

## SPIS TREŚCI

|   | str. |
|---|------|
| 1. Janusz Walczak, Marian Pasko: Interpolacyjna metoda syntezy funkcji rzeczywistych. ....  | 7    |
| 2. Marian Pasko, Mirosław Dybek: Komputerowe wyznaczenie struktur dwójników kompensujących składową reaktancyjną prądu źródła napięcia odkształconego zasilającego odbiornik liniowy..... | 21   |
| 3. Janusz Walczak: O dekompozycji prądu rzeczywistego źródła napięcia odkształconego i możliwości jego ortogonalizacji.....   | 37   |
| 4. Magdalena Umińska-Bortliczek, Janusz Walczak: O dekompozycji prawie okresowego prądu odbiornika dwuzaciskowego.....  | 53   |
| 5. Marian Pasko: Dobór kompensatorów optymalizujących warunki energetyczne rzeczywistego źródła napięć odkształconych.....  | 69   |
| 6. Marian Pasko: Symetryzacja niesymetrycznego odbiornika trójfazowego zasilanego z symetrycznego źródła napięcia odkształconego za pomocą dwójników LC.....                              | 83   |
| 7. Marian Pasko: Dobór dwójników minimalizujących wskaźniki jakości energii elektrycznej dla układów trójfazowych zasilanych napięciem odkształconym.....                                 | 101  |
| 8. Janusz Walczak: Optymalizacja warunków pracy rzeczywistych trójfazowych źródeł napięć odkształconych. I. Wyznaczanie prądu aktywnego.....  | 125  |
| 9. Janusz Walczak: Optymalizacja warunków pracy rzeczywistych trójfazowych źródeł napięć odkształconych. II. Dekompozycja prądu źródła.....   | 147  |
| 10. Lesław Topór-Kamiński: Zastosowanie diody pojemnościowej w układach nieliniowych SC.....  | 159  |
| 11. Zofia Cichowska: Topologiczna analiza obwodów SLS.....  | 169  |
| 12. Zofia Cichowska: Cewki sprzężone magnetycznie w topologicznej metodzie analizy obwodów SLS.....   | 181  |

## CONTENTS

1. Janusz Walczak, Marian Pasko : Interpolation method of real valued function synthesis ..... 7
2. Marian Pasko, Mirosław Dybek : The computer calculation of the twoport structures for compensation of a reactance current of voltage-deformed source supplying linear receiver .... 21
3. Janusz Walczak : Decomposition of the current of nonideal and nonsinusoidal voltage source and possibilities of its orthogonalization ..... 37
4. Magdalena Umińska-Bortliczek, Janusz Walczak : On the decomposition of an almost periodic current of two-terminal receivers ..... 53
5. Marian Pasko : Selection of the compensators which optimize energetic conditions of the real, nonsinusoidal voltage source .. 69
6. Marian Pasko : Symmetrization of asymmetrical three phase receiver supplied by symmetrical nonsinusoidal voltage source using two-terminal network LC ..... 83
7. Marian Pasko : Selection of two-terminal networks minimizing the performance indices of electric energy for three phase systems supplied by deformed voltage ..... 101
8. Janusz Walczak : Optimization of operating conditions of nonideal and nonsinusoidal three-phase voltage sources  
I. Determining the active current ..... 125
9. Janusz Walczak : Optimization of operating conditions of nonideal and nonsinusoidal three-phase voltage sources  
II. Decomposition of the source current ..... 147
10. Lesław Topór-Kamiński : Use of capacitance diode in nonlinear SC networks ..... 159
11. Zofia Cichowska : Topological analysis of linear electric circuits ..... 169
12. Zofia Cichowska : Magnetically coupled coils in the topological method of linear circuits analysis ..... 181

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Януш Вальчак, Мариан Паско: Интерполяционный метод синтеза действительных функции ..... 7
2. Мариан Паско, Мирослав Дыбек: Компьютерное определение структур вухполюсников компенсирующих реактивную составляющую тока источника несинусоидального напряжения питающего линейный приемник..... 21
3. Януш Вальчак :О декомпозиции тока реального источника несинусоидального напряжения и возможности его ортогонализации ..... 37
4. Магдалена Уиньска-Бортличек, Януш Вальчак : Об ортогональной декомпозиции почти периодического тока двухполюсного приемника..... 53
5. Мариан Паско :Подбор компенсаторов для оптимизации энергетических условий реального источника несинусоидальных напряжений..... 69
6. Мариан Паско :Симметрирование несимметричного трехфазного приемника, питающегося от симметричного источника деформированного напряжения при помощи двухполюсников LC..... 83
7. Мариан Паско :Подбор двухполюсников минимизирующих показатели качества электрической энергии для трехфазных цепей питающихся от несинусоидального напряжения..... 101
8. Януш Вальчак :Оптимизация условий работы реальных трехфазных источников несинусоидальных напряжений.  
I Определение активного тока..... 125
9. Януш Вальчак :Оптимизация условий работы реальных трехфазных источников несинусоидальных напряжений.  
II Декомпозиция тока источника..... 147
10. Леслав толур-каминьски :Применение емкостного диода в нелинейных SC..... 159
11. Зофия Циховска :топологический анализ линейных цепей..... 169
12. Зофия Циховска :Сопряжение магнитные катушки в топологическом методе анализа линейных цепей..... 181

Janusz WALCZAK

Marian PASKO

## INTERPOLACYJNA METODA SYNTEZY FUNKCJI RZECZYWISTYCH

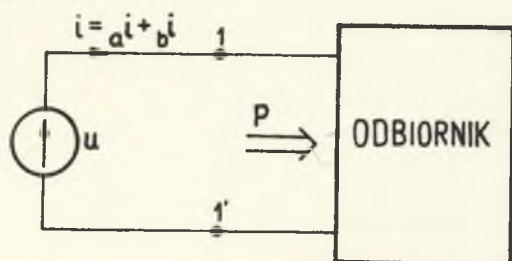
**Streszczenie.** W artykule sformalizowano problem syntezy interpolacyjnej funkcji rzeczywistych, sprowadzający się do wyznaczenia funkcji rzeczywistej (immitancji) dwójników podklasy  $\pm R, L, C$  przyjmującej dla zadanego i skończonego widma częstotliwości zadane wartości. Wykorzystując teorię stożków dodatnich, podano warunki wystarczające rozwiązania postawionego problemu. Przedstawiono również realizacje minimalne rozwiązań problemu syntezy w sensie minimalnej liczby użytych rezystancji ujemnych. Uzyskane wyniki, które znajdują zastosowanie w teorii mocy układów z przebiegami odkształconymi, zilustrowano przykładem liczbowym.

## 1. WSTĘP

Rozpatrywany w artykule problem powstał w wyniku wcześniejszych prac [5], [6], [7], [19], [22], dotyczących teorii mocy układów z przebiegami odkształconymi, opierającej się na koncepcji S.Fryzego [11]. W myśl tej koncepcji prąd źródła (rys.1) napięcia odkształconego zasilającego odbiornik dwuzaciskowy rozkłada się na dwa składniki:

- aktywny ( $i_a$ ), umożliwiający doprowadzenie do odbiornika zadanej mocy czynnej  $P$ ,
- bierny ( $i_b$ ), reprezentujący niepożądaną pozostałość prądu, którą należy eliminować.

Współczesne uogólnienia koncepcji S.Fryzego doprowadziły do uzyskania wielu rozkładów prądu źródła o mniej lub bardziej określonej interpretacji fizycznej [1], [5], [9], [10], [12], [16], [21], [22]. Możliwa jest [8] pewna unifikacja sposobów wyznaczania rozkładów prądu źródła o dowolnej



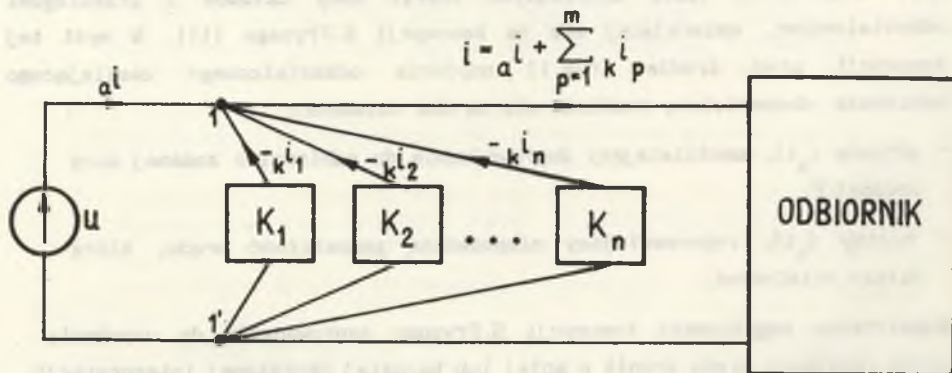
(skończonej) liczbie faz, którą przeprowadza się w przestrzeniach Hilberta prądów i napięć źródeł zasilających odbiorniki.

Rys.1. Odbiornik zasilany ze źródła napięcia odkształconego

Unifikacja ta składa się z dwóch etapów:

1. Minimalizacji wskaźnika jakości prądu [5], [6], [7], [9], będącego pewnym funkcjonałem w przyjętej przestrzeni Hilberta, przy ograniczeniu równościowym na moc czynną doprowadzaną do odbiornika. Element minimalizujący wymieniony funkcjonał nazywany jest prądem aktywnym.
2. Dekompozycji różnicy całkowitego prądu źródła i prądu aktywnego na dalsze składniki  $i_{k_p}$  ( $p \in \{1, \dots, m\}$ ) wynikłej z możliwości ich kompensacji (eliminacji).

Kompensację tę przeprowadza się poprzez dołączenie, równolegle do zacisków odbiornika, dwójników kompensacyjnych  $K_p$  ( $p \in \{1, \dots, n\}$ ) (rys.2), realizowalnych w zadanych klasach elementów.



Rys.2. Struktura układu kompensacji

W często spotykanym w praktyce przypadku zasilania odbiornika ze źródła

napięcia okresowego, odkształconego (rys.1); minimalizacją wartości skutecznej prądu źródła prowadzi do następującego rozkładu ortogonalnego (w sensie iloczynu skalarnego przestrzeni  $L^2(0;T)$ ) [1], [9] prądu:

$$i = i_a + i_r + i_s, \quad (1)$$

gdzie:

$i$  - całkowity prąd źródła,

$i_a$  - składnik aktywny prądu określony wzorem:

$$i_a = G_e u, \quad (2)$$

$i_r$  - składnik reaktancyjny prądu określony wzorem:

$$i_r = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} jB_h U_h \exp(jh\omega(\cdot)) \quad (3)$$

$i_s$  - składnik rozproszenia prądu określony wzorem:

$$i_s = (G_0 - G_e) U_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} (G_h - G_e) U_h \exp(jh\omega(\cdot)). \quad (4)$$

We wzorach (1) do (4) przyjęto oznaczenia:

$U_h$  - wartość zespolona skuteczna h-tej harmonicznej napięcia  $u$ ,

$Y_h = G_h + jB_h$ ,  $h \in \{0, 1, \dots\}$  - admitancje odbiornika dla poszczególnych harmonicznych,

$G_e$  - konduktancja zastępcza określona wzorem:

$$G_e = \frac{P}{\|u\|_L^2}, \quad (5)$$

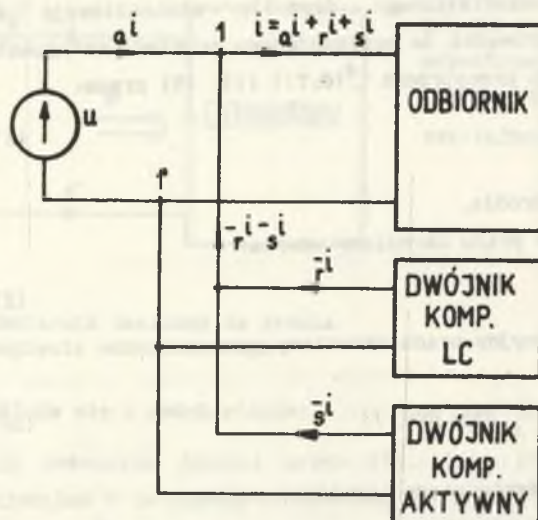
gdzie:

$P$  - zadana moc czynna doprowadzana do odbiornika,

$\|u\|_L^2$  - wartość skuteczna napięcia zasilającego odbiornik.

Składowa aktywna prądu (1) posiada minimalną wartość skuteczną i transportuje do odbiornika zadaną moc czynną  $P$ . Składowe reaktancyjna i rozproszenia są niepożądane i należy je eliminować w sposób opisany powyżej (rys.2).

Skończona liczba harmonicznych składowej reaktancyjnej ( $i_r$ ) prądu może być zawsze skompensowana [19] za pomocą dwójnika reaktancyjnego LC (rys.3).



Rys.3. Układ kompensacji - przebiegi okresowe

Kompensacja składowej rozproszenia prądu ( $i_s$ ) jest niemożliwa w klasie dwójników pasywnych [9], ponieważ admitancja dwójników kompensacyjnych nie jest funkcją rzeczywistą dodatnią, lecz tylko funkcją rzeczywistą (por. (4)).

Zagadnienie syntezy układu kompensacji składowej rozproszenia prądu źródła w pewnej klasie dwójników aktywnych rozpatrzono poniżej.

## 2. PROBLEM SYNTEZY

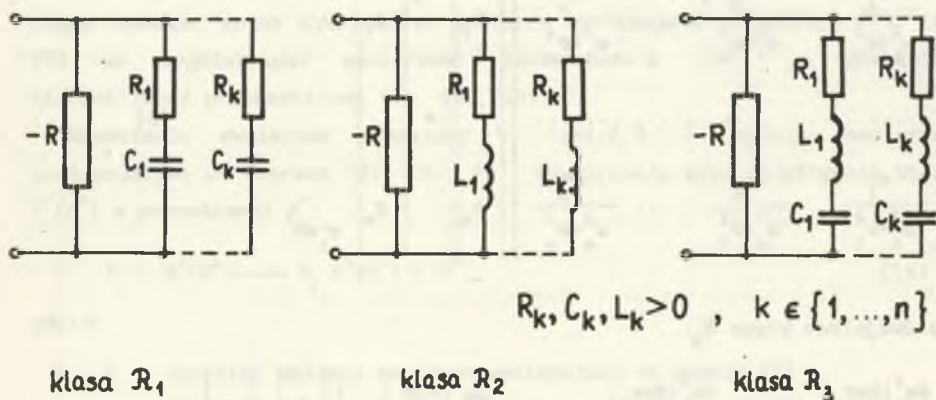
Ze wzoru (4) wynika, że eliminacja skończonej liczby  $n$  harmonicznych składowej rozproszenia prądu źródła jest możliwa poprzez włączenie, równolegle do jego zacisków, dwójnika o admitancji  $Y(s)$ , takiej że:

$$\bigwedge_{\substack{h \in \mathbb{N} \\ \text{card } N_0 = n}} \text{Re} \left\{ Y(j\omega) \right\} \Big|_{\omega = \omega_h = h\omega_0} = -(G_n - G_0) \quad (6)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

$$G_n, G_0 \in \mathbb{R}^+.$$

Problem syntezy sprowadza się więc do interpolacji części rzeczywistej dwójników, zgodnie ze wzorem (6). W przeciwieństwie do znanych metod syntezy dwójników klasy  $(\pm R, L, C)$  [13], [15], [17], admitancja  $Y(s)$  dwójnika będzie wynikiem rozwiązania postawionego w artykule problemu syntezy, a nie wielkością zadaną. Należy zauważyć, że prezentowana w artykule metoda interpolacyjna syntezy nie jest jedyna, znane są [18] metody rozwiązania postawionego problemu oparte na aproksymacji admitancji dwójników. Z uwagi na wymaganą stabilność zwarciovą dwójników i możliwie małą liczbę elementów aktywnych użytych do ich realizacji (ze względu na zastosowanie do kompensacji w układach przemysłowych) problem syntezy rozpatrzono w podzbiorach  $\mathcal{R}_1(\pm R, C)$ ,  $\mathcal{R}_2(\pm R, L)$ ,  $\mathcal{R}_3(\pm R, L, C)$  klas  $(\pm R, C)$ ,  $(\pm R, L)$ ,  $(\pm R, L, C)$  dwójników o strukturach kanonicznych Fostera przedstawionych na rys. 4.



Rys. 4. Klasy realizacji dwójników

Rozpatrywany problem syntezy (PS) formuluje się następująco:

Wyznaczyć admitancję  $Y(s)$  dwójnika klasy  $R$   $\mathcal{R}_1$  ( $1 \in \{1, 2, 3\}$ ) spełniająca warunki określone wzorem (6), gdy zadane są:

- konduktancje odbiornika  $G_h$  (dla  $h \in \{1, \dots, n\}$ , harmonicznych) i konduktancja  $G_e$ ,
- zbiór  $n$  biegunów  $\left\{ \sigma_h \right\}_{h \in \mathbb{N}_0}$  dwójnika przyjętej klasy  $\mathcal{R}_1$ .

□

Wykorzystując wzory określające postaci kanoniczne  $Y(j\omega)$  dwójników klas  $\mathcal{R}_1$  [13], rozwiązanie problemu (PS) sprowadza się do rozwiązania następujących



układów równań liniowych względem współrzędnych wektora  $k$ :

- dla dwójników klasy  $\mathcal{R}_1$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \sigma_1^2} & \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \sigma_2^2} & \dots & \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \sigma_n^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + \sigma_1^2} & \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + \sigma_2^2} & \dots & \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + \sigma_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \quad \sigma_i \in \mathbb{R}^+ \quad (7)$$

- dla dwójników klasy  $\mathcal{R}_2$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{\omega_1^2 + \sigma_1^2} & \frac{\sigma_2}{\omega_1^2 + \sigma_2^2} & \dots & \frac{\sigma_n}{\omega_1^2 + \sigma_n^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\sigma_1}{\omega_n^2 + \sigma_1^2} & \frac{\sigma_2}{\omega_n^2 + \sigma_2^2} & \dots & \frac{\sigma_n}{\omega_n^2 + \sigma_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \quad \sigma_i \in \mathbb{R}^+ \quad (8)$$

- dla dwójników klasy  $\mathcal{R}_3$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{2\omega_1^2 |\operatorname{Re}\sigma_1|}{\omega_1^4 + \omega_1^2 (|\sigma_1|^2 + |\sigma_1|^4)} & \frac{2\omega_1^2 |\operatorname{Re}\sigma_2|}{\omega_1^4 + \omega_1^2 (|\sigma_2|^2 + |\sigma_2|^4)} & \dots & \frac{2\omega_1^2 |\operatorname{Re}\sigma_n|}{\omega_1^4 + \omega_1^2 (|\sigma_n|^2 + |\sigma_n|^4)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{2\omega_n^2 |\operatorname{Re}\sigma_1|}{\omega_n^4 + \omega_n^2 (|\sigma_1|^2 + |\sigma_1|^4)} & \frac{2\omega_n^2 |\operatorname{Re}\sigma_2|}{\omega_n^4 + \omega_n^2 (|\sigma_1|^2 + |\sigma_1|^4)} & \dots & \frac{2\omega_n^2 |\operatorname{Re}\sigma_n|}{\omega_n^4 + \omega_n^2 (|\sigma_n|^2 + |\sigma_n|^4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \quad \sigma_i \in \mathbb{C} \quad (9)$$

gdzie:

$k$  - wektor współczynników form kanonicznych dwójników klas  $\mathcal{R}_i$ :

$$k = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T; \quad \dim k = n, \quad (10)$$

$g$  - wektor prawych stron równań (7), (8), (9):

$$g = [g_1, g_2, \dots, g_n]^T; \dim g = h, \quad (11)$$

$$g_h = -(G_n - G_e) - k_0, \quad h \in \{1, \dots, n\}, \quad (12)$$

$$k_0 = (-R)^{-1} \quad (\text{por. rys.4}). \quad (13)$$

Warunki konieczne i wystarczające rozwiązania problemu (PS) będą spełnione [15], [17], gdy wszystkie współrzędne wektora  $k$  (stanowiącego rozwiązanie układu równań (7), (8), (9)) są dodatnie.

### 3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU (PS)

Zakładając, że bieguny  $|\sigma_h|$  i częstotliwości  $\omega_h (h \in \{1, \dots, n\})$  tworzą ciągi rosnące, można wykazać, że macierze występujące we wzorach (7), (8), (9) są uogólnionymi macierzami Vandermonde'a [14], co gwarantuje nieosobliwość przekształceń (7), (8), (9).

Skończenie wymiarowe operatory  $V_i (i=1, 2, 3, \dots)$  (opisane macierzami występującymi we wzorach (7), (8), (9)) odwzorowują więc iniektywnie stożki  $K^+(R^n)$  w przestrzeni  $R^n$ :

$$V_i : K^+(R^n) \longrightarrow V_i K^+(R^n) \subset R^n, \quad (14)$$

gdzie:

$V_1$  - operator opisany macierzą występującą we wzorze (7)  
dla  $i=1$ , opisany macierzą występującą we wzorze (8) dla  $i=2$  oraz  
macierzą występującą we wzorze (9) dla  $i=3$ ,

$$K^+(R^n) = \{k \in R^n : (k_1 > 0, k_2 > 0, \dots, k_n > 0)\}. \quad (15)$$

Doświadczając wartość współczynnika  $k_0$  zgodnie ze wzorem

$$\bigwedge_{h \in \{1, \dots, n\}} - \{G_n - G_e\} - k_0 > 0 \quad (16)$$

łatwo zauważyć, że operatory  $V_i$  odwzorowują stożek  $K^+(R^n)$  w siebie, tzn.:

$$V_i : K^+(R^n) \longrightarrow V_i K^+(R^n) \subset K^+(R^n). \quad (17)$$

Zbiór  $V_i K^+$  nazywamy klinem [14].

Z powyższych rozważań wynika, że:

Jeżeli:

1. Założone w problemie (PS) ciągi  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ,  $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  są ciągami rosnącymi

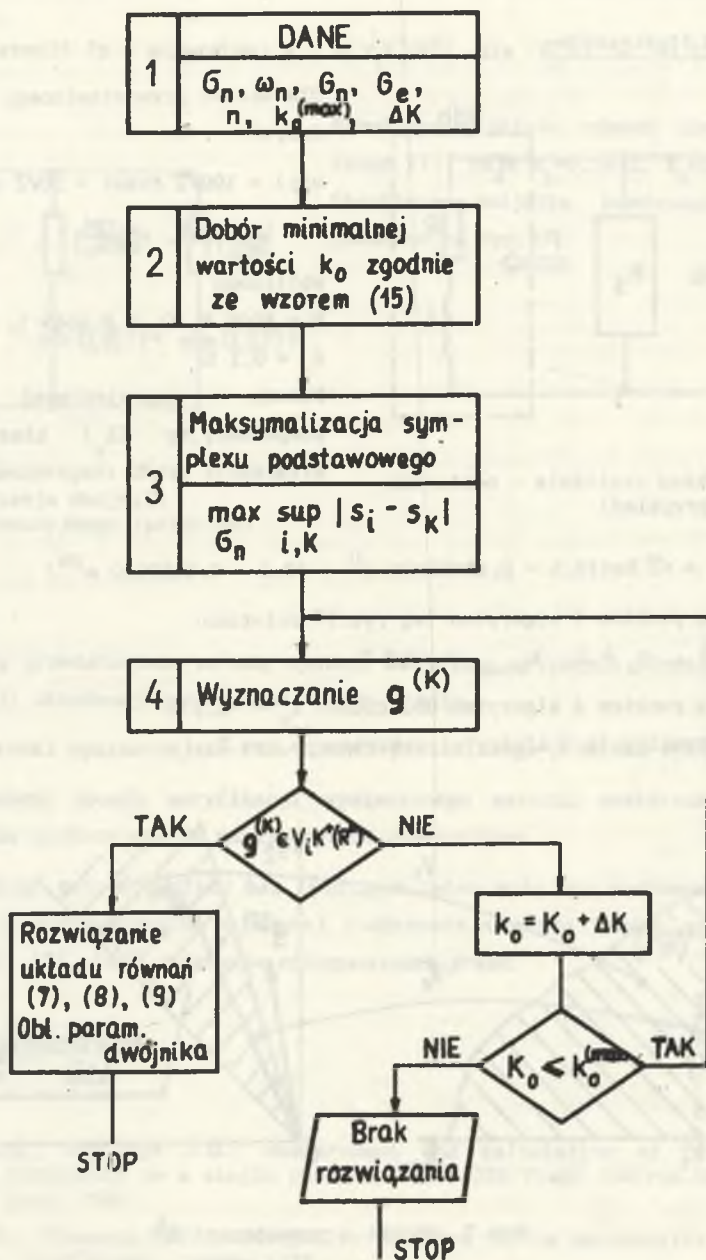
$$2. \bigvee_{k_0 \in \mathbb{R}^-} \bigvee_{(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}_0}} g \in V_1 K^+(R^n), \quad (17a)$$

to problem syntezy posiada pozytywne rozwiązanie.

Niestety opisany powyżej warunek nie pozwala w sposób bezpośredni stwierdzić, czy dla danego zbioru biegunów dwójnika  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , częstotliwości  $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , oraz zbioru parametrów  $\{G_n - G_0\}_{n \in \mathbb{N}}$  istnieje rozwiązanie problemu (PS). Wynika to z faktu, że macierze występujące we wzorach (7), (8), (9) nie są macierzami typu  $M$  [2] posiadającymi dodatnie odwrotności, a uogólniona teoria dodatniej odwracalności operatorów  $V_1$  [3], [4], [22] nie pozwala określić w postaci jawnej warunków istnienia dodatnich operatorów  $V_1^{-1}$ .

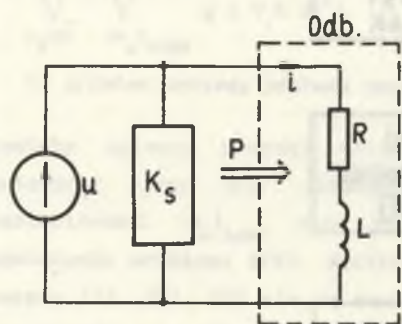
Z przedstawionego powodu identyfikację warunków rozwiązania oraz rozwiązanie problemu (PS) przeprowadzono z wykorzystaniem algorytmu numerycznego (rys. 5).

Procedurę maksymalizacji (punkt 3. algorytmu) przeprowadza się dla  $n-1$  wymiarowego sympleksu o wierzchołkach  $s_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ). Wierzchołki te określa się drogą wyznaczenia punktów przecięcia części jednostkowej hipersfery  $n$ -wymiarowej (leżącej w stożku  $K^+(R^n)$ ) z krawędziami klina  $V_1 K^+(R^n)$  dla zadanych macierzy przekształceń (7), (8), (9).



Rys. 5. Algorytm syntezy

## Przykład ilustracyjny



Rys.6. Układ zasilania - odbiornik (przykład)

Dla układu przedstawionego na rys.6 o danych:

$$u(t) = 100\sqrt{2} \cos\omega t + 30\sqrt{2} \cos 3\omega t,$$

$$R = 1\Omega, L = 1\text{H}, \omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

obliczono

$$P = 5090 \text{ W}, G_0 = 0,4669 \text{ S}, G_1 = 0,5 \text{ S},$$

$$G_3 = 0,1 \text{ S}.$$

Należy zaprojektować dwójnik kompensacyjny ( $K_S$ ) klasy  $R_1$  do eliminacji prądu rozproszenia:

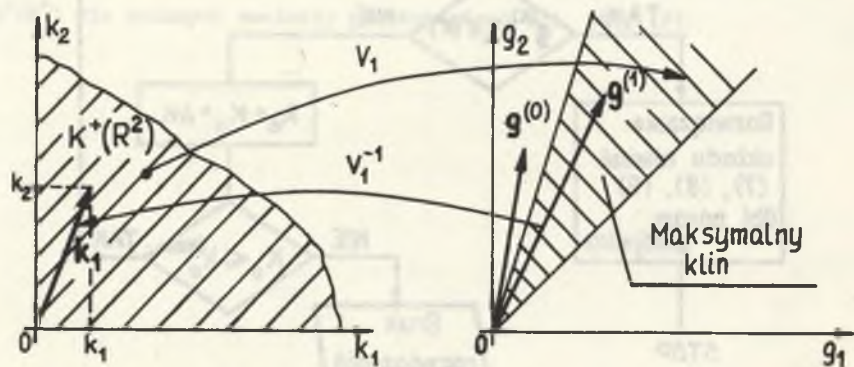
$$i_s = \sqrt{2} \operatorname{Re}\{(0,5 - 0,4669)100 e^{j\omega t} + (0,1 - 0,4669)30 e^{j3\omega t}\}.$$

Zgodnie z punktem 1 algorytmu (wg rys.5) założono:

$$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 3, k_{0(\max)} = -0,5 \text{ S}.$$

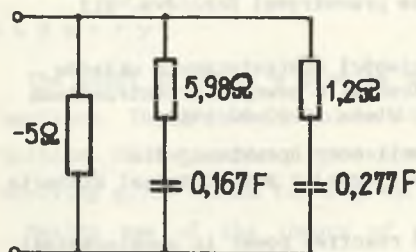
Zgodnie z punktem 2 algorytmu obliczono:  $k_0 = -0,1 \text{ S}$ .

Klin maksymalny (p.3 algorytm) pokazano na rys.7.

Rys.7. Stożki w przestrzeni  $R^2$ 

W pierwszej iteracji (p.4 algorytmu)  $g^{(0)} \in V_1 K^+(R^2)$  dla  $k_0^{(0)} = -0,1 \text{ S}$  (rys.7).

W drugiej iteracji (p.4 algorytmu)  $g^{(1)} \in V_1 K^+(R^2)$  dla  $k_0^{(1)} = -0,2 \text{ S}$  (rys. 7).



Rozwiązanie układu równań liniowych (wzór (7)) daje  $k_1=0,1672$ ,  $k_2=0,8327$ . Strukturę dwójnika kompensacyjnego pokazano na rys.8.

Rys.8. Realizacja dwójnika kompensacyjnego (przykład)

#### Podsumowanie

1. W artykule przedstawiono metodę syntezy dwójników aktywnych służących do kompensacji składowej rozproszenia prądu źródła.
2. Podano warunki wystarczające rozwiązania postawionego problemu syntezy.
3. Zaproponowano sposób weryfikacji wymienionego warunku wystarczającego oraz metodę syntezy opartą na algorytmie numerycznym.
4. Przedstawiona metoda syntezy bez istotnych zmian może być zastosowana do konstrukcji kompensatorów składowej rozproszenia prądu źródła szeregu innych [5], [7], [23] rozkładów ortogonalnych prądu.

#### LITERATURA

- [1] Beer A.S., van Wyk J.D.: Measurement and calculation of Czarnecki current components in a single phase system. IEEE Trans.Instrum.Meas. vol.39, April 1990.
- [2] Berman A., Plemmons R.J.: Nonnegative matrices in the mathematical sciences. Acad.Press. London 1979.
- [3] Berman A., Plemmons R.J.: Monotonicity and the generalized inverse. SIAM J. Appl.Math. No 22. 1972.
- [4] Berker G.P.: On matrices having a invariant cone. Czech. Math.J. No 21. 1972.

- [5] Brodzki M., Walczak J., Umińska-Bortliczek M., Pasko M.: Optimierung eines vorgeschlagener neuen Qualitätsfaktors Elektrischen Energie. 33 Int.Symp.Techn.Univ.Ilmenau Oct. 1988.
- [6] Brodzki M., Walczak J.: Nowe definicje mocy w układach z przebiegami odkształconymi, wykorzystujące pojęcie przestrzeni Soboleva. XII KKT01UE, Myczkowce 17-20.10.1979.
- [7] Brodzki M., Walczak J.: Analiza właściwości energetycznych układów dwuzaciskowych z przebiegami odkształconymi w pewnych przestrzeniach funkcji prawie okresowych. XIII SPETO, Wisła 19-20.04.1989.
- [8] Brodzki M., Walczak J.: O związku teorii mocy uprawianej dla pojedynczych odbiorników energii elektrycznej z przestrzmiami Hilberta. XIII SPETO, Wisła 22-25.05.1990.
- [9] Czarnecki L.S.: Considerations on the reactive power in nonsinusoidal situations. IEEE Trans.Instrum.Meas. Vol.Im-34, Sept.1984.
- [10] Depenbrock M.: Wirk und Blindleistung ETG-Fachung. "BLINDLEISTUNG", Aachen, Oct.1979.
- [11] Fryze S.: Wirk, Blind und Scheinleistung in Elektrisch Stromkreisen mit nichtsinusförmigen Verlauf vom Strom und Spannung. ETZ. Bd.53, 1932.
- [12] Fodor G., Tevan G.: Powers and compensation in networks in periodic state. Archiv für Elektrotechnik, No 65, 1982.
- [13] Guillemin E.A.: Synthesis of passive networks. J.Wiley, N.York 1965.
- [14] Krasnoselskij M.A., Lifsic F.A., Sobolev A.V.: Pozitivnyje linejnyje sistemy. nauka, Moskva 1985.
- [15] Karni S.: Network Theory: Analysis and Synthesis. All.Bac.Inc., Boston-Mass. 1966.
- [16] Kusters N.L., Moore W.J.M.: On the definition of reative power under nonsinusoidal conditions. IEEE Trans.Power Appl.Syst., Vol. PAS-99. Sept.1980.
- [17] Mitra S.K.: Analiza i synteza układów aktywnych. WNT, Warszawa 1974.
- [18] Osowski S.: Formuła optymalizacyjna syntezy obwodów pasywnych. XII SPETO, Wisła 19-22.04.1990.
- [19] Pasko M., Walczak J.: A synthesis of compensation systems of a current reactance component of two-terminal receiver with deformed voltage supply. Int.Conf."Math.Optym. - theory and Appl." Eisenach. Dec. 1989.
- [20] Shepherd W., Zakikhani P.: Suggested definition on reactive power for nonsinusoidal systems. Proc. IEE Vol.119. No 9, Sept.1972.
- [21] Schröder J.: Lineare Operatoren mit positive Inversen. Arch.Rat.math.Anal.No 8. 1961.
- [22] Walczak J.: An analysis of energetistic properties of two-terminal receiver with application of quality indices of deformed currents. Int. Conf. "Math. Optym. - Theory and Appl." Eisenach. Dec.1989.

