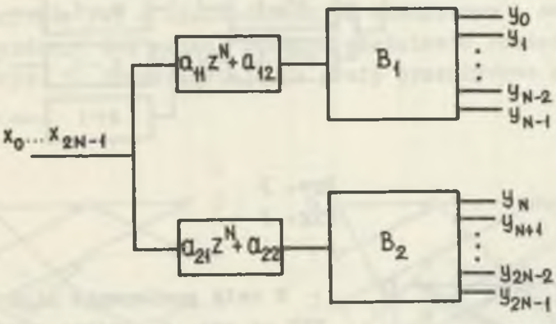
$$\underline{B}\,\underline{B}^T = \underline{I}_b, \qquad \underline{A}\,\underline{A}^T = \underline{I}_a \tag{4}$$

gdzie:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{I}}_a, \ \underline{\underline{I}}_b \text{ - macierze diagonalne.}$$



Rys. 1
Fig. 1



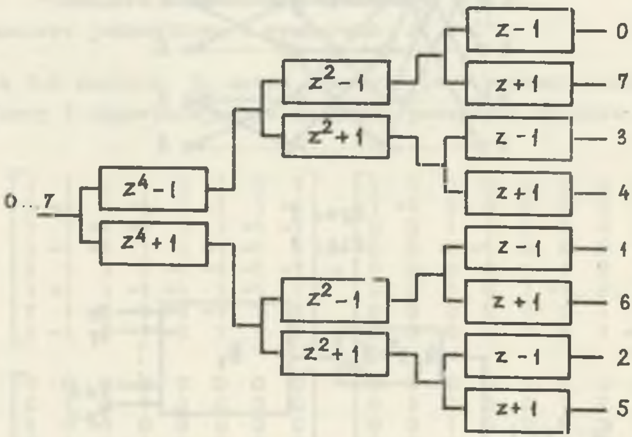
Rys. 2
Fig. 2

W przypadku FWT z uporządkowaniem naturalnym $a_{11} = a_{12} = a_{21} = 1$, $a_{22} = -1$ i przykładowa modułowa struktura FWT dla N=8 ma postać przedstawioną na rys. 3.

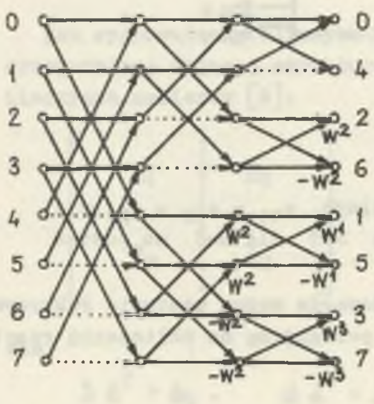
Widać stąd, że faktoryzację macierzy Hadamarda można zastąpić rekursywną faktoryzacją wielomianu $z^N - 1$, $N=2^p$, polegającą na obliczaniu reszt [6] w sposób wieloetapowy:

$$
\begin{aligned}
z^N - 1 &= (z^{N/2} - 1)(z^{N/2} + 1) \\
z^{N/2} - 1 &= (z^{N/4} - 1)(z^{N/4} + 1) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
z^2 - 1 &= (z - 1)(z + 1)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Zapewnia to rozdzielenie danych w każdym z etapów FWT i stwarza możliwość równoległego ich przetwarzania. Struktura drzewa z rys. 3 pozwala na obliczanie bieżącej transformaty przy zachowaniu złożoności obliczeniowej FWT równej $N\log_2 N$ operacji dodawania i odejmowania w odróżnieniu od N^2 operacji proponowanych w pracy [10].

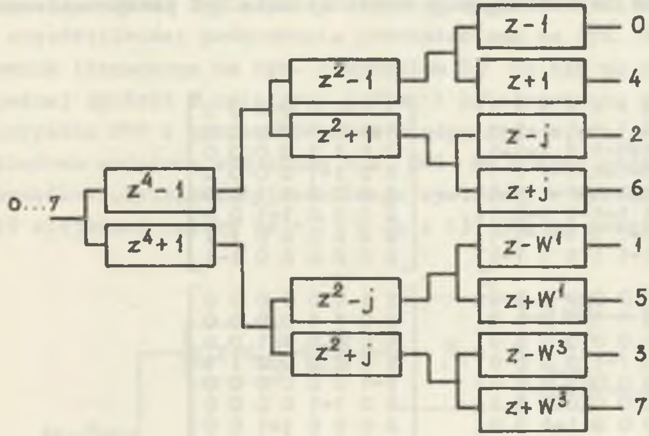


Rys. 3
Fig. 3



Rys. 4
Fig. 4

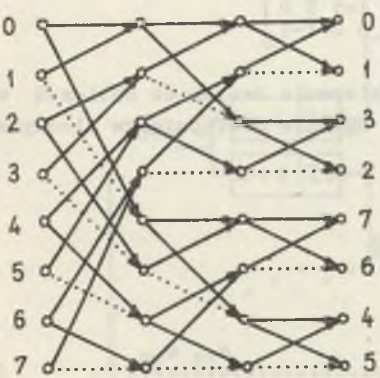
W celu porównania algorytmów FWT i FFT na rys. 4 podano graf przepływowy algorytmu FFT o takiej samej geometrii operacji motylkowych jak algorytm FWT z rys. 1, a na rys. 5 równoważną mu strukturę modułową będącą odpowiednikiem struktury z rys. 3. W odróżnieniu od algorytmów FWT algorytmy FFT o takiej samej strukturze charakteryzują się większą złożonością obliczeniową. Wymagają one $N\log_2 N$ operacji dodawania i odejmowania liczb zespolonych oraz $N/2\log_2 N$ operacji mnożenia liczb zespolonych przez współczynniki zespolone W^k, gdzie $W = \exp(-j2\pi/N)$.



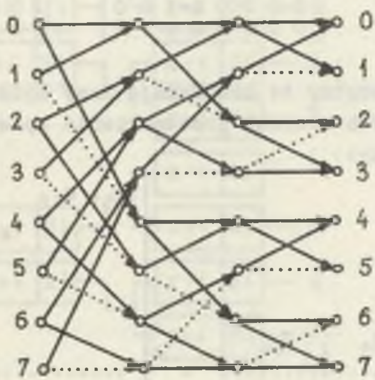
Rys. 5
Fig. 5

3. Algorytmy modułowe z uporządkowaniem diadycznym i sekwencyjnościowym

Spośród algorytmów FWT z uporządkowaniem diadycznym i sekwencyjnościowym [2] można wyróżnić dwa mające podobną właściwość rozdzielania danych jak algorytm z rys. 1. Przedstawiają je grafy przepływowe z rys. 6 i 7.



Rys. 6
Fig. 6



Rys. 7
Fig. 7

Odpowiadająca im faktoryzacja macierzy może być przeprowadzona w następujący sposób:

$$\underline{P}_8 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\ 1&1&-1&-1&1&1&-1&-1\\ 1&1&-1&-1&-1&-1&1&1\\ 1&-1&1&-1&1&-1&1&-1\\ 1&-1&1&-1&-1&1&-1&1\\ 1&-1&-1&1&1&-1&-1&1\\ 1&-1&-1&1&-1&1&1&-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&-1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 1&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1\\ 1&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&-1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\underline{W}_8 = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&-1&-1&-1&-1\\ 1&1&-1&-1&-1&-1&1&1\\ 1&1&-1&-1&1&1&-1&-1\\ 1&-1&-1&1&1&-1&-1&1\\ 1&-1&-1&1&-1&1&1&-1\\ 1&-1&1&-1&-1&1&-1&1\\ 1&-1&1&-1&1&-1&1&-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&-1&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&0&0&0&1&1 \end{bmatrix} \cdot$$

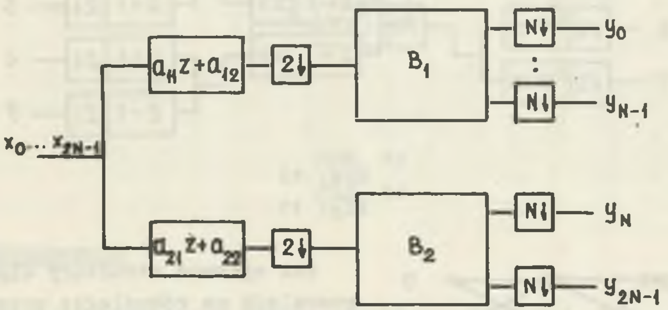
$$\cdot \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 1&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&0&1&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1\\ 1&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&-1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Algorytmy te prezentują inny sposób pobierania danych do obliczeń w kolejnych etapach przetwarzania opisywany ogólnie następującym iloczynem macierzy:

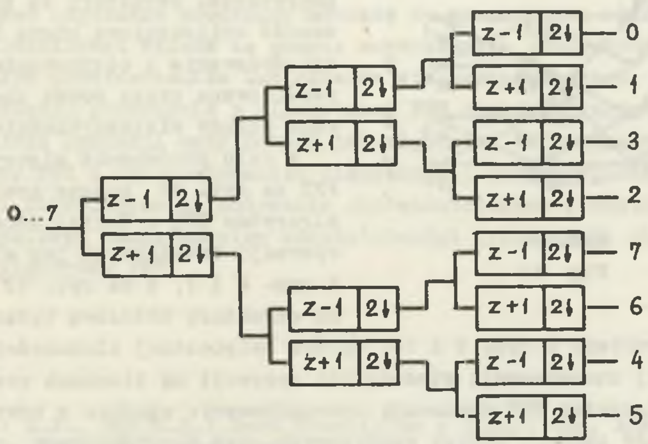
$$\left[\begin{array}{c:c} \underline{B}_1 & \underline{O}_N \\ \hdashline \underline{O}_N & \underline{B}_2 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & & & & & \\ & & a_{11} & a_{12} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & a_{11} & a_{12} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & & & & & \\ & & a_{21} & a_{22} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & a_{21} & a_{22} \end{array}\right] \cdot \tag{8}$$

Takiemu sposobowi faktoryzacji można przypisać strukturę drzewa z redukcją częstotliwości próbkowania przedstawioną na rys. 8 [9]. Redukcja próbkowania (oznaczona na rys. 8 symbolem N) polega na rejestrowaniu tylko jednej spośród N kolejnych próbek i na odrzucaniu pozostałych.