Recenzent: doc.dr hab.inż. Stanisław Osowski

Wpłynęło do Redakcji dnia 5 grudnia 1990 r.

## INTERPOLATION METHOD OF REAL-VALUED FUNCTION SYNTHESIS

## Summary

The paper presents a problem of interpolation synthesis of real-valued functions. The problem resolves itself into determination of a real-valued function of two-ports (imittance function) of the R, L, C sub class receiving given values for a given finite frequency spectrum.

Making use of the theory of positive cones the conditions which are sufficient to solve the problem have been given.

Minimal realization of synthesis problem solutions in the sense of a minimal number of used negative resistances have been also given.

The results which can be used in the theory of system power with nonsinusoidal waveforms have been illustrated by a numerical example.

## ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИИ

## Резюме

В статье формализуется проблема интерполяционного синтеза действительных функции сходящаяся к опеределению действительной функции (иммитанции) двухполюсников класса  $\pm R, L, C$  принимающей для данного оконченного спектра частоты данные значения.

Употребляя теорию положительных конусов представляются достаточные условия решения данной проблемы.

Совместно даются минимальные реализации решений задачи синтеза в смысле минимума использованных отрицательных резистанции.

Результаты, которые можно применить в теории мощности цепей с несинусоидальными цессати иллюстрируется вычисленным примером.



Seria: ELEKTRYKA z. 122

Nr kol. 1124

Marian PASKO

Mirosław DYBEK

KOMPUTEROWE WYZNACZANIE STRUKTUR DWÓJNIKÓW KOMPENSUJĄCYCH  
SKŁADOWĄ REAKTANCYJNĄ PRĄDU ŹRÓDŁA NAPIĘCIA ODKSZTAŁCONEGO  
ZASILAJĄCEGO ODBIORNIK LINIOWY

Streszczenie. Artykuł stanowi kontynuację prac dotyczących wyznaczania struktur dwójników mających na celu zmniejszenie wartości skutecznej prądu źródła napięcia odkształconego zasilającego odbiornik liniowy. W pracy zamieszczono niezbędną teorię, na podstawie której został skonstruowany algorytm numeryczny do wyznaczania wymienionych dwójników. Zadaniem wyznaczonych dwójników jest kompensacja składowej reaktancyjnej prądu źródła na podstawie znajomości susceptancji odbiornika dla harmonicznych, które należy wykompensować. W pracy przedstawiono przykład doboru dwójników opierając się na zrealizowanym programie komputerowym.

## 1. WSTĘP

Niniejszy artykuł stanowi podsumowanie prac [1], [2], [4], [5], [6], [7] dotyczących możliwości zmniejszenia wartości skutecznej prądu źródła napięcia odkształconego zasilającego odbiornik dwuzaciskowy, za pomocą odpowiednich dwójników reaktancyjnych LC. Wyznaczanie struktur dwójników reaktancyjnych podporządkowanych temu celowi sprowadza się do:

- rozwiązania silnie nieliniowych układów równań,
- sprowadzenia omawianego problemu do wykorzystania teorii operatorów liniowych [5], [7].

Pierwszy z wymienionych sposobów sprowadza się do wykazania, że istniejące rozwiązania silnie nieliniowych układów równań spełniają warunki

realizowalności w klasie dwójników LC. Wykazanie powyższych faktów metodami jakościowymi jest rzeczą bardzo trudną. Dlatego też ograniczamy się tylko do drugiego sposobu i cały algorytm syntezy oparty jest na tym sposobie. Natomiast samo zmniejszenie wartości skutecznej prądu źródła jest równoczesne ze zmniejszeniem jego mocy pozornej. Minimalizację mocy pozornej poprzez kompensację mocy biernej indywidualnych harmonicznych wyprowadzono z warunku podanego w 1931 przez L. Staniewicza [8]. Warunek ten wymaga, aby współczynnik mocy źródła był równy jedności, a mianowicie

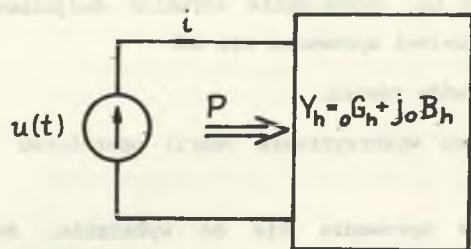
$$\left. \begin{aligned} \frac{|U_n|}{|I_n|} &= \frac{|U_k|}{|I_k|} && \text{(warunek modułu)} \\ \text{Arg}\{U_n\} &= \text{Arg}\{I_n\} && \text{(warunek fazy)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

dla każdego  $n, k \in \{1, 2, 3, \dots, l\}$

Autor tego warunku nie podał jednak środków technicznych umożliwiających jego spełnienie. Środki techniczne, za pomocą których można było uzyskać warunki, zostały podane w pracy [3] w 1968, ale sposób ten ze względów technicznych jest nie do przyjęcia. Spełnienie tylko warunku fazy zostało podane przez Emanuela w 1974 [4]. Emanuel stwierdza, że aby skompensować moc bierną  $n$ -harmonicznych, należy włączyć na zaciski odbiornika dwójnik reaktancyjny złożony z  $n(2n-1)$  elementów reaktancyjnych. L.S. Czarnecki w swoich pracach [1], [2] stwierdził, że dla kompensacji  $n$ -harmonicznych wystarczy włączyć dwójnik reaktancyjny złożony z  $m$ -elementów spełniających zależność:

$$n \leq m \leq 2n-1.$$

Kompensacja mocy biernej indywidualnych harmonicznych jest ściśle związana z rozkładem prądu źródła na składowe wzajemnie ortogonalne.



Rys. 1.

W rozkładzie zaproponowanym przez L.S. Czarneckiego kompensacja mocy biernej indywidualnych harmonicznych jest równoznaczna z kompensacją prądu reaktancyjnego, który dla odbiornika dwuzaciskowego (rys.1) zasilanego z idealnego źródła napięcia odkształconego wyraża się wzorem (1).

Niech 
$$u(t) = U_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} U_h \exp j h \omega t, \quad (2)$$

$$Y_h = G_h + j B_h, \quad h \in \{1, 2, \dots, n\}$$

wówczas omawiana składowa reaktancyjna prądu źródła ma postać

$$i(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} j B_h U_h \exp j h \omega t, \quad (3)$$

gdzie:  $U_h$  - wartość skuteczna zespolona napięcia dla  $h$ -tej harmonicznej.

Warunkiem kompensacji składowej reaktancyjnej prądu źródła (3) dla dowolnej skończonej liczby harmonicznych jest, aby dla każdego  $h \in \{1, 2, \dots, n\}$  dołączony układ kompensacyjny miał susceptancję  $B_{kh}$  spełniającą zależność

$$\bigwedge_{h \in \{1, 2, \dots, n\}} B_{kh} = -B_h, \quad (4)$$

W literaturze [1], [2] istnieją przykłady rozwiązania tego problemu dla niewielkiej liczby harmonicznych. Brak było natomiast analizy warunków istnienia rozwiązań wymienionego problemu dla dowolnej skończonej liczby harmonicznych.

Istnieją również przykłady [6] świadczące o tym, że nie zawsze wymieniony problem syntezy ma realizację fizyczną.

Zagadnienia kompensacji prądu  $i$  dla dowolnej skończonej liczby harmonicznych przedstawiono w pracach [5], [7], gdzie podano warunki konieczne i wystarczające rozwiązania powyższego problemu w całej klasie dwójków LC, dla dowolnej zmiany susceptancji  $B_h$ .

Dwójniki LC podzielono na cztery klasy (D1+D4) charakteryzujące się różnymi własnościami  $B_r(\omega)$  przy dążeniu  $\omega$  do zera i nieskończoności, i tak:

$$\left. \begin{array}{l} \text{klasa D1: } \lim_{\omega \rightarrow 0^+} B_r(\omega) = -\infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} B_r(\omega) = \infty, \\ \text{klasa D2: } \lim_{\omega \rightarrow 0^+} B_r(\omega) = -\infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} B_r(\omega) = 0, \\ \text{klasa D3: } \lim_{\omega \rightarrow 0^+} B_r(\omega) = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} B_r(\omega) = \infty, \\ \text{klasa D4: } \lim_{\omega \rightarrow 0^+} B_r(\omega) = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} B_r(\omega) = 0. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Dobór odpowiedniej klasy dwójnika LC zależy od zmienności  ${}_0B_h$ . Z dowodu wymienionych warunków koniecznych i wystarczających [5], [7] wynika sposób konstrukcji algorytmu numerycznego pozwalającego na dobór dwójników LC dla dowolnej skończonej liczby harmonicznych.

## 2. ALGORYTM NUMERYCZNY

Algorytm ten pokazano na schemacie blokowym przedstawionym na rys.2. Poszczególne etapy algorytmu (rys.2 numery od 1 do 6) zostaną opisane w punktach 2.1 do 2.6.

2.1. Dane wejściowe dla algorytmu obliczeniowego stanowią:

- n - liczba kompensowalnych harmonicznych
- wektor susceptancji odbiornika  ${}_0B_h = [{}_0B_1, {}_0B_2, \dots, {}_0B_n]$
- pulsacja podstawowa  $\omega$
- wektor pulsacji kompensowanych

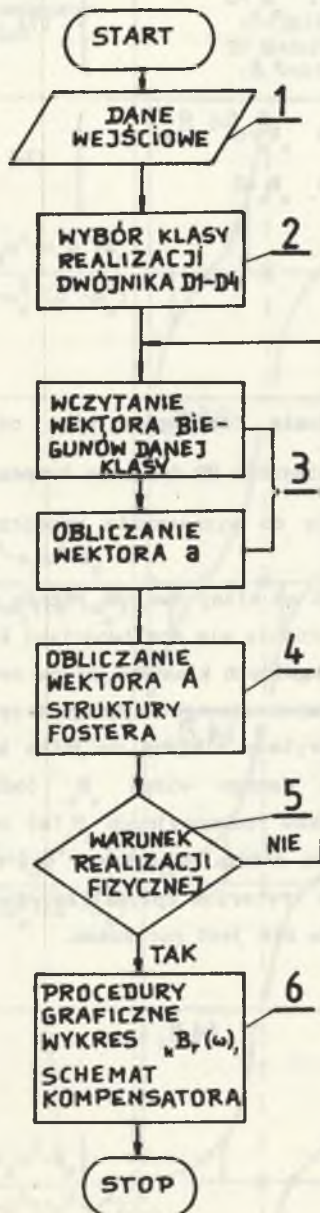
$$H(i) = [H_1, H_2, \dots, H_n]. \quad (6)$$

2.2. Po wprowadzeniu danych wejściowych algorytm realizuje wybór klasy dwójnika. Wybór ten wynika z warunku koniecznego realizacji dwójnika kompensującego [5].

Wybór ten jest przeprowadzony następująco:

- Jeżeli wszystkie składowe wektora  ${}_0B_h > 0$ , to realizacja będzie w klasie D2.
- Jeżeli wszystkie składowe wektora  ${}_0B_h < 0$ , to realizacja będzie w klasie D3 lub D4.
- Jeżeli  ${}_0B_1 > 0$  natomiast pozostałe składowe wektora  ${}_0B_h$ , dla  $h > 1$  są  $< 0$ , to realizacja będzie w klasie D1.

Jeżeli wektor susceptancji odbiornika nie spełnia żadnego z wyżej wymienionych warunków, to stosuje się tzw. rozkład delta, który polega na tym, że wektor  ${}_0B_h$  rozbija się na dwa wektory  ${}_0B_{h(1)}$  i  ${}_0B_{h(2)}$  według

ALGORYTM DOBORU  
DWÓJNIKÓW REAKTANCYJNYCH

Rys. 2.

następującej zasady:

$$\bullet B_{(1)h} = \left. \begin{cases} B_h + \Delta_h, & \text{jeżeli } B_h > 0 \\ \Delta_h, & \text{jeżeli } B_h < 0 \end{cases} \right\} (7)$$

$$\circ B_{(2)h} = \left. \begin{cases} -\Delta_h, & \text{jeżeli } B_h > 0 \\ B_h - \Delta_h, & \text{jeżeli } B_h < 0 \end{cases} \right\} (7a)$$

przy czym

$$\bigwedge_{h \in \{1, 2, \dots, n\}} \Delta_h > 0.$$

### 2.3. Realizacja w zadanej klasie rozpoczyna się od zadania:

- wektora częstotliwości biegunów WB dwójnika kompensującego  $B_{kr}(\omega)$ .

Obliczenia sprowadzają się do wyznaczania współczynników  $a_k$  funkcji rzeczywistej wymiernej.

Funkcje  $B_{kr}(\omega)$  w zależności od klasy dwójnika różnią się swą postacią, a odpowiadające im dwójniki różnią się możliwościami kompensacyjnymi.

Funkcje  $B_{kr}(\omega)$  dla poszczególnych klas dwójników zestawiono w tabeli 1 na przykładzie dwójnika kompensującego mającego trzy skończone bieguny. Ponieważ w omawianym algorytmie bieguny dwójnika kompensującego są z góry zadawane, więc dla danego widma  $B_h$  (odbiornika) istnieje nieskończenie wiele dwójników reakcyjnych  $B_{kr}(\omega)$  zdolnych kompensować składową reaktancyjną prądu źródła. O wyborze tej czy innej struktury winno zdecydować przyjęte kryterium optymalizacyjne. Zagadnienie to w ogóle w niniejszym artykule nie jest poruszane.

TABELA 1

| Klasa dwójnika | Postać analityczna dwójnika kompensującego $k_r B(\omega)$  | Przebieg funkcji $k_r B(\omega)$ dwójnika kompensującego z zaznaczonymi warunkami na wektor $-\{B_h\}$ | Liczba komp. harm. |
|----------------|---|--|--------------------|
| D1             | $k_r B(\omega) = \frac{a_8 \omega^8 - a_6 \omega^6 + a_4 \omega^4 - a_2 \omega^2 + a_0}{\omega(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2)(\omega^2 - \omega_6^2)}$ |  | 5                  |
| D2             | $k_r B(\omega) = \frac{-a_6 \omega^6 + a_4 \omega^4 - a_2 \omega^2 + a_0}{\omega(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2)(\omega^2 - \omega_6^2)}$               |  | 4                  |
| D3             | $k_r B(\omega) = \frac{\omega(a_6 \omega^6 - a_4 \omega^4 + a_2 \omega^2 - a_0)}{(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2)(\omega^2 - \omega_6^2)}$              |  | 4                  |
| D4             | $k_r B(\omega) = \frac{\omega(-a_4 \omega^4 + a_2 \omega^2 - a_0)}{(\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2)(\omega^2 - \omega_6^2)}$                            |  | 3                  |

Z warunku  $B_{kr}(h) = -{}_0B_h$ , oraz przy założonych błęgunach wynika, że wyznaczanie współczynników  $a_k$  funkcji  $B_{kr}(\omega)$  wiąże się z rozwiązaniem układu równań liniowych postaci:

$$Va=b, \quad (8)$$

gdzie  $V$  - macierz Vandermonde'a o wymiarze  $n \times n$  postaci

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \omega_1^2 & \omega_1^4 & \dots & \omega_1^{2n-2} \\ 1 & \omega_2^2 & \omega_2^4 & \dots & \omega_2^{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \dots & \omega_n^{2n-2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$a$  - wektor szukanych współczynników licznika funkcji  $B_{kr}(\omega)$  zależny od klasy dwójnika,

$b$  - wektor wyrazów wolnych zależny od klasy dwójnika.

Przykładowo dla dwójnika klasy D2 zamieszczonego w tabeli 1 mamy

$$a = [a_0, -a_2, a_4, -a_6]^T, \quad a_k > 0 \quad (10)$$

$$b = [-{}_0B_1 \omega_1 M(\omega_1^2), -{}_0B_2 \omega_2 M(\omega_2^2), -{}_0B_3 \omega_3 M(\omega_3^2), -{}_0B_4 \omega_4 M(\omega_4^2)]^T, \quad (11)$$

$$M(\omega^2) = (\omega^2 - \omega_2^2)(\omega^2 - \omega_4^2)(\omega^2 - \omega_6^2).$$

Aby składowe wektora  $a$  spełniały warunek przeplatania znaków, musi zachodzić zgodność znaków odpowiadających sobie składowych  $a$  i  $b$ . Stąd wynika warunek narzucony na widmo  ${}_0B_h$  i podział na klasy. Warunek przeplatania znaków wektora  $a$  jest warunkiem koniecznym, aby funkcja rzeczywista wymierna była funkcją reaktancyjną. Warunek wystarczający sprawdzamy w podobny sposób, a mianowicie otrzymaną funkcję rozwijamy w II postaci kanoniczną Fostera.

#### 2.4. Procedury wyznaczania współczynników II postaci kanonicznej Fostera

Postaci kanoniczne Fostera i odpowiadające jej dwójniki dla poszczególnych klas zestawiono w tabeli 2.



TABELA 2

| Klasa | Postać kanoniczna<br>$B_{kr}(\omega)$  | Struktura dwójnika |
|-------|--|--------------------|
| D1    | $A_{\infty} \omega \rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{A_{2k} \omega}{\omega_{2k}^2 - \omega^2}$  |                    |
| D2    | $\frac{A_0}{\omega} \rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{A_{2k} \omega}{\omega_{2k}^2 - \omega^2}$ |                    |
| D3    | $A_{\infty} \omega + \sum_{k=1}^n \frac{A_{2k} \omega}{\omega_{2k}^2 - \omega^2}$            |                    |
| D4    | $\sum_{k=1}^n \frac{A_{2k} \omega}{\omega_{2k}^2 - \omega^2}$                                |                    |

Obliczenia sprowadzają się do wyznaczenia współczynników  $A_{\infty}$ ,  $A_0$ ,  $A_{2k}$ ,  $k \in \{2, 4, 6, \dots, 2n\}$ , które winny spełniać warunki  $A_{\infty} > 0$ ,  $A_0 > 0$ , natomiast  $A_{2k} > 0$ .

Wyznaczenie odbywa się poprzez rozwiązanie układu równań postaci

$$CA = B, \quad (12)$$

gdzie:

$C$  - wygenerowana macierz  $n \times n$  różna dla różnych klas realizowanych dwójników.

Klasa D1:

$$C(I, J) = \begin{cases} \omega(I) & \text{dla } J=1, I \in \{1, 2, \dots, n\} \\ -\frac{1}{\omega(I)} & \text{dla } J=2, J \in \{1, 2, \dots, n\} \\ \frac{\omega(I)}{\omega_B^2(J) - \omega^2(I)} & \text{dla } J=\{3, 4, \dots, n\}. \end{cases}$$

Klasa D2:

$$C(I, J) = \begin{cases} \frac{1}{\omega(I)} & \text{dla } J=1 \\ \frac{\omega(I)}{\omega_B^2(J) - \omega^2(I)} & \text{dla } J=\{2, 3, \dots, n\}. \end{cases}$$

Klasa D3:

$$C(I, J) = \begin{cases} \omega(I) & \text{dla } J=1 \\ \frac{\omega(I)}{\omega_B^2(J) - \omega^2(I)} & \text{dla } J=\{2, 3, \dots, n\} \end{cases}$$

Klasa D4:

$$C(I, J) = \begin{cases} \frac{\omega(I)}{\omega_B^2(J) - \omega^2(I)} & \text{dla } J=\{1, 2, \dots, n\} \end{cases}$$

$A$  - wektor współczynników rozwinięcia Fostera postaci:

$$A = [A_{\omega}, A_0, A_2, \dots, A_{2k}]^T,$$

$B$  - wektor susceptancji dwójnika kompensującego dla rozpatrywanych częstotliwości kompensujących

$$B = [B(1), B(2), \dots, B(n)]^T.$$

## 2.5. Sprawdzenie fizycznej realizowalności dwójnika

Jeżeli otrzymane współrzędne wektora  $A$  spełniają warunki fizycznej realizowalności dwójnika, wówczas proces syntezy dwójnika kompensującego w danej klasie należy uznać za zakończony i następuje przejście do procedur graficznych.

Jeżeli natomiast którakolwiek współrzędna wektora  $A$  jest mniejsza od zera, to należy powtórzyć proces syntezy, modyfikując wartości biegunów dla danego dwójnika i powrócić do obliczeń w punkcie 2.3.

## 2.6. Procedury graficzne

Następuje wydruk schematów struktury dwójnika kompensującego z naniesionymi parametrami LC oraz wydruk przebiegu susceptancji dwójnika kompensującego  $B_k(\omega)$ .

### 3. PRZYKŁAD DOBORU DWÓJNIKA KOMPENSUJĄCEGO

#### 3.1. Wektor pulsacji kompensowanych

$$H(1)=[1, 5, 9, 13] \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

#### 3.2. Wektor susceptancji odbiornika kompensowanych harmonicznych

$$B_h=[2, 2, 2, 1] \text{ S.}$$

Na podstawie algorytmu zostanie wybrana klasa D2 dwójnika kompensującego.

#### 3.3. Wybór wektora biegunów

$$WB=[3, 7, 11] \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Dla tak dobranego wektora biegunów otrzymujemy funkcję rzeczywistą syntezy dwójnika o postaci

$$B_k(\omega) = \frac{-12,03\omega^6 + 1979,35\omega^4 - 62834,2\omega^2 + 153026,8}{\omega(\omega^2-9)(\omega^2-49)(\omega^2-121)}$$

Pomimo że znaki współczynników licznika realizowanej funkcji  $a_k$  (współczynniki wektora  $a$  (wzór 10)) się przeplatają, to funkcja ta nie jest funkcją reaktancyjną, gdyż wektor współczynników rozwinięcia Fostera  $A$  nie jest ściśle dodatni.

Wektor ten ma postać

$$A=[2,87; 6,47; 2,92; -0,23].$$

Modyfikacja wartości biegunów powoduje, że wektor ten staje się ściśle dodatni.

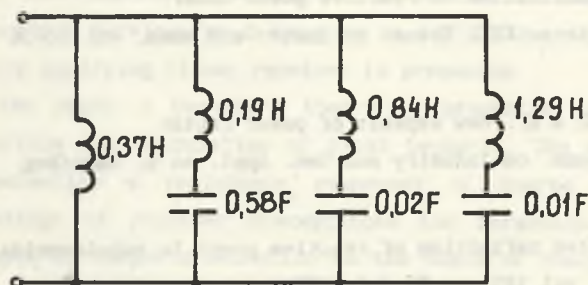
Przyjmując np. wektor  $WB$  o postaci

$$WB=[3; 8,5; 11] \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \text{ wówczas wektor}$$

$$A=[2,68; 5,22; 1,19; 0,78].$$

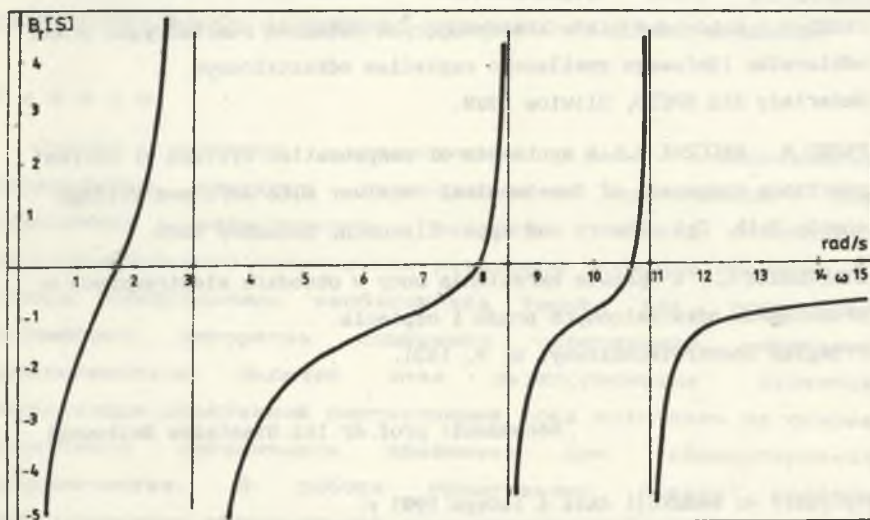
Struktura dwójnika kompensującego dla zmodyfikowanego wektora  $\mathbf{WB}$  przedstawiona jest na rys.3, którego II forma kanoniczna Fostera ma postać:

$$k_{B_r}(\omega) = -\frac{A_0}{\omega} + \frac{5,2,2\omega}{9-\omega^2} + \frac{1,19\omega}{72,25-\omega^2} + \frac{0,78\omega}{121-\omega^2}$$



Rys. 3.

Wykres zmienności susceptancji dwójnika kompensującego  $k_{B_r}(\omega)$  przedstawiono na rys.4.



Wykres susceptancji dwójnika kompensującego

Rys. 4

## LITERATURA

1. CZARNECKI L.S.: Interpretacja, identyfikacja i modyfikacja właściwości energetycznych obwodów jednofazowych z przebiegami odkształconymi. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej "Elektryka", z.91, Gliwice 1984.
2. CZARNECKI L.S.: Minimalization of reactive power under nonsinusoidal conditions. IEEE Trans. on Instr. and Meas. vol IM-36 no 1, March 1987.
3. ERLICKI M.S., EMANUEL A.E.: New aspects of power factor improvement. IEEE Trans. on Industry and Gen. Appl. no 4, July/Aug. 1968.
4. EMANUEL A.E.: Suggested definition of reactive power in nonsinusoidal systems. Proc. IEEE, vol 121, no 7, July 1974.
5. PASKO M., WALCZAK J.: Metoda syntezy układów kompensacji składowej reaktancyjnej prądu odbiornika dwuzaciskowego zasilanego napięciem odkształconym. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej "Elektryka", z.113 (w druku).
6. PASKO M.: Dobór dwójników kompensujących składową reaktancyjną prądu odbiornika liniowego zasilanego napięciem odkształconym. Materiały XII SPETO, Gliwice 1989.
7. PASKO M., WALCZAK J.: A synthesis of compensation systems of current reactance component of two-terminal receiver with deformed voltage supply. Math. Opt. Theory and Appl. Eisenach, December 1989.
8. STANIEWICZ L.: W sprawie określenia mocy w obwodach elektrycznych o przebiegach odkształconych prądu i napięcia. Przegląd Elektrotechniczny, nr 9, 1931.

Recenzent: prof.dr inż.Stanisław Bolkowski

Wpłynęło do Redakcji dnia 4 lutego 1991 r.

## THE COMPUTER CALCULATION OF THE TWOPORT STRUCTURES FOR COMPENSATION OF A REACTANCE CURRENT OF VOLTAGE-DEFORMED SOURCE SUPPLYING LINEAR RECEIVER

## Summary

A continuation of earlier works devoted to calculation of the twoport structures serving for decreasing an rms of the current of voltage-deformed source supplying linear receiver is presented.

In the paper a necessary theory is presented to construct a numerical algorithm for calculation of cited twoports. The twoports are serving for compensation a resistance component of source current basing on the knowledge of receiver susceptances for harmonics to be compensated. An example of twoports selection on the basis of realized computer program is presented.

КОМПЬЮТЕРНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТРУКТУР ДВУХОПЛЮСНИКОВ  
КОМПЕНСИРУЮЩИХ РЕАКТИВНУЮ СОСТАВЛЯЮЩУЮ ТОКА ИСТОЧНИКА  
НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ ПИТАЮЩЕГО ЛИНЕЙНЫЙ ПРИЁМНИК

## Резюме

Статья является продолжением работ посвященных определению структур двухполюсников применяемых для уменьшения эффективного значения тока источника несинусоидального напряжения питающего линейный приёмник. В статье представлена необходимая теория для построения численного алгоритма служащего определению названных двухполюсников. Задачей этих двухполюсников является компенсация реактивной составляющей тока источника на основе известного susceptанса приёмника для компенсируемых гармонических. В работе представлен пример подбора двухполюсников использующий компьютерную программу.

Janusz WALCZAK

O DEKOMPOZYCJI PRĄDU RZECZYWISTEGO ŹRÓDŁA NAPIĘCIA ODKSZTAŁCONEGO I  
MOŻLIWOŚCI JEGO ORTOGONALIZACJI

**Streszczenie.** Artykuł stanowi kontynuację prac dotyczących zastosowania metod optymalizacji w teorii mocy układów z przebiegami odkształconymi, które oparte są na koncepcji S. Fryzego ortogonalnej dekompozycji prądu źródła.

W pracy zbadano warunki wystarczające rozwiązania (postawionego wcześniej) problemu minimalizacji kwadratu normy Sobolewa dla prądu źródła, przy ograniczeniu równościowym na moc czynną doprowadzaną do odbiornika. Wykazano, że warunki te są zawsze spełnione, gdy nie jest wymagany stan dopasowania energetycznego źródła do odbiornika dla wszystkich harmonicznych SEM źródła.

Modyfikując ograniczenia na wymieniony wyżej problem minimalizacji, uzyskano nowy rozkład ortogonalny prądu źródła napięcia odkształconego zasilającego odbiornik.

## 1. WSTĘP

Problem dekompozycji prądu rzeczywistego źródła napięcia odkształconego, zasilającego odbiornik dwuzaciskowy, był rozpatrywany w pracach [6], [8]. Dla układu podanego na rys. 1 rozwiązano problem minimalizacji prądu źródła:

$$\min(\|i\|_{W_{2,\alpha}^2})^2, \quad i \in W_{2,\alpha}^2(0,T) \quad (1)$$

przy ograniczeniu

$$P = (e - Hi, i)_{L_2}, \quad (2)$$

gdzie:

$P$  - zadana moc czynna doprowadzana do odbiornika (rys. 1),

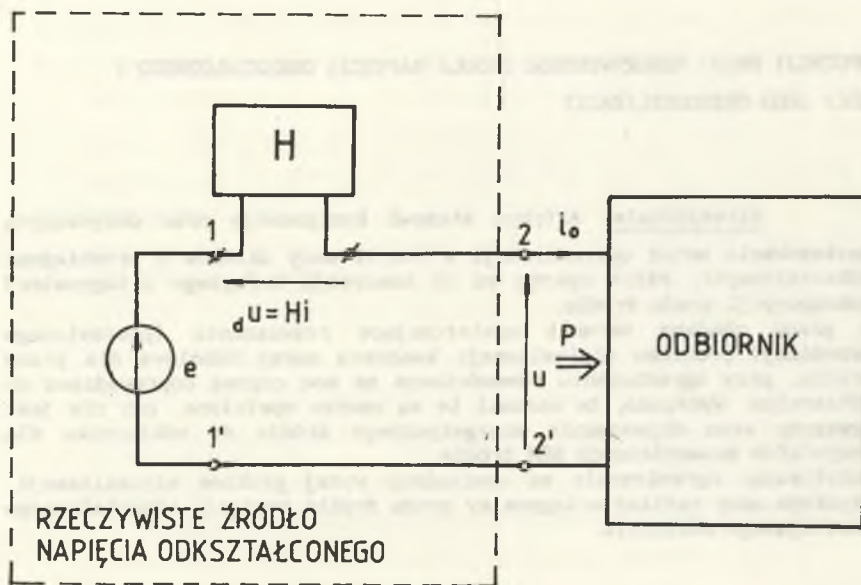
$\|\cdot\|_{W_{2,\alpha}^2}$  - norma przestrzeni Sobolewa  $W_{2,\alpha}^2(0,T)$  [2],.



$H$  - operator określający napięcie na zaciskach dwójnika, modelującego impedancję wewnętrzną źródła (rys.1), określony wzorem:

$$[H_1](t) = \int_0^{\infty} z(\tau) i(t-\tau) d\tau, \quad (3)$$

$z(\cdot)$  - impulsowa funkcja przejściowa dwójnika.



Rys.1. Schemat układu: rzeczywiste źródło zasilania-odbiornik

Fig.1. Nonideal voltage source of nonsinusoidal waveform supply for two-terminal receiver.

Wykorzystując warunki konieczne ekstremum funkcjonału (1) (przy ograniczeniu (2)), wyznaczono jego punkt stacjonarny, nazywany prądem aktywnym  $i_a$ . Prąd ten określa wzór [8]:

$$i_a(t) = G_0 E_0 + \sqrt{2} \sum_{h=1}^{\infty} G_h E_h \exp(jh\omega t), \quad (4)$$

gdzie:

$E_h$  - wartości zespolone skuteczne SEM  $e$  źródła zasilającego odbiornik,

$G_h$  ( $h \in \{0, \dots, \infty\}$ ) - współczynniki nazywane konduktancjami zastępczymi [8].

Prąd aktywny  $a$  i transportuje zadaną moc czynną  $P$  do odbiornika i ustala zadany kompromis [8] pomiędzy minimum wartości skutecznej prądu źródła a minimum jego zniekształceń. Wyróżniony prąd aktywny stanowi rozwiązanie problemu optymalizacji (1), (2), o ile spełnione są warunki wystarczające istnienia minimum tego problemu.

Warunki te zostały podane w pracy [8], lecz problem ich realizowalności nie był rozpatrywany.

Ponadto w pracy [8] rozłożono prąd źródła na trzy składniki:

- aktywny  $a$  i, o interpretacji omówionej powyżej,
- reaktancyjny  $r$  i, odpowiedzialny za wymianę energii pola EM w układzie: SEM źródła - dwójniki modelujące impedancje źródła i odbiornika,
- rozproszenia  $s$  i, wynikły z rozrzutu konduktancji widzianych z zacisków SEM e względem konduktancji zastępczych  $G_h$ .

Wykazano, że prądy aktywny i rozproszenia nie są względem siebie ortogonalne zarówno w sensie iloczynu skalarnego przestrzeni  $L_2(0, T)$ , jak i  $W_{2, \alpha}^1(0, T)$  [8]. Umożliwia to zdefiniowanie pojęć mocy biernej i rozproszenia oraz budowę prostopadłościaków mocy, co stanowi istotną różnicę w stosunku do znanych [2] rozkładów prądu źródeł idealnych.

W niniejszym artykule, stanowiącym uzupełnienie pracy [8], przeprowadzono analizę realizowalności warunków wystarczających rozwiązania problemu optymalizacyjnego (1), (2) oraz zbadano możliwości ortogonalizacji prądu źródła rzeczywistego drogą modyfikacji tego problemu.

## 2. ANALIZA WARUNKÓW WYSTARCZAJĄCYCH ROZWIĄZANIA PROBLEMU MINIMALIZACJI PRĄDU ŹRÓDŁA

Warunki te określa wzór [8]:

$$\bigwedge_{h \in \mathbb{N}} \nabla_h^2 + \lambda \cdot R_h > 0, \quad (5)$$

gdzie:

$$\nabla_h^2 = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 (h\omega)^2 + \dots + \alpha_l (h\omega)^{2l}}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (6)$$

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l$  - współczynniki wagi występujące w normie przestrzeni Sobolewa  $W_{2, \alpha}^1(0, T)$ ,

$h$  - numer harmonicznej,

$l$  - maksymalny rząd pochodnych występujących w normie przestrzeni Sobolewa,

$R_h = \operatorname{Re}\{Z_h\}$ ,  $Z_h$  - impedancja dwójnika  $H$  (rys.1) dla  $h$ -tej harmonicznej,

$\lambda^*$  - rozwiązanie równania określonego wzorem:

$$P = \sum_{h=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{2V_h^2 + 2R_h \lambda} - R_h \left( \frac{\lambda}{2V_h^2 + 2R_h \lambda} \right)^2 \right) |E_h|^2. \quad (7)$$

Z założonej pasywności [8] dwójnika  $H$  wynika, że warunki określone wzorem (5) będą spełnione, gdy rozwiązania  $\lambda^*$  równania (7) znajdują się w

przedziale  $(-\inf_{h \in \mathbb{N}} \left( \frac{V_h^2}{R_h} \right), \infty)$ .

Wzór (7) można zapisać następująco:

$$P = F(\lambda) = F^n(\lambda) + \varepsilon(\lambda), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

gdzie:

$$F^n(\lambda) = \sum_{h=0}^n \left( \frac{\lambda}{2V_h^2 + 2R_h \lambda} - R_h \left( \frac{\lambda}{2V_h^2 + 2R_h \lambda} \right)^2 \right) |E_h|^2, \quad (9)$$

$$\varepsilon(\lambda) = \sum_{h=n+1}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{2V_h^2 + 2R_h \lambda} - R_h \left( \frac{\lambda}{2V_h^2 + 2R_h \lambda} \right)^2 \right) |E_h|^2 \quad (10)$$

Ze wzoru:

$$e \in W_{2,\alpha}^1(0,T) \Rightarrow |E_h| \leq \frac{C}{h^\alpha}, \quad \alpha > 1, C \in \mathbb{R}^+, \quad (11)$$

oraz z założenia

$$\sum_{h \in \mathbb{N}} R_h < \infty \quad (12)$$

wynika, że szereg występujący po prawej stronie wzoru (7) spełnia warunki kryterium majoryzacyjnego Weierstrassa, zatem:

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{N(\varepsilon)} \bigwedge_{\lambda, n > N(\varepsilon)} |F^n(\lambda) - F(\lambda)| < \varepsilon, \quad \lambda \in (\eta - \inf_{h \in \mathbb{N}} \left( \frac{V_h^2}{R_h} \right), \infty), \quad \eta > 0 \quad (13)$$

Ze wzoru (13) wynika, że operacja  $F$  jest prawie skończenie wymiarowa [4], a więc można ją przybliżyć z dowolną dokładnością skończenie wymiarową

operacją  $F^n$ .

Drogą prostych obliczeń można wykazać, że:

- w przedziale  $(-\inf_{h \in \mathbb{N}} \left( \frac{V_h^2}{R_h} \right), \infty)$  operacja  $F^n$  jest ściśle monotoniczna,
- w przedziale  $(0, \infty)$  operacja  $F^n$  jest dodatnia,
- właściwości asymptotyczne tej operacji określa wzór

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} F^n(\lambda) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{|E_h|^2}{4R_h} = \sum_{h=0}^{\infty} P_h, \quad (14)$$

gdzie:

$P_h$  - moc czynna maksymalna (dopasowania energetycznego układu źródło-odbiornik), która może być doprowadzona do odbiornika za pomocą  $h$ -tej harmonicznej prądu.

Przykładowy wykres funkcji  $F^1(\lambda)$  (dla pierwszej harmonicznej),  $F^n(\lambda)$  i  $F(\lambda)$  przedstawiono na rys.2.

Z wymienionych właściwości operacji  $F$  wynika, że jedyne rozwiązanie równania (7), które spełnia warunek wystarczający (5), istnieje zawsze, gdy:

$$P < \sum_{h=0}^{\infty} \frac{|E_h|^2}{4R_h}. \quad (15)$$

Jeśli moc doprowadzana do odbiornika jest mniejsza od mocy dopasowania energetycznego dla wszystkich harmonicznych (co zachodzi dla każdego fizycznie sformułowanego problemu optymalizacji), to warunek wystarczający minimum rozwiązania problemu (1), (2) jest zawsze spełniony.

Przyjmując, że dla  $h=0$   $E_0=0$  poprzez rozwiązanie równania

$$P = F^1(\lambda), \quad (16)$$

określone wzorem:

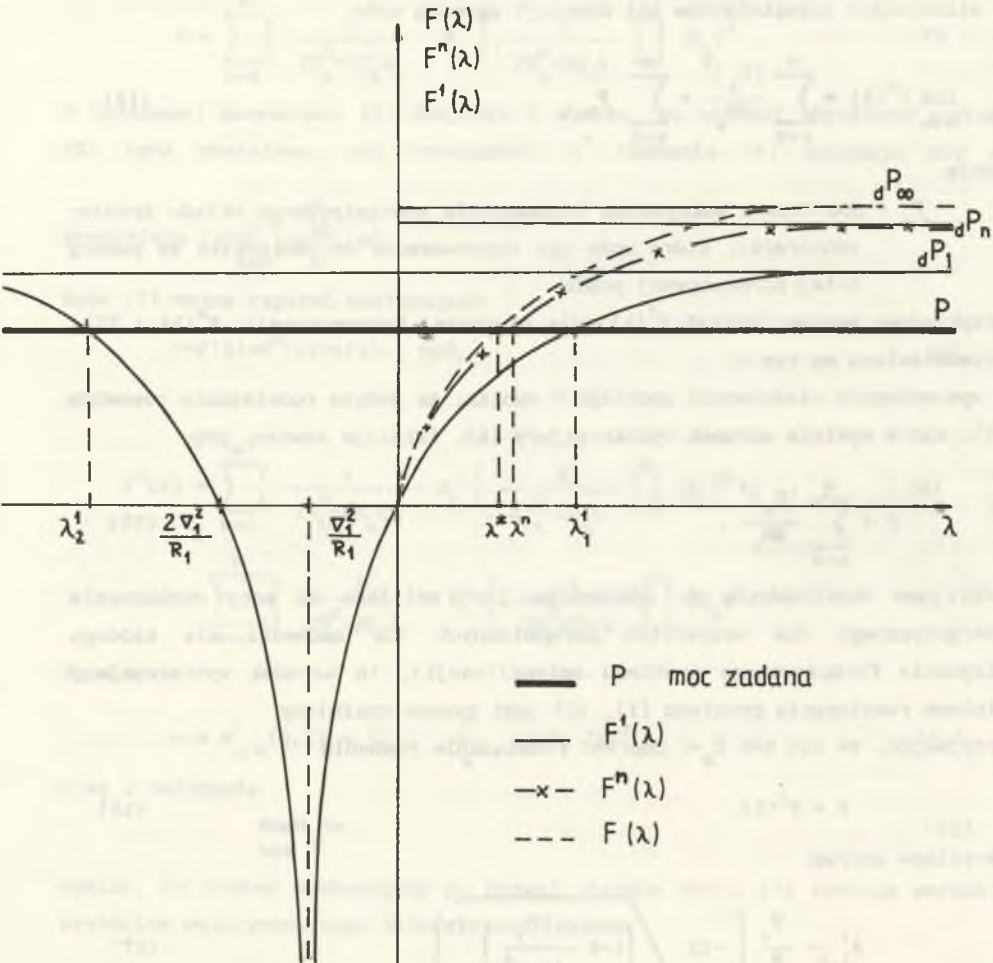
$$\lambda_{1,2}^1 = \frac{V_1}{R_1} \left[ -1 \pm \sqrt{\left(1 - 4 \frac{PR_1}{|E_1|^2}\right)^{-1}} \right] \quad (17)$$

można oszacować przedział, w którym znajduje się dokładne dodatnie

rozwiązanie  $\lambda^*$  równanie (7) (por. rys.2). Oszacowanie to określa wzór:

$$\lambda^* \in (0, \lambda_1^1), \quad \lambda_1^1 > 0. \quad (18)$$

Z przedstawionego rozumowania wynika, że warunki wystarczające minimum (5) funkcjonału nie stanowią ograniczeń w rozwiązywaniu problemu (1), (2) dla realizowalnych fizycznie układów: źródła zasilania - odbiornika.



Rys.2. Wykresy funkcji  $F^1(\lambda)$ ,  $F^n(\lambda)$ ,  $F(\lambda)$

Fig.2. Graphical functions  $F^1(\lambda)$ ,  $F^n(\lambda)$ ,  $F(\lambda)$

## 3. ORTOGONALNA DEKOMPOZYCJA PRĄDU ŹRÓDŁA

Rozkład prądu źródła na trzy składniki  $i_a$ ,  $i_r$ ,  $i_s$  [8] nie jest ortogonalny w sensie iloczynów skalarnych przestrzeni  $L^2(0,T)$ ,  $W_{2,\alpha}^1(0,T)$ , co stanowi istotną różnicę w stosunku do wyników analizy układów zasilanych z idealnych źródeł napięć odkształconych [2].

Zapewnienie ortogonalności prądów  $i_a$ ,  $i_r$  jest możliwe drogą modyfikacji problemu opisanego wzorami (1), (2), która prowadzi do rozwiązania następującego zadania optymalizacyjnego:

$$\min_i \left( \|i\|_{W_{2,\alpha}^1(0,T)} \right)^2, \quad i \in W_{2,\alpha}^1(0,T) \quad (19)$$

przy czym:

$$(e - Hi, i)_{L_2} = P, \quad (20)$$

$$(i_0 - i_a', i_a')_{L_2} = 0, \quad i_0 \in W_{2,\alpha}^1(0,T). \quad (21)$$

Oznaczenia przyjęte we wzorach (19), (20), (21) są takie same jak we wzorach (1), (2), natomiast  $i_0$  oznacza całkowity prąd wydawany przez źródło zasilające (rys.1).

Funkcjonał Lagrange'a problemu optymalizacji (19), (20), (21), zapisany w przestrzeni ciągowej  $L^2$  współczynników szeregów Fouriera funkcji napięć i prądów odbiornika względem bazy trygonometrycznej przestrzeni  $L^2(0,T)$ , posiada postać określoną wzorem:

$$\begin{aligned} L(A_h, B_h, \lambda, \mu) = & \sum_{h=0}^{\infty} V_h^2 (A_h^2 + B_h^2) + \lambda \left( P - \sum_{h=0}^{\infty} (E_{1h} A_h + E_{2h} B_h) + \sum_{h=0}^{\infty} R_h (A_h^2 + B_h^2) \right) - \\ & - \mu \left( - \sum_{h=0}^{\infty} (J_{1h} A_h + J_{2h} B_h) + \sum_{h=0}^{\infty} (A_h^2 + B_h^2) \right), \end{aligned} \quad (22)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} J_a &= A_h - JB_h, \\ E_h &= E_{1h} - JE_{2h}, \\ J_h &= J_{1h} - J_{2h}. \end{aligned} \quad (23)$$

Wielkości  $J_h$  oznaczają wartości zespolone skuteczne prądu aktywnego (poszukiwanego rozwiązania problemu (19), (20), (21)), a wielkości  $E_h$ ,  $J_0$  oznaczają wartości zespolone skuteczne SEM źródła i prądu źródła (rys.1).

Ponadto:

$$Z_h = R_h + jX_h = \mathcal{F} \{z(t)\} \Big|_{\omega_h}, \quad (24)$$

gdzie funkcję  $z(\cdot)$  określa wzór (3), natomiast symbol  $\mathcal{F}$  oznacza transformację Fouriera. Mnożniki Lagrange'a występujące we wzorze (22) oznaczono symbolami  $\lambda$ ,  $\mu$ .

Wykorzystując warunki konieczne [1] istnienia ekstremum funkcjonału (22), wyznaczono rozwiązanie problemu (19), (20), (21), określone wzorem:

$$i_1'(t) = G_{e0} E_0 + G_{e0} J_0 + \sqrt{2} \sum_{h=1}^{\infty} G_{eh} E_h \exp(jh\omega t) + \sqrt{2} \sum_{h=1}^{\infty} G_{eh} J_0 \exp(jh\omega t), \quad (25)$$

gdzie:

$G_{e0}$ ,  $G_{eh}$  - immitancje zastępcze określone wzorami:

$$G_{e0} = \frac{\lambda^*}{2V_h^2 + 2\lambda^* R_h + 2\mu^*}, \quad (26)$$

$$G_{eh} = \frac{\mu^*}{2V_h^2 + 2\lambda^* R_h + 2\mu^*}.$$

Parametry  $\lambda^*$ ,  $\mu^*$  stanowią rozwiązania układu równań:

$$P = F_1(\lambda, \mu) + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2V_h^2 + 2\lambda R_h + 2\mu)^2} [(2V_h^2 + 2\lambda R_h + 2\mu) (\lambda |E_h|^2 + \mu (E_{h1} J_{0h} + E_{h2} J_{0h}) - R_h (\mu^2 |J_{0h}|^2 + \mu \lambda (E_{h1} J_{0h} + E_{h2} J_{0h}))], \quad (28)$$

$$0 = F_2(\lambda, \mu) + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2V_h^2 + 2\lambda R_h + 2\mu)^2} [(2V_h^2 + 2\lambda R_h + 2\mu) (\lambda |E_h|^2 + \mu (E_{h1} J_{0h} + E_{h2} J_{0h})) - (\lambda^2 |E_h|^2 + \lambda \mu (E_{h1} J_{0h} + E_{h2} J_{0h}))], \quad (29)$$

który po prostych przekształceniach można przedstawić w postaci wzoru:

$$P = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2V_h^2 + 2\lambda R_h + 2\mu)^2} [(2V_h^2 + 2\lambda R_h + 2\mu) (\lambda |E_h|^2 + \mu \bar{P}_h) - R_h (u^2 |J_h|^2 + \mu \lambda \bar{P})], \quad (30)$$

$$0 = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2V_h^2 + 2\lambda R_h + 2\mu)^2} [(2V_h^2 + 2\lambda R_h + 2\mu) (\lambda |J_h|^2 + \lambda \bar{P}_h) - (\lambda^2 |E_h|^2 + \lambda \mu \bar{P})], \quad (31)$$

gdzie:

$$|E_h|^2 = E_{1h}^2 + E_{2h}^2; \quad \bar{P}_h = E_{1h} J_{10h} + E_{2h} J_{20h}; \quad (32)$$

$$|J_h|^2 = J_{10h}^2 + J_{20h}^2. \quad (33)$$

Z analizy warunków wystarczających istnienia minimum [1] funkcjału (24) wynika, że warunki te będą spełnione, gdy mnożniki Lagrange'a  $\lambda$ ,  $\mu$  (stanowiące rozwiązanie układu równań (30), (31)) należą do zbioru  $D_{\lambda\mu}$ :

$$D_{\lambda\mu} = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2: h \in \mathbb{N}, V_h^2 + \lambda R_h + \mu > 0\}. \quad (34)$$

Zapisując równania (30), (31) w postaci wzorów:

$$P = F_1^n(\lambda, \mu) + \varepsilon_2(\lambda, \mu), \quad (35)$$

$$0 = F_2^n(\lambda, \mu) + \varepsilon_2(\lambda, \mu), \quad (36)$$

gdzie:  $F_1^n(\lambda, \mu)$ ,  $F_2^n(\lambda, \mu)$  oznaczają sumy skończonej liczby "n" wyrazów szeregów występujących we wzorach (30), (31) oraz zakładając, że spełnione są warunki określone wzorami (11), (12) i warunek

$$|J_{0h}| \leq \frac{C'}{h^\alpha}; \quad C' \in \mathbb{R}^+, h > 0, \alpha > 1, \quad (37)$$

można wykazać wykorzystując pewne twierdzenie o obrocie pola wektorowego [7], że operatory występujące po prawej stronie wzorów (30), (31) są prawie skończenie wymiarowe. Operatory te można przybliżyć z dowolną dokładnością operatorami skończenie wymiarowymi  $F_1^n(\lambda, \mu)$ ,  $F_2^n(\lambda, \mu)$ .

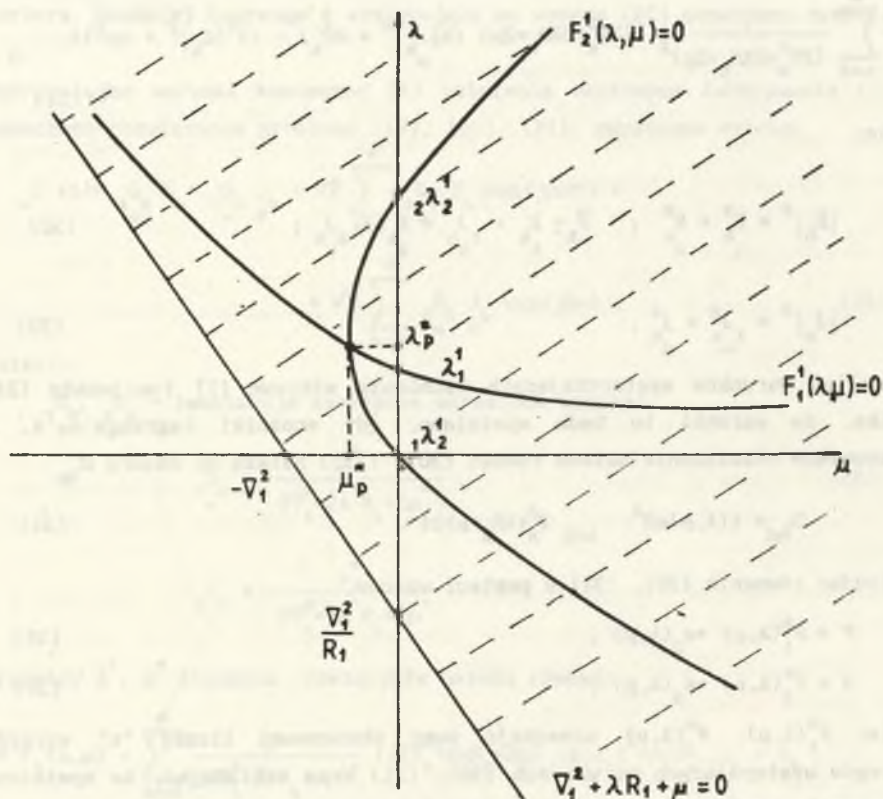
Oszacowanie rozwiązań równań (35), (36) można uzyskać na podstawie pierwszego (nieliniowego) przybliżenia (dla  $h=1$ ) tych równań określonego wzorami:




$$P = F_1^1(\lambda, \mu) \quad (38)$$

$$0 = F_2^1(\lambda, \mu) \quad (39)$$

Wykorzystując teorię niezmienników stożkowych rzędu 2 [5], można wykazać, że w obszarze  $D_{\lambda, \mu}$  wykresy funkcji (38), (39) są hiperbolami usytuowanymi na płaszczyźnie  $\mu\lambda$  zgodnie z rys.3.



 - obszar rozwiązań dopuszczalnych

Rys.3. Graficzna ilustracja rozwiązań pierwszego przybliżenia układu równań (32), (33)

Fig.3. Graphical illustration of solutions of the first kind approximations for system of equations (32), (33)

Punkty przecięcia tych hiperbol z osią rzędnych  $\lambda$  spełniają zależności:

$$\left. \begin{aligned} {}_1\lambda_2^1 < \lambda_1^1 < {}_2\lambda_2^1 \\ {}_1\lambda_2^1 > 0, \quad {}_2\lambda_2^1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

gdzie:

$\lambda_2^1$  - stanowi jedyne (por. rozdz.2) rozwiązanie równania

$$P = F_1^1(\lambda, \mu) \quad (41)$$

na dodatniej półosi  $\lambda^+$ ,

${}_1\lambda_2^1, {}_2\lambda_2^1$  - stanowią rozwiązanie równania

$$0 = F_2^1(\lambda, \mu) . \quad (42)$$

Rozwiązanie  $(\lambda_p^*, \mu_p^*)$  równań pierwszego przybliżenia (38), (39) znajduje się zawsze w obszarze:

$$\tilde{D}_{\lambda\mu} = D_{\lambda\mu} \cap \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2: \lambda > 0, \mu < 0\} . \quad (43)$$

Możliwość oszacowania rozwiązań równań (30), (31) oraz lokalizacja tych równań w obszarze  $\tilde{D}_{\lambda\mu}$  na podstawie rozwiązań równań (35), (36) wynika z pewnego twierdzenia o perturbacjach operacji nieliniowych ([3], 450). Można wykazać (po żmudnych obliczeniach), że jeśli spełnione są warunki (11), (12), (37), to odległość (euklidesowa  $\|\cdot\|_E$ ) rozwiązań  $\lambda_p^*, \mu_p^*$  równań (38), (39), od rozwiązań równań (30), (31) jest rzędu  $\varepsilon$ , tzn:

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\alpha, \beta > 0} \alpha, \beta < \eta \quad \|(\lambda_p^*, \mu_p^*) - (\lambda_p^*, \mu_p^*)\|_E < \varepsilon . \quad (44)$$

Stałe  $\alpha, \beta$  zależą od stałych Lipschitza oraz kresów górnych operacji  $F_1, F_2$  i wyrażają się złożonymi wzorami. Dokładne rozwiązanie równań (30), (31) możliwe jest wyłącznie metodami numerycznymi.

#### 4. WŁAŚCIWOŚCI ORTOGONALNEGO ROZKŁADU PRĄDU ŹRÓDŁA

Prąd aktywny określony wzorem (25) składa się z dwóch składników:

- pierwszego, którego harmoniczne są proporcjonalne do harmonicznych SEM e źródła,

- drugiego, którego harmoniczne są proporcjonalne do harmonicznych zadanego prądu  $i_0$ .

Drugi z wymienionych składników prądu ortogonalizuje sumę tych składników względem prądu  $i_0 - a_i'$  (por. wzór (21)).

Wzór (25) można zapisać w postaci

$$i_a'(t) = Y_e E_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} Y_e Y_h E_h \exp(jh\omega t), \quad (45)$$

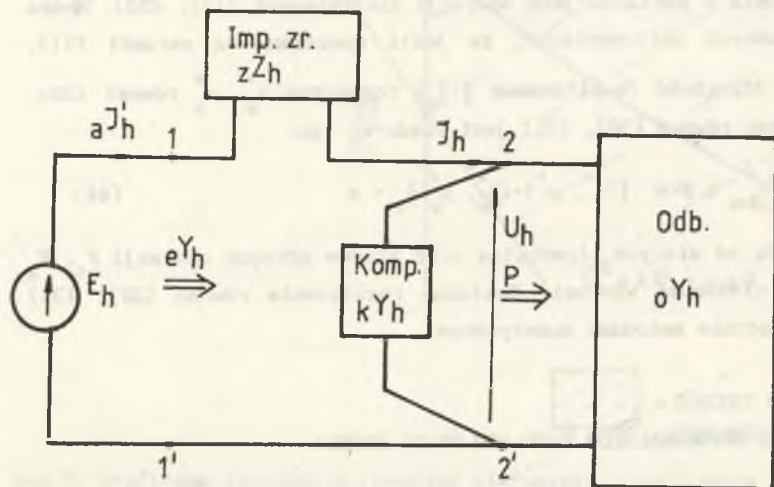
gdzie:

$$Y_e = \frac{\lambda^* + Y_z Y_h \mu^*}{2V_h^2 + 2\lambda^* R_h + 2\mu^*} \quad (46)$$

jest admittancją zastępczą widzianą z zacisków SEM e (1-1') (por. rys.1), dla h-tej harmonicznej,

$Y_z$  - admittancje widziane z zacisków SEM e.

Jeżeli możliwe jest zmodyfikowanie właściwości odbiornika (poprzez dołączenie dwójnika kompensacyjnego o admittancjach  $Y_k$  (rys.4)), tak by z zacisków (1-1') widziane były admittancje  $Y_e$ , to do odbiornika doprowadzany będzie optymalny (w sensie wzorów (19), (20), (21)) prąd  $i_a'(t)$  (rys.4).



Rys.4. Stan optymalny układu: źródło zasilania - odbiornik dla pojedynczej harmonicznej

Fig.4. Optimum state for system: nonideal voltage source-two-terminal receiver, for the first harmonics

Można wykazać, podobnie jak w pracy [8], że dwójnik reaktancyjny LC nie spełnia roli takiego kompensatora. Problem doboru kompensatora posiadającego opisane wyżej właściwości nie jest w pracy rozpatrywany.

Z ortogonalności prądów  $i_a$ ,  $i_0 - i_a$  wynika następujący wzór :

$$S^2 = \|e\|_{L_2}^2 \|i_0\|_{L_2}^2 = \|e\|_{L_2}^2 \|i_a\|_{L_2}^2 + \|e\|_{L_2}^2 \|i_b\|_{L_2}^2 = P_a^2 + Q_b^2, \quad (47)$$

gdzie:

$$i_b = i_0 - i_a.$$

Wzór ten można interpretować jako trójkąt mocy w analogii do wcześniej wprowadzonych [2] prostopodłościanów mocy. Moce  $S$ ,  $P_a$ ,  $Q_b$  nie mają bezpośredniego sensu fizycznego i mogą one stanowić pewne wskaźniki oceny prądów  $i_0$ ,  $i_a$ ,  $i_b$ . Jeżeli poprzez wspomnianą modyfikację z wykorzystaniem dwójnika o admitancjach  $Y_{kh}$  (rys.4) możliwa jest eliminacja prądu  $i_b$ , to układ z rys.1 znajduje się będzie w optymalnym stanie pracy (w sensie problemu minimalizacji (19), (20), (21)).

### Podsumowanie

1. W artykule wykazano, że problem minimalizacji (w normie przestrzeni  $W_{2,\alpha}^1(0,T)$  prądu rzeczywistego źródła napięcia odkształconego, zasilającego odbiornik dwuzaciskowy, posiada zawsze pozytywne rozwiązanie, o ile układ: źródło-odbiornik nie znajduje się w stanie dopasowania energetycznego dla wszystkich harmonicznych SEM źródła.
2. Sformalizowano i rozwiązano również problem minimalizacji prądu źródła (w normie przestrzeni  $W_{2,\alpha}^1(0,T)$ ) przy ograniczeniach równościowych na:
  - moc czynną doprowadzoną do odbiornika,
  - ortogonalność (w normie przestrzeni  $L_2$ ) rozwiązania problemu minimalizacji, tzn. prądu aktywnego względem różnicy całkowitego prądu źródła i prądu aktywnego.

Podano warunki wystarczające rozwiązania wymienionego problemu. Przedstawiono ponadto nowy rozkład ortogonalny prądu źródła, umożliwiający zdefiniowanie odpowiedniego trójkąta mocy. Przedstawione w artykule oraz w pracach [6], [8] rezultaty pokazują na istotne różnice, jakie wprowadza w teorii układów z przebiegami odkształconymi uwzględnienie założenia o niezerowej impedancji wewnętrznej źródeł napięcia odkształconego.

## LITERATURA

- [1] Bertsekas D.P.: Constrained Optymization and Lagrange Multiplier Methods. Acad. Press. NY, 1982.
- [2] Brodzki M., Walczak J., Umińska-Bortliczek M., Pasko M.: Optimierung eines Vorgeschlageren Neuen Qualitätsfaktors Elektrischer Energie. 33 Int. Wiss. Koll. Ilmenau. Okt.1988.
- [3] Krasnosielskij M.A.: Geometriceskije metody nielinejnogo analiza. Nauka, Moskva 1975.
- [4] Kudrewicz J.: Analiza funkcjonalna dla automatyków i elektryków. PWN, Warszawa 1976.
- [5] Leja F.: Geometria analityczna. PWN, Warszawa 1966.
- [6] Siwczyński M.: Optymalizacja warunków energetycznych rzeczywistego źródła napięcia metodami analizy funkcjonalnej. XIII SPETO, Wisła 1990.
- [7] Thompson R.B.: A unifed aproach to local and global fixed point indeces. Adv. in Mith. No 3 pp1-72, 1969.
- [8] Walczak J.: Rozkład prądu odbiornika dwuzaciskowego zasilanego napięciem odkształconym z rzeczywistego źródła napięcia. XIII SPETO, Wisła 1990.

Recenzent: doc.dr inż. Zdzisław Klonowicz

Wpłynęło do Redakcji dnia 4 marca 1991 r.

## DECOMPOSITION OF THE CURRENT OF NONIDEAL AND NONSINUSOIDAL VOLTAGE SOURCE AND POSSIBILITIES OF ITS ORTHOGONALIZATION

## Summary

The paper is a continuation of the works concerning the application of the optimization methods in the power theory of nonsinusoidal systems, which are based on Fryze's theory of source current orthogonal decomposition. The conditions sufficient to solve the problem (formulated previously) of minimizing the square of Sobolev's norm for the source current, at the constrained on the active power supplied to the receiver have been examined. It has been shown that these conditions are always fulfilled when the matching state of the source and the receiver for all the harmonics of electromotive force (SEM) of the source is not required. Modifying constraints into the minimizing problem mentioned above, a new orthogonal decomposition of nonsinusoidal voltage source supplying the receiver has been obtained.

## О ДЕКОМПОЗИЦИИ ТОКА РЕАЛЬНОГО ИСТОЧНИКА НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ И ВОЗМОЖНОСТИ ЕГО ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ

## Резюме

Данная статья является продолжением работ связанных с применением методов оптимизации в теории мощности цепей с несинусоидальными цессати, основанных на концепции С. Фризе ортогональной декомпозиции тока источника. Даны необходимые условия для существования решения (сформулированного раньше) проблемы минимизации квадрата нормы Соболева для тока источника три ограничения в виде равенства относящегося к подведенной к приёмнику активной мощности. Показано, что эти условия выполнены тогда, когда не требуется энергетическое согласование истояника к приёмнику, для всех гармонических ЭДС источника.

Модификация ограничений для поставленной выше проблемы оптимизации дает новую ортогональную декомпозицию тока источника несинусидального напряжения питающего приёмник.

Magdalena UMIŃSKA-BORTLICZEK

Janusz WALCZAK

## O DEKOMPZYCJI PRAWIE OKRESOWEGO PRĄDU ODBIORNIKA DWUZACISKOWEGO

Streszczenie. W pracy przedstawia się ortogonalną dekompozycję prądu odbiornika dwuzaciskowego, zasilanego napięciem opisanym funkcją prawie okresową w sensie Besicovitcha-Sobolewa.

Uogólniono znany z literatury [5] [7] rozkład ortogonalny dokonywany dla obwodów z przebiegami okresowymi niesinusoidalnymi na przypadek przebiegów niesinusoidalnych prawie okresowych. Przedstawiono uzasadnienie wyboru klasy funkcji prawie okresowych oraz problem minimalizacji pewnego funkcjonału [4] przy ograniczeniu równościowym na dostarczaną do układu moc czynną, co pozwala na wyróżnienie składowej podstawowej transportującej całkowitą moc czynną do układu, a nazwanej prądem aktywnym  $i_a$ .