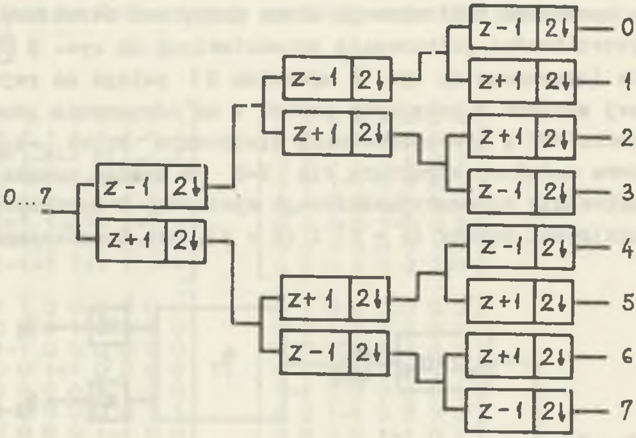
W przypadku FWT z uporządkowaniem diadycznym $a_{11}=a_{12}=a_{21}=1$, $a_{22}=-1$ i przykładowa modułowa struktura dla N=8 ma postać podaną na rys. 9. Dla uporządkowania sekwencyjnościowego wystarczy w wybranych gałęziach zamienić miejscami człony (z - 1) i (z + 1), jak to pokazano na rys. 10.



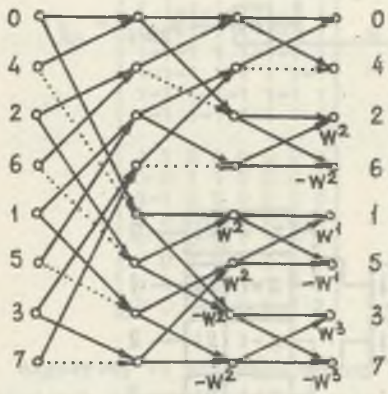
Rys. 8
Fig. 8



Rys. 9
Fig. 9



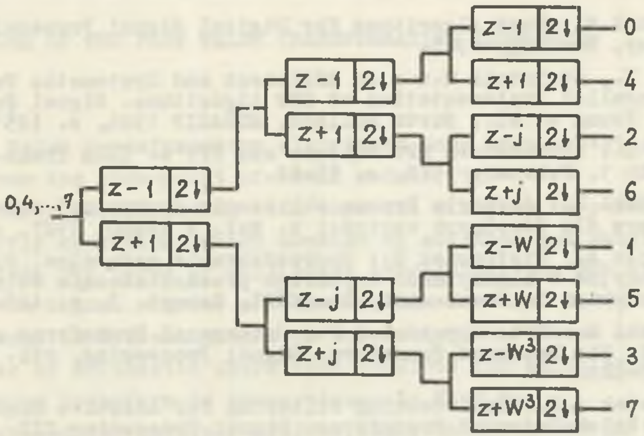
Rys. 10
Fig. 10



Rys. 11
Fig. 11

Tak opisane struktury algorytmów FWT pozwalają na równoległe przetwarzanie w kolejnych etapach rozdzielonych grup danych przy jednoczesnym dwukrotnym zmniejszaniu częstotliwości próbkowania w każdym etapie w porównaniu z etapem poprzednim. Struktury te zachowują złożoność obliczeniową równą $N\log_2 N$ operacji dodawania i odejmowania i mogą być realizowane przez coraz częściej stosowane układy wieloszybkościowe [11].

W celu porównania algorytmów FWT i FFT na rys. 11 podano graf przepływowy algorytmu FFT o takiej samej geometrii operacji motylkowych jak algorytmy FWT z rys. 6 i 7, a na rys. 12 równoważną mu strukturę modułową będącą odpowiednikiem struktury z rys. 9 i 10. Oprócz zwiększonej złożoności obliczeniowej będącej konsekwencją stosowanych operacji na liczbach zespolonych, tego typu algorytmy FFT wymuszają uporządkowanie zgodnie z odwrotną kolejnością bitów zarówno próbek wejściowych, jak i wyjściowych, co wymaga dodatkowych etapów przetwarzania i znacznie ogranicza stosowanie struktury modułowej w połączeniu z redukcją częstotliwości próbkowania.



Rys. 12
Fig. 12

4. Podsumowanie

W pracy przedstawiono modułowe struktury algorytmów FWT pozwalające na równoległe przetwarzanie danych i wielostopniowe zmniejszanie częstotliwości próbkowania. Zagadnienia te w opracowaniach i monografiach o charakterze teoretycznym dotyczących transformacji Walsha są najczęściej pomijane [12]. Opierając się na prezentowanych strukturach algorytmów FWT można budować użyteczne procedury służące do wyznaczania bieżących dyskretnych transformat Walsha za pomocą nowoczesnych procesorów sygnałowych z równoległym przetwarzaniem lub układów wieloprocesorowych. Na podstawie przeprowadzonego porównania z algorytmami FFT charakteryzującymi się taką samą geometrią operacji motylkowych jak algorytmy FWT można stwierdzić, że algorytmy FWT z uporządkowaniem diadycznym i sekwencyjnościowym mają właściwości pozwalające na budowanie skuteczniejszych struktur modułowych z wielostopniowym zmniejszaniem częstotliwości próbkowania niż odpowiadające im algorytmy FFT.

LITERATURA

[1] Elliott D.F., Rao K.R.: Fast Transforms - Algorithms, Analyses, Applications. Academic Press, New York 1982.

[2] Beauchanp K.G.: Applications of Walsh and Related Functions. Academic Press, London 1984.

[3] Nussbaumer H.J.: Fast Fourier Transform and Conbolution Algorithms. Springer-Verlag, Berlin 1982.

[4] Blahut R.E.: Fast Algorithms for Digital Signal Processing. Addison--Wesley, Reading, 1985.

[5] Pitas I., Strintzis M.G.: An Efficient and Systematic Technique for the Parallel Implementation of DFT Algorithms. Signal Processing III. I. T. Young et al., North Holland, EURASIP 1986, s. 1251-1254.

[6] Bruun G.: z-Transform DFT Filters and FFT's. IEEE Trans., vol. ASSP--26, No 1, February 1978, s. 56-63.

[7] Stasiński R.: Algorytm Bruuna obliczenia dyskretnej transformacji Fouriera dla dowolnych wartości N. Mat. X SPETO, 1987, s. 321-327.

[8] Drygajło A., Pietraszek S.: Uporządkowanie naturalne, diadyczne i sekwencyjne w algorytmach szybkiego przekształcenia Walsha. Archiwum Automatyki i Telemechaniki, Tom XXVI, Zeszyt 3, s. 445-463.

[9] Vetterli M.: Tree Structures for Orthogonal Transforms and Application to the Hadamard Transform. Signal Processing, vol. 5, 1983, s. 473-484.

[10] Karbowiak A.E.: Goal Seeking Filtering for Adaptive Signal Analysis Using Walsh-Hadamard Transforms. Signal Processing III. I. T. Young et al., North Holland, EURASIP 1986, s. 69-72.

[11] Crochiere R.E., Rabiner L.R.: Multirate Digital Signal Processing. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1983.

[12] Gołubow B.I., Jefimow A.W., Skworcow W.A.: Riady i prieobrazowanija Walsha. Nauka, Moskwa 1987.

Recenzent: doc. dr inż. Zdzisław Trzaska

Wpłynęło do redakcji dnia 20 maja 1988 r.

МОДУЛЬНАЯ ФОРМА АЛГОРИТМОВ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УОЛША

Р е з ю м е

В работе проанализованы алгоритмы быстрого преобразования Уолша с точки зрения их модульности. Представлены эквивалентные структуры деревьев, которые позваляют на текущее параллельное выполнение основных мотыльковых операций, состоящих из операций сложения и вычитания, Рассмотрены два варианта многоступенчатого преобразования. Первый - использующий задержки временных выборок и второй - основанный на перемене частоты дискретизации в очередных этапах обработки. Количество вычислений для получении текущего преобразования для точек оказывается пропорциональным.

Представлены структуры для натурального диадного и секвенционного упорядочения в алгоритмах быстрого преобразования Уолша и сравнение их с соответствующими сируктурами алгоритмсв быстрого преобразования фурье.

A MODULAR FORM OF THE FAST WALSH TRANSFORMATION ALGORITHMS

S u m m a r y

The fast Walsh transformation algorithms have been investigated in the paper from the view-point of their modularity.
Three structures corresponding with them and allowing to perform simultaneous butterfly operations which consist of addition and substration have been presented. Two forms of multistage processing: the one using time delays between signal samples and another one based on the change of sampling frequency in sequent stages of processing, have been considered.

The number of arithmetic operations required for calculation of the N-point running transform is proportional to $N\log_2 N$.

The structures for natural, dyadic and sequence order in the fast Walsh transformation algorithms have been given and compared with the fast Fourier transformation algirithms structures corresponding with them.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: ELEKTRYKA z. 113 Nr kol. 983

Lesław TOPÓR-KAMIŃSKI

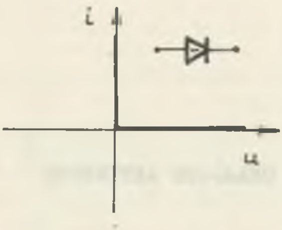
POJAWIANIE SIĘ ELEMENTÓW OSOBLIWYCH W IDEALNYCH UKŁADACH AKTYWNYCH

Streszczenie. Przedstawiono różne przypadki pojawiania się elementów osobliwych w idealnych układach aktywnych, w tym również innych niż nullator i norator. Posiadają one charakterystyki zawierające oprócz linii krzywych także obszary ciągłe, płaszczyzny prądowo-napięciowej lub jej izolowane punkty. Powstają one na bazie idealnych elementów diodowych jako dwójników nieliniowych. Opisano pewne czwórniki aktywne zawierające dwa źródła sterowane, a charakteryzujące się zerową kolumną współczynników w opisujących je macierzach łańcuchowych odwrotnych. Własności tych czwórników pozwalają na modelowanie niektórych osobliwości. Pokazano przykład syntezy generatora harmonicznego z wykorzystaniem jednego z takich czwórników oraz podano jego realizację praktyczną z zastosowaniem wzmacniaczy operacyjnych.