Dokonano rozkładu oraz podano fizykalną interpretację trzech wzajemnie ortogonalnych składowych prądu prawie okresowego  $i_a$ ,  $i_r$ ,  $i_s$  z przestrzeni  $BS_{2\omega}^1$ . Przedstawiono przykład dla odbiornika zasilanego z idealnego źródła napięcia. Przykład zilustrowano wykresami wykonanymi z wydruków komputerowych. Widocznym rezultatem (zapropionowanego ortogonalnego rozkładu prądu w odniesieniu do kompromisowo wyodrębnionej składowej aktywnej prądu) jest fakt przenoszenia ok.99% mocy czynnej przez pierwszą harmoniczną prądu odbiornika oraz kształt prądu po przeprowadzeniu idealnej kompensacji obydwu składowych biernych (rys.5a,b).

## 1. WSTĘP

Analizę i końcowy wybór modelu dla badania zagadnień energetycznych oraz cech jakościowych przebiegów w systemach i układach elektroenergetycznych przeprowadza się często przy założeniu upraszczającym, że prądy i napięcia są okresowymi funkcjami czasu [1]. Tymczasem wielkości charakteryzujące funkcje okresowych przebiegów napięć i prądów w węzłach systemu elektroenergetycznego (np. wartości szczytowe, częstotliwość) są funkcjami

czasu [8] [9] [14]. Zjawisko to uzasadnia się zarówno obecnością stochastycznych zakłóceń w systemie [10] [11] [12], jak i nieliniowymi właściwościami jego elementów [8] [11] [15].

W pracach międzynarodowych konferencji np. [8]'84, [10]'85 znajdują się publikacje, w których proponuje się praktyczne wykorzystanie teorii procesów stochastycznych. Także w pracy [12] zaproponowano ujednoczenie wskaźników jakości oraz ich optymalizację na podstawie probabilistycznej teorii procesów w systemach elektroenergetycznych.

Znane są także próby stosowania metod deterministycznych opartych na pojęciu funkcji prawie okresowych, poczynając od pracy Paleya-Wienera [18], poprzez prace Z. Nowomiejskiego np. [13], [14], a do ostatnio publikowanych prac M. Brodzkiego i J. Walczaka [4], [17].

Autorzy niniejszej pracy, dla opisu prawie okresowych prądów i napięć w obwodzie elektrycznym, wykorzystują deterministyczny model opierający się na pojęciu i definicjach funkcji prawie okresowych w sensie Besicovitcha-Sobolewa [4], [19], co umożliwia między innymi zastosowanie analizy widmowej [6], [18] dla przedstawienia przejrzystej i czytelnej dla elektryków ilustracji zagadnień związanych z jakością energii elektrycznej.

## 2. WYBÓR DOBRZE OKREŚLONEGO ZBIORU FUNKCJI PRAWIE OKRESOWYCH, W SENSIE INTERPRETACJI NAPIĘCIOWYCH WIELKOŚCI FIZYCZNYCH

2.1. Z punktu widzenia analizy właściwości energetycznych i cech jakościowych układów elektrycznych konieczne jest rozpatrywanie takich zbiorów funkcji prawie okresowych, dla których istnieją interpretacje pojęciowe wartości skutecznych (napięć, prądów), mocy czynnej oraz pochodnej funkcji (napięcia, prądu). Pochodne funkcji (napięć, prądów) silnie uwypuklają wpływ zniekształceń tych funkcji [17]. Ten wzgląd zadecydował o propozycji nowego wskaźnika jakości energii elektrycznej [2], [3].

2.2. Zbiór funkcji prawie okresowych o wymienionych własnościach zdefiniowano w pracy [4]. Tam też wykazano, że zbiór funkcji prawie okresowych, w którym sens mają wyrażenia określające wartość skuteczną sygnału, jego moc czynną, oraz pochodną sygnału (funkcji) w sensie



Sobolewa - tworzy przestrzeń Hilberta. Tę przestrzeń nazwano przestrzenią Besicovitcha-Sobolewa, wprowadzając oznaczenie  $BS_{2,\alpha}^1$ . Normę sygnału w tej przestrzeni określa wzór:

$$f_{2\alpha}^1 = f_{BS} = \sqrt{\sum_{k=0}^l \alpha_k \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T [f^{(k)}(t)]^2 dt}, \quad (1)$$

który interpretuje się dla  $l=0$  jako uogólnioną wartość skuteczną funkcji

- prądu: 
$$I_{Sk} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T [i(t)]^2 dt} \quad (2)$$

- napięcia: 
$$U_{Sk} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T [u(t)]^2 dt} \quad (3)$$

gdzie:  $i, u$  - prawie okresowe funkcje prądu i napięcia.

Iloczyn skalarny dwóch sygnałów w przestrzeni  $BS_{2\alpha}^1$  określa wyrażenie:

$$(f_1, f_2)_{BS} = \sum_{k=0}^l \alpha_k \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f_1^{(k)}(t) f_2^{(k)}(t) dt \quad (4)$$

Interpretuje się iloczyn skalarny z  $BS_{2\alpha}^1$  dla  $l=0$  jako moc czynną:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T u(t)i(t) dt \quad (5)$$

Wykazano także, że w przestrzeni  $BS_{2\alpha}^1$  można utworzyć bazę podobną do klasycznej bazy trygonometrycznej, a zatem, że każdy element tej przestrzeni (funkcje prądu, napięcia) można przedstawić w postaci szeregu Fourier a względem tak utworzonej bazy.

### 3. DEFINICJA WSKAŹNIKA JAKOŚCI ENERGII ELEKTRYCZNEJ DLA PRZEBIEGÓW PRAWIE OKRESOWYCH PRĄDÓW

Podobnie jak dla przypadku analizy właściwości energetycznych i jakościowych układów z przebiegami okresowymi niesinusoidalnymi określono wskaźnik jakości prądu odbiornika:

$$J = \sum_{k=0}^l \alpha_k \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [i^{(k)}(t)]^2 dt \quad (6)$$

$$\alpha_0 > 0$$

$$\alpha_k > 0 \quad \text{dla } k > 1$$

$$k \in \{0, 1, \dots, l\}$$

gdzie:

$i^{(k)}(t)$  -  $k$ -ta pochodna funkcji prądu ,

$\alpha_k$  -  $k$ -ty współczynnik wagi,

$l$  - najwyższy rząd pochodnej funkcji prądu  $i$  .

Za pomocą współczynników wagi  $\alpha_k$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, l\}$  można ustalić z góry zadany kompromis pomiędzy oceną właściwości energetycznych (tzn. strat mocy czynnej na doprowadzeniach do odbiornika) i oceną właściwości jakościowych (zniekształcenia przebiegu) prądu odbiornika.

#### 4. DEKOMPOZYCJA PRAWIE OKRESOWEGO PRĄDU ODBIORNIKA DWUZACISKOWEGO

4.1. Należy rozwiązać zadanie minimalizacji funkcjonału:

$$\min (\| \cdot \|_{BS_{2\alpha}^1})^2 \quad (7)$$

przy ograniczeniu równościowym:

$$(u, i)_{BS_2} = P, \quad (8)$$

gdzie:  $(\cdot, \cdot)_{BS_2}$  - iloczyn skalarny przestrzeni  $BS_{2\alpha}^1$  dla  $l=0$

$$(u, i)_{BS_2} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_u^T u(t) i(t) dt. \quad (9)$$

4.2. Minimalizacja funkcjonału (7) przy ograniczeniu równościowym (8) przeprowadzona w przestrzeni ciągowej  $l^2$  współczynników szeregu Fouriera funkcji napięć i prądów względem bazy przestrzeni  $BS_2$  [2] umożliwiła wyróżnienie składowej aktywnej prądu odbiornika w następującej postaci:

$$i = G_{e0} U_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} G_{eh} U_h \exp(j\omega_h(-)), \quad (10)$$

gdzie:

$U_h$  - współczynniki szeregu Fouriera funkcji napięcia u względem bazy przestrzeni  $BS_2$

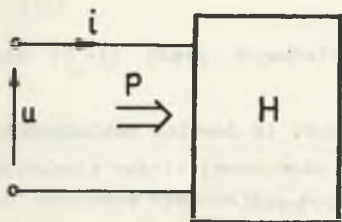
$$G_{eh} = \frac{P}{V_h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|U_n|^2}{V_n^2}}, \quad (11)$$

$$V_h = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1(\omega_h)^2 + \alpha_2(\omega_h)^4 + \dots + \alpha_l(\omega_h)^{2l}}, \quad (12)$$

$$\omega_h \in \Omega_u \cap \Omega_i.$$

Składowa aktywna prądu (10) posiada następujące własności:

- realizuje zadany z góry kompromis (za pomocą dobieranych współczynników wagi  $\alpha_k$ ) pomiędzy oceną strat mocy czynnej na doprowadzeniu do odbiornika i oceną zniekształceń prądu odbiornika,
- realizuje dopływ zadanej z góry (stałej) mocy czynnej  $P$  do odbiornika (rys.1):



Rys. 1.

Zakładając, że odbiornik (rys.1) znajduje się w jednym stanie napięciowo-prądowym i że jest opisany ciągiem admittancji (13) przyporządkowanym ciągowi częstotliwości  $\omega_h$  wspólnej części widma funkcji napięcia i prądu:

$$Y_h = G_h + jB_h, \quad h \in N, \quad \omega_h \in \Omega_i \cap \Omega_u. \quad (13)$$

Całkowity prąd odbiornika  $H$  można obliczyć z wyrażenia:

$$i = G_0 U_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} (G_h + jB_h) U_h \exp(j\omega_h(\cdot)). \quad (14)$$

4.3. Obliczając prąd ( $i_a$ ) ze wzorów (10) oraz (14), otrzymujemy:

$$i_a = (G_0 - G_{e0}) U_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} (G_h - G_{eh}) U_h \exp(j\omega_h(\cdot)) + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} jB_h U_h \exp(j\omega_h(\cdot)), \quad (15)$$

i możemy wydzielić widoczne we wzorze (15) dwie składowe:

$$\text{-reaktancyjną: } i_r = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} jB_h U_h \exp(j\omega_h(\cdot)), \quad (16)$$

$$\text{-rozproszenia: } i_s = (G_0 - G_{e0}) U_0 + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} (G_h - G_{eh}) U_h \exp(j\omega_h(\cdot)). \quad (17)$$

Zachodzi:

$$i = i_a + i_r + i_s, \quad (18)$$

a wykorzystując wyrażenia (4), (10), (16), (17) można wykazać, że składowe (aktywna, reaktancyjna i rozproszenia) prądu odbiornika są wzajemnie ortogonalne w sensie iloczynu skalarnego (4) przestrzeni  $BS_2$ . Występują także (w sensie iloczynu skalarnego przestrzeni  $BS_2$ ) następujące własności odbiornika (rys.1):

$$(u_a, i)_{BS_2} = P, \quad (19)$$

$$(u_r, i)_{BS_2} = 0, \quad (20)$$

$$(u_s, i)_{BS_2} = 0 \quad (21)$$

i można stwierdzić, że żadna z dwóch składowych prądu ( $i_a$ ) nie przenosi mocy czynnej.

Składowa reaktancyjna  $i_r$  prądu odbiornika jest (z dowolną dokładnością w sensie normy  $BS_2$ ) kompensowalna za pomocą skończonej liczby elementów LC w klasycznych układach dwójników reaktancyjnych.

Składowa rozproszenia  $i_s$  nie jest kompensowalna w klasie układów pasywnych.

## 5. PRZYKŁAD

Dla ilustracji powyższych rozważań rozpatrzono jako przykład - typowy odbiornik RLC (rys.2), (tab.1) o znormalizowanej pulsacji podstawowej  $\omega_1=1$  rad/s.

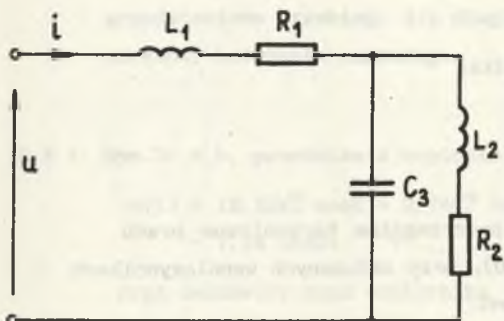


Tabela 1.

|   | $R/\Omega$ | $L/H$ | $C/F$   |
|---|------------|-------|---------|
| 1 | 0,5        | 0,5   | -       |
| 2 | 1,0        | 1,0   | -       |
| 3 | -          | -     | 0,08(3) |

Rys. 2.

5.1. Admitancje odbiornika dla trzech kolejnych harmonicznych:

$$Y_1 = (0,3347 - j 0,294)S ;$$

$$|Y_1| = 0,446 , \quad \omega_1 = 1$$

$$Y_2 = (0,155 - j 0,2)S ;$$

$$|Y_2| = 0,253 , \quad \omega_2 = \sqrt{3,5}$$

$$Y_3 = (0,256 + j 0,375)S ;$$

$$|Y_3| = 0,454 , \quad \omega_3 = 5 .$$

5.2. Napięcie wymuszające prąd okresowe:

$$u(t) = 18,12\sqrt{2} \cos t + 3,74\sqrt{2} \cos(\sqrt{3,5} t + 0,4) - 1,18\sqrt{2} \cos(5t) \text{ V.}$$

5.3. Obliczono całkowity prąd odbiornika:

$$i(t) = \sqrt{2} (8,08 \cos(t - 0,72) + 0,946 \cos(\sqrt{3,5} t - 0,92) + 0,535 \cos(5t + 0,97)) \text{ A}.$$

5.4. Wartość skuteczna napięcia zasilającego:

$$u_{BS_2} = 18,53 \text{ V}.$$

5.5. Moc czynna doprowadzona do odbiornika:

$$P = \sum_{h=1}^3 G_h |U_h| = 117,4 \text{ W}.$$

5.6. Moc czynna transportowana przez poszczególne harmoniczne prądu aktywnego ( $i_a$  obliczone z wzoru (10), przy założonych współczynnikach wagi odpowiednio  $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ), jest:

$$P_1 = 116,558 \text{ W}, \quad P_2 = 0,885 \text{ W}, \quad P_3 = 0,0222 \text{ W}.$$

5.7. Podstawowa harmoniczna transportuje 99,28% obliczonej dla trzech harmonicznych całkowitej mocy czynnej.

5.8. Składowe ortogonalnej dekompozycji prądu na trzy składowe na podstawie składowej aktywnej uzyskanej w wyniku optymalizacji przyjętego wskaźnika jakości energii (6):

$$i_a = 6,432\sqrt{2} \cos t + 0,236\sqrt{2} \cos(\sqrt{3,5} t + 0,4) + 0,00259\sqrt{2} \cos 5t \text{ A}$$

$$i_r = 5,327\sqrt{2} \cos t + 0,748\sqrt{2} \sin(\sqrt{3,5} t + 0,4) - 0,442\sqrt{2} \sin 5t \text{ A}$$

$$i_s = -0,3678\sqrt{2} \cos t + 0,343\sqrt{2} \cos(\sqrt{3,5} t - 0,4) + 0,283\sqrt{2} \cos 5t \text{ A}.$$

5.9. Ilustracja graficzna uzyskanych wyników oraz pewne wnioski

*Uwaga :*

- na rysunkach z indeksami a) przy liczbie porządkowej rysunku przedstawiono przebiegi dla krótkiego (kilka quasi-okresów) horyzontu czasowego.
- na rysunkach z indeksem b) przy liczbie porządkowej rysunku, przedstawiono przebiegi dla długiego (kilkanaście quasi-okresów) horyzontu czasowego.

5.9.1. Rys.3 a,b, przedstawia napięcie zasilające prawie okresowe:

$$u(t) = 18,12\sqrt{2} \cos t + 3,74\sqrt{2} \cos(\sqrt{3,5} t + 0,4) - 1,18 \cos 5t \quad V$$

oraz całkowity prąd odbiornika

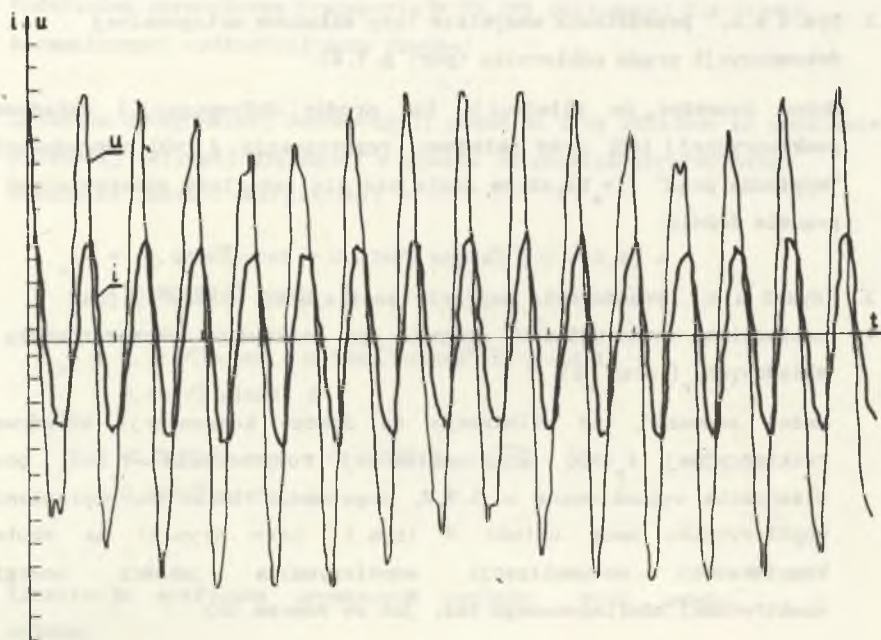
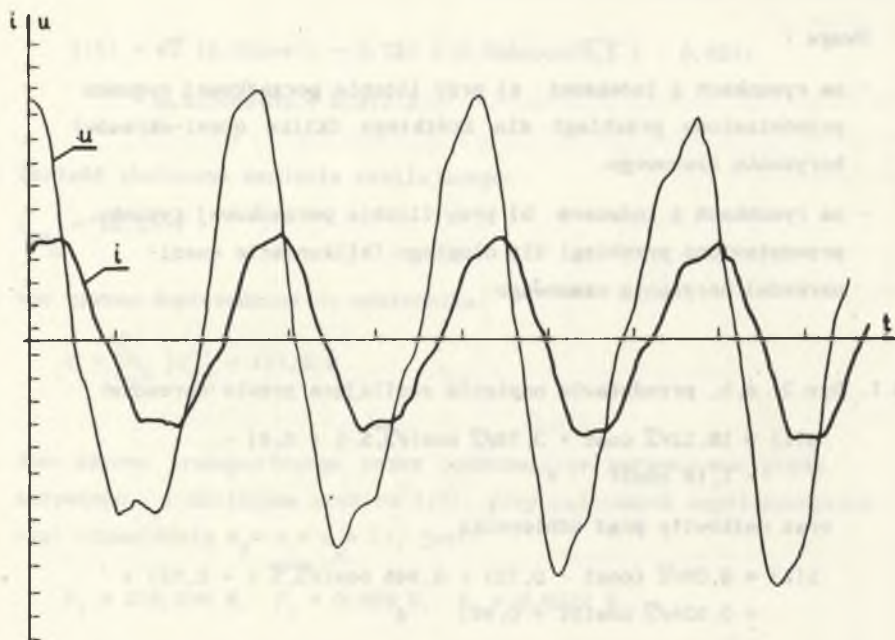
$$i(t) = 8,08\sqrt{2} (\cos t - 0,72) + 0,946 \cos(\sqrt{3,5} t - 0,92) + 0,526\sqrt{2} \cos(5t + 0,97) \quad A$$

5.9.2. Rys.4 a,b, przedstawia wszystkie trzy składowe ortogonalnej dekompozycji prądu odbiornika (por. p.7.8).

Można zauważyć, że eliminacja (na drodze dekompozycji) składowej reaktancyjnej ( $i_r=0$ ) oraz składowej rozproszenia ( $i_s=0$ ) zdecydowanie "wygładza prąd" ( $i=1$ ), zatem zmniejsza się zawartość zniekształceń w prądzie źródła.

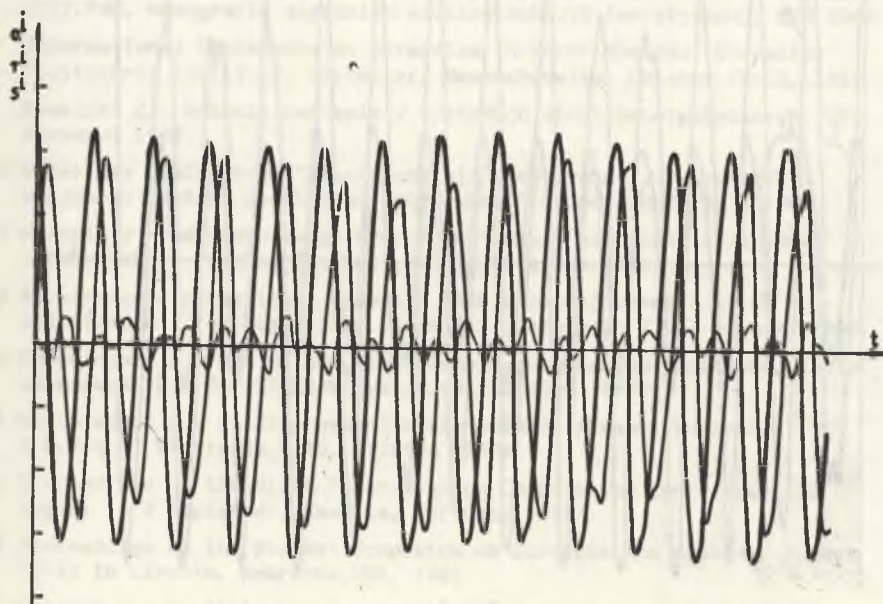
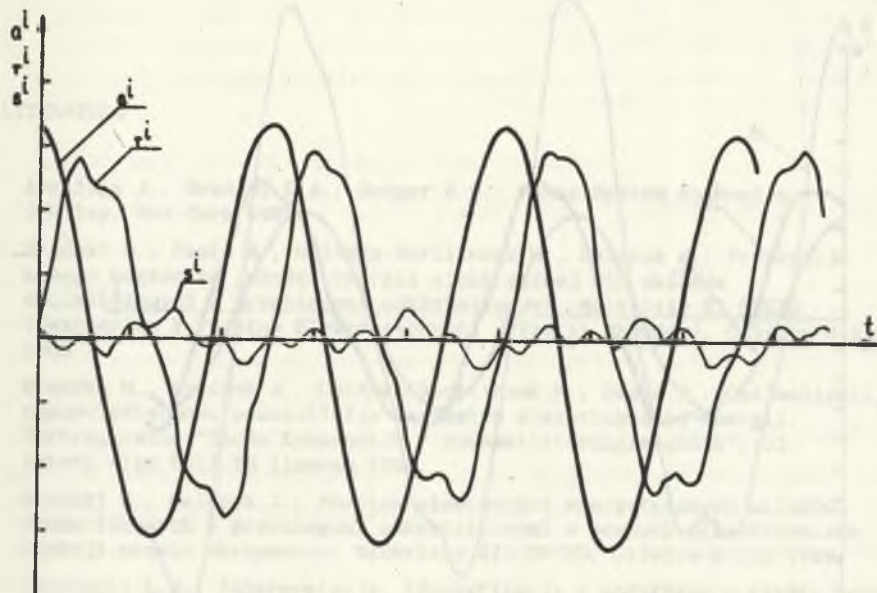
5.9.3. Rys.5 a,b, przedstawia napięcie zasilające, całkowity prąd odbiornika oraz składową aktywną (po całkowitym skompensowaniu składowych  $i_r$  oraz  $i_s$ ).

Można zauważyć, że eliminacja na drodze kompensacji składowej reaktancyjnej ( $i_r=0$ ) oraz składowej rozproszenia ( $i_s=0$ ) poza własnością wypunktowaną w 4.9.2, doprowadza także do poprawienia współczynnika mocy układu H (rys.1) oraz (rys.2) na skutek kompleksowej optymalizacji współczynnika jakości energii elektrycznej zdefiniowanego tak, jak we wzorze (6).

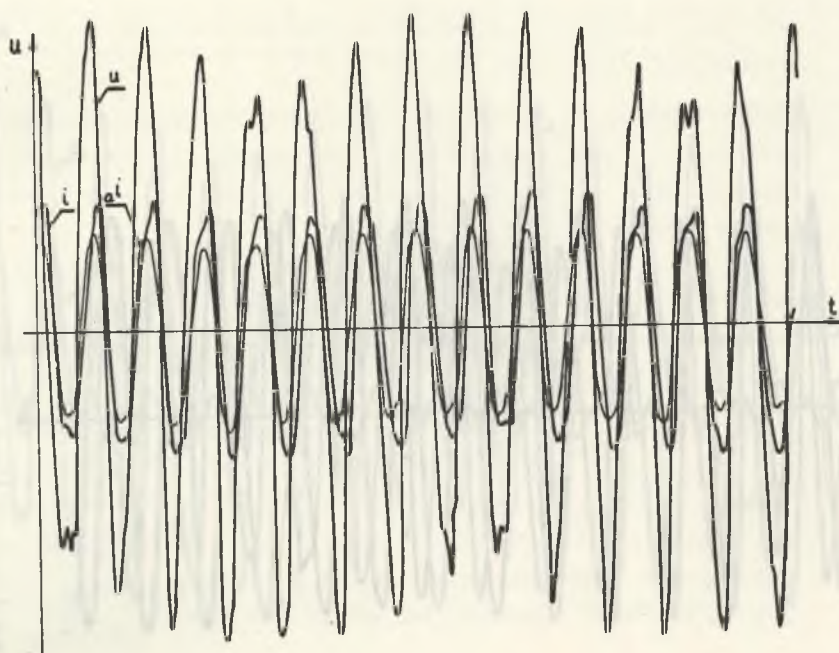
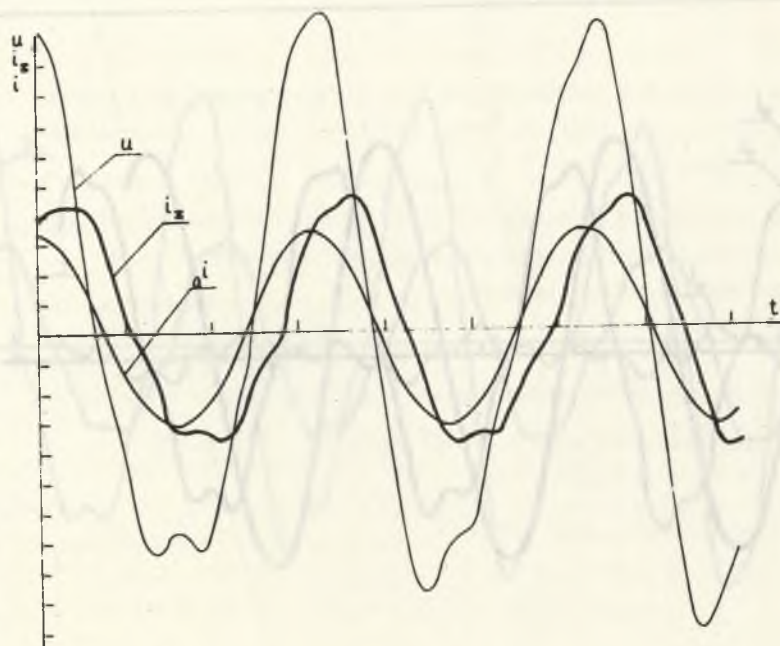


Rya. 3.





Rys. 4.



Rys. 5.

## LITERATURA

- [1] Arrilaga J., Bradley D.A., Bodger P.S.: Power System Harmonics. J.Wiley, New York 1985.
- [2] Brodzki M., Pasko M., Umińska-Bortliczek M., Walczak J.: Propozycja nowego wskaźnika jakości energii elektrycznej dla układów dwuzaciskowych z przebiegami odkształconymi. Materiały XI SPETO (Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów), Gliwice-Wisła 1988.
- [3] Brodzki M., Walczak J., Umińska-Bortliczek M., Pasko M.: Optimalizacja nowowiedziennowo pokazatielia kaczestwa elektriceskoj energii. Vortragsreihe "Techn.Kybernetik / Automatisierungstechnik". 33 Intern.Wiss.Koll.TH Ilmenau 1988.
- [4] Brodzki M., Walczak J.: Analiza właściwości energetycznych układów dwuzaciskowych z przebiegami odkształconymi w pewnych przestrzeniach funkcji prawie okresowych. Materiały XII SPETO, Gliwice-Wisła 1989.
- [5] Czarnecki L.S.: Interpretacja, identyfikacja i modyfikacja właściwości energetycznych obwodów jednofazowych z przebiegami odkształconymi. Z.N.Pol.Śl.Elektryka z.91, Gliwice 1984. (rozpr.hab.)
- [6] Caines P.E.: Linear Stochastic Systems. J.Wiley, New York 1988.
- [7] Fryze S.: Wybrane zagadnienie teoretycznych podstaw elektrotechniki. IPPT PAN, Monografie zagadnień elektrotechniki teoretycznej, PWN 1966.
- [8] International Conference on Harmonics in Power Systems. Worcester Polytechnic Institute, Worcester, Massachusetts, October 22-23, 1984.
- [9] Kowalski Z.: Wahania napięcia w systemach elektroenergetycznych. WNT, Warszawa 1985.
- [10] Materiały konferencji "Jakość energii elektrycznej w warunkach krajowego systemu elektroenergetycznego"., Łódź 28-29 maja 1987.
- [11] Materiały Międzynarodowego Sympozjum "Jakość zasilania z układów sieciowych"., Porąbka-Kozubnik, 22-24 września 1986.
- [12] Normирование pokazatelej kaczestva elektriceskoj energii i ich optimizacia. (red.Bogucki A., Gamm A.Z.,Zeżelenko I.W.) Irkuck. 1988.
- [13] Nowomiejski Z.: Moc układu nieliniowego pobudzanego napięciem prawie okresowym. Z.N.Pol.Śl.Elektryka, z.46, Gliwice 1975.
- [14] Nowomiejski Z.: Analiza pewnej klasy układów parametrycznych. Z.N.Pol.Śl.Elektryka, z.45, Gliwice 1975.
- [15] Proceedings of the Ninth Power Systems Computation Conference. 30 August to 4 September, Cascais, Portugal, 1987.
- [16] Proceedings of the Midwest Symposium on Circuits and Systems. August 10-12 in Lincoln, Nebraska, USA, 1986.
- [17] Walczak J.: An Analysis of energetistic properties of two terminal receivers. XIV Intern.Conf.on "Math.Opt.-Theory and Appl.", 11-15 December, Eisenach 1989.

- [18] Wiener N., Paley R.E.C.: Fourier Transforms in the Complex Domain., Am.Math.Soc., New York, 1934.
- [19] Zaidman S.: Almost Periodic Functions in Abstract Spaces., T126, Pritman Adr.Publ., Boston, 1985.

Recenzent: prof.dr hab.inż. Kazimierz Mikołajuk

Wyłynęło do Redakcji dnia 3 stycznia 1991 r.

## ON THE DECOMPOSITION OF AN ALMOST PERIODIC CURRENT OF TWO-TERMINAL RECEIVERS

### S u m m a r y :

An orthogonal decomposition of the current of a two-terminal receiver fed by the voltage described by an almost periodic function in the sense of Besicovitch-Sobolev has been presented in the paper. The orthogonal decomposition know from literature [5],[7] and executed for the circuits with periodic nonsinusoidal waveforms, for the case of almost periodic (nonsinusoidal) waveforms has been generalized.

Justification for the selection of the class of almost periodic functions, is presented as well as the problem of minimization of a certain functional (4), with quality constraint for the active power supplied to the system, which permits a discrimination of the component transporting the total active power to the receiver, and called an active current  $i_a$ . The decomposition has been carried out and a physical interpretation of three reciprocally orthogonal components of the almost periodic currents  $i_a, i_r, i_s$  from the space  $BS_{2,\alpha}^1$  has been given.

An example for a receiver fed from a electromotive force has been presented. The example has been illustrated with diagrams made from computer printouts. An evident result (of the proposed orthogonal decomposition of the current in relation to the active component of the current isolated by the way of compromise) is the fact of the transmission of about 99% of the active power by the first harmonic of the active current of the receiver as well as the almost sinusoidal shape of the current after realizing the compensation of the remaining components (fig.5a,5b).

ОБ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО  
В ВИДЕ ТОКА ПРИЕМНИКА ДВУХПОЛЮСНОГО

## Р е з ю м е

В работе дается ортогональное разложение тока двухполюсного приёмника, питаемого почти периодическим напряжением. Это почти периодическая функция в смысле Бесиковича-Соболева. Обобщается известное в литературе [5][7] ортогональное разложение употребляемое в цепях с несинусоидально-периодическими токами, на цепи с почти периодическими протеканиями. Дается обоснование для вывода данного класса почти периодических функции. Представляется минимизация некоторого функционала [4] с одновременным ограничением в виде равенности двухполюсников питанных активной мощностью. Это позволяет отразить основную слагаемую тока, которая ведёт к двухполюснику всю активную мощность; это так называемый активный ток  $i_a$ .

В статье разработано разложение и представлена физическая интерпретацию трёх взаимно ортогональных слагаемых почти периодического тока  $(i_a, i_r, i_s)$  из пространства  $BS_{2\alpha}^1$ .

На конец дается расчетный пример, а также - в результате расчёта на ЭВМ - графическая иллюстрация результатов.

Видомым результатов (авторского ортогонального разложения тока в смысле минимизации данного функционала) является, что 99% активной мощности несет первая гармоника тока приёмника, а также вид тока ("почти синусоидальный") после идеальной компенсации обоих слагаемых  $i_r, i_s$  (рис. 5а, 6).

Marian PASKO

DOBÓR KOMPENSATORÓW OPTIMALIZUJĄCYCH WARUNKI ENERGETYCZNE  
RZECZYWISTEGO ŹRÓDŁA NAPIĘĆ ODKSZTAŁCONYCH

Streszczenie. Bazując na pracach dotyczących teorii mocy dla układów zasilanych z idealnych i rzeczywistych źródeł napięć odkształconych, w pracy podjęto próbę doboru kompensatorów optymalizujących właściwości energetyczne źródła. Doboru kompensatorów dokonano opierając się na minimalizacji strat mocy czynnej na doprowadzeniu i impedancji wewnętrznej źródła napięcia odkształconego zasilającego odbiornik dwuzaciskowy. Przeprowadzone rozważania zilustrowano przykładem.

1. WSTĘP

Większość prac dotyczących teorii mocy dla układów z przebiegami odkształconymi okresowymi, a bazujących na rozkładach ortogonalnych prądu źródła, dotyczyła modelu źródła idealnego [2], [4], [5], [6], [7]. W omawianych pracach przeprowadzono minimalizację wartości skutecznej prądu źródła. W pracach [1], [3], [11] przedstawiono problem optymalizacji kompromisu pomiędzy wartością skuteczną prądu źródła i jego zniekształceniami. W pracach [8], [9], [11] podano koncepcję kompensacji niepożądanych składowych prądu źródła, które nie uczestniczą w przekazywaniu mocy czynnej ze źródła do odbiornika. W pracy [12] przeprowadzono dekompozycję prądu odbiornika zasilanego z rzeczywistego źródła dla różnych kryteriów optymalizacyjnych. Zagadnieniom optymalizacji warunków energetycznych rzeczywistego źródła napięcia odkształconego była poświęcona również praca [13]. W wymienionych pracach [12], [13] przedstawiono również ogólne zasady wyznaczenia kompensatorów minimalizujących założony funkcjonal. Dobór i syntezę dwójników kompensujących zarówno składową

reakcyjną prądu źródła, jak rozproszenia pozostawiono otwartą, gdyż nie było to celem powyższych artykułów.

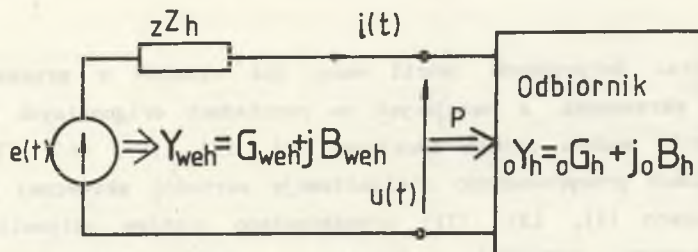
Opierając się na dotychczasowych pracach dotyczących teorii mocy dla układów zasilanych z idealnych źródeł napięć odkształconych oraz na pracy [12], przedstawiono dobór kompensatorów kompensujących składową reaktacyjną oraz składową rozproszenia prądu źródła dla dosyć szczególnego rodzaju rzeczywistego źródła ( $R_z = \text{const}$ ). Starano się już na tak prostym przykładzie uwypuklić problemy, które wiążą się z przyjęciem odpowiednich założeń zarówno na moc czynną dostarczoną do odbiornika, zmianę wartości skutecznej prądu źródła oraz zmianę napięcia na zaciskach odbiornika.

## 2. MINIMALIZACJA STRAT MOCY CZYNNEJ NA DOPROWADZENIU DO ODBIORNIKA

Do rozważań przyjęto model rzeczywistego źródła o impedancji wewnętrznej i linii doprowadzającej w postaci

$$\bigwedge_{h \in \{1, 2, n\}} Z_h = R_h + jX_h, \quad R_z = R$$

zasilającego odbiornik przedstawiony na rys. 1



Rys. 1

gdzie:

$$e(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} E_h \exp(jh\omega t), \quad E_0 = 0,$$

$E_h = E_{h1} + jE_{h2}$  - wartość skuteczna zespolonego napięcia źródła dla  $h$ -tej harmonicznej,

$Y_h = G_h + jB_h$  - admitancja odbiornika dla  $h$ -tej harmonicznej,

$I_h = I_{h1} + jI_{h2}$  - wartość skuteczna zespolonego prądu źródła dla  $h$ -tej harmonicznej.

Postępując podobnie jak w pracy [12], minimalizacja funkcjonału Lagrange'a

$$\Psi(I_1, I_2, \lambda) = R \sum_{h=1}^{\infty} |I_h|^2 + \lambda (P - \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} U_h I_h^*), \quad (1)$$

$$\text{gdzie: } U_h = E_h - Z_h I_h \quad (2)$$

prowadzi do wyznaczenia składowych prądu dla każdej rozpatrywanej harmonicznej

$$I_1 = \frac{\lambda E_1}{2R(1+\lambda)}, \quad (3)$$

$$I_2 = \frac{\lambda E_2}{2R(1+\lambda)}, \quad (4)$$

gdzie:  $\lambda$  - mnożnik Lagrange'a stanowiący rozwiązanie równania

$$P = \frac{1}{R} \sum_{h=1}^{\infty} |E_h|^2 \left[ \frac{\lambda}{2(1+\lambda)} - \left( \frac{\lambda}{2(1+\lambda)} \right)^2 \right]. \quad (5)$$

Podstawiając  $a = \frac{\lambda}{2(1+\lambda)}$  otrzymujemy rozwiązania równania (5)

$$a_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4GR}}{2}, \quad (6)$$

$$a_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4GR}}{2}, \quad (7)$$

gdzie:

$$G = \frac{P}{\sum_{h=1}^{\infty} |E_h|^2}. \quad (8)$$

Ze względów fizycznych można przyjąć tylko rozwiązanie (7), ponadto  $a$  powinno być rzeczywiste, więc

$$1 - 4GR \geq 0. \quad (9)$$

Warunek (9) spełniony jest zawsze, gdyż źródło nie może wydawać większej mocy czynnej niż moc maksymalna, czyli

$$G_{\max} = \frac{1}{4R}.$$



W rozważanym przypadku prąd aktywny, który minimalizuje funkcjonal (1), określony jest dla każdej harmonicznej wzorem

$$I_{h \min} = I_h + j \frac{a}{2} I_h = G_x E_h \quad (10)$$

Postać czasową prądu określa wzór

$$i(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} G_x E_h \exp jh\omega t \quad (11)$$

Całkowity prąd źródła wyraża się zależnością

$$i(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} (G_{weh} + jB_{weh}) E_h \exp jh\omega t, \quad (12)$$

gdzie:

$$G_{weh} = \frac{G_h (1 + R_{oh}) + R_{oh} B_h^2}{(1 + G_h R_{oh} - X_{oh} B_h)^2 + (G_h X_{oh} + R_{oh} B_h)^2}, \quad (13)$$

$$B_{weh} = \frac{B_h - X_{oh} (G_h^2 + B_h^2)}{(1 + G_h R_{oh} - X_{oh} B_h)^2 + (G_h X_{oh} + R_{oh} B_h)^2}. \quad (14)$$

### 3. DEKOMPOZYCJA PRĄDU ŹRÓDŁA Z PUNKTU WIDZIENIA MOŻLIWOŚCI KOMPENSACJI

Różnicę całkowitego prądu źródła określonego wzorem (12) i prądu aktywnego (11) należy przedstawić w postaci dwóch składowych. Składowej reaktancyjnej prądu źródła

$$i_r(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} jB_{weh} E_h \exp jh\omega t \quad (15)$$

kompensowalnej za pomocą układów LC oraz składowej rozproszenia prądu źródła

$$i_s(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} (G_{weh} - G_x) E_h \exp jh\omega t \quad (16)$$

niekompensowalnej za pomocą dwójników pasywnych. Motywacja takiej dekompozycji jest taka sama jak w przypadku źródeł idealnych. Całkowitą moc czynną wydawaną przez źródło  $P_{cz}$  reprezentuje iloczyn skalarny

$$(e|i) = \frac{1}{T} \int_0^T e(t)i(t)dt = \sum_{h=1}^{\infty} G_{weh} |E_h|^2 = P_{cz} \quad (17)$$

Natomiast minimalną moc czynną wydawaną przez źródło i zapewniającą moc czynną odbiornika P reprezentuje iloczyn skalarny

$$(e|_a i) = \frac{1}{T} \int_0^T e(t)_a i(t)dt = \sum_{h=1}^{\infty} G_x |E_h|^2 = P + \Delta P_{min} = (P_{cz})_{min} \quad (18)$$

gdzie:

P - moc czynna znamionowa dostarczona do odbiornika ,

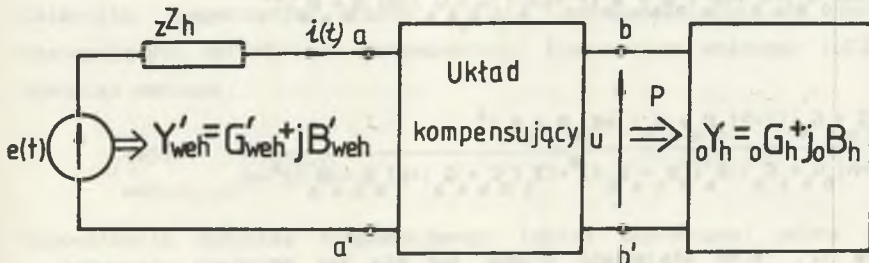
$\Delta P_{min}$  - minimalne straty mocy czynnej na impedancji wewnętrzej źródła

$$\Delta P_{min} = \sum_{h=1}^{\infty} R |I_{h,min}|^2 = \sum_{h=1}^{\infty} R G_x^2 |E_h|^2 \quad (19)$$

Iloczyn skalarny

$$(e|_s i) = \frac{1}{T} \int_0^T e(t)_s i(t)dt = \sum_{h=1}^{\infty} G_{weh} |E_h|^2 - \sum_{h=1}^{\infty} G_x |E_h|^2 = P_{cz} - (P_{cz})_{min} \neq 0 \quad (20)$$

Ze wzoru (20) wynika, że  $(e|_s i)$  przenosi moc czynną, czego nie było w przypadku źródła idealnego. Kompensacja zarówno składowej reaktancyjnej



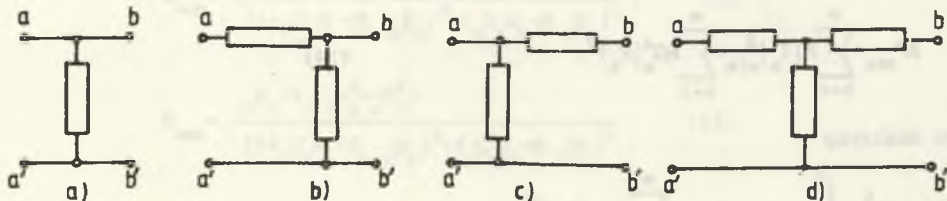
Rys. 2

prądu źródła, jak i rozproszenia wymaga włączenia układu kompensującego na możliwe dostępne zaciski a-a' i b-b' (rys.2), który winien spełniać warunki

$$\bigwedge_{h \in \{1, 2, \dots, n\}} \operatorname{Im} \left\{ Y'_{weh} \right\} = B'_{weh} = 0 \quad (21)$$

$$\bigwedge_{h \in \{1, 2, \dots, n\}} \operatorname{Re} \left\{ Y'_{weh} \right\} - G_x = 0 \quad (22)$$

Spełnienie tylko warunku (21) jest równoznaczne z kompensacją składowej reaktancyjnej prądu, natomiast spełnienie warunku (22) prowadzi do kompensacji składowej rozproszenia prądu. Kompensacja częściowa wpływa na zmianę pozostałej składowej. Spośród wielu struktur układów kompensatorów przedstawionych na rys.3 do zaakceptowania wydają się dwie struktury (rys.3a i rys.3b).



Rys.3.

Admitancję dwójnika kompensującego dla każdej harmonicznej  $Y_{kn} = G_{kh} + jB_{kh}$  dla układu z rys.3a należy wyznaczyć z warunków (21), (22),

gdzie

$$B'_{weh} = \frac{B_{ohk_h} + B_{ok_h} - X_h [(G_{ohk_h} + G_{ok_h})^2 + (B_{ohk_h} + B_{ok_h})^2]}{[1 + R(G_{ohk_h} + G_{ok_h}) - X_h (B_{ohk_h} + B_{ok_h})]^2 + [X_h (G_{ohk_h} + G_{ok_h}) + R(B_{ohk_h} + B_{ok_h})]^2} \quad (23)$$

$$G'_{weh} = \frac{(G_{ohk_h} + G_{ok_h}) [1 + R(G_{ohk_h} + G_{ok_h})] + R(B_{ohk_h} + B_{ok_h})^2}{[1 + R(G_{ohk_h} + G_{ok_h}) - X_h (B_{ohk_h} + B_{ok_h})]^2 + [X_h (G_{ohk_h} + G_{ok_h}) + R(B_{ohk_h} + B_{ok_h})]^2} \quad (24)$$

Wyznaczenie  $G_{kh}$ ,  $B_{kh} \in R$  staje się trudne już dla tak prostego przypadku, dlatego też struktura ta może być wykorzystana w stosunkowo prosty sposób do częściowej kompensacji, a mianowicie kompensacji składowej reaktancyjnej

prądu źródła za pomocą dwójników LC. Susceptancje dwójnika kompensującego dla poszczególnych harmonicznych winny spełniać wówczas zależności:

$$B_{kh} = \frac{1}{2X_h} \left( 1 + \sqrt{1 - 4X_h^2 G_h^2} \right) - B_{0h}, \quad h \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (25)$$

$$B_{kh} = \frac{1}{2X_h} \left( 1 - \sqrt{1 - 4X_h^2 G_h^2} \right) - B_{0h}, \quad h \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (26)$$

przy warunku  $1 - 4X_h^2 G_h^2 \geq 0 \quad h \in \{1, 2, \dots, n\}$  (27)

Z warunków (25), (26) wynika, że istnieje niejednoznaczny dobór wartości

$B_{kh}$ . Właściwy dobór kompensatora opiera się na wzorze (26); wówczas powoduje on:

- kompensację składowej reaktancyjnej prądu źródła,
- zmniejszenie wartości skutecznej prądu źródła,
- zmniejszenie strat mocy czynnej na doprowadzeniu,
- dostarczenie większej od założonej mocy czynnej  $P$  do odbiornika,
- zmianę napięcia na zaciskach odbiornika.

O wiele lepsze wyniki kompensacji uzyskuje się poprzez zastosowanie kompensatora o strukturze czwórnik przedstawionego na rys.3b. Gałąź wzdłużna czwórnik zawiera tylko dwójnik LC i służy do kompensacji składowej reaktancyjnej impedancji wewnętrznej źródła i linii przesyłowej, natomiast gałąź poprzeczna posiada dwójnik kompensujący o admitancji;

$$\bigwedge_{h \in \{1, 2, \dots, n\}} Y'_{kh} = G'_{kh} + jB'_{kh}, \quad G'_{kh} = 0. \quad (28)$$

Całkowita kompensacja prądów  $(i_r, i_s)$  sprowadza się do narzucenia następujących warunków na kompensatory. Kompensator wzdłużny (LC) winien spełniać warunek:

$$\bigwedge_{h \in \{1, 2, \dots, n\}} X'_{kh} = -X_h. \quad (29)$$

Susceptancja dwójnika kompensującego (gałąź poprzeczna) winna spełniać warunki:

$$\bigwedge_{h \in \{1, 2, \dots, n\}} B'_{h} = -B_{h} \quad (30)$$

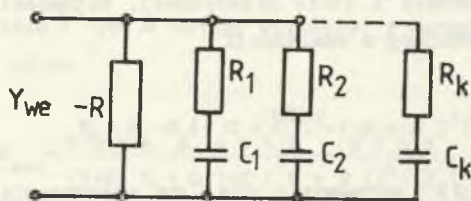
Spełnienie warunków (29) i (30) jest równoważne kompensacji składowej reaktancyjnej prądu źródła  $r_i$ . Po tak przeprowadzonej kompensacji konduktancja wejściowa widziana z zacisków źródła wyniesi:

$$G'_{weh} = \frac{G_{oh} + G'_{kh}}{1 + (G_{oh} + G'_{kh})R} \quad (31)$$

Korzystając z warunku kompensacji prądu rozproszenia (22) konduktancja dwójnika kompensującego  $G'_{kh}$  winna spełniać warunek

$$\bigwedge_{h \in \{1, 2, \dots, n\}} G'_{kh} = \frac{G_x}{1 - RG_x} - G_{oh} \quad (32)$$

Ponieważ prawa strona równości (32) może przyjmować wartości zarówno dodatnie, jak i ujemne, więc do kompensacji nie może być użyty dwójnik pasywny. Kompensację można przeprowadzić podobnie jak w pracach [10], [11], czyli w klasie  $\mathcal{R}\epsilon(\text{RLC}, -R^{(1)})$ . Kompensacja składowych prądu źródła  $r_i$  i  $s_i$  w obydwu omawianych przypadkach winna być prowadzona dwuetapowo. W pierwszym etapie należy zbadać możliwość realizacji układu kompensacji składowej



Rys. 4.

rozproszenia prądu źródła, a następnie dopiero przeprowadzić syntezę układu kompensacji składowej reaktancyjnej prądu źródła. Taki tok postępowania spowodowany jest faktem, że użyty do kompensacji składowej rozproszenia dwójnik wprowadza część urojonej admitancji, którą należy kompensować łącznie ze składową reaktancyjną prądu źródła. Przykładowo dwójnik  $(RC, -R^{(1)})$  o postaci kanonicznej przedstawionej na rys. 4 posiada admitancję:

$$Y_{we}(j\omega) = k_0 + \sum_{l=1}^n \frac{k_l \omega^2}{\omega^2 + \sigma_l^2} + j \sum_{l=1}^n \frac{k_l \sigma_l \omega}{\omega^2 + \sigma_l^2} \quad (33)$$

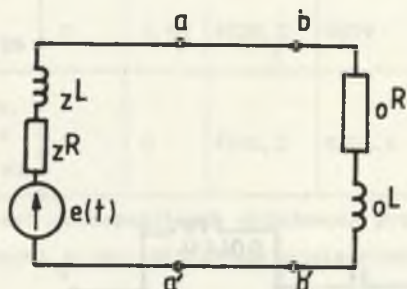
gdzie:

$$k_0 = -\frac{1}{R} < 0, \quad k_1 = \frac{1}{R_1}, \quad C_1 = \frac{k_1}{\sigma_1}, \quad i \in (1, 2, \dots, n) \quad (34)$$

$\sigma_1$  - biegun realizowanej admitancji  $\sigma_1 > 0 \in R$ .

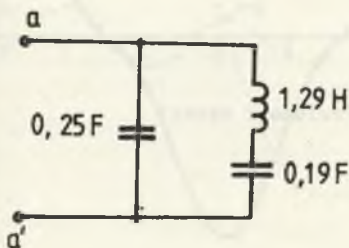
#### 4. PRZYKŁAD ILUSTRUJĄCY OMAWIANY DOBÓR KOMPENSATORÓW

Dla układu przedstawionego na rys.5 o danych



Rys.5

jest dwójnik dobrany zgodnie ze wzorem (26), a jego susceptancje wynoszą  $B_{k_1} = 0,5125S$ ,  $B_{k_3} = 0,3015S$ . Przykładowy dwójnik LC spełniający powyższe warunki wyznaczony zgodnie z procedurą [9] przedstawiono na rys.6.



Rys.6.

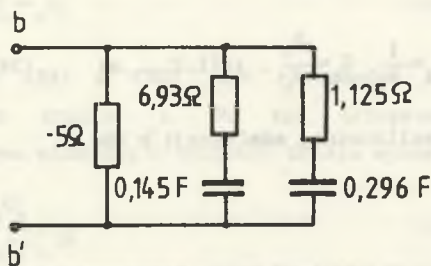
$$e(t) = 100\sqrt{2}\cos\omega t + 20\sqrt{2}\cos 3\omega t,$$

$zL = 0,05H$ ,  $zR = 0,05\Omega$ ,  $oR = 1\Omega$ ,  
 $oL = 1H \omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  należy zaproponować układy do kompensacji składowej reaktancyjnej i rozproszenia prądu źródła.

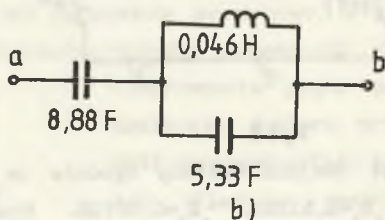
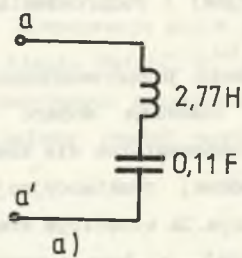
Na podstawie przeprowadzonych rozważań dokonano doboru susceptancji kompensatorów dla kompensacji składowej reaktancyjnej. Dla układu z rys.3a właściwym kompensatorem jest dwójnik dobrany zgodnie ze wzorem (26), a jego susceptancje

wynoszą  $B_{k_1} = 0,5125S$ ,  $B_{k_3} = 0,3015S$ . Przykładowy dwójnik LC spełniający powyższe warunki wyznaczony zgodnie z procedurą [9] przedstawiono na rys.6. Dla modelu z rys.3b przeprowadzono całkowitą kompensację zarówno składowej reaktancyjnej prądu źródła, jak i składowej rozproszenia. Dwójnik przeznaczony do kompensacji składowej rozproszenia wyznaczono z warunku (32) i jego przykładową realizację dla  $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = 3$  oraz  $k_0 = -2$  przedstawiono na rys.7. Natomiast susceptancje dwójników kompensujących składową reaktancyjną przez dwójnik przedstawiono na rys.7.

Otrzymane dwójniki i ich sposób włączenia przedstawiono na rys.8.



Rys. 7



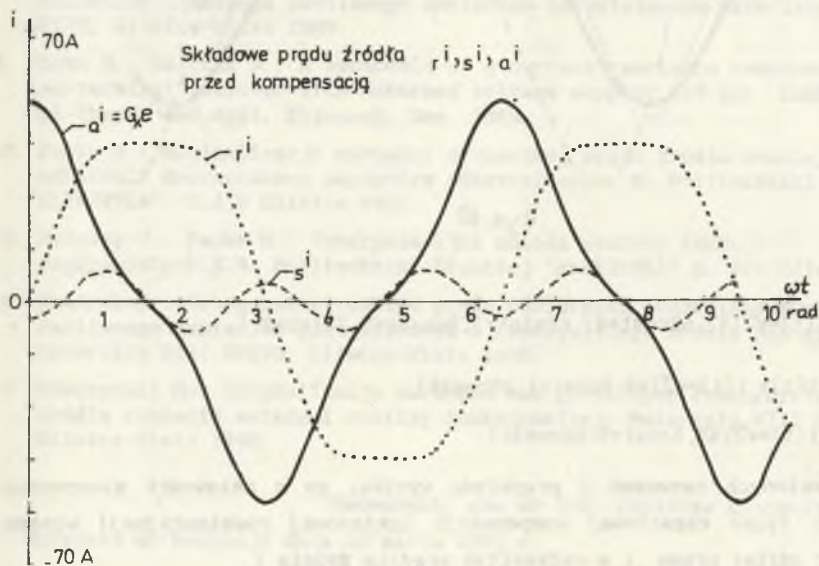
Rys. 8

Pozostałe wyniki dla rozważanego przykładu zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1

| Wartości skuteczne prądów |                        |                        | Moc czynna         |                   | Straty mocy czynnej | Napięcie na odbiorniku |
|---------------------------|------------------------|------------------------|--------------------|-------------------|---------------------|------------------------|
| Prąd źródła<br>$ I $      | Prąd reakt.<br>$ I_r $ | Prąd rozpr.<br>$ I_s $ | źródła<br>$P_{cz}$ | odbiornika<br>$P$ | $\Delta P$          | $ U $                  |
| A                         | A                      | A                      | W                  | W                 | W                   | V                      |
| Przed komp.               |                        |                        |                    |                   |                     |                        |
| 67,61                     | 47,96                  | 7,55                   | 4813,23            | 4584,36           | 228,57              | 97,1                   |
| Po komp. i                |                        |                        |                    |                   |                     |                        |
| 48,85                     | 0                      | 7,95                   | 4928,3             | 4809              | 119,3               | 99,6                   |
| Po całk. komp.            |                        |                        |                    |                   |                     |                        |
| 45,93                     | 0                      | 0                      | 4690,3             | 4524,6            | 105,7               | 99,7                   |

Przebiegi poszczególnych składowych prądu źródła przed kompensacją (opisane poniższymi zależnościami) przedstawiono na rys.9.



Rys.9

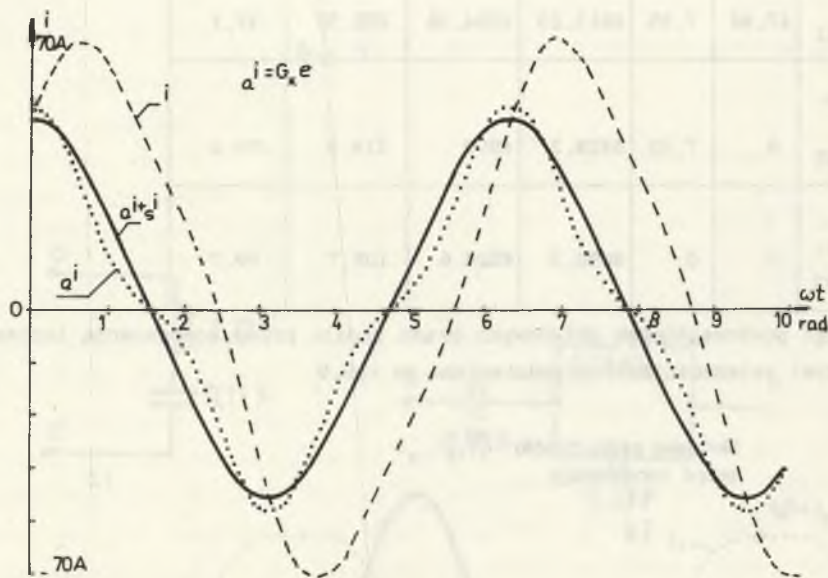


$$i_a(t) = \sqrt{2}(45,1 \cos t + 9,02 \cos 3t),$$

$$i_r(t) = \sqrt{2}(47,62 \sin t + 5,71 \sin 3t),$$

$$i_s(t) = \sqrt{2}(2,52 \cos t - 7,11 \cos 3t).$$

Natomiast na rys.10 przedstawiono przebiegi prądu źródła przed kompensacją ( $i$ ), po kompensacji tylko składowej reaktancyjnej ( $i_a + i_s$ ) i po całkowitej kompensacji ( $i$ )



Rys.10

$$i(t) = \sqrt{2}(47,62 \cos t + 47,62 \sin t + 1,9 \cos 3t + 5,711 \sin 3t),$$

$$i_a(t) + i_s(t) = \sqrt{2}(48,8 \cos t + 1,99 \cos 3t),$$

$$i_a(t) = \sqrt{2}(45,1 \cos t + 9,02 \cos 3t).$$

Z przedstawionych rozważań i przykładu wynika, że o celowości stosowania pełnej czy tylko częściowej kompensacji (składowej reaktancyjnej) winien zdecydować udział prądu  $i_s$  w całkowitym prądzie źródła  $i$ .

## LITERATURA

1. Brodzki M., Pasko M., Umińska-Bortliczek M., Walczak J.: Propozycja nowego wskaźnika jakości energii elektrycznej dla układów dwuzaciskowych z przebiegami odkształconymi. Materiały XI SPETO, Gliwice-Wisła 1988.
2. Brodzki M., Pasko M.: Definicje pewnych mocy dla układów wielofazowych o przebiegach odkształconych. Rozprawy Elektrotechniczne z.1, 1989.
3. Brodzki M., Walczak J.: O pewnym sposobie oceny prądów odkształconych odbiorników wielofazowych wykorzystujących pojęcie przestrzeni Sobolewa. Materiały XI SPETO, Gliwice-Wisła 1988.
4. Czarnecki L.S.: Interpretacja, identyfikacja i modyfikacja właściwości energetycznych obwodów jednofazowych z przebiegami odkształconymi. Z.N. Politechniki Śląskiej "ELEKTRYKA", z.91, Gliwice 1984.
5. Czarnecki L.S.: Orthogonal decomposition of the currents in 3-phase nonlinear asymmetrical circuit with a nonsinusoidal voltage source. IEEE Trans. on Industr. and Meas. Vol.37, No 1, March 1988.
6. Kusters N.L., Moore W.I.M.: On the definition of reactive power under nonsinusoidal conditions. IEEE Trans. Power Appl. Syst. Vol. PAS-99, Sept. 1980.
7. Page C.H.: Reactive power in nonsinusoidal situations. IEEE Trans. on Instr. and Meas. IM-29, 1980.
8. Pasko M.: Dobór dwójników kompensujących składową reaktancyjną prądu odbiornika linowego zasilanego napięciem odkształconym. Materiały XII SPETO, Gliwice-Wisła 1989.
9. Pasko M., Walczak J.: A synthesis of a current reactance component of two-terminal receiver with deformed voltage supply. XIV Int. Conf. Math. Opt-Theory and Appl. Eisenach, Dec. 1989.
10. Pasko M.: Minimalizacja wartości skutecznej prądu źródła zasilającego odbiornik dwuzaciskowy napięciem odkształconym. N. Politechniki Śląska "ELEKTRYKA" z.119 Gliwice 1991.
11. Walczak J., Pasko M.: Interpolacyjna metoda syntezy funkcji rzeczywistych. Z.N. Politechniki Śląskiej "ELEKTRYKA" z. 122 Gliwice 1991.
12. Walczak J.: Ortogonalny rozkład prądu odbiornika dwuzaciskowego zasilanego napięciem odkształconym z rzeczywistego źródła napięcia. Materiały XIII SPETO, Gliwice-Wisła 1990.
13. Siwczyński M.: Optymalizacja warunków energetycznych rzeczywistego źródła napięcia metodami analizy funkcjonalnej. Materiały XIII SPETO, Gliwice-Wisła 1990.

Recenzent: doc dr inż. Zdzisław Klonowicz

Wpłynęło do Redakcji dnia 10 marca 1991 r.

## SELECTION OF THE COMPENSATORS WHICH OPTIMIZE ENERGETIC CONDITIONS OF THE REAL, NONSINUSOIDAL VOLTAGE SOURCE

### Summary

In the paper basing on the works concerned with power theory for a circuits supplied by ideal and real nonsinusoidal voltage sources a trial of selection of the compensators which optimize energetic conditions of the source is done.

Selection is performed basing on the minimization of the active power loss in the transmission line and impedance of nonsinusoidal voltage source which supplies two-pole load.

Considerations are illustrated by examples.

## ПОДБОР КОМПЕНСАТОРОВ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ РЕАЛЬНОГО НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ИСТОЧНИКА НАПРЯЖЕНИЯ

### Резюме

Опираясь на работах по теории мощности для несинусоидальных цепей, в работе проведена попытка подбора компенсаторов для оптимизации энергетических свойств реального источника питающего приёмники в виде двухпольсника. Подбор компенсаторов сделан для минимизации потерь активной мощности от источника к приёмник/у. Проведенные рассуждения проиллюстрированы примером.

Marian PASKO

SYMERYZACJA NIESYMETRYCZNEGO ODBIORNIKA TRÓJFAZOWEGO ZASILANEGO Z  
SYMERYCZNEGO ŹRÓDŁA NAPIĘCIA ODKSZTAŁCONEGO ZA POMOCĄ DWÓJNIKÓW LC

Streszczenie. Celem artykułu jest przedstawienie zasad symetryzacji niesymetrycznego odbiornika trójfazowego trójprzewodowego zasilanego z symetrycznego źródła napięcia odkształconego okresowego. W artykule zakłada się, że źródło napięcia odkształconego jest idealne, a odbiornik posiada pełną macierz imitancyjną dla rozpatrywanych harmonicznych. Symetryzację dla dowolnie wybranej skończonej liczby harmonicznych przeprowadza się za pomocą dwójników reaktancyjnych LC. Przeprowadzona symetryzacja dla poszczególnych harmonicznych rzędu  $h=3n+1$ ,  $n \in \{0, 1, 2, \dots, l\}$  oraz dla harmonicznych rzędu  $h=3n-1$ ,  $n \in \{0, 1, 2, \dots, l\}$  powoduje symetryzację prądów przewodowych źródła oraz znaczne zmniejszenie ich wartości skutecznych. Przedstawione rozważania wraz z syntezą dwójników LC służących do symetryzacji (kompensacji pewnych składowych prądu źródła) zilustrowano przykładem.