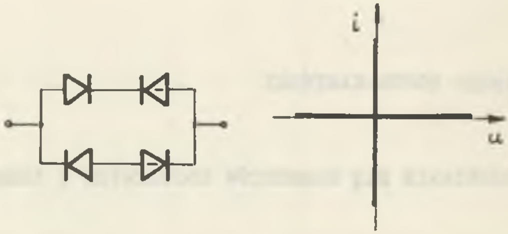
1. Wprowadzenie

Jakkolwiek od wprowadzenia przez Carlina i Youla [1] do teorii obwodów aktywnych pojęcia podstawowych elementów osobliwych mija już blisko 30 lat, nie docenia się ważności tych elementów nie tyle w obliczeniowej praktyce inżynierskiej, ile w teoretycznym opisie sieci aktywnych i częstości ich pojawiania się w modelach teoretycznych. Powszechnie pojęcie elementu osobliwego wiązane jest jedynie z elementami typu nullator i norator (także nullor), lecz już Davies [2] dołączył do nich także przerwę i zwarcie. O wiele dalej poszedł Chua [3], rozszerzając pojęcie osobliwości na wszystkie dwójniki bezinercyjne zawierające w swoich charakterystykach na płaszczyźnie prąd - napięcie oprócz linii krzywych także części obszarów ciągłych płaszczyzny lub jej izolowane punkty. Kontynuując to rozumowanie, do zbioru elementów osobliwych można zatem także wprowadzić idealne źródła autonomiczne jako przesunięte na płaszczyźnie u-i przerwy i zwarcia [5], przesunięty nullator jako izolowany punkt w dowolnym miejscu tej płaszczyzny [5], idealne elementy diodowe [6] jako złożone z części charakterystyk przerwy i zwarcia, w tym także "diodę ujemną" (rys. 1) oraz powstały z idealnych diod "norator bezmocowy" o charakterystyce podanej na rys. 2.

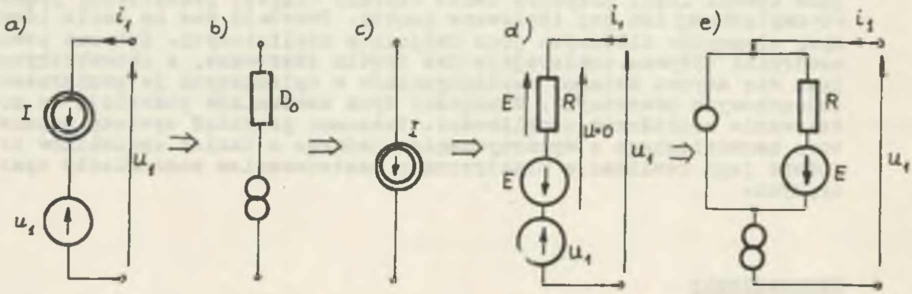
Norator bezmocowy pojawia się także w aktywnych sieciach nieliniowych z analogowymi układami mnożącymi, co pokazano w pracy [8]. Chociaż znaczenie praktyczne analizy i syntezy liniowych układów aktywnych, w których



Rys. 1
Fig. 1



Rys. 2
Fig. 2



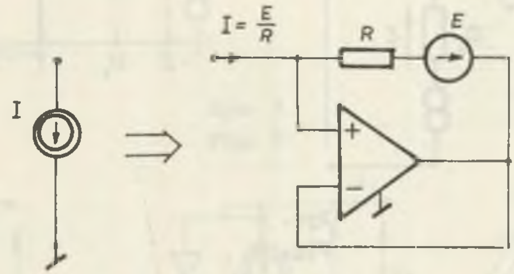
Rys. 3
Fig. 3

para nullator i norator odegrała dużą rolę w modelowaniu jej podstawowych układów [9], stopniowo maleje i przechodzi do klasyki teorii obwodów na skutek wypierania jej przez dyskretne przetwarzanie sygnałów, jednak bloki łączące te dwa rodzaje układów nadal zawierają wzmacniacze operacyjne oraz przede wszystkim idealne komutatory (klucze), które można opisywać w ogólności jako zmienne w czasie elementy osobliwe [4]. Szczególnie wyraźnie widać to na przykładzie układów przełącznikowo-kondensatorowych [7] oraz przełącznikowo-rezystancyjnych [10].

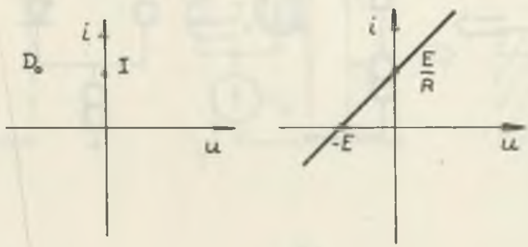
Wprowadzenie elementów osobliwych było konsekwencją potrzeby opisu idealnych układów aktywnych, ale także zachodzi zjawisko odwrotne, założenie istnienia na przykład idealnego źródła napięciowego sterowanego napięciem implikuje pojawienie się elementów osobliwych. Przykład tego zjawiska przedstawia rys. 3.

Na rysunku tym dwójnik b) równoważny dwójnikowi a) zawiera elementy osobliwe norator i źródlator (rys. 5) o charakterystyce punktowej [5], która jest równoważna punktowi $i_1 = E/R$ na charakterystyce dwójnika aktywnego E oraz połączonego szeregowo rezystora R dla uzyskania wymuszonego napięcia $u = 0$.

Przykład ten ilustruje możliwość zamodelowania autonomicznego źródła prądowego za pomocą źródła napięciowego i rezystancji. Praktyczny układ realizujący to zjawisko przedstawia rys. 4. Podobnie w układzie z rys. 6a) pojawiają się trzy źródlatory przedstawione jako punkty D_1, D_2 i D_3 na rys. 6b).



Rys. 4
Fig. 4

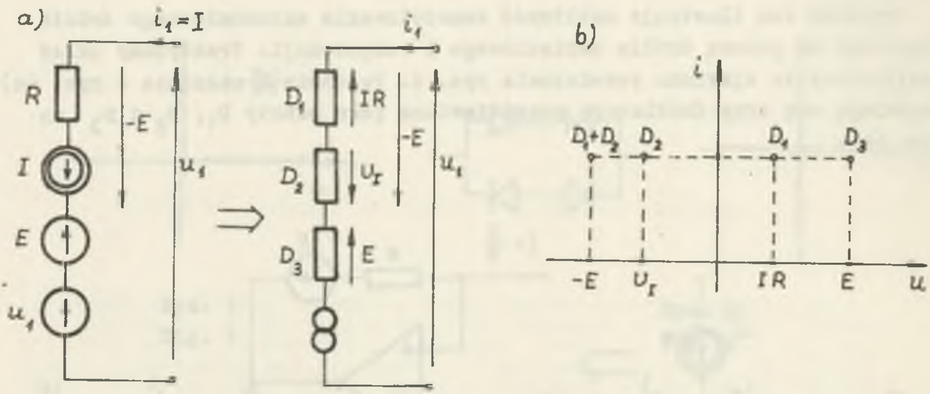


Rys. 5
Fig. 5

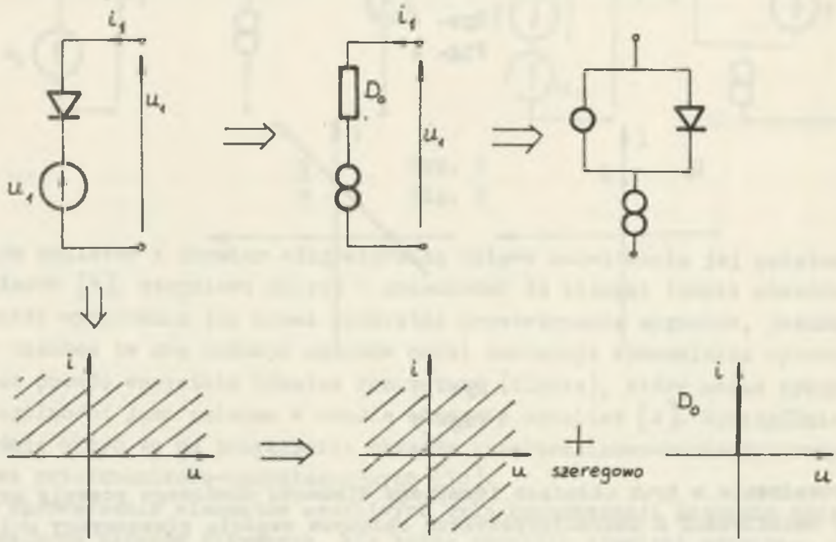
Wprowadzenie w tych układach idealnego elementu diodowego pozwala uzyskiwać osobliwości o charakterystykach będących częścią płaszczyzny u-i. I tak półpłaszczyznę dla prądów dodatnich modeluje układ z rys. 7, w którym pojawia się element osobliwy D_o, a który można nazwać zwarciem dodatnim.

Wprowadzając dodatkowo autonomiczne źródło pradowe I (rys. 8) uzyskuje się półpłaszczyznę przesuniętą o wartość I, co w konsekwencji pozwala łatwo uzyskać charakterystykę w kształcie pasa o szerokości I_1 do I_2 (rys. 9).

Na podstawie pokazanych układów diodę ujemną z rys. 1 można zamodelować w układzie dwu źródeł sterowanych w sposób pokazany na rys. 10.