## 1. WSTĘP

Przedstawiony artykuł jest uogólnieniem idei symetryzacji niesymetrycznych obwodów trójfazowych zasilanych z idealnego źródła napięcia sinusoidalnego [6], [7], [14] na odbiorniki trójfazowe niesymetryczne zasilane z symetrycznego źródła napięcia odkształconego okresowego. Przedstawiona idea symetryzacji wykorzystuje teorię składowych symetrycznych, natomiast same układy kompensacyjne zbudowane są z elementów reaktancyjnych. W jednej z licznych teorii mocy dla przebiegów odkształconych, która bazuje na rozkładach prądu odbiornika na wzajemnie ortogonalne składowe w sensie przyjętego iloczynu skalarnego, wyodrębniona jedna ze składowych prądu odpowiedzialna jest właśnie za asymetrię fazową odbiornika.

Zagadnienia kompensacji poszczególnych składowych prądu źródła (wzajemnie

ortogonalnych) poruszono w pracach [5], [11], [12], [13].

W przedstawionym artykule doprowadzenie do symetryzacji obwodu widzianego z zacisków źródła za pomocą dwójników reaktancyjnych jest równoważne kompensacji dwóch składowych prądu źródła, a mianowicie:

- składowej reaktancyjnej prądu odpowiedzialnej za wymianę energii pola elektromagnetycznego pomiędzy źródłem zasilania a odbiornikiem,
- składowej prądu asymetrii związanej z asymetrią fazową odbiornika.

## 2. SYMETRYZACJA OBWODU

Problem symetryzacji obwodu można sformułować następująco:

- niesymetryczny odbiornik trójfazowy połączony w trójkąt opisany dla rozpatrywanych harmonicznych pełną macierzą immitancji, zasilany z idealnego źródła napięcia odkształconego okresowego, doprowadzić za pomocą dwójników LC (włączonych w sposób pokazany na rys.1) do obwodu symetrycznego przy rozpatrywaniu od strony zacisków źródła.

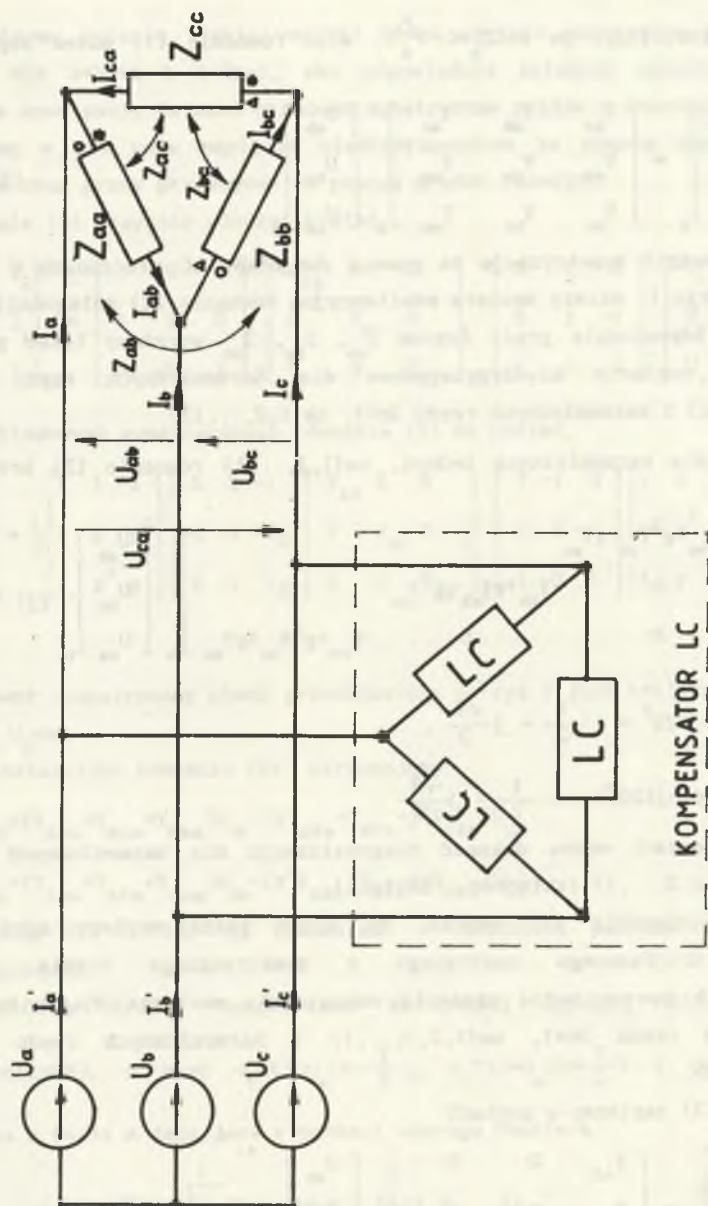
Stawiamy ponadto wymagania, aby po dołączeniu dwójników LC ze źródła nie była pobierana moc bierna. Tak postawiony i rozwiązany problem pozwala na uzyskanie symetrycznego rozplywu prądu źródła oraz zapewnia znaczne zmniejszenie jego wartości skutecznej.

Zmniejszonej wartości skutecznej prądu źródła towarzyszy zawsze znaczne zmniejszenie umownej wartości mocy pozornej źródła przy tej samej mocy czynnej dostarczonej do odbiornika.

Rozważmy zatem obwód przedstawiony na rys.1 przy odłączonym kompensatorze (układ symetryzujący LC).

Równania opisujące odbiornik przedstawiony na rys.1 (dla każdej harmonicznej) dla wartości skutecznych zespolonych mają postać:

$$\begin{bmatrix} U_{ab} \\ U_{bc} \\ U_{ca} \end{bmatrix}_h = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ab} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ac} & Z_{bc} & Z_{cc} \end{bmatrix}_h \begin{bmatrix} I_{ab} \\ I_{bc} \\ I_{ca} \end{bmatrix}_h \quad h \in \{1, 2, 3, \dots, l\} \quad (1)$$



Rys. 1

Ponieważ założyliśmy, że  $\det Z_h \neq 0$ , więc równanie (1) można zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} I_{ab} \\ I_{bc} \\ I_{ca} \end{bmatrix}_h = \begin{bmatrix} Y_{aa} & Y_{ab} & Y_{ac} \\ Y_{ab} & Y_{bb} & Y_{bc} \\ Y_{ac} & Y_{bc} & Y_{cc} \end{bmatrix}_h \begin{bmatrix} U_{ab} \\ U_{bc} \\ U_{ca} \end{bmatrix}_h \quad (2)$$

Aby przeprowadzić symetryzację za pomocą dwójników LC włączonych w sposób pokazany na rys.1, należy macierz admittancejną równania (2) zdiagonalizować. W tym celu odpowiednie prądy fazowe  $I_{ab}$ ,  $I_{bc}$ ,  $I_{ca}$  wyrażamy tylko poprzez odpowiednie napięcie międzyprzewodowe dla harmonicznych rzędu  $3n+1$ ,  $n \in \{0, 1, 2, \dots, l\}$  i harmonicznych rzędu  $3n-1$ ,  $n \in \{1, 2, \dots, l\}$ .

Przykładowo dla harmonicznych  $h=3n+1$ ,  $n \in \{1, 2, \dots, l\}$  równanie (2) przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} I_{ab} \\ I_{bc} \\ I_{ca} \end{bmatrix}_h \begin{bmatrix} Y_{aa} + \gamma^2 Y_{ab} + \gamma Y_{ac} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{bb} + \gamma Y_{ab} + \gamma^2 Y_{bc} & 0 \\ 0 & 0 & Y_{cc} + \gamma^2 Y_{ac} + \gamma Y_{bc} \end{bmatrix}_h \begin{bmatrix} U_{ab} \\ U_{bc} \\ U_{ca} \end{bmatrix}_h \quad (3)$$

gdzie  $\gamma = \exp j120^\circ = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

$$\gamma^2 = \exp(-j120^\circ) = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

W podobny sposób można dokonać diagonalizacji dla harmonicznych rzędu  $h=3n-1$ ,  $n \in \{1, 2, 3, \dots, l\}$  (składowa przeciwna).

Na podstawie równania (3) wynika, że każdą pełną macierz admittancej odbiornika trójfazowego zasilanego z symetrycznego źródła napięć odkształconych zawsze można zastąpić odpowiednią macierzą diagonalną dla harmonicznych rzędu  $3n+1$ ,  $n \in \{1, 2, 3, \dots, l\}$  i harmonicznych rzędu  $3n-1$ ,  $n \in \{1, 2, 3, \dots, l\}$ .

Równanie (3) zapiszmy w postaci

$$\begin{bmatrix} I_{ab} \\ I_{bc} \\ I_{ca} \end{bmatrix}_h = \begin{bmatrix} Y_{AB} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{BC} & 0 \\ 0 & 0 & Y_{CA} \end{bmatrix}_h \begin{bmatrix} U_{ab} \\ U_{bc} \\ U_{ca} \end{bmatrix}_h \quad h \in \{3n+1\}. \quad (4)$$

\*) wzór (4) dla składowej przeciwnej  $(3n-1)$  ma postać analogiczną, z tym że wartości admittancej są inne.

i postawmy pytanie, jakie warunki muszą spełnić admitancje  $Y_{ABh}$ ,  $Y_{BCh}$ ,  $Y_{CAh}$ , dla  $h=3n+1$  i  $h=3n-1$ , aby odpowiednie składowe symetryczne napięć źródła wywoływały te same składowe symetryczne prądów przewodowych.

Wyraźmy w tym celu napięcia międzyprzewodowe za pomocą napięć fazowych źródła oraz prądy przewodowe za pomocą prądów fazowych.

Równanie (4) przyjmie wówczas postać

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{AB} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{BC} & 0 \\ 0 & 0 & Y_{CA} \end{bmatrix}_h \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix}_h \quad (5)$$

Dla składowych symetrycznych równanie (5) ma postać

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_{2h} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \\ 1 & \gamma^2 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{AB} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{BC} & 0 \\ 0 & 0 & Y_{CA} \end{bmatrix}_h \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \gamma^2 & \gamma \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_{2h} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Ponieważ rozpatrywany obwód przedstawiony na rys.1 jest trójprzewodowy, więc  $I_0=0$ ,  $U_0=0$ .

Przekształcając równanie (6), otrzymujemy

$$I_{1h} = (Y_{ABh} + Y_{BCh} + Y_{CAh})U_{1h} - (\gamma Y_{ABh} + Y_{BCh} + \gamma^2 Y_{CAh})U_{2h}, \quad (7)$$

$$I_{2h} = (Y_{ABh} + Y_{BCh} + Y_{CAh})U_{2h} - (\gamma^2 Y_{ABh} + Y_{BCh} + \gamma Y_{CAh})U_{1h}, \quad (8)$$

Równania (7) i (8) są równaniami o znaczeniu podstawowym w naszych rozważaniach.

Rozważmy źródło symetryczne kolejności zgodnej dla podstawowej harmonicznej, a więc  $u_b(t) = u_a(t - \frac{T}{3})$ ,  $u_c(t) = u_a(t + \frac{T}{3})$  i niech napięcie źródła w fazie a dane jest w postaci szeregu Fouriera

$$u_a(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} U_h \exp jh\omega t, \quad h \in \{1, 2, \dots, l\}, \quad (9)$$

gdzie

$U_h$  - wartość skuteczna zespolona dla h-tej harmonicznej, natomiast  $U_{a0} = 0$ .



Dla harmonicznych rzędu  $h=3n+1$ ,  $n \in \{0, 1, 2, \dots, l\}$  układ napięć źródła tworzy układ symetryczny zgodny.

Dla harmonicznych rzędu  $h=3n-1$ ,  $n \in \{0, 1, 2, \dots, l\}$  układ napięć źródła tworzy układ symetryczny przeciwny.

Dla harmonicznych rzędu  $h=3n$ ,  $n \in \{0, 1, 2, \dots, l\}$  układ napięć źródła tworzy układ symetryczny zerowy.

W naszych rozważaniach zajmujemy się tylko harmonicznymi rzędu  $3n+1$  i  $3n-1$ .

Dla harmonicznych rzędu  $3n+1$  w źródle występują tylko składowe zgodne napięcia, a więc

$$U_{1h} \neq 0, U_{2h} = 0 \quad \bigwedge_{h \in 3n+1}, h \in \{0, 1, 2, \dots, l\}.$$

Gdy  $U_{2h} = 0$ , wówczas równania (7) i (8) przyjmą postać dla każdej harmonicznej rzędu  $3n+1$ .

$$I_{1h} = (Y_{ABh} + Y_{BCh} + Y_{CAh}) U_{1h}, \quad \bigwedge_{h \in 3n+1}, \quad (10)$$

$$I_{2h} = (\gamma^2 Y_{ABh} + Y_{BCh} + \gamma Y_{CAh}) U_{1h}, \quad \bigwedge_{h \in 3n+1}. \quad (11)$$

Aby prądy przewodowe źródła zawierały tylko składową zgodną, to na podstawie równania (11) prąd składowej przeciwnej będzie równy zeru

$$I_{2h} = 0 \quad \bigwedge_{h \in 3n+1},$$

gdzy spełniony będzie warunek

$$\gamma^2 Y_{ABh} + Y_{BCh} + \gamma Y_{CAh} = 0, \quad \bigwedge_{h \in 3n+1}. \quad (12)$$

Dla harmonicznych rzędu  $h=3n-1$ ,  $n \in \{0, 1, 2, \dots, l\}$  w napięciach fazowych źródła występuje tylko składowa przeciwna, a więc  $U_{1h} = 0$ ,  $U_{2h} \neq 0$   $\bigwedge_{h \in 3n-1}$ , wówczas równania (7) i (8) przyjmą postać

$$I_{1h} = (\gamma Y_{ABh} + Y_{BCh} + \gamma^2 Y_{CAh}) U_{2h}, \quad \bigwedge_{h \in 3n-1}, \quad (13)$$

$$I_{2h} = (Y_{ABh} + Y_{BCh} + Y_{CAh}) U_{2h}, \quad \bigwedge_{h \in 3n-1}. \quad (14)$$

Aby prądy przewodowe zawierały tylko składową przeciwną, to na podstawie równania (13) prąd składowej zgodnej będzie równy zeru

$$I_{1h} = 0 \quad \bigwedge_{h \in 3n-1},$$

gdzy spełniony będzie warunek

$$\gamma Y_{ABh} + Y_{BCh} + \gamma^2 Y_{CAh} = 0, \quad \bigwedge_{h \in 3n-1} \quad (15)$$

W rozważanych niesymetrycznych odbiornikach trójfazowych warunki (12) i (15) nie są spełnione.

Spełnienie warunków (12) i (15) wymaga włączenia równolegle do zacisków odbiornika układów symetryzujących (kompensatorów) połączonych również w trójkąt, tak jak to przedstawiono na rys.1.

Warunki, jakie stawiamy układom kompensującym, są:

- aby nie pobierały mocy czynnej ze źródła,
- aby kompensowały moc bierną dla poszczególnych harmonicznych.

Układami pasywnymi, które spełniają powyższe założenia, są układy reaktancyjne LC.

Sformułujemy następujące zagadnienie:

Dobrać tak wartości elementów kompensujących symetryzujących, aby dla harmonicznych rzędu  $h=3n+1$ ,  $n \in \{0, 1, \dots, l\}$  w prądzie źródła wystąpiły tylko składowe zgodne prądu, natomiast dla harmonicznych rzędu  $h=3n-1$ ,  $n \in \{1, 2, \dots, l\}$  w prądzie źródła wystąpiły tylko składowe przeciwne prądu.

Ponadto dołączone kompensatory winny dokonać kompensacji mocy biernej dla każdej rozważanej harmonicznej.

Rozważamy zatem obwód przedstawiony na rys.1 z dołączonym kompensatorem. Wyznaczamy wartości elementów kompensacyjnych LC dla harmonicznych rzędu  $h=3n+1$ ,  $n \in \{0, 1, 2, \dots, l\}$ . Aby w prądach źródła  $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$  wystąpiły tylko składowe zgodne, musi być spełniony warunek (12), który obecnie przyjmuje postać

$$\gamma^2 (Y_{ABh} + j B_{abh}) + Y_{BCh} + j B_{bch} + \gamma (Y_{ACh} + j B_{ach}) = 0 \quad (16)$$

Jeżeli założymy, że admitancje  $Y_{ABh}$ ,  $Y_{BCh}$ ,  $Y_{ACh}$  mają postać

$$Y_{ABh} = G_{ABh} + j B_{ABh}, \quad Y_{BCh} = G_{BCh} + j B_{BCh}, \quad Y_{ACh} = G_{ACh} + j B_{ACh},$$

to równanie (16) przyjmuje postać

$$\gamma^2 [G_{ABh} + j(B_{ABh} + B_{abh})] + G_{BCh} + j(B_{BCh} + B_{bch}) + \gamma [G_{ACh} + j(B_{ACh} + B_{ach})] = 0 \quad (17)$$

Narzucamy ponadto warunek, aby całkowita moc bierna pobierana przez odbiornik i kompensator dla każdej harmonicznej była równa zero, zatem

$$Q_h = (B_{ABh} + B_{abh}) |U_{ABh}|^2 + (B_{BCh} + B_{bch}) |U_{BCh}|^2 + (B_{ACh} + B_{ach}) |U_{CAh}|^2 = 0 \quad (18)$$

Ponieważ źródło jest symetryczne  $|U_{ABh}| = |U_{BCh}| = |U_{CAh}|$ , więc równanie (18)

będzie spełnione, gdy

$$B_{ABh} + B_{k_{abh}} + B_{BCh} + B_{k_{bch}} + B_{ACh} + B_{k_{ach}} = 0, \quad \bigwedge_{h \in 3n+1} \quad (19)$$

W równaniu (17) i następnym przyjmujemy, że susceptancje  $B_h > 0$  odpowiadają susceptancjom kondensatora, natomiast  $B_h < 0$  odpowiadają susceptancjom cewki.

Rozwiązanie równań (17) i (19) ze względu na  $B_{k_{abh}}, B_{k_{bch}}, B_{k_{ach}}$  prowadzi do wyznaczenia wartości elementów kompensujących.

$$B_{k_{abh}} = -B_{ABh} + \frac{1}{\sqrt{3}} (G_{ACh} - G_{BCh}), \quad (20)$$

$$B_{k_{bch}} = -B_{BCh} + \frac{1}{\sqrt{3}} (G_{ABh} - G_{ACh}), \quad (21)$$

$$B_{k_{ach}} = -B_{ACh} + \frac{1}{\sqrt{3}} (G_{BCh} - G_{ABh}), \quad \bigwedge_{h \in 3n+1}, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots, l\}. \quad (22)$$

Przeprowadzając podobne rozważania dla harmonicznych rzędu  $h=3n-1$ ,  $n \in \{1, 2, \dots, l\}$ , otrzymujemy wartości elementów kompensujących

$$B_{k_{abh}} = -B_{ABh} + \frac{1}{\sqrt{3}} (G_{BCh} - G_{ACh}), \quad (23)$$

$$B_{k_{bch}} = -B_{BCh} + \frac{1}{\sqrt{3}} (G_{ACh} - G_{ABh}), \quad (24)$$

$$B_{k_{ach}} = -B_{ACh} + \frac{1}{\sqrt{3}} (G_{ABh} - G_{BCh}), \quad \bigwedge_{h \in 3n-1}, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots, l\}. \quad (25)$$

Gdyby źródło było niesymetryczne, a odbiornik z rys.1 opisany macierzą diagonalną postaci (4), wówczas pełna symetryzacja na podstawie wzorów (7), (8) i (9) wymagałaby spełnienia jednocześnie następujących warunków:

$$\gamma^2 (Y_{ABh} + j B_{k_{abh}}) + Y_{BCh} + j B_{k_{bch}} + \gamma (Y_{CAh} + j B_{k_{CAh}}) = 0, \quad (26)$$

$$\gamma (Y_{ABh} + j B_{k_{abh}}) + Y_{BCh} + j B_{k_{bch}} + \gamma^2 (Y_{ACh} + j B_{k_{CAh}}) = 0, \quad (27)$$

$$B_{abh} + B_{k_{bch}} + B_{k_{ach}} = -B_{ABh} + B_{ACh} + B_{BCh}. \quad (28)$$

Spełnienie równoczesne warunków (26), (27), (28) jest możliwe tylko wówczas, gdy

$$G_{ABh} = G_{BCh} = G_{ACh} \quad \bigwedge_{h \in 3n+1 \text{ i } h=3n-1} \quad (29)$$

Zatem całkowita symetryzacja w takim przypadku jest możliwa, gdy asymetria fazowa odbiornika jest spowodowana tylko różnymi wartościami części urojonej admitancji  $Y_{ABh}$ ,  $Y_{BCh}$ ,  $Y_{ACh}$  dla rozpatrywanych harmonicznych.

### 3. SYNTEZA DWÓJNIKÓW SYMETRYZUJĄCYCH

Problem symetryzacji sprowadza się do syntezy trzech niezależnych dwójników LC włączonych na napięcie międzyprzewodowe tak, jak to ilustruje rys.1. Na podstawie prac [8], [9], [10] problem ten można przedstawić następująco:

Wyznaczyć funkcje reaktancyjne  $\alpha\beta B_r(\omega)$ ,  $\alpha, \beta \in \{a, b, c\}$ ,  $\alpha \neq \beta$ , określone wzorem

$$\alpha\beta B_r(\omega) = \frac{A_{\alpha\beta} \prod_{i=1}^n (\omega^2 - \alpha\beta \omega_{21\pm 1}^{*2})}{\omega \prod_{i=1}^n (\omega^2 - \alpha\beta \omega_{21}^{*2})}, \quad A_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}, \quad \alpha, \beta \in \{a, b, c\}, \quad \alpha \neq \beta, \quad (30)$$

które dla zadanych pulsacji  $\omega_h$  przyjmują wartości określone wzorami (20), (21), (22) dla harmonicznych rzędu  $h=3n+1$ , natomiast dla harmonicznych rzędu  $3n-1$  wartości określone wzorami (23), (24), (25).

Ogólnie warunki te można zapisać w postaci

$$\alpha\beta B_r(\omega_h) = k_{\alpha\beta h} B_{\alpha\beta h}, \quad \alpha, \beta \in \{a, b, c\}, \quad \alpha \neq \beta. \quad (31)$$

Rozwiązanie problemu syntezy dla każdego dwójnika LC sprowadza się do rozwiązania pewnego układu równań liniowych, szczegółowo opisanych w pracach [8], [9].

### 4. PRZYKŁAD ILUSTRUJĄCY ZASADĘ SYMETRYZACJI

Przeprowadźmy symetryzację odbiornika przedstawionego na rys.1 dla

następujących danych:

$$Z_{ac} = R = 2\Omega, \quad Z_{ab} = (1 + j\omega L)\Omega, \quad Z_{bc} = (1 + j 0,5\omega L)\Omega,$$

$$\omega L = 1\Omega \text{ dla } \omega = 1 \text{ rad/s},$$

$$u_a(t) = \sqrt{2} 100(\cos\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t).$$

Przed rozwiązaniem przedstawionego problemu przypomnijmy pewne wielkości wprowadzone w pracach [2], [3], [4], [5].

$$\mathbf{i} = \text{col} [i_a, i_b, i_c], \quad \mathbf{u} = \text{col} [u_a, u_b, u_c],$$

przy czym  $\mathbf{i}, \mathbf{u} \in L^2_3(0; T)$ .

Iloczyn skalarny

$$(\mathbf{u} | \mathbf{i}) = \sum_{\alpha=a}^c \frac{1}{T} \int_0^T u_\alpha(t) i_\alpha(t) dt, \quad \alpha \in \{a, b, c\}.$$

Norma prądu

$$\|\mathbf{i}\| = \sqrt{\sum_{\alpha=a}^c \frac{1}{T} \int_0^T i_\alpha^2(t) dt}, \quad \alpha \in \{a, b, c\}.$$

Norma napięcia

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\sum_{\alpha=a}^c \frac{1}{T} \int_0^T u_\alpha^2(t) dt}, \quad \alpha \in \{a, b, c\}.$$

Całkowita moc czynna dostarczona do odbiornika

$$P = (\mathbf{u} | \mathbf{i}) = \text{Re} \sum_{h=0}^{\infty} \mathbf{U}_h^T \mathbf{I}_h^*.$$

gdzie

$\mathbf{U}_h^T = [U_{ah}, U_{bh}, U_{ch}]$  - wierszowa macierz wartości zespolonych skutecznych napięć dla h-tej harmonicznej,

$\mathbf{I}_h^* = \text{col}[I_{ah}^*, I_{bh}^*, I_{ch}^*]$  - kolumnowa macierz wartości skutecznych zespolonych sprzężonych prądów (liniowych) przewodowych dla h-tej harmonicznej.

Moc pozorna źródła trójfazowego jest wielkością umowną i najczęściej

definiowaną jako

$$|S| = \|u\| \|i\| .$$

Admitancje odbiornika dla poszczególnych harmoniczných przyjmują wartości:

$h=1$

$$Y_{AB1} = (0,5 - j0,5)S, \quad Y_{BC1} = (0,8 - j0,4)S, \quad Y_{AC1} = 0,5 S .$$

$h=5$

$$Y_{AB5} = (0,038 - j0,192)S, \quad Y_{BC5} = (0,138 - j0,345)S, \quad Y_{AC5} = 0,5 S .$$

Prądy przewodowe (liniowe) dla poszczególnych harmoniczných:

$h=1$

$$I_{a1} = 207,34e^{j68^{\circ}47'} A, \quad I_{b1} = 217,44e^{j60^{\circ}19'} A, \quad I_{c1} = 183e^{j181^{\circ}} A.$$

$h=5$

$$I_{a5} = 13,15e^{j100^{\circ}} A, \quad I_{b5} = 18,16e^{j127^{\circ}45'} A, \quad I_{c5} = 30,8e^{-j63^{\circ}44'} A.$$

Wartości skuteczne prądów przewodowych:

$$|I_a| = \sqrt{|I_{a1}|^2 + |I_{a5}|^2} = 207,75 A, \quad |I_b| = 218,19 A, \quad |I_c| = 185,62 A.$$

Norma prądu

$$\|i\| = \sqrt{|I_a|^2 + |I_b|^2 + |I_c|^2} = 353,86 A.$$

Norma napięcia

$$\|u\| = \sqrt{3|U_1|^2 + 3|U_5|^2} = 176,63 V.$$

Moc pozorna źródła

$$|S| = \|u\| \|i\| = 62502,3 V \cdot A.$$

Moc czynna wydawana przez źródło

$$P = (u|i) = P_1 + P_5 = 54000 + 811,2 = 54811,2 W.$$

Współczynnik mocy źródła przed symetryzacją

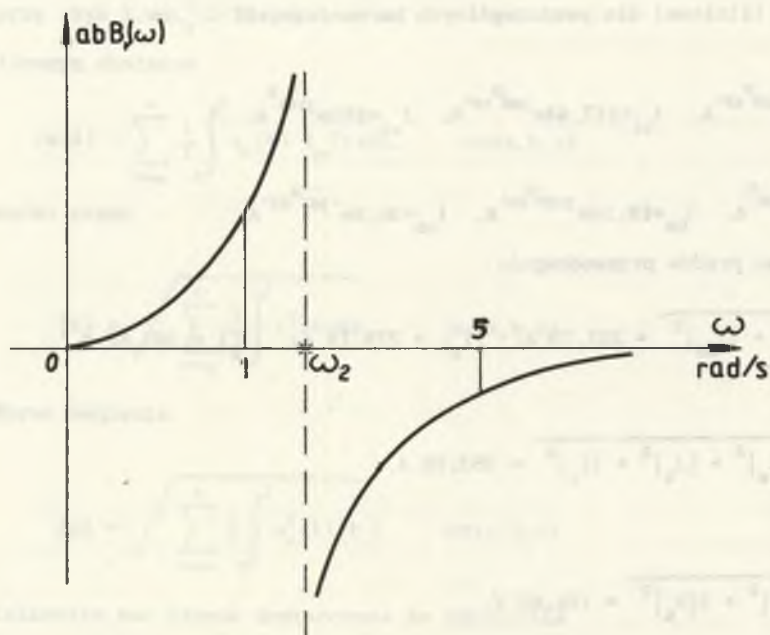
$$\lambda = \frac{P}{|S|} = 0,87.$$

#### 4.1. Dobór dwójników symetryzujących

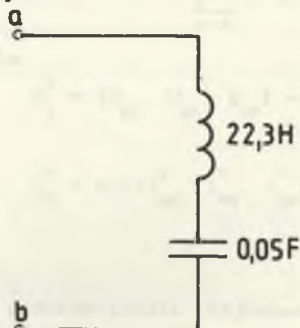
Dwójnik kompensujący włączony pomiędzy fazy a i b powinien posiadać następujące susceptancje określone na podstawie wzorów (20) i (23):

$$B_{k\ ab1} = 0,326\ \text{S}, \quad B_{k\ ab5} = -0,017\ \text{S}.$$

Orientacyjny wykres susceptancji dwójnika reaktancyjnego odpowiadający powyższym warunkom przedstawiono na rys.2,



Rys. 2.



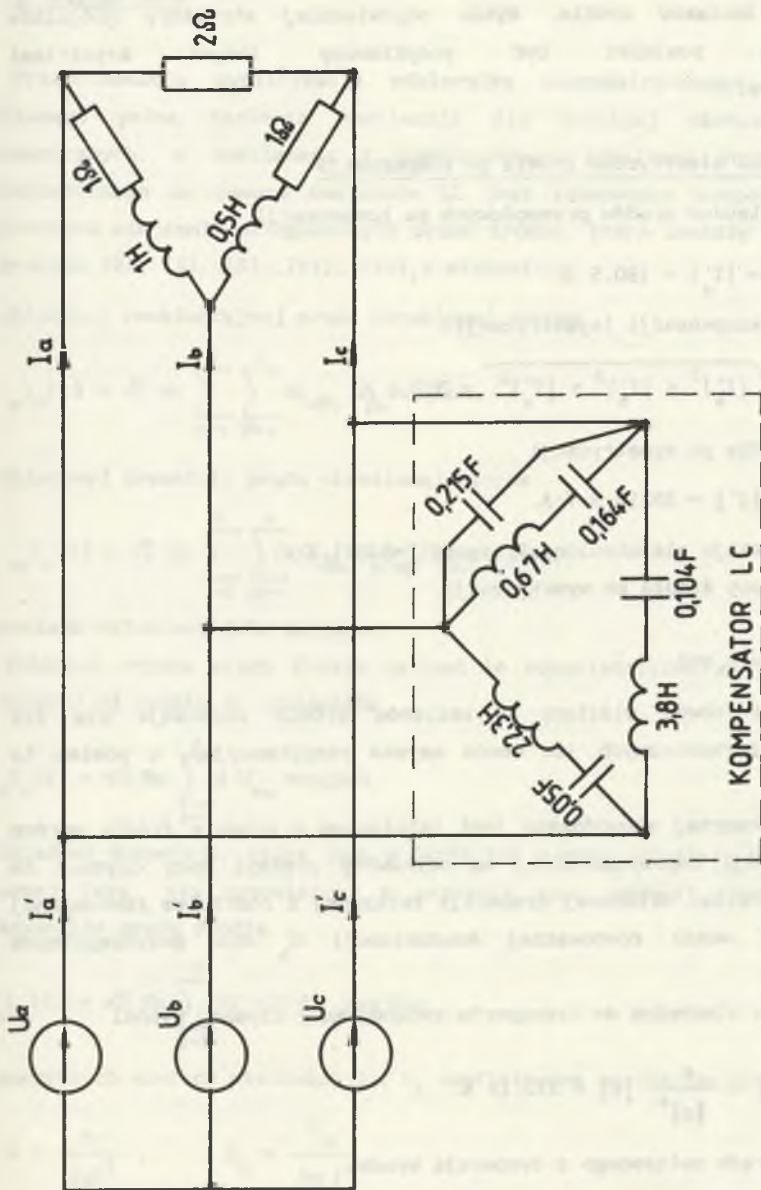
Rys. 3.

a odpowiadający dwójnik reaktancyjny przedstawiono na rys.3.

W analogiczny sposób dobieramy dwójniki

$$B_{bc\ r}(\omega) \text{ oraz } B_{ac\ r}(\omega).$$

Rozpatrywany w przykładzie obwód wraz z dołączonym układem symetryzującym przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4



Doboru dwójników reaktancyjnych spełniających podane warunki można dokonać na wiele sposobów, które prowadzą do pełnej symetryzacji obwodu widzianego z zacisków źródła. Wybór odpowiedniej struktury dwójników symetryzujących powinien być podyktowany innymi kryteriami optymalizacyjnymi.

#### 4.2. Wielkości elektryczne źródła po kompensacji

Wartości skuteczne prądów przewodowych po kompensacji:

$$|I'_a| = |I'_b| = |I'_c| = 180,5 \text{ A.}$$

Norma prądu po kompensacji (symetryzacji)

$$\|I'\| = \sqrt{|I'_a|^2 + |I'_b|^2 + |I'_c|^2} = 312,6 \text{ A.}$$

Moc pozorna źródła po symetryzacji

$$|S'| = \|u\| \|I'\| = 55214,5 \text{ V}\cdot\text{A.}$$

Moc czynna pozostaje niezmienną i wynosi  $P=54811,2 \text{ W}$ .

Współczynniki mocy źródła po symetryzacji

$$\lambda' = \frac{P}{|S'|} = 0,992.$$

Po symetryzacji obwód widziany z zacisków źródła zachowuje się dla poszczególnych harmonicznych jak obwód czysto rezystancyjny, a pomimo to  $|S'| > P$ .

Nadatek mocy pozornej spowodowany jest istnieniem w prądzie źródła oprócz składowej czynnej, odpowiedzialnej za całkowity przesył mocy czynnej ze źródła do odbiornika, składowej dyspersji związanej z rozrzutem równoważnej konduktancji  $G$  wokół równoważnej konduktancji  $G_h$  dla poszczególnych harmonicznych.

Wartość prądu niezbędna do transportu zadanej mocy czynnej wynosi

$$\|I_a\| = G \|u\| = \frac{P}{\|u\|^2} \|u\| = 310,16 \text{ A.}$$

Zatem wartość prądu związanego z dyspersją wynosi

$$\|I_d\| = \sqrt{\|I'\|^2 - \|I\|^2} = 38,98 \text{ A.}$$

## 5. ZAKOŃCZENIE

Przeprowadzona symetryzacja odbiornika niesymetrycznego trójfazowego opisanego pełną macierzą immitancji dla dowolnej skończonej liczby harmonicznych, a zasilanego z symetrycznego idealnego źródła napięcia okształconego za pomocą dwójników LC jest równoważna kompensacji dwóch składowych wzajemnie ortogonalnych prądu źródła, które zostały wprowadzone w pracach [2], [4], [5], [11], [12], a mianowicie

- składowej reaktancyjnej prądu określonej wzorem

$$i_{\alpha}^r(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^n \sum_{\beta=a}^c \mathbf{J}_{\alpha\beta h} U_{\beta h} \exp jh\omega t,$$

- składowej asymetrii prądu określonej wzorem

$$i_{\alpha}^{as}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^n \sum_{\beta=a}^c (G_{\alpha\beta h} - G_h \delta_{\alpha\beta}) U_{\beta h} \exp jh\omega t.$$

Pozostają natomiast dwie składowe

- składowa czynna prądu źródła całkowicie odpowiedzialna za przesył mocy czynnej od źródła do odbiornika

$$i_{\alpha}^a(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^n G U_{\alpha h} \exp jh\omega t,$$

- składowa dyspersji, która jest w fazie lub w przeciwfazie z napięciem tej samej fazy, nie uczestniczy w przesyłce mocy czynnej, nie wpływa na asymetrię prądu źródła

$$i_{\alpha}^d(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^n (G_h - G) U_{\alpha h} \exp jh\omega t.$$

W powyższych wzorach wielkości  $G$  i  $G_h$  zdefiniowane są następująco ;

$$G = \frac{P}{\|u\|^2}, \quad G_h = \frac{P_h}{\|u_h\|^2},$$

natomiast

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{dla } \alpha=\beta \\ 0 & \text{dla } \alpha\neq\beta \end{cases}$$

Należy podkreślić, że dotychczasowe rozważania dotyczące kompensacji, symetryzacji jak i definicje poszczególnych składowych prądu źródła dotyczyły modelu źródła idealnego.

Jest to niewątpliwie uproszczeniem i znacznym ułatwieniem w rozwiązaniu postawionego problemu i interpretacji otrzymanych wyników.

Zagadnienia dotyczące zdefiniowania poszczególnych składowych prądu, a następnie kompensacji niepożądanych składowych, czy też symetryzacji obwodów trójfazowych przy uwzględnieniu rzeczywistego źródła są zagadnieniem o wiele bardziej złożonym.

Rozwiązanie tych zagadnień wymaga dalszych gruntownych badań, a w niniejszym artykule nie są one nawet sygnalizowane.

#### LITERATURA

- [1] Akagi H., Kazanowa Y.: Instantaneous Reactive Power Compensators Comprising Switching Devices without Energy Storage Components. IEEE Trans. on Industry Appl. Vol. IA-20, No3, May/June 1984.
- [2] Brodzki M., Pasko M.: Definicje pewnych mocy dla układów wielofazowych o przebiegach odkształconych. Rozprawy Elektrotechniczne Z.1, 1989.
- [3] Brodzki M., Pasko M., Umińska-Bortliczek M.: Jednolita teoria mocy dla obwodów trójfazowych w przebiegach odkształconych w oparciu o ortogonalny rozkład prądu w przestrzeni  $L_3^2(0;T)$ . Materiały X SPETO Gliwice-Wisła 1987.
- [4] Czarnecki L.S.: Orthogonal decomposition of the currents in a 3-phase non-linear asymmetrical circuit with a nonsinusoidal voltage source. IEEE Trans. on Instr. and Meas. Vol 37. No 1 pp.30-34, March 1988.
- [5] Czarnecki L.S.: Kompensacja prądu biernego i prądu asymetrii układu 3-fazowego z przebiegami niesinusoidalnymi. Wiosenne seminarium elektrotechniki prądów niesinusoidalnych. Zielona Góra, Maj 1989.
- [6] Hanzelka Z.: Zastosowanie kompensatorów statycznych dla symetryzacji i kompensacji asymetrycznych odbiorników energii elektrycznej. Materiały

konferencji - "Jakość energii elektrycznej w warunkach krajowego systemu elektroenergetycznego." Łódź 1987.

- [7] Minc M. J., Czinkov B., Grib O.: Simetrirovanje sistemy tokov triehfaznoj sieti IZV. Wysszych Uczebnych Zavedenii, Energetika 1984.
- [8] Pasko M., Walczak J.: Metoda syntezy układów kompensacji składowej reaktancyjnej odbiornika dwuzaciskowego zasilanego napięciem odkształconym. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka, Z. 113 1991.
- [9] Pasko M., Walczak J.: A synthesis of compensation system of a current reactance component of two-terminal receiver with deformed voltage supply. Mathematical Optimization Theory and Applications. Eisenach. December 1989.
- [10] Pasko M.: Dobór dwójników kompensujących składową reaktancyjną prądu odbiornika liniowego zasilanego napięciem odkształconym. Materiały XII SPETO, Gliwice-Wisła 1989.
- [11] Pasko M.: Kompensacja składowych prądu układu trójfazowego zasilanego przez symetryczne źródło napięcia odkształconego. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka, Z. 115 (w druku).
- [12] Pasko M.: Ocena możliwości kompensacji niepożądanych składowych prądu symetrycznego źródła napięcia trójfazowego odkształconego zasilającego odbiornik liniowy. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka, Z. 117, (w druku).
- [13] Pasko M.: Symetryzacja odkształconych prądów źródła trójfazowego zasilającego niesymetryczny odbiornik. Materiały XIII SPETO Gliwice-Wisła 1990.
- [14] Piróg St.: Symetryzacja trójfazowych odbiorników energii elektrycznej. Skrypt Nr 1122. AGH, Kraków 1988.

Recenzent: doc dr hab. inż. Maciej Siwczyński

Wpłynęło do Redakcji dnia 15 kwietnia 1990 r.

SYMMETRIZATION OF ASYMMETRICAL THREE-PHASE RECEIVER SUPPLIED BY  
SYMMETRICAL NONSINUSOIDAL VOLTAGE SOURCE USING TWO-TERMINAL NETWORK LC

S u m m a r y

The aim of the paper is to present the rules for symmetrization of asymmetrical three-phase three-wire system supplied from symmetrical nonsinusoidal voltage source. The paper assumes that the nonsinusoidal voltage source is perfect while the receiver has a full admittance matrix for harmonics being considered. Symmetrization for any finite number of harmonics is carried out by means of reactance two-terminal networks LC. Symmetrization carried out for particular order of harmonics  $h=3n+1$ ,  $n \in \{0,1,2,\dots,l\}$  and for order of harmonics  $h=3n-1$ ,  $n \in \{1,2,\dots,l\}$  causes a symmetrical propagation of conduction currents of the source and a considerable decrease of rms currents. The presented considerations and the synthesis of two-terminal networks LC for symmetrization (compensation of some current components of the source) are illustrated by an example.

СИММЕТРИРОВАНИЕ НЕСИММЕТРИЧНОГО ТРЁХФАЗНОГО ПРИЁМНИКА,  
ПИТАЮЩЕГОСЯ ОТ СИМЕТРИЧНОГО ИСТОЧНИКА ДЕФОРМИРОВАННОГО  
НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

Р е з ю м е

Целью статьи является представление принципов симметрирования несимметричного трехфазного трехпроводного приемника, питающегося от симметричного источника деформированного периодического напряжения.

В статье принимается, что источник деформированного напряжения является идеальным, а приемник имеет полную имитационную матрицу для рассматриваемых гармоник. Симметрирование для произвольного выбранного конечного числа гармоник производится с помощью реактанционных двухполюсников LC. Симметрирование, проведенное для отдельных гармоник порядка  $h=3n+1$ ,  $n \in \{0,1,2,\dots,l\}$  и для гармоник порядка  $h=3n-1$ ,  $n \in \{1,2,\dots,l\}$  приводит к симметрированию линейных токов источника и значительному уменьшению их действующих значений.

Представленные рассуждения и синтез двухполюсников LC, служащих для симметрирования (компенсация некоторых составляющих тока источника) проиллюстрированы примерами.

Marian PASKO

## DOBÓR DWÓJNIKÓW MINIMALIZUJĄCYCH WSKAŹNIKI JAKOŚCI ENERGII ELEKTRYCZNEJ DLA UKŁADÓW TRÓJFAZOWYCH ZASILANYCH NAPIĘCIEM ODKSZTAŁCONYM

Streszczenie. Artykuł stanowi rozwinięcie prac autora dotyczących doboru dwójników minimalizujących przyjęte wskaźniki jakości energii elektrycznej. Przyjęcie odpowiedniego wskaźnika jakości energii elektrycznej prowadzi do wyróżnienia w prądzie źródła składowej ortogonalnej odpowiedzialnej za minimalizację tego wskaźnika. Pozostałe wyróżnione składowe wzajemnie ortogonalne są niepożądane i należy je skompensować. Niniejsza praca jest przede wszystkim kontynuacją pracy [8] i ma na celu przedstawienie możliwości kompensacji wszystkich niepożądanych składowych prądu źródła dla układów trójfazowych zasilanych napięciem odkształconym. Przedstawione rozważania teoretyczne zilustrowano przykładami.

## 1. WSTĘP

W pracy [1] wprowadzono nowy wskaźnik jakości energii elektrycznej dla układów dwuzaciskowych zasilanych z idealnego źródła napięcia odkształconego okresowego. Wprowadzony nowy wskaźnik energii elektrycznej jest wyrazem kompromisu pomiędzy stratami energetycznymi i odkształceniami prądu źródła. Wprowadzenie nowego wskaźnika energii elektrycznej doprowadziło do ujawnienia nowego rozkładu ortogonalnego prądu źródła w stosunku do znanych rozkładów zamieszczonych w pracy [3].

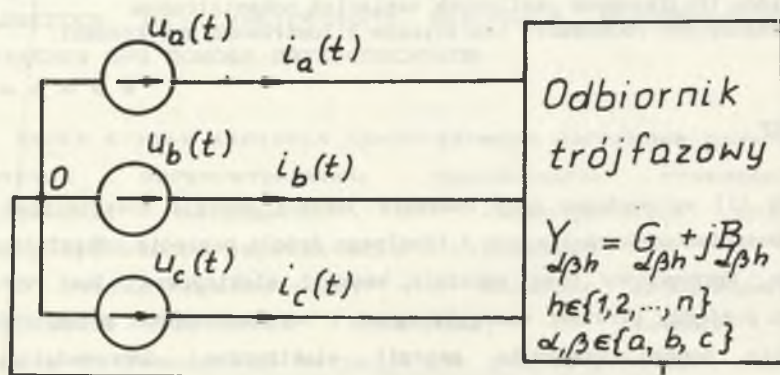
Analizę porównawczą wybranych rozkładów ortogonalnych prądu odbiornika 3-fazowego przeprowadzono w pracy [5]. W artykule [8] podano możliwości kompensacji pewnych składowych ortogonalnych prądu źródła za pomocą układów LC w zależności od przyjętego kryterium optymalizującego (wskaźnika jakości energii elektrycznej). Kompensacja prowadzi do symetryzacji obwodu widzianego z zacisków źródła i znacznego zmniejszenia wartości skutecznej prądu źródła. Nie uzyskano minimalizacji wartości skutecznej prądu źródła,

gdź za pomocą układów pasywnych nie można skompensować występujących w zaproponowanych rozkładach składowych dyspersji prądu źródła. W pracy [9] rozważono i przedstawiono pewną możliwość kompensacji prądu rozproszenia dla obwodów jednofazowych za pomocą klasy  $(RLC-R^1)$ . Niniejsza praca jest kontynuacją pracy [8] i ma na celu przedstawienie możliwości kompensacji dodatkowo składowej dyspersji prądu źródła. Całkowita kompensacja niepożądanych składowych prądu źródła prowadzi w zależności od przyjętego kryterium optymalizacyjnego do:

- minimalizacji wartości skutecznej prądu źródła (wskaźnik energetyczny),
- ustalenia kompromisu pomiędzy minimum wartości skutecznej prądu źródła a zniekształceniami prądów źródła.

## 2. MINIMALIZACJA WARTOŚCI SKUTECZNEJ PRĄDU ŹRÓDŁA

Załóżmy, że odbiornik trójfazowy przedstawiony na rys.1 posiada dla



każdej rozpatrywanej harmonicznej  $h \in \{1, 2, \dots, n\}$  macierz admitancyjną

$$Y_h = G_h + jB_h = \begin{bmatrix} G_{aa} & G_{ab} & G_{ac} \\ G_{ba} & G_{bb} & G_{bc} \\ G_{ca} & G_{cb} & G_{cc} \end{bmatrix}_h + j \begin{bmatrix} B_{aa} & B_{ab} & B_{ac} \\ B_{ba} & B_{bb} & B_{bc} \\ B_{ca} & B_{cb} & B_{cc} \end{bmatrix}_h \quad (1)$$

przy czym zakłada się, że  $G_{\alpha\beta h} = G_{\beta\alpha h}$ ,  $B_{\alpha\beta h} = B_{\beta\alpha h}$ ,  $\alpha, \beta \in \{a, b, c\}$ .

Zakłada się, że odbiornik zasilany jest z idealnego symetrycznego źródła trójfazowego odkształconego

$$u_b(t) = u_a(t - \frac{T}{3}), \quad u_c(t) = u_a(t + \frac{T}{3}), \quad (2)$$

gdzie

$$u_a(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} U_{ah} \exp jh\omega t, \quad U_{a0} = 0, \quad (3)$$

$U_{ah}$  - wartość skuteczna zespolona napięcia źródła h-tej harmonicznej.

Prąd odbiornika danej fazy opisany jest zależnością

$$i_{\alpha}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} (G_{\alpha\beta h} - jB_{\alpha\beta h}) U_{\beta h} \exp jh\omega t, \quad \alpha, \beta \in \{a, b, c\}, \quad (4)$$

$h \in \{1, 2, \dots, n\}$

Minimalizacja funkcjonału [5]

$$\psi(i, \gamma) = \|i\|_{L_3^2(0, T)}^2 + \gamma \left( P - (u|i)_{L_3^2(0, T)} \right) \quad (5)$$

przy ograniczeniu równościowym na moc czynną dostarczoną do odbiornika

$$P - (u|i)_{L_3^2(0, T)} = 0 \quad (6)$$

prowadzi do wyróżnienia składowej czynnej prądu źródła

$$i_{\alpha}(t) = G_{\alpha} u_{\alpha}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} G_{\alpha} U_{\alpha h} \exp jh\omega t, \quad \alpha \in \{a, b, c\}, \quad (7)$$

gdzie

$$\|i\|_{L_3^2(0, T)}^2 = \sum_{\alpha=abc} \frac{1}{T} \int_0^T i_{\alpha}^2(t) dt, \quad \alpha \in \{a, b, c\}, \quad (8)$$

$$P = (u|i)_{L_3^2(0, T)} = \sum_{\alpha=abc} \frac{1}{T} \int_0^T u_{\alpha}(t) i_{\alpha}(t) dt, \quad \alpha \in \{a, b, c\}, \quad (9)$$

$$P = \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} U_h^T I_h^{\circ} - \text{całkowita moc czynna pobierana przez odbiornik}, \quad (10)$$

$U_h^T = [U_a, U_b, U_c]_h$  - macierz wierszowa wartości skutecznych zespolonych napięć źródła dla h-tej harmonicznej,



$$I_h^* = \begin{bmatrix} I_a^* \\ I_b^* \\ I_c^* \end{bmatrix}_h - \text{macierz kolumnowa wartości skutecznych zespolonych sprzężonych prądów źródła dla h-tej harmonicznej.}$$

$$G_e = \frac{P}{\|u\|_{L_3(0,T)}^2} - \text{równoważna konduktancja odbiornika wprowadzona po raz pierwszy przez S. Fryzego w 1930 roku.}$$

Składowa czynna prądu źródła  $i_\alpha(t)$ ,  $\alpha \in \{a, b, c\}$  gwarantuje moc czynną odbiornika i jednocześnie minimalizuje wartość skuteczną prądu źródła. Pozostałe składowe wzajemnie ortogonalne prądu źródła opisane są zależnościami:

- składowa reaktancyjna prądu źródła

$$i_{r\alpha}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\beta=abc} jB_{\alpha\beta h} U_{\beta h} \exp jh\omega t, \quad \alpha, \beta \in \{a, b, c\}, \quad (11)$$

- składowa asymetrii prądu źródła

$$i_{as\alpha}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\beta=abc} (G_{\alpha\beta h} - G_h \sigma_{\alpha\beta}) U_{\beta h} \exp jh\omega t, \quad (12)$$

- składowa dyspersji prądu źródła

$$i_{ds\alpha}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} (G_h - G_e) U_{\alpha h} \exp jh\omega t, \quad (13)$$

gdzie

$$\sigma_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{dla } \alpha=\beta, \quad \alpha, \beta \in \{a, b, c\} \\ 0 & \text{dla } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

$$G_h = \frac{P_h}{|U_h|^2} = \frac{\operatorname{Re} \sum_{\alpha=abc} U_{\alpha h} I_{\alpha h}^*}{\sum_{\alpha=abc} U_{\alpha h} U_{\alpha h}^*}, \quad \alpha \in \{a, b, c\} \quad (14)$$

Składowe prądu źródła opisane zależnościami (11 + 13) należy wyeliminować (przez kompensację).

### 3. USTALONY KOMPROMIS POMIĘDZY MINIMUM WARTOŚCI SKUTECZNEJ PRĄDU A JEGO ZNIEKSZTAŁCENIAMI

Analizę przeprowadza się w przestrzeniach Hilberta  $W_{2,\lambda,3}^1(0,T)$  nazywanych w literaturze przestrzmiami Sobolewa, które skonstruowano w pracy [2].

Minimalizacja funkcjonału [2], [5]

$$\Phi(i, \gamma) = \|i\|_{W_{2,\lambda,3}^1(0,T)}^2 + \gamma \left( P - (u|i)_{L_3(0,T)} \right) \quad (15)$$

przy ograniczeniu równościowym (6) prowadzi do wyróżnienia składowej aktywnej prądu źródła określonej wzorem

$$i_{(S)}^\alpha(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} G_h U_{\alpha h} \exp jh\omega t, \quad \alpha \in \{a, b, c\} \quad (16)$$

gdzie

$$\|i\|_{W_{2,\lambda,3}^1(0,T)}^2 = \sum_{r=0}^1 \lambda_r \sum_{\alpha=abc} \frac{1}{T} \int_0^T \left( i_{\alpha}^{(r)}(t) \right)^2 dt, \quad (17)$$

$r$  - rząd pochodnej funkcji  $i_{\alpha}(t)$ ,  $r=\{0,1,2,\dots,1\}$ ,  $i_{\alpha}^{(0)}(t)=i_{\alpha}(t)$

$\lambda_r$  - waga pochodnej  $\lambda_r > 0$ ,  $\lambda_0 > 0$ .

$$G_e^h = \frac{P}{\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\alpha=abc} \frac{|U_{\alpha k}|^2}{\nabla_k^2}}, \quad (18)$$

$$\nabla_k^2 = \lambda_0 + \lambda_1(k\omega)^2 + \lambda_2(k\omega)^4 + \dots + \lambda_l(k\omega)^{2l}. \quad (19)$$

Zadany kompromis pomiędzy odkształceniami (uwzględnienie pochodnych, a minimum wartości skutecznej prądu źródła ustala się poprzez współczynniki wagi  $\lambda_r$ ).

Należy podkreślić, że składowa aktywna prądu źródła  $i_{(S)}^\alpha(t)$  oprócz ustalonego kompromisu warunkuje moc czynną  $P$  odbiornika.

Pozostałe składowe prądu źródła wzajemnie ortogonalne w sensie przyjętego iloczynu skalarnego

$$(f|g)_{w_{2,\lambda,3}^i(0,T)} = \sum_{r=0}^I \lambda_r \sum_{\alpha=abc} \frac{1}{T} \int_0^T f_{\alpha}^{(r)}(t) g_{\alpha}^{(r)}(t) dt, \quad (20)$$

$$\alpha \in \{a, b, c\},$$

przyjmują postać:

- składowa reaktancyjna prądu źródła

$$r_{(S)}^i{}_{\alpha}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\beta=abc} jB_{\alpha\beta h} U_{\beta h} \exp jh\omega t, \quad \alpha, \beta \in \{a, b, c\}, \quad (21)$$

- składowa asymetrii prądu źródła

$$as_{(S)}^i{}_{\alpha}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\beta=abc} (G_{\alpha\beta h} - G_h \sigma_{\alpha\beta}) U_{\beta h} \exp jh\omega t, \quad (22)$$

- składowa dyspersji prądu źródła

$$ds_{(S)}^i{}_{\alpha}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} (G_h - G_e) U_{\alpha h} \exp jh\omega t. \quad (23)$$

W obydwu przedstawionych rozkładach ortogonalnych tylko składowe czynna  $a_{(S)}^i{}_{\alpha}(t)$  i aktywna  $a_{(S)}^i{}_{\alpha}(t)$  prądu źródła warunkują moc czynną odbiornika, pozostałe składowe z tego punktu widzenia są bezużyteczne, niepotrzebnie zwiększają wartość skuteczną prądu źródła ponad wartość niezbędną do transportu mocy czynnej do odbiornika, należy je zatem kompensować.

Ze wzorów (11), (12), (21), (22) wynika, że składowe prądów źródła reaktancyjna i asymetrii są dla dwóch różnych kryteriów optymalizacyjnych takie same. Problemowi ich kompensacji za pomocą układów LC poświęcona była praca [8].

Dlatego w niniejszej pracy będą przytoczone tylko niektóre główne wątki. Natomiast głównym celem jest, jak już wskazano we wstępie, kompensacja składowych dyspersji prądu źródła.

Składowe dyspersji prądu źródła mają składniki  $G_h - G_e$ , lub  $G_h - G_{e_h}$ , które mogą przyjmować wartości zarówno dodatnie, jak i ujemne.

Nie istnieje dwójnik pasywny, którego konduktancja w funkcji częstotliwości zmieniałaby się w taki sposób.

W pracy rozpatrzono możliwości kompensacji powyższych składowych za pomocą klasy układów zawierających jedną rezystancję ujemną  $\Re\{RLC, -R^1\}$  [4].

#### 4. KOMPENSACJA SKŁADOWEJ REAKTANCYJNEJ I ASYMETRII PRĄDU ŹRÓDŁA DLA ODBIORNIKA OPISANEGO PEŁNĄ MACIERZĄ ADMITANCYJNĄ

Wykorzystując założenie, że źródło jest symetryczne (kolejności zgodnej) dla podstawowej harmonicznej  $h=1$ , to dla harmonicznych rzędu  $h=3n+1$ ,  $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  (układ kolejności zgodnej) spełniony jest warunek

$$\sum_{\alpha=abc} U_{\alpha h} = 0. \quad (24)$$

Podobnie dla harmonicznych  $h=3n-1$ ,  $n \in \{1, 2, \dots\}$  (układ kolejności przeciwnej) spełniony jest również warunek (24).

Dla harmonicznych rzędu  $3n+1$  i  $3n-1$  prąd opisany zależnością (4) można wyrazić tylko poprzez napięcia tej samej fazy dla rozpatrywanego obwodu (rys. 1)

Składowe prądu opisane zależnościami (7, 11, 12, 13, 16, 21, 22, 23) przyjmują postać:

$$i_{\alpha}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} G_{\alpha} U_{\alpha h} \exp jh\omega t, \quad \alpha \in \{a, b, c\}, \quad (25)$$

$$i_{r(S)}(t) = i_{r(S)}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} jB'_{\alpha h} U_{\alpha h} \exp jh\omega t, \quad (26)$$

$$i_{as(S)}(t) = i_{as(S)}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} (G'_{\alpha h} - G_h) U_{\alpha h} \exp jh\omega t, \quad (27)$$

$$i_{ds}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} (G_h - G_{\alpha h}) U_{\alpha h} \exp jh\omega t, \quad (28)$$

$$i_{a(S)}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} G_h U_{\alpha h} \exp jh\omega t, \quad (29)$$

$$i_{ds(S)}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} (G_h - G_{\alpha h}) U_{\alpha h} \exp jh\omega t, \quad \alpha \in \{a, b, c\}. \quad (30)$$

Na podstawie wzoru (26) można stwierdzić, że problem kompensacji prądu

reaktancyjnego źródła sprowadza się do syntezy trzech niezależnych dwójników kompensujących LC włączonych pomiędzy daną fazę a przewód zerowy.

Metodę syntezy dwójników LC do tego celu podano w pracach [6], [7].

## 5. KOMPENSACJA SKŁADOWEJ ASYMETRII PRĄDU ŹRÓDŁA

Idea kompensacji tej składowej określonej obecnie wzorem (27) polega na symetryzacji obwodów trójfazowych zasilanych z symetrycznego źródła prądu napięcia sinusoidalnego [10].

Jak wykazano w pracy [8], do całkowitej kompensacji tej składowej należy użyć trzech dwójników reaktancyjnych włączonych pomiędzy daną fazę a przewód zerowy, których susceptancje spełniają dla każdej rozpatrywanej harmonicznej zależności:

$$B_{k\ ah} = \frac{1}{\sqrt{3}} (G'_{bh} - G'_{ch}), \quad (31)$$

$$B_{k\ bh} = \frac{1}{\sqrt{3}} (G'_{ch} - G'_{ah}), \quad (32)$$

$$B_{k\ ch} = \frac{1}{\sqrt{3}} (G'_{ah} - G'_{bh}), \quad (33)$$

- trzech dwójników reaktancyjnych włączonych na napięcia międzyprzewodowe, których susceptancje dla rozpatrywanych harmonicznych spełniają zależności:

$$B_{k\ abh} = \frac{2}{3\sqrt{3}} (G'_{ah} - G'_{bh}), \quad (34)$$

$$B_{k\ bch} = \frac{2}{3\sqrt{3}} (G'_{bh} - G'_{ch}), \quad (35)$$

$$B_{k\ ach} = \frac{2}{3\sqrt{3}} (G'_{ch} - G'_{ah}), \quad (36)$$

## 6. KOMPENSACJA SKŁADOWEJ DYSPERSJI PRĄDU ŹRÓDŁA

Składowe dyspersji prądu źródła w zależności od kryterium optymalizacyjnego określone są zależnościami:

$$i_{\alpha}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} (G_h - G_e) U_{\alpha h} \exp j\omega_h t, \quad (37)$$

$$i_{\alpha(S)}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} (G_h - G_e) U_{\alpha h} \exp j\omega_h t, \quad \alpha \in \{a, b, c\}. \quad (38)$$

Z analizy wzorów (37) i (38) wynika, że eliminacja skończonej liczby harmonicznych składowych dyspersji prądu źródła jest możliwa za pomocą trzech identycznych dwójników włączonych pomiędzy daną fazą a przewód zerowy, takich że

$$\bigwedge_{h \in \{1, 2, 3, \dots, n\}} \operatorname{Re} \left\{ Y(j\omega_h) \right\} \Big|_{\omega_h = \omega_h} = - (G_h - G_e), \quad (39)$$

gdy minimalizujemy funkcjonal (5) lub

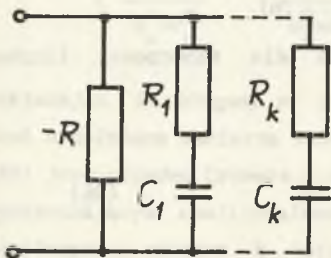
$$\bigwedge_{h \in \{1, 2, 3, \dots, n\}} \operatorname{Re} \left\{ Y(j\omega_h) \right\} \Big|_{\omega_h = \omega_h} = - (G_h - G_e), \quad (40)$$

gdy minimalizujemy funkcjonal (15),

gdzie

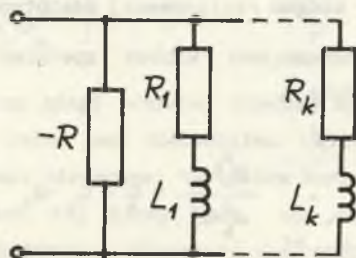
$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad G_e \in R^+, \quad G_h \in R^+, \quad G_k \in R^+.$$

W niniejszym artykule problem doboru dwójników kompensujących rozpatrzono w podziorach  $\mathcal{R}_1 \subset (RC, -R^1)$  i  $\mathcal{R}_2 \subset (RL, -R^1)$  dwójników o strukturach kanonicznych Fostera przedstawionych na rys. 2.



a) klasa  $\mathcal{R}_1, k \in \{1, 2, \dots, n\}$

Rys 2



b) klasa  $\mathcal{R}_2, k \in \{1, 2, \dots, n\}$

Rozpatrywany problem syntezy formułuje się następująco:

Wyznaczyć admitancję  $Y(s)$  dwójnika klasy  $\mathcal{R}_1$ ,  $i \in \{1, 2\}$  spełniającego warunki określone wzorem (39) lub (40), gdy zadane są:

- konduktancje odbiornika  $G_h$ , konduktancje  $G_o$ ,  $G_h$ ,
- zbiór  $n$  biegunów  $\sigma_n$  dwójnika w przyjętej klasie  $\mathcal{R}_1$ .

### 6.1. Synteza dwójników w klasie $(RC, -R^1)$

Rozpatrzmy dwójnik przedstawiony na rys.2a, którego admitancja wejściowa

$$Y_{we}(s) = k_0 + \sum_{i=1}^n \frac{k_i s}{s + \sigma_i} \quad (41)$$

dla  $s = j\omega$  przyjmuje postać

$$Y_{we}(j\omega) = k_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\omega^2 k_i}{\omega^2 + \sigma_i^2} + j \sum_{i=1}^n \frac{k_i \sigma_i \omega}{\omega^2 + \sigma_i^2}, \quad (42)$$

$$\operatorname{Re}\{Y_{we}(j\omega)\} = k_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\omega^2 k_i}{\omega^2 + \sigma_i^2}, \quad (43)$$

$$\operatorname{Im}\{Y_{we}(j\omega)\} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i \sigma_i \omega}{\omega^2 + \sigma_i^2}, \quad (44)$$

gdzie

$$k_0 = -\frac{1}{R_1} < 0, \quad k_i = \frac{1}{R_1}, \quad C_i = \frac{k_i}{\sigma_i}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (45)$$

$\sigma_i$  - biegun realizowanej admitancji  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Układ kompensujący winien spełniać zależności dla skończonej liczby harmonicznych  $h$

$$\frac{\omega_h^2 k_{h1}}{\omega_h^2 + \sigma_1^2} = G_o - G_h - k_0 \quad (46)$$

dla minimalizacji funkcjonału (5).

Natomiast dla minimalizacji funkcjonału (15) układ kompensujący winien

spełniać zależności

$$\bigwedge_{h \in \{1, 2, \dots, n\}} \frac{\omega_h^2 k_1}{\omega_h^2 + \sigma_1^2} = G_e^h - G_h - k_0 \quad (47)$$

W obydwu przypadkach należy wyznaczyć współczynniki  $k_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Rozwiązanie problemu sprowadza się do rozwiązania pewnego układu równań liniowych względem wektora  $\mathbf{k}$  postaci

$$\mathbf{V}\mathbf{k} = \mathbf{g}_w, \quad (48)$$

gdzie

$$\mathbf{k} = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T,$$

$$\mathbf{g}_w = [g_1, g_2, \dots, g_n]^T,$$

$$g_i = G_e^i - G_n - k_0, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ lub} \quad (49)$$

$$g_i = G_n - G_h - k_0, \quad i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}. \quad (50)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \sigma_1^2} & \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \sigma_2^2} & \dots & \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \sigma_n^2} \\ \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 + \sigma_1^2} & \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 + \sigma_2^2} & \dots & \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 + \sigma_n^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + \sigma_1^2} & \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + \sigma_2^2} & \dots & \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + \sigma_n^2} \end{bmatrix} \quad (51)$$

Zakładając, że bieguny  $\sigma_i$  oraz  $\omega_i$  tworzą ciągi rosnące, wówczas macierz  $\mathbf{V}$  jest uogólnioną macierzą Vandermonde'a, zatem jest nieosobliwa. Układ równań (48) jest układem Cramera i ma rozwiązania niezerowe. Warunkiem koniecznym i wystarczającym realizowalności dwójników tej klasy jest, aby wszystkie współrzędne wektora  $\mathbf{k}$  były ściśle dodatnie. Niestety dla arbitralnie dobranych wektorów  $\mathbf{g}_w$  (wzory (49), (50) i zbioru  $\{\sigma_i\}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  nie



zawsze istnieje ściśle dodatnie rozwiązanie układu równań (48). Jeżeli istnieje możliwość modyfikacji wektora  $g_w$  poprzez dobór współczynników  $k_0$ , tak aby

$$g_w \in VK^{+n}, \quad (52)$$

gdzie

$$V: K^{+n} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V K^{+n} \subset \mathbb{R}^n, \quad (53)$$

$$K^{+n} = \{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n : \bigwedge_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} k_i > 0\}, \quad (54)$$

to wektor  $k$  stanowiący rozwiązanie układu równań (48) posiada zawsze wszystkie składowe ściśle dodatnie. We wzorze (53) symbolem  $V$  oznaczono skończenie wymiarową operację na przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  opisaną macierzą  $V$  (wzór 51).