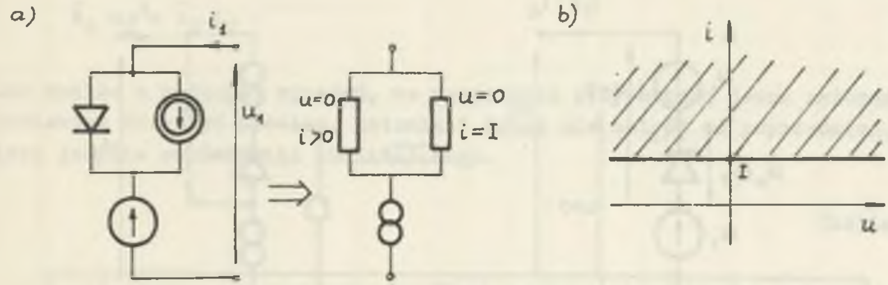


Rys. 6
Fig. 6

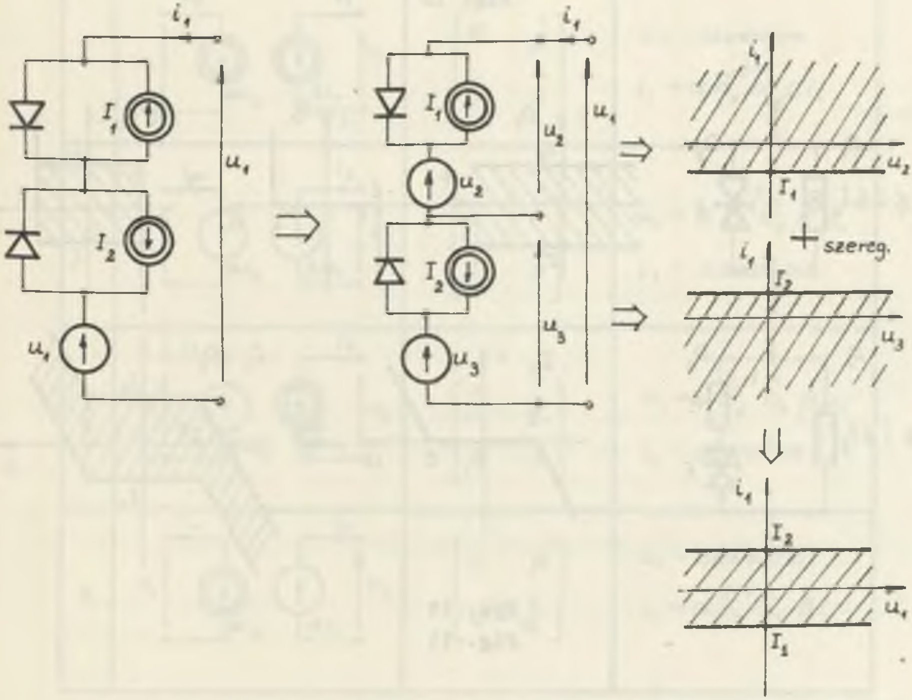


Rys. 7
Fig. 7

Łączenie przytoczonych układów z dowolnymi dwójnikami nieliniowymi pozwala uzyskiwać osobliwości o bardzo różnorodnych kształtach charakterystyk będących wycięciami o ograniczonej i nieograniczonej powierzchni z płaszczyzny u-i (przykłady pokazano na rys. 11a i b).

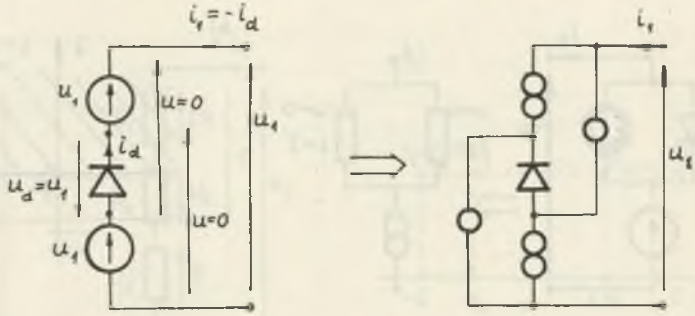


Rys. 8
Fig. 8

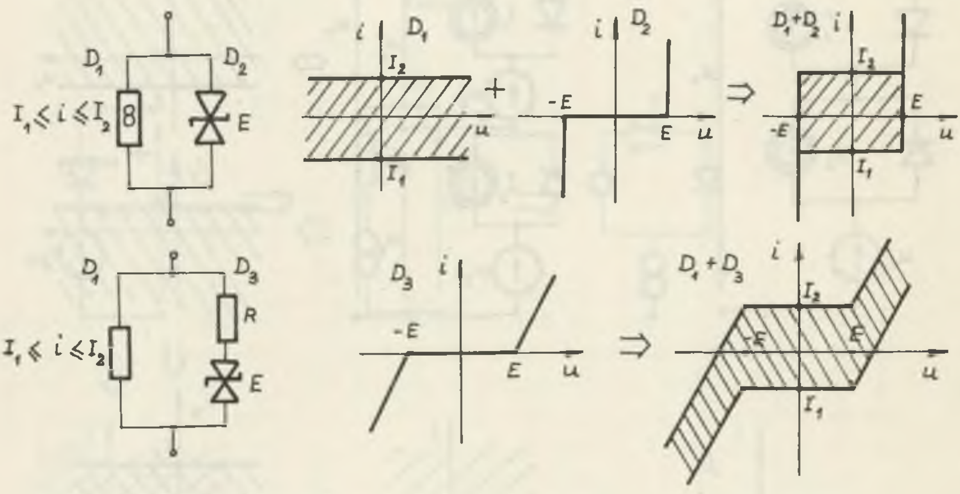


Rys. 9
Fig. 9

Jak wynika z przytoczonych kilku przykładów, bezinercyjne elementy osobliwe stanowią obszerną klasę dwójników, którą należałoby uważać za ogólniejszą od klasycznych dwójników rezystancyjnych, a które zgodnie z definicjami Chua'y [3] zawierają także w swoich charakterystykach obszary ciągłe lub izolowane punkty.



Rys. 10
Fig. 10



Rys. 11
Fig. 11

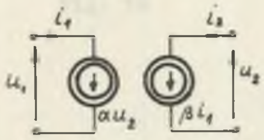
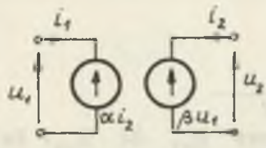
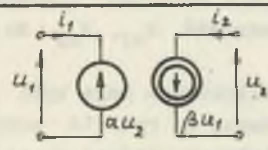
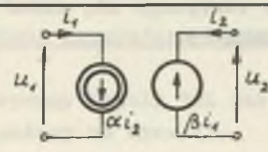
2. Pewne czwórniki aktywne o właściwościach osobliwych

W tablicy 1 przedstawione są czwórniki aktywne charakteryzujące się zerową kolumną w opisujących je macierzach łańcuchowych odwrotnych. Nie są one ujmowane w klasyfikacjach klasycznej teorii układów aktywnych [9] jako nie mające praktycznego zastosowania. Czwórniki te jednak nadają się dobrze do modelowania pewnych osobliwości. W tablicy 1 podano wyrażenia na zmienne zaciskowe wejściowe tych czwórników przy założeniu, że są one obciążone dwójnikami opisanymi ogólnym równaniem operatorowym typu:

$$\hat{a}_2 u_2 = \hat{b}_2 i_2 \,. \tag{1}$$

Jak wynika z podanych wyrażeń, we wszystkich przypadkach jedna zmienna zaciskowa może być dowolna, natomiast druga nie zależy od poprzedniej, lecz jedynie od dwójnika obciążającego.

Tablica 1

L.p.	Schemat	Macierz łańcuchowa odwrotna	u_1, i_1 dla obciążenia dwójnikiem D_2
1		$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$	u_1 - dowolne $i_1 = \alpha \hat{a}_2^{-1} \hat{b}_2 \beta i_1$
2		$\begin{bmatrix} \beta & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 \end{bmatrix}$	$u_1 = \alpha \hat{b}_2^{-1} \hat{a}_2 \beta u_1$ i_1 - dowolne
3		$\begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$	$u_1 = \alpha \hat{a}_2^{-1} \hat{b}_2 \beta u_1$ i_1 - dowolne
4		$\begin{bmatrix} 0 & \beta \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}$	u_1 - dowolne $i_1 = \alpha \hat{b}_2^{-1} \hat{a}_2 \beta i_1$

3. Przykładowe modele osobliwości

Dla przykładu rozpatrywane będą różne przypadki pracy układu z p. 2 w tabeli 1. I tak, jeżeli założyć $\alpha \hat{b}_2^{-1} \hat{a}_2 \beta = k$, wtedy:

$$u_1 = \hat{k}\, u_1 \,. \tag{2}$$

Stąd, jeśli przyjąć $\hat{k} = 1$, to u_1 może być dowolne i układ na zaciskach wejściowych widziany jest jako norator, natomiast dla $\hat{k} \neq 1$, aby (2) było spełnione, u_1 może być tylko równe 0 i układ jest zwarciem. Aby $\hat{k}$ było równe 1 dla β bezwymiarowego i $\alpha = R$, dwójnik obciążający D_2 z równania (2) musi być równy konduktancji o wartości:

$$G_2 = \frac{1}{\beta R} . \tag{3}$$

Ogólnie dla dwójnika D_2 jako nieliniowej konduktancji określonej wielomianem o miejscach zerowych U_{on} zachodzi:

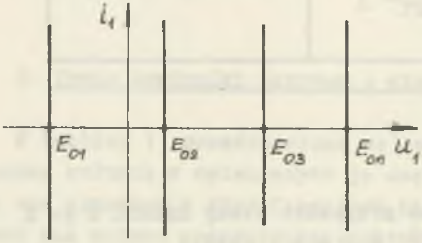
$$i_2 = a \prod_{k=1}^{n} (u_2 - U_{ok}) . \tag{4}$$

Wtedy:

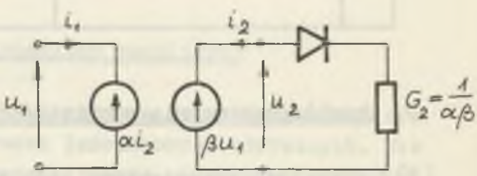
$$u_1 = a\alpha \prod_{k=1}^{n} (\beta u_1 - U_{ok}) . \tag{5}$$

Rozwiązaniem tego równania są miejsca zerowe E_{o1} do E_{on}. Zatem cały układ na wejściu będzie widziany jako dwójnik osobliwy, którego prąd może być dowolny, a napięcie przyjmować tylko wartość E_{o1}, E_{o2} do E_{on} (rys. 12).

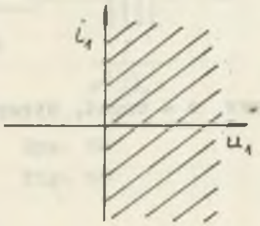
Szczególnymi przypadkami obciążenia nieliniowego mogą być: układ z idealną diodą (rys. 13) o charakterystyce podanej na rys. 14 oraz układ z obciążeniem o charakterystyce odcinkami liniowej, której pewna część ma nachylenie $1/\alpha\beta$ (rys. 15), w wyniku czego otrzymuje się układ o charakterystyce w kształcie pasa pokazanego na rys. 16.



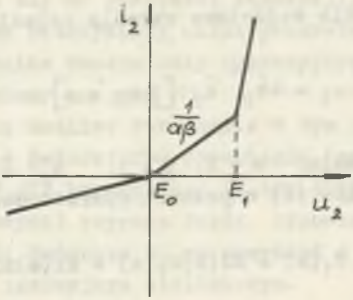
Rys. 12
Fig. 12



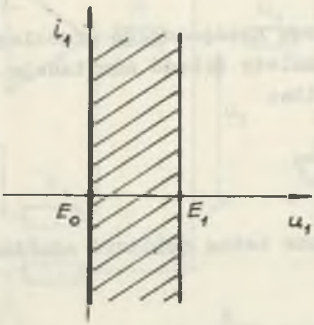
Rys. 13
Fig. 13



Rys. 14
Fig. 14



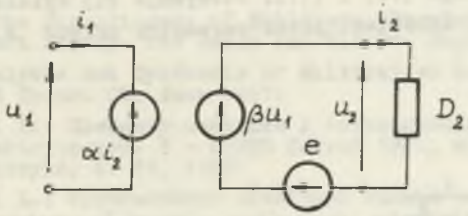
Rys. 15
Fig. 15



Rys. 16
Fig. 16

4. Synteza generatora harmonicznego jako inercyjnego układu osobliwego

Rozpatrywany będzie tak jak poprzednio układ 2 z tablicy 1, obciążony w sposób podany na rys. 17.



Rys. 17
Fig. 17

Napięcie wejściowe określa relacja:

$$u_1 = \alpha \hat{b}_2^{-1} \hat{a}_2 \left[\beta u_1 + e\right] . \tag{6}$$

Zakładając $\alpha = R$, $\beta = 1$, $\hat{b}_2^{-1} \hat{a}_2 = Y(s)$ oraz $e = \mathrm{const}$, otrzymuje się równanie (6) w postaci operatorowej jako:

$$U_1(s) = RY(s)U_1(s) + RY(s)E(s) \tag{7}$$

co po przekształceniach daje:

$$U_1(s) = R \frac{Y(s)E(s)}{1 - RY(s)} . \tag{8}$$

Aby układ był generatorem napięciowego przebiegu harmonicznego o pulsacji ω i amplitudzie U_m, należy dobrać admitancję $Y(s)$ tak, aby transformata napięcia u_1 wynosiła:

$$U_1(s) = U_m \frac{s}{s^2 + \omega^2} \tag{9}$$

Z relacji (8) i (9) można zatem obliczyć admitancję $Y(s)$, którą określa wzór:

$$Y(s) = \frac{1}{R} \cdot \frac{U_m}{E+U_m} \cdot \frac{s^2}{s^2 + \frac{E}{E+U_m}\omega^2} . \tag{10}$$

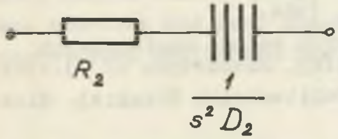
Odpowiada jej dwójnik $Y_2(s)$ z rys. 18 (zawierający FDNR), określony relacją:

$$Y_2(s) = \frac{1}{R_2} \cdot \frac{s^2}{s^2 + \frac{1}{R_2 D_2}} . \tag{11}$$

Stąd porównując relacje (10) i (11), otrzymuje się wyrażenia na wartość amplitudy i pulsacji określone przez parametry układu R, E, R_2, D_2:

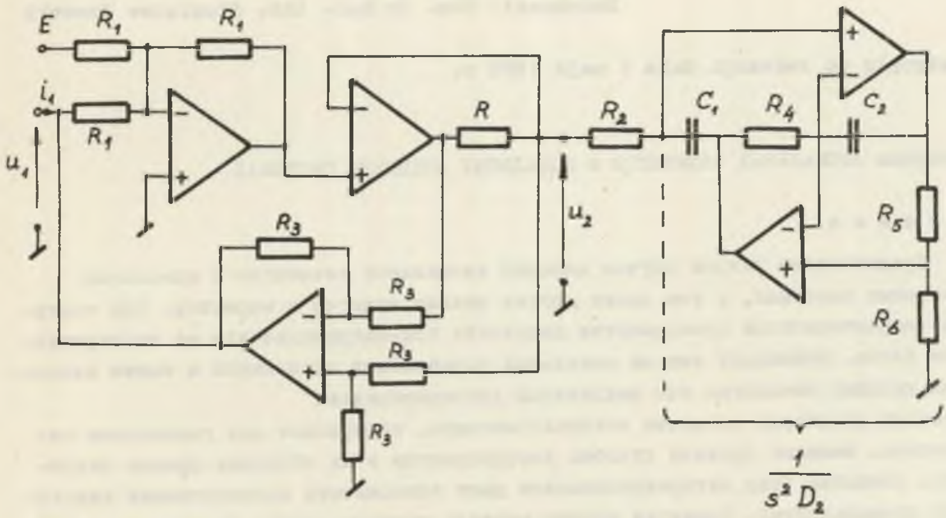
$$U_m = E \frac{1}{\frac{R_2}{R} - 1} \tag{12}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{R_2 D_2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{R}{R_2}} . \tag{13}$$



Rys. 18
Fig. 18

Opierając się na powyższej koncepcji, zamodelowano rzeczywisty układ generatora z zastosowaniem wzmacniaczy operacyjnych przedstawiony na rys. 19.
Wydaje się możliwe otrzymanie w tym układzie także generatorów przebiegów innych kształtów niż harmoniczny (w tym także prawieokresowych) poprzez dobór odpowiedniej admitancji dwójnika D_2 na przykład o charakterze inercyjnym nieliniowym.



Rys. 19
Fig. 19

LITERATURA

[1] Carlin H.J., Youla D.C.: Network synthesis with negative resistors. Proc. IRE, May 1961.

[2] Davies A.C.: The Significance of Nullators, Norators and Nullors in Active - network Theory. The Radio and Electr. Engin. Nov. 1967.

[3] Chua L.O.: Analysis and Synthesis of Multivalued Memoryless Nonlinear Networks. IEEE Trans. CT, June 1967.

[4] Topór-Kamiński L.: Elementy osobliwe i rozszerzenie pojęcia komutacji w obwodach elektrycznych. V - SPETO Ustroń 1981, oraz ZN Politechniki Śląskiej, Elektryka, z. 79, 1982.

[5] Topór-Kamiński L.: Wprowadzenie idealnych źródeł autonomicznych i źródlatora do zbioru elementów osobliwych. ZN Politechniki Śląskiej, Automatyka, z. 71, 1983.

[6] Topór-Kamiński L.: Diodowe elementy osobliwe. VI - SPETO Ustroń 1983, ZN Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 88, 1984.

[7] Topór-Kamiński L.: Analiza obwodów osobliwych metodą macierzowych formuł boolowskich. ZN. Politechniki Śląskiej, Automatyka z. 73.1984

[8] Topór-Kamiński.: Mnożniki impedancji. ZN Politechniki Śląskiej. Elektryka, z. 107. 1988.

[9] Mitra S.K.: Analysis and Synthesis of Linear Active Newmorks. Jon Wiley, Inc. New York 1969.

[10] Pasko M., Topór-Kamiński L.: Rezystancyjno-przełącznikowe dwójniki elektryczne. ZN Politechniki Śląskiej. Elektryka z. 98, 1985.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Stanisław Osowski

Wpłynęło do redakcji dnia 5 maja 1988 r.

ЯВЛЕНИЕ АНОМАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ИДЕАЛЬНЫХ АКТИВНЫХ СИСТЕМАХ

Р е з ю м е

Представлены разные случаи явлений аномальных элементов в идеальных активных системах, в том числе других нежели нулятор и норматор. Они содержат характеристики пространства плоскости ток-напряжение или ее изолированные точки. Возникают они на идеальных управляемых источниках а также идеальных диодных элементах как нелинейных двухполюсников.
Описаны некоторые активные четырехполюсники, содержащие два управлемые источника, имеющие нулевой столбец коэффициентов в их обратных цепных матрицах. Свойства этих четырехполюсников дают возможность моделирования некоторых аномальностей. Приведен пример синтеза гармонического генератоpя с применением одного из этих четырехполюсников а также практическое осуществление его с применением операционных усилителей.

APPEARANCE OF SINGULAR ELEMENTS IN IDEAL ACTIVE SYSTEMS

S u m m a r y

Various cases of appearance of singular elements in ideal active systems, including also the other than nullator and norator, have been presented. They have the characteristics comprising apart from curves also continuous domains of current - voltage plane or its isolated points. They are originated being based on ideal diode elements as non-linear two-terminal network. Some active four-terminal networks containing two controlled sources and characterized by zero coefficient column in the string inverse matrices describing them have been presented. Properties of those four-terminal networks enable modelling of some singularities.

An example of harmonic generator synthesis using one of such four-terminal networks has been presented and its practical realization applying operational amplifiers has been described.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1991

Seria: ELEKTRYKA z. 113 Nr kol. 983

Marian PASKO
Lesław TOPÓR-KAMIŃSKI

MODELOWANIE NIELINIOWYCH FUNKCJI NIEMONOTONICZNYCH W KLASIE UKŁADÓW REZYSTANCYJNO-PRZEŁĄCZNIKOWYCH

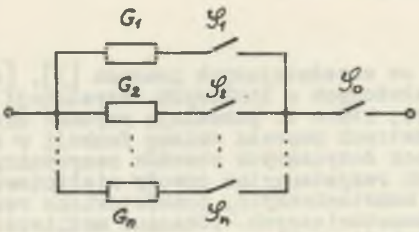
Streszczenie. Opierając się na wcześniejszych pracach [3], [4] dotyczących analizy dwójników złożonych z liniowych rezystancji oraz idealnych przełączników (kluczy), które to pozwalają uzyskać układy rezystancyjne o zmiennych parametrach poprzez zmianę funkcji φ sterujących kluczami oraz na pracach dotyczących obwodów rezystancyjno-przełącznikowych modelujących rezystancyjne obwody nieliniowe o charakterystykach nieliniowych monotonicznych, przedstawiono realizacje funkcji nieliniowych niemonotonicznych. Pokazano możliwość realizacji niemonotonicznych funkcji nieliniowych w układach zawierających liniowe rezystancje, wzmacniacze operacyjne oraz idealne klucze przełączane funkcjami okresowymi. Jeżeli stany pewnych przełączników będą sterowane sygnałem proporcjonalnym do wybranych zmiennych zaciskowych, uzyskuje się funkcje nieliniowe, w układzie współrzędnych o wartościach uśrednionych za pewien okres czasu. W pracy przedstawiono dwie metody: z funkcją okresową o zmiennym przesunięciu fazowym impulsu sterującego oraz z zastosowaniem konduktancji sterowanych dwu przeciwnych znaków. Przedstawiono obliczeniowe przykłady projektowania układów praktycznych.

1. Wstęp

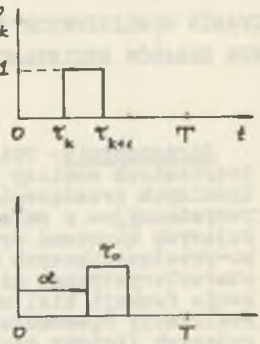
Jednym z częstych sposobów uzyskiwania nieliniowych charakterystyk w obwodach elektrycznych jest modelowanie ich za pomocą układów parametrycznych sterowanych niektórymi wewnętrznymi zmiennymi zaciskowymi tych obwodów [1], [2], [5]. Obecnie znanych jest wiele sposobów realizacji układów o sterowanych parametrach z zastosowaniem takich elementów jak tranzystor polowy lub różnego typu analogowe układy mnożące. W układach tych zarówno parametry, jak i sygnały zmieniają się w sposób ciągły [5], [7]. Zastosowanie idealnego przełącznika (klucza) elektrycznego realizującego uproszczoną funkcję mnożenia pozwala także budować układy o parametrach sterowanych sygnałami dyskretnymi. Uzyskanie nieliniowych funkcji dla sygnałów ciągłych wymaga jedynie uśredniania sygnałów wyjściowych za pewien okres czasu [4]. Dodatkową ważną obecnie zaletą układów przełącznikowych jest możliwość zastosowania ich jako stopni wiążących układy ciągłe z dyskretnymi [6].

2. Metoda dwójnika RS z funkcją sterującą o zmienianej fazie

Na rys. 1 przedstawiona jest proponowana struktura dwójnika rezystancyjno-przełącznikowego g(t) złożona z "n" równoległych gałęzi RS, w których przełączniki włączane są zgodnie z funkcjami φ_k o postaci stałej względem zadanego okresu T, natomiast funkcja φ_0 sterująca kluczem szeregowym względem wszystkich gałęzi jest zmieniana sygnałem zewnętrznym x.



Rys. 1
Fig. 1



Rys. 2
Fig. 2

Konduktancję dwójnika z rys. 1 opisuje relacja:

$$g(t) = \varphi_0 \sum_{k=1}^{n} G_k \varphi_k \, . \tag{1}$$

Wartość średnia tej konduktancji za okres T wynosi:

$$G = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T (\varphi_0 \sum_{k=1}^{n} G_k \varphi_k)dt. \tag{2}$$

Zakładając, że długość τ_0 impulsu φ_0 jest stała, natomiast zmienia się jego położenie względem początku okresu T proporcjonalnie do sygnału x, wartość średnia konduktancji G będzie jego funkcją, czyli:

$$G(\alpha) = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+\tau_0} g(t)dt \, , \tag{3}$$

gdzie: $\alpha = k x$.

W celu ułatwienia teoretycznej i praktycznej realizacji układu zakłada się, że funkcje φ_k są impulsami także o szerokości τ_0, rozmieszczonymi w odległościach będącymi wielokrotnościami τ_0 w stosunku do początku okresu T, czyli:

$$\lambda_k = k\tau_0 \ . \tag{4}$$

Mając na uwadze, że między momentami α i $\alpha+\tau_0$ może zaistnieć tylko jeden punkt przełączenia funkcji φ_k, $\overline{G}(\alpha)$ można zapisać w postaci:

$$\overline{G}(\alpha) = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\lambda_k} g(t)dt + \frac{1}{T}\int_{\lambda_k}^{\alpha+\tau_0} g(t)dt \ . \tag{5a}$$

Uwzględniając konduktancje gałęziowe G_{k-1} i G_k, wykonując całkowania oraz porządkując względem zmiennej α, otrzymuje się:

$$\overline{G}(\alpha) = \frac{1}{T}\left[\alpha(G_k-G_{k-1}) - \lambda_k(G_k-G_{k-1}) + \tau_0 G_k\right] . \tag{5b}$$

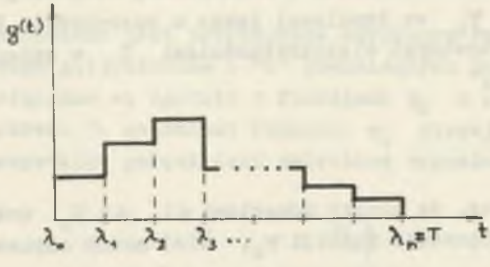
Konduktancja ta ma zatem postać funkcji liniowej o parametrach zależnych od dwu kolejno włączanych konduktancji gałęziowych.
Wartości $\overline{G}(\alpha)$ dla punktów λ_k zależą jedynie, na podstawie wzoru (5b), od wartości konduktancji w gałęzi $k+1$ otwieranej kluczem φ_{k+1} dla przedziału czasu λ_k do λ_{k+1}, gdyż podstawiając $\alpha = \lambda_k$ otrzymuje się:

$$\overline{G}(\lambda_k) = \frac{\tau_0}{T} G_k \ . \tag{6a}$$

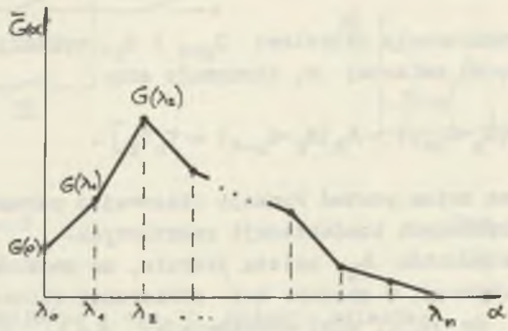
Stąd wprost można wyliczyć wartości konduktancji gałęziowych G_k zakładając podział okresu na n taktów o długości τ_0, a relacja (6) przyjmuje postać:

$$\overline{G}(\lambda_k) = \frac{1}{n} G_k \ . \tag{6b}$$

Fakt ten upraszcza dobór elementów układu ze zmiennym położeniem impulsu φ_0 w stosunku do układów ze zmienną szerokością φ_0 przedstawionych w pracy [4]. Między momentami λ_k przełączeń funkcji φ_k konduktancja g(t) przyjmuje wartości stałe, ma zatem postać czasowej funkcji schodkowej (rys. 3)
Wartość średnia tej konduktancji zgodnie z relacją (5b) ma charakter funkcji odcinkami liniowej w zależności od zmiennej α (rys. 4).



Rys. 3
Fig. 3



Rys. 4
Fig. 4

Aby funkcja ta była ciągła (brak skoków), sąsiednie proste opisane wzorami (5b) winny przecinać się w punktach przełączeń λ_k. Prostą sąsiednią do opisanej wzorem (5b) jest prosta wyrażona równaniem:

$$\overline{G}(\alpha) = \frac{1}{T}\int\limits_{\alpha}^{\lambda_{k+1}} g(t)dt + \frac{1}{T}\int\limits_{\lambda_{k+1}}^{\alpha+\tau_o} g(t)dt =$$

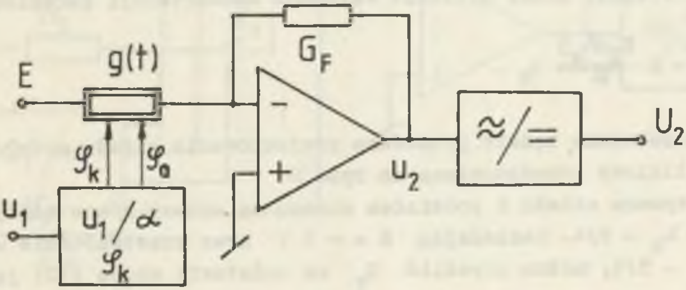
$$= \frac{1}{T} G_k(\lambda_{k+1} - \alpha) + \frac{1}{T} G_{k+1}(\alpha + \tau_o - \lambda_{k+1}) .$$

Wstawiając $\alpha = \lambda_k$ i na podstawie tego, że $\tau_o = \lambda_{k+1} - \lambda_k$ otrzymuje się:

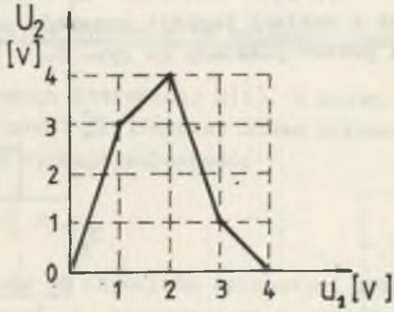
$$\overline{G}(\lambda_k) = \frac{1}{T} G_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k) + \frac{1}{T} G_{k+1}\left[-(\lambda_{k+1} - \lambda_k) + \tau_o\right] = \frac{1}{T} G_k\tau_o$$

co jest zgodne z wynikiem otrzymanym dla prostej (5b) wyrażonym relacją (6).

Ze względu na to, że wartość konduktancji dla określonej wielkości tej zmiennej jest zależna tylko od konduktancji włączanych w przedziale od α do $\alpha + \tau_o$ może ona być funkcją niemonotoniczną. Praktyczny układ modelujący nieliniową funkcję napięciowo-napięciową $u_2 = f_N(u_1)$ z zastosowaniem konduktancji $g(t)$ pokazano na rys. 5.



Rys. 5
Fig. 5



Rys. 6
Fig. 6

Blok u_1/α przetwarza wartość napięcia u_1 na położenie impulsu φ_o. Napięcie wyjściowe ma wartość:

$$u_2 = -E\,\frac{g(\alpha)}{G_F}\,. \tag{7}$$

Uwzględniając wzory (5), (6) otrzymuje się:

$$\overline{U}_2(\alpha) = -E\left(\frac{\alpha}{T}\cdot\frac{G_k - G_{k-1}}{G_F} + \frac{\lambda_k}{T}\cdot\frac{G_{k-1} - G_k}{G_F} + \frac{\tau_o}{T}\cdot\frac{G_k}{G_F}\right). \tag{8}$$

Natomiast dla momentów czasowych $\alpha = \lambda_k$ na podstawie wzoru (6b) otrzymuje się

$$\overline{U}_2(\lambda_k) = -E\frac{1}{n}\cdot\frac{G_k}{G_F}, \tag{9}$$

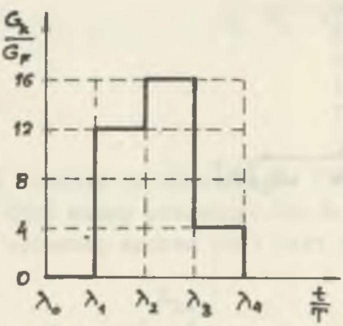
z której to relacji można wyliczyć wartości konduktancji gałęziowych jako:

$$G_k = -n\frac{U_2(\lambda_k)}{E}G_F. \tag{10}$$

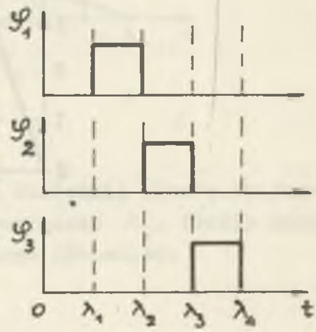
Przykładowo pokazana będzie procedura projektowania układu modelującego funkcję nieliniową przedstawioną na rys. 6.
Funkcja ta wymaga układu z podziałem okresu na cztery równe takty, czyli $\tau_0 = \lambda_{k+1} - \lambda_k = T/4$. Zakładając $E = -1$ V oraz przetwarzanie u_1 jako $\alpha = u_1 \cdot T/4$, można określić G_k na podstawie wzoru (10) jako:

$$G_k = 4G_F\,\overline{U}_2(\lambda_k)$$

co w przykładzie daje następujące wartości: $G_1 = 12G_F$, $G_2 = 16G_F$, $G_3 = 4G_F$ przedstawione w postaci funkcji momentów przełączeń λ_k na rys. 7. Funkcje sterujące mają postać pokazaną na rys. 8.

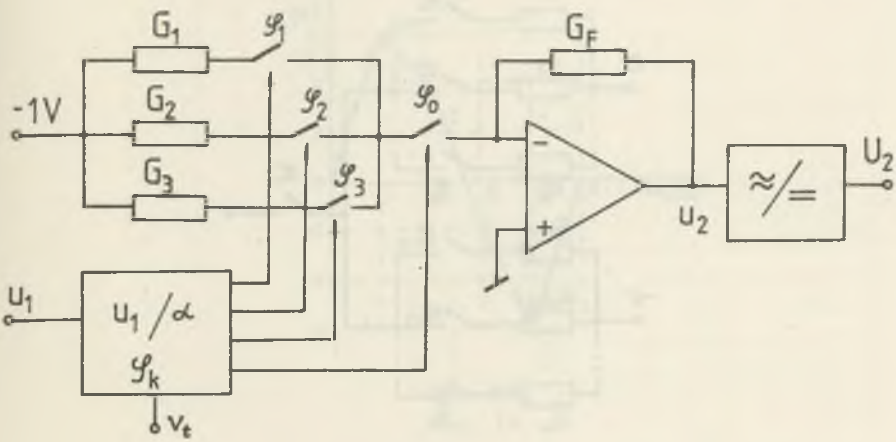


Rys. 7
Fig. 7



Rys. 8
Fig. 8

Układ praktyczny realizujący funkcję z rys. 6 może ostatecznie przyjąć postać pokazaną na rys. 9, gdzie V_t jest sygnałem zadającym okres funkcji przełączających φ.



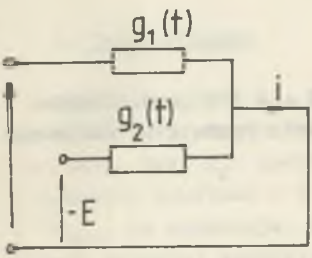
Rys. 9
Fig. 9

3. Realizacja funkcji nieliniowych ze zmiennym znakiem

Zmianę znaku konduktancji sterowanej $g(t)$, a zatem także zmianę znaku modelowanej przez nią funkcji nieliniowej można uzyskać w układzie trójnikowym z rys. 10, który opisuje zależność:

$$i = \left[g_1(t) - g_2(t)\right] E . \tag{11}$$

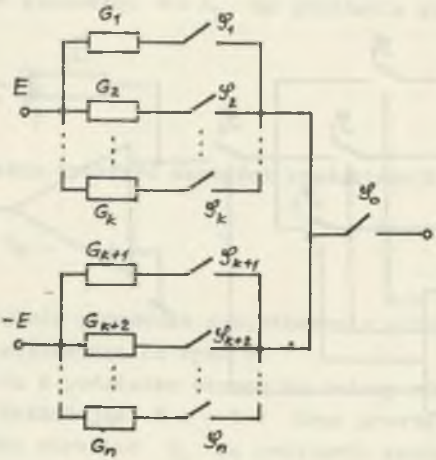
Zależność ta dla elementów RS odpowiada schematowi przedstawionemu na rys. 11, w którym występuje k konduktancji w gałęzi dodatniego napięcia i n-k w gałęzi ujemnego napięcia zasilającego. Konduktancje te odpowiadają ilości punktów przegięcia o dodatnich i ujemnych wartościach modelowanej funkcji nieliniowej.



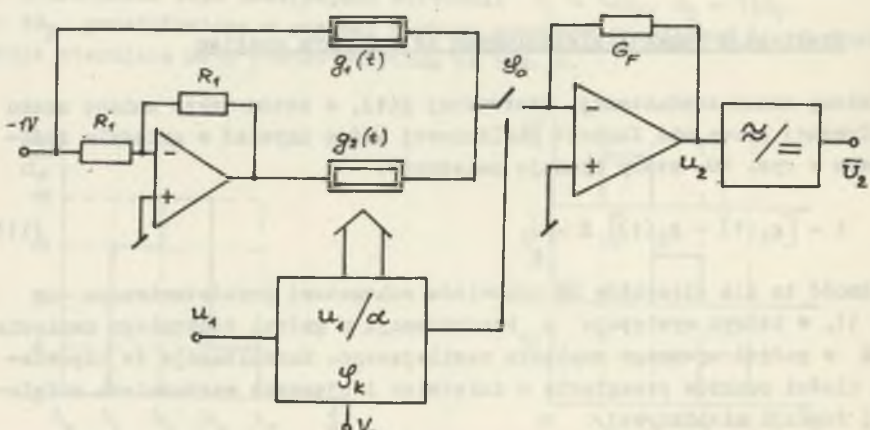
Rys. 10
Fig. 10

Praktyczne zastosowanie tego sposobu prowadzi do układu przedstawionego na rys. 12, podobnego do układu z rys. 5. Realizacja dwójników $g_1(t)$ i $g_2(t)$ może być przeprowadzona zarówno metodą zmiennej szerokości impulsu, jak i zmiennej fazy funkcji sterującej φ_0.

Przykładowo przedstawiona będzie realizacja funkcji nieliniowej niemonotonicznej o częściowo ujemnej charakterystyce pokazanej na rys. 13. Funkcja ta wymaga układu z podziałem okresu na pięć równych taktów



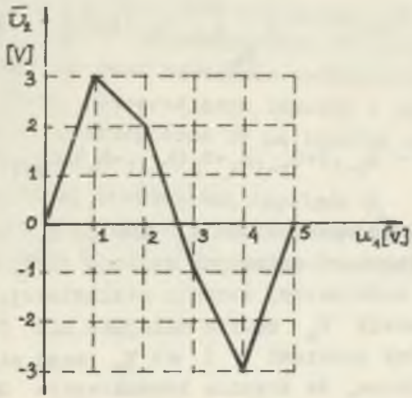
Rys. 11
Fig. 11



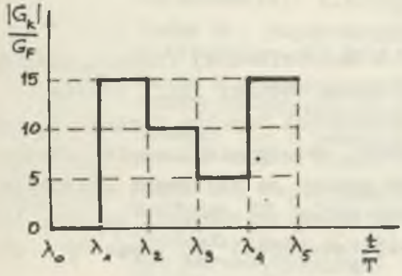
Rys. 12
Fig. 12

o długości: $\tau_o = \lambda_k - \lambda_{k-1} = T/5$. Zakładając $E = -1$ V oraz liniowe przetwarzanie $u_1 \longrightarrow \alpha$, można określić na podstawie wzoru (10) wartości konduktancji w gałęziach:

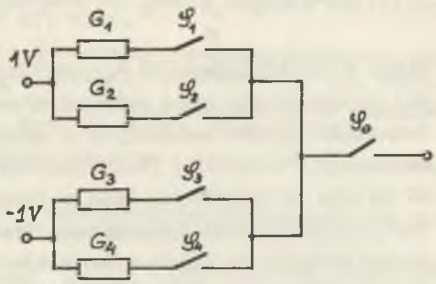
$$G_k = 5G_F\,\overline{U}_2(\lambda_k)$$



Rys. 13
Fig. 13



Rys. 14
Fig. 14



Rys. 15
Fig. 15

Dla rozpatrywanej nieliniowości otrzymuje się wartości: $G_1 = 15\ G_F$, $G_2 = 10\ G_F$, $G_3 = -5\ G_F$, $G_4 = -15\ G_F$, są one przedstawione w postaci funkcji na rys. 14, Układ realizujący jest podany na rys. 15.

4. Uwagi końcowe

Jeżeli długość τ_0 impulsu φ_0 nie będzie równa dokładnie $\lambda_k - \lambda_{k-1}$, to wystąpią błędy (zniekształcenia) w odwzorowywaniu zadanej funkcji nieliniowej. Gdy τ_0 będzie większe od T/n, to: $\tau_0 = (\lambda_{k+1} - \lambda_k) + \Delta\tau$, a pomiędzy punktami α i $\alpha + \tau_0$ będą dwa punkty przełączenia kluczy λ_k i λ_{k+1}, co spowoduje, że średnia konduktancja (5b) będzie zależna od trzech wartości konduktancji gałęziowych G_{k-1}, G_k i G_{k+1} i przyjmie postać:

$$\overline{G}(\alpha) = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\lambda_k} G_{k-1}\,dt + \frac{1}{T}\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} G_k\,dt + \frac{1}{T}\int_{\lambda_{k+1}}^{\alpha+\tau_0} G_{k+1}\,dt\,. \tag{12}$$

Stąd:

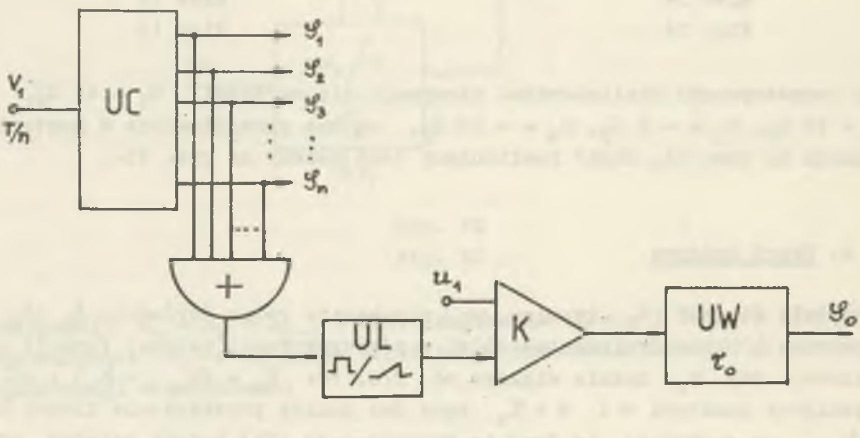
$$T\overline{G}(\alpha) = \alpha(G_{k+1} - G_{k-1}) + G_{k-1}\lambda_k + G_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k) + G_{k+1}(\tau_0 - \lambda_{k+1})\,. \tag{13}$$

Oznacza to, że w przedziałach od $\lambda_k - \Delta\tau$ do λ_k pojawiać się będą odcinki linii prostych różnych od opisanych relacją (5b), wprowadzajac odchyłki od zadanych wartości modelowanej funkcji nieliniowej.

Analogicznie jeżeli τ_0 będzie mniejsze niż T/n, to: $\tau_0 = (\lambda_{k-1} - \lambda_k) - \Delta\tau$, a między punktami α i $\alpha + \tau_0$ mogą się nie pojawić momenty przełączeń, co oznacza, że średnia konduktancja $G(\alpha)$ będzie wtedy zależeć jedynie od jednej konduktancji gałęziowej, czyli:

$$\overline{G}(\alpha) = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+\tau_0} G_k\,dt = G_k\,\tau_0\,. \tag{14}$$

Zatem w przedziałach od λ_k do $\lambda_k + \Delta\tau$ w zamodelowanej funkcji nieliniowej pojawiać się będą zniekształcające poziome odcinki linii prostej. Istnienie błędów związanych z odchyłką szerokości impulsu funkcji φ_0 od założonej równej T/n jest niekorzystną cechą metody modelowania układów RS metodą ze sterowaną fazą w stosunku do metody ze sterowaną szerokością impulsu. Możliwość powstawania tych błędów można prześledzić na rys. 16, przedstawiającym układ wytwarzający funkcje sterujące φ_k oraz φ_0 sterowaną napięciem u_1.



Rys. 16
Fig. 16

W układzie tym blok cyfrowy UC wytwarza sygnały φ_k, które zsumowane wyznaczają długość okresu T przetwarzanego na przebieg liniowy (piłowy) przez blok UL. Przebieg ten jest następnie porównywany z napięciem sterującym u_1 w komperatorze K, wytwarzającym impulsy o zmiennej szerokości, które są przetwarzane w uniwibratorze UW na impulsy o stałej szerokości τ_o lecz zmiennym położeniu.

Przyczyną możliwej nierówności impulsów φ_k i τ_o jest fakt wytwarzania ich w dwu różnych blokach układu, przy czym długość τ_o nie zależy od sygnału taktującego V_t, lecz od parametrów układu monostabilnego.

LITERATURA

[1] Cichocki A.: Metody realizacji nieliniowych charakterystyk bezinercyjnych i ich zastosowanie do modelowania układów dynamicznych. VI KKTOiUE Gliwice 1983.

[2] Cichocki A.: Synteza układów nieliniowych przy użyciu wzmacniaczy operacyjnych i elementów sterowanych. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej. Elektryka, z. 67, 1982.

[3] Pasko M., Topór-Kamiński L.: Rezystancyjno-przełącznikowe dwójniki elektryczne. ZN Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 98, 1985.

[4] Pasko M., Topór-Kamiński L.: Modelowanie nieliniowych układów rezystancyjno-przełącznikowych. Mat. IX SPETO, Wisła 1986.

[5] Osowski S.: O pewnych aspektach obwodów z rezystorami sterowanymi. Mat. X SPETO, Wisła 1987.

[6] Frycz S., Topór-Kamiński L.: Przełącznikowo-kondensatorowy układ mnożący. ZN Politechniki Śląskiej. Elektryka z. 95, 1985.

[7] Topór-Kamiński ń.: Elementy składowe rezystancyjnych aktywnych obwodów parametrycznych. III SPETO, Ustroń 1979, oraz ZN Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 68, 1980.

[8] Smołow W., Czemiawskij E.: Gibrydnyje wyczyslitielnyje ustrojstwa s deskretno uprawlajemymi parametrami. Leningrad 1977. Maszinostrojenije.

[9] Arnout G., De Man H.J.: The use of threshold functions and Boolean-controlled network elements for macromodelling of LSI circuits. IEEE J. Solid - state Circuits. SC-13, 1978.

[10] Gemin R.: Coments on: Digitally programmable gain amplifiers with arbitrary range of integer values. Pros. IEEE. No 5, 1981.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Andrzej Cichocki

Wpłynęło do redakcji dnia 10 maja 1988 r.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕМОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ
В РЕЗИСТИВНО КЛЮЧЕВЫХ СИСТЕМАХ

Р е з ю м е

Опираясь на предыдущих статьях авторов [3], [4], касающихся анализа двухполюсников составленных из линейных резисторов и идеальных электрических ключей, допускающие получить резистивные системы с переменными коэффициентами через перемену функций управляемых работой ключей, а также относящихся к резистивно-ключевым цепям моделирующих резистивные нелинейные цепи с нелинейно-монотонными характеристиками.

В настоящей работе рассматриваются приведенные высше проблемы. Указана возможность осуществления немонотонных нелинейных функций в системах содержащих линейные резисторы, операционные усилители а также идеальные ключи переключаемые переодическими функцилми.
Если состояние некоторых переключателей будет управлятся сигналом пропорциональным к некоторым зажимным переменным, преобретаются нелинейные функции в системе координат с определенными значениями за некоторой период времени.

Описаны два способа: с переодической функцией с переменным фазовым перемещением управляющего импульса, а также с применением управляемых кондуктивновтией с противоположными знаками. Представлены вычисленные примеры проектирования практических систем.

MODELLING NONLINEAR NONMONOTONIC FUNCTIONS
IN THE CLASS OF RESISTIVE-SWITCH NETWORKS

S u m m a r y

On the basis of the earlier works [3], [4] concerning the analysis of the two-terminal networks with linear resistances and ideal switches wchich allow to obtain resistive networks having bariable parameters by changing the functions controlling the switches as well as on the basis of the work concerning resistive switch networks modelling nonlinear resistive networks woth monotonic nonlinear characteristics, some realizations of nonlinear nonmonotonic functions have been presented.
The possibility of the realization of nonmonotonic nonlinear functions by means of the networks containing linear resistances, operational amplifiers and ideal switches controlled by periodic functions has been shown. If the states of some switches are controlled with the signal proportional to the chosen input-output variables, the nonlinear functions are obtained in the coordinate system with average values taken for the chosen period.
The two methods has been shown: with periodic function of the variable phase shift of a control pulse and with the use of two controlled conductances with opposite signs. The examples of the practical network design have been shown.