Niestety rozpatrywanego problemu nie można przedstawić w sposób jawny i do jego rozwiązania należy posłużyć się algorytmem numerycznym, którego ogólna postać przedstawiono w pracy [9].

Celem zilustrowania zagadnienia posłużymy się prostym przykładem.

Niech źródło zawiera tylko dwie harmoniczne: podstawową (pierwszą) i  $n$ -tą, znane są ponadto wartości  $G_h$  i  $G_e$ .

Należy znaleźć maksymalny klin  $VK^{+2}$ , do którego należy wektor  $g_w$ , aby równanie (48) miało rozwiązanie ściśle dodatnie przy założonych wartościach biegunów  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ .

Równanie (48) ma postać

$$\begin{bmatrix} \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \sigma_1^2} & \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + \sigma_2^2} \\ \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + \sigma_1^2} & \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + \sigma_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$\text{gdzie } g_1 = G_e - G_1 - k_0, \quad g_2 = G_h - G_1 - k_0.$$

Niech  $k_1 = 0$ , wówczas

$$g_2 = \frac{(1 + \sigma_2^2)n^2}{n^2 + \sigma_2^2} g_1. \quad (56)$$

Jeśli  $\sigma_2=0$ , to  $g_2=g_1$ ,

natomiast jeśli  $\sigma_2=\infty$ , to  $g_2=n^2 g_1$ .

Podobnie dla  $k_2=0$ , wówczas

$$g_2 = \frac{(1+\sigma_1^2)n^2}{n^2+\sigma_1^2} g_1. \quad (57)$$

Jeśli  $\sigma_1=0$ , to  $g_2=g_1$ , natomiast dla  $\sigma_1=\infty$ ,  $g_2=n^2 g_1$ .

Ponieważ musi być spełniony warunek

$$0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \dots < \sigma_n < \infty, \quad (58)$$

więc maksymalny klin, do którego należy wektor  $g$ , zawarty jest w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych pomiędzy prostymi

$$g_1 < g_2 < n^2 g_1, \quad (59)$$

gwarantujący ściśle dodatnie wartości współrzędnych wektora  $k$ .

W przeciwnym przypadku nie jest możliwa synteza w rozpatrywanej klasie  $\mathcal{R}_1$ .

## 6.2. Synteza dwójników w klasie $(RL, -R^1)$

Dwójnik przedstawiony na rys.2b posiada admitancję wejściową

$$Y_{we}(s) = k_0 + \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s+\sigma_1}. \quad (60)$$

Dla  $s=j\omega$  wzór (58) przyjmuje postać

$$Y_{we}(j\omega) = k_0 + \sum_{i=1}^n \frac{k_i \sigma_1}{\omega^2 + \sigma_1^2} - j \sum_{i=1}^n \frac{k_i \omega}{\omega^2 + \sigma_1^2}, \quad (61)$$

$$\operatorname{Re}\{Y_{we}(j\omega)\} = k_0 + \sum_{i=1}^n \frac{k_i \sigma_1}{\omega^2 + \sigma_1^2}, \quad (62)$$

$$\operatorname{Im}\{Y_{we}(j\omega)\} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i \omega}{\omega^2 + \sigma_1^2}, \quad (63)$$

gdzie

$$k_0 = -\frac{1}{R} < 0, \quad L_1 = \frac{1}{k_1}, \quad R_1 = \frac{\sigma_1}{L_1}, \quad (64)$$

$\{\sigma_i\}$  - zbiór biegunów realizowanej funkcji,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Formułując problem syntezy tak, jak poprzednio, układ kompensujący winien spełniać zależności dla skończonej liczby harmonicznych:

$$\bigwedge_{h \in \{1, 2, \dots, n\}} \sum_{i=1}^n \frac{\omega_h^2 \sigma_i}{\omega_h^2 + \sigma_i^2} = G_e - G_h - k_0, \quad (65)$$

$$\bigwedge_{h \in \{1, 2, \dots, n\}} \sum_{i=1}^n \frac{\omega_h^2 \sigma_i}{\omega_h^2 + \sigma_i^2} = G_e - G_h - k_0. \quad (66)$$

Dla rozpatrywanej klasy układów realizacji macierz  $V$  równania (48) przyjmuje postać

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{\omega_1^2 + \sigma_1^2} & \frac{\sigma_2}{\omega_1^2 + \sigma_2^2} & \dots & \frac{\sigma_n}{\omega_1^2 + \sigma_n^2} \\ \frac{\sigma_1}{\omega_2^2 + \sigma_1^2} & \frac{\sigma_2}{\omega_2^2 + \sigma_2^2} & \dots & \frac{\sigma_n}{\omega_2^2 + \sigma_n^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_1}{\omega_n^2 + \sigma_1^2} & \frac{\sigma_2}{\omega_n^2 + \sigma_2^2} & \dots & \frac{\sigma_n}{\omega_n^2 + \sigma_n^2} \end{bmatrix} \quad (67)$$

Procedura wyznaczania wektora  $k$  jest taka sama jak w poprzednim punkcie. Maksymalny klin, do którego należy wektor  $g_w$  (dla takiego samego przykładu jak w poprzednim punkcie), zawarty jest w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych pomiędzy prostymi

$$\frac{1}{n^2} g_1 < g_2 < g_1 \quad (68)$$

gwarantujący ściśle dodatnie wartości współrzędnych wektora  $k$ .

Dołączenie dwójnika kompensującego o admitancji opisanej zależnością (41) bądź (60) wprowadza do układu oprócz poszukiwanej części rzeczywistej admitancji, również część urojoną opisaną zależnością (44), bądź (63). Część urojona admitancji powoduje wprowadzenie do układu odbiornik-kompensator dodatkowej składowej prądu w postaci

$$i'_{\alpha}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{l=1}^n \frac{k_{l1} \sigma_{lh} \omega_h}{\omega_h^2 + \sigma_{lh}^2} U_{\alpha h} \exp j h \omega t, \quad (69)$$

dla dwójnika klasy (RC,  $-R^1$ ) lub

$$i''_{\alpha}(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{l=1}^n \left( -j \frac{k_{l1} \omega_h}{\omega_h^2 + \sigma_{lh}^2} \right) U_{\alpha h} \exp j h \omega t, \quad \alpha \in \{a, b, c\} \quad (70)$$

dla dwójnika klasy (RL,  $-R^1$ ).

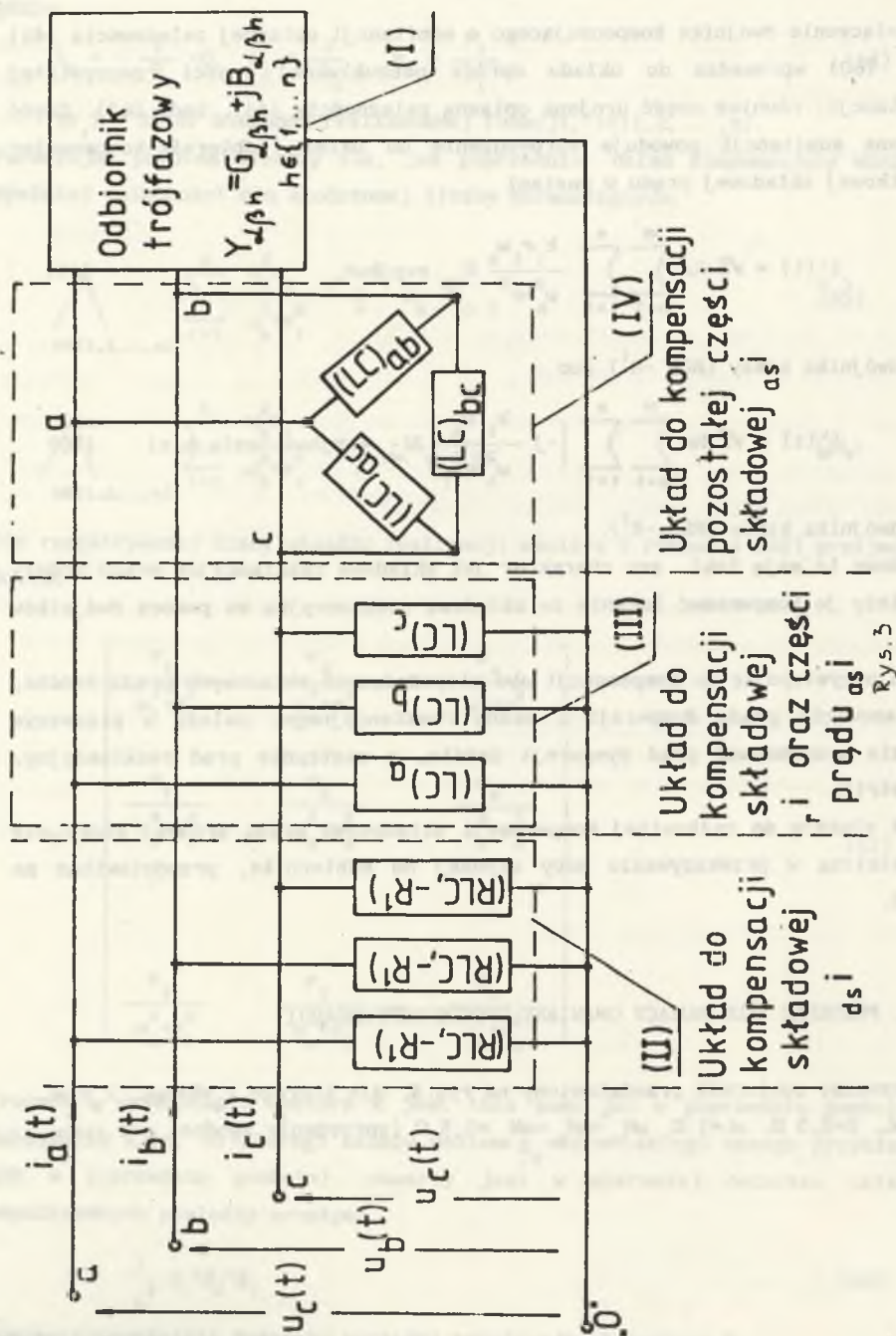
Składowe te mają taki sam charakter jak składowe reaktancyjne prądu źródła i należy je kompensować łącznie ze składową reaktancyjną za pomocą dwójników LC.

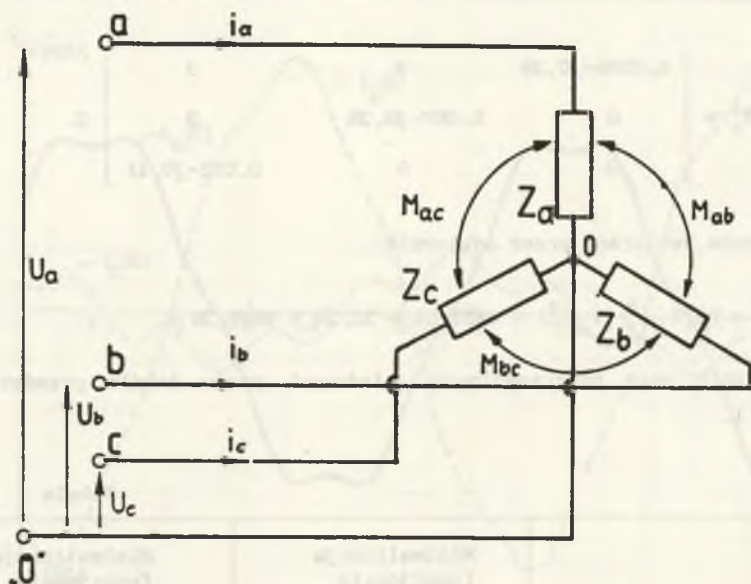
Zatem przystępując do kompensacji obu niepożądanych składowych prądu źródła, a mianowicie prądu dyspersji i prądu reaktancyjnego, należy w pierwszym rzędzie kompensować prąd dyspersji źródła, a następnie prąd reaktancyjny, asymetrii.

Układ służący do całkowitej kompensacji składowych prądu źródła, które nie uczestniczą w przekazywaniu mocy czynnej do odbiornika, przedstawiono na rys. 3.

## 7. PRZYKŁAD ILUSTRUJĄCY OMAWIANY SPOŚÓB KOMPENSACJI

Rozważmy odbiornik przedstawiony na rys. 4, dla którego  $Z_a = R + j\omega L$ ,  $Z_b = j\omega L$ ,  $Z_c = j\omega L$ ,  $R = 0,5 \Omega$ ,  $\omega L = 1 \Omega$ ,  $\omega M_{ab} = \omega M_{bc} = \omega M_{ac} = 0,5 \Omega$  (sprzężenie zgodne)  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ .





Rys. 4.

$$u_a(t) = 60\sqrt{2} \cos \omega t + 20\sqrt{2} \cos 5\omega t.$$

$$u_b(t) = u_a(t - \frac{T}{3}), \quad u_c(t) = u_a(t + \frac{T}{3}).$$

Dla układu przedstawionego na rys. 4 macierz admitancyjna dla poszczególnych harmonicznych (wzór (1)) ma postać

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 0,72 & -0,24 & -0,24 \\ -0,24 & 0,079 & 0,08 \\ 0,24 & 0,08 & 0,79 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} -0,96 & 0,32 & 0,32 \\ 0,32 & -1,44 & 0,56 \\ 0,32 & 0,56 & -1,44 \end{bmatrix} \text{ S.}$$

$$Y_5 = \begin{bmatrix} 0,044 & -0,0146 & -0,146 \\ -0,0146 & 0,005 & 0,005 \\ 0,0146 & 0,005 & 0,005 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} -0,293 & 0,097 & 0,097 \\ 0,097 & -1,293 & 0,1 \\ 0,097 & 0,1 & -0,299 \end{bmatrix} \text{ S.}$$

Zmodyfikowana macierz (wykorzystując symetrię źródła)

$$Y'_1 = \begin{bmatrix} 0,96 - j1,28 & 0 & 0 \\ 0 & 0,366 - j2,157 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0123 - j0,414 \end{bmatrix} \text{ S.}$$

$$Y_5'' = \begin{bmatrix} 0,0586-j0,39 & 0 & 0 \\ 0 & 0,007-j0,38 & 0 \\ 0 & 0 & 0,012-j0,41 \end{bmatrix} S.$$

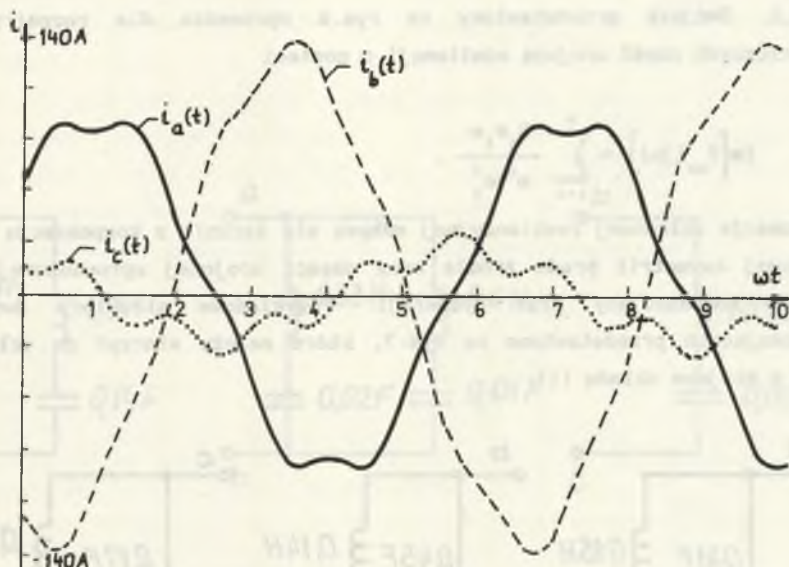
Moc czynna pobierana przez odbiornik

$$P = R(|I_{a1}|^2 + |I_{as}|^2) = 4857,04 + 32,34 = 4889,38 \text{ W.}$$

Zestawienie norm poszczególnych składowych prądu źródła przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1

|                         | Minimalizacja funkcjonału<br>$\ i\ _{L_3^2(0,T)}^2$ | Minimalizacja funkcjonału<br>$\ i\ _{W_{2,\lambda,3}^1(0,T)}^2$ |
|-------------------------|---|---|
| Składowa czynna aktywna | $\ i_a\  = 44,4A$                                   | $\ i_{a(s)}\  = 46,5A$  |
| Składowa reaktacyjna    | $\ i_r\  = 158,86A$                                 | $\ i_{r(s)}\  = 158,86A$  |
| Składowa asymetrii      | $\ i_{as}\  = 40,64A$                               | $\ i_{as(s)}\  = 44,4A$   |
| Składowa dyspersji      | $\ i_{ds}\  = 13,86A$                               | $\ i_{ds(s)}\  = 0,937A$  |
| Całkowity prąd          | $\ i\  = 170,44A$                                   | $\ i\  = 170,44A$   |
| $\lambda$               | $\lambda_1 = \frac{\ i_a\ }{\ i\ } = 0,26$          | $\lambda_1 = \frac{\ i_{a(s)}\ }{\ i\ } = 0,276$                |



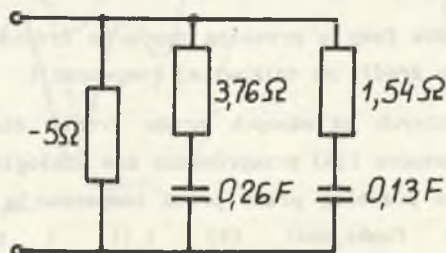
Rys. 5.

Na rys.5 przedstawiono przebiegi prądów fazowych przed kompensacją.

### 7.1. Kompensacja składowych prądu źródła dla minimalizacji funkcjonału

$$\| \mathbf{1} \|_{L_3^2(0, T)}$$

Kompensacja prądu dyspersji wymaga włączenia trzech identycznych dwójników (RC,  $-R^1$ ) pomiędzy daną fazę a przewód zerowy w miejsce układu II rys.3. Strukturę przykładowych dwójników przedstawiono na rys.6.



Rys. 6.

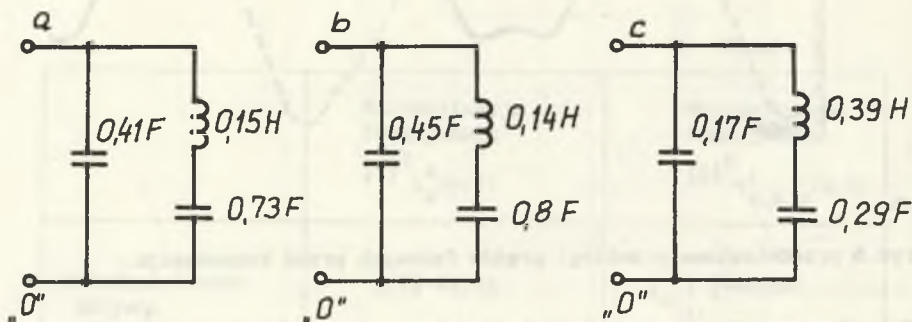
Dwójnik ten dobrano przy arbitralnie założonych biegunach  $\sigma_1=1$ ,  $\sigma_5=5$ ,



$k_0 = -0,2$ . Dwójnik przedstawiony na rys.6 wprowadza dla rozpatrywanych harmonicznym część urojoną admittancji o postaci

$$\operatorname{Im}\{Y_{we}(j\omega)\} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i \sigma_i \omega}{\omega^2 + \sigma_i^2}$$

Kompensacja składowej reaktancyjnej odbywa się łącznie z kompensacją części składowej asymetrii prądu źródła oraz części urojonej wprowadzonej przez dwójnik kompensujący prąd dyspersji. Przykładowe struktury dwójników kompensujących przedstawiono na rys.7, które należy włączyć do układu na rys.3 w miejsce układu III.

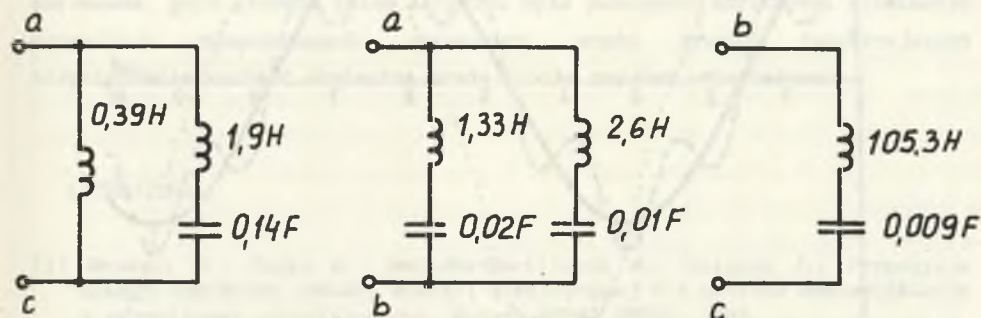


Rys. 7.

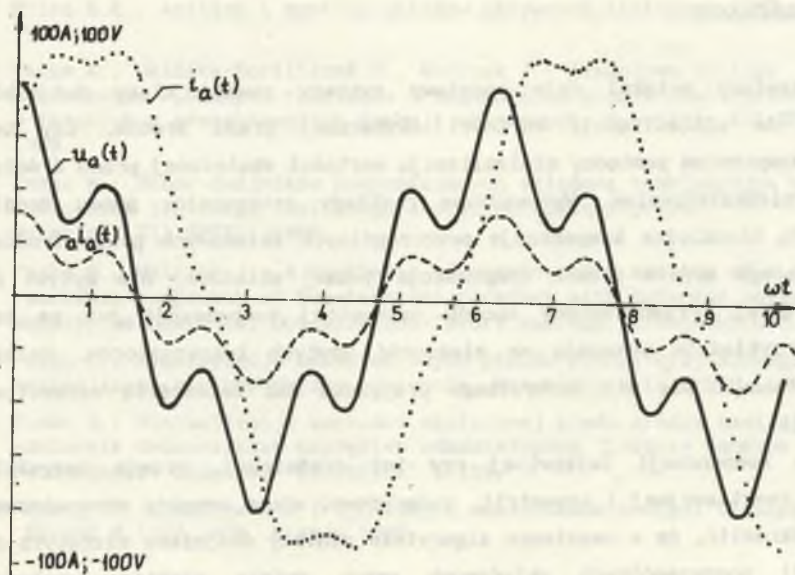
Kompensacja pozostałej części składowej asymetrii odbywa się poprzez włączenie dwójników LC na napięcie międzyprzewodowe zgodnie z wzorami (32), (33), (34). Przykładowe struktury dwójników dla rozpatrywanego przykładu przedstawiono na rys.8. Układy te należy włączyć w miejsce układu IV do obwodu przedstawionego na rys.3.

Na rys.9 przedstawiono dla fazy  $a$  przebieg napięcia źródła, prądu źródła przed kompensacją i prądu źródła po całkowitej kompensacji.

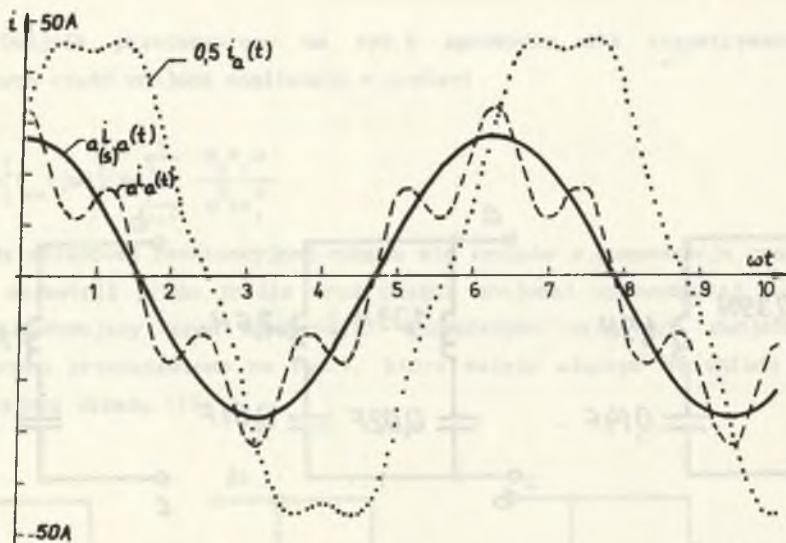
Kompensację poszczególnych składowych prądu źródła dla minimalizacji funkcjonału określonego wzorem (15) przeprowadza się analogicznie. Na rys.10 przedstawiono dla fazy  $a$  przebieg prądu przed kompensacją  $i_a(t)$ , przebieg prądu minimalizującego funkcjonał (5)  $i_a(t)$  i przebieg prądu minimalizującego funkcjonał (15)  $i_a(t)$ .



Rys. 8.



Rys. 9.



Rys. 10.

## 8. PODSUMOWANIE

Przedstawiony artykuł daje podstawy syntezy pewnej klasy dwójników służących do minimalizacji wartości skutecznej prądu źródła, czy też zadanego kompromisu pomiędzy minimalizacją wartości skutecznej prądu źródła a jego zniekształceniem. Wprowadzone rozkłady ortogonalne prądu źródła umożliwiają niezależną kompensację poszczególnych składowych prądu źródła. Dla przyjętego modelu źródła kompensacja jednej składowej nie wpływa na zmianę drugiej. Przedstawiony sposób całkowitej kompensacji już na tak prostym przykładzie pokazuje na złożoność użytych kompensatorów. Należy zatem zastanowić się dla konkretnego przypadku nad celowością całkowitej kompensacji.

O wyborze kompensacji całkowitej czy też częściowej, przede wszystkim składowej reaktancyjnej i asymetrii, zdecydować winny aspekty ekonomiczne. Należy podkreślić, że w omawianym algorytmie syntezy dwójników służących do kompensacji poszczególnych składowych prądu źródła niektóre wartości syntezowanego dwójnika są zadane arbitralnie (np. bieguny). Powoduje to, że

dla danego widma susceptancji i konduktancji odbiornika istnieje nieskończenie wiele dwójników zdolnych kompensować poszczególne składowe prądu źródła.

O wyborze tej czy innej struktury winno zdecydować przyjęte odpowiednie kryterium optymalizacyjne. Zagadnienie to w ogóle nie zostało w rozważaniach poruszone, gdyż głównym celem artykułu było pokazanie możliwości eliminacji wszystkich niepożądanych składowych prądu źródła zwiększających niepotrzebnie wartość skuteczną prądu źródła czy też odkształcenia.

#### LITERATURA

- [1] Brodzki M., Pasko M., Umińska-Bortliczek M., Walczak J.: Propozycja nowego wskaźnika jakości energii elektrycznej dla układów dwuzaciskowych z przebiegami odkształconymi. Materiały XI SPETO, 1988.
- [2] Brodzki M., Walczak J.: O pewnym sposobie oceny prądów odkształconych odbiorników wielozaciskowych wykorzystujących pojęcie przestrzeni Sobolewa. Materiały XI SPETO, 1988.
- [3] Czarnecki L.S.: Interpretacja, identyfikacja właściwości energetycznych obwodów jednofazowych z przebiegami odkształconymi. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej "Elektryka" z. 91, Gliwice 1984.
- [4] Mitra S.K.: Analiza i synteza układów aktywnych liniowych. WNT, Warszawa 1974.
- [5] Pasko M., Umińska-Bortliczek M., Walczak J.: Ilościowa analiza porównawcza wybranych rozkładów ortogonalnych prądów odbiorników 3-fazowych w przestrzeniach funkcji okresowych. Materiały XII SPETO, 1989.
- [6] Pasko M.: Dobór dwójników kompensujących składową reaktancyjną prądu odbiornika liniowego zasilanego napięciem odkształconym. Materiały XII SPETO, 1989.
- [7] Pasko M., Walczak J.: A synthesis of compensation systems of a current reactance component of two-terminal receiver with deformed voltage supply. Mathematical Optimization-Theory and App. Eisenach, Dec. 1989.
- [8] Pasko M.: Symetryzacja odkształconych prądów źródła trójfazowego zasilającego niesymetryczny odbiornik. Materiały XIII SPETO, 1990.
- [9] Pasko M.: Minimalizacja wartości skutecznej prądu źródła zasilającego odbiornik dwuzaciskowy napięciem odkształconym. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej "Elektryka" z. 119.
- [10] Piróg S.: Symetryzacja trójfazowych odbiorników energii elektrycznej Skrypt N. 1122, AGH, Kraków 1988.

Recenzent: prof. dr inż. Stanisław Bolkowski

Wpłynęło do Redakcji dnia 15 listopada 1990 r.

## SELECTION OF TWO-TERMINAL NETWORKS MINIMIZING THE PERFORMANCE INDICES OF ELECTRIC ENERGY FOR THREE-PHASE SYSTEMS SUPPLIED BY DEFORMED VOLTAGE

### Summary

The paper develops the authors papers concerning the selection of two-terminal networks minimizing the given performance indices of electric energy. Acceptance of a given performance index of electric energy leads to distinction of an orthogonal component in the source current responsible for the minimization of the index. The other components reciprocally orthogonal are undesirable and they should be compensated.

The paper is first of all a continuation of the paper [8] and its aim is to present the possibilities of compensation of all undesirable components of the source current for three-phase systems supplied with deformed periodical voltage. The presented theoretical considerations are illustrated by the examples.

## ПОДБОР ДВУХПОЛОСНИКОВ МИНИМИЗИРУЮЩИХ ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ТРЕХФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ ПИТАЮЩИХСЯ ОТ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

### Резюме

Представлена статья является продолжением работ автора, которых цель это подбор двухполосников минимизирующих показатели качества электрической энергии. Принятие соответствующего показателя качества электрической энергии ведет к выделению активной слагаемой тока источника которая минимизует этой показателем. Другие ортогональные слагаемые нежелательные и их необходимо компенсировать. Эта работа прежде всего является продолжением работы [8]. Цель статьи - представление возможности компенсации всех нежелательных слагаемых тока трёхфазного источника питающего несинусоидальным напряжением приёмник. Представленные рассуждения иллюстрируются примерами.

Janusz WALCZAK

## OPTIMALIZACJA WARUNKÓW PRACY RZECZYWISTYCH

## TRÓJFAZOWYCH ŹRÓDEŁ NAPIĘĆ ODKSZTAŁCONYCH

## I. WYZNACZENIE PRĄDU AKTYWNEGO

Streszczenie. W artykule przedstawiono wyniki analizy energetyczno-jakościowych warunków pracy rzeczywistych, trójfazowych źródeł napięć odkształconych. Sformalizowano i rozwiązano problem minimalizacji wskaźnika jakości prądu źródła, który uwzględnia zarówno ocenę właściwości energetycznych, jak i jakościowych prądu, przy ograniczeniu równościowym na moc czynną doprowadzoną do odbiornika. Rozwiązanie wymienionego problemu przeprowadzono przy trzech różnych założeniach odnośnie do operatora impedancji wewnętrznej źródła zasilającego. Przedstawiono interpretację prądu aktywnego będącego rozwiązaniem problemu minimalizacji.

## 1. WSTĘP

W pracach [2], [5] wykazano, że prądy w obwodach trójfazowych (wielofazowych) z idealnymi źródłami napięć odkształconych mogą być rozłożone na cztery wzajemnie ortogonalne składniki. Każdy z tych składników związany jest z odrębnymi zjawiskami występującymi w obwodach. Eliminacja z prądów odbiornika niektórych z wymienionych składowych ortogonalnych prądów umożliwia zmniejszenie, a nawet minimalizację wartości skutecznych prądów wielofazowych idealnych źródeł napięć odkształconych.

Nowy rozkład ortogonalny prądów idealnych, wielofazowych, źródeł napięć odkształconych podano w pracach [3], [4]. Rozkład ten uzyskano poprzez minimalizację funkcjonału jakości prądu stanowiącego ocenę właściwości energetyczno-jakościowych (wartości skutecznej i zawartości wyższych harmonicznych) prądu.

Próbie uogólnienia wymienionych wyników na układy wielofazowe zasilane z rzeczywistych (o skończonej impedancji wewnętrznej) źródeł napięć odkształconych podjęto w pracy [6]. Wykorzystując transformację Fouriera-Gelfanda, zaproponowano [6] metodę iteracyjnego wyznaczania prądów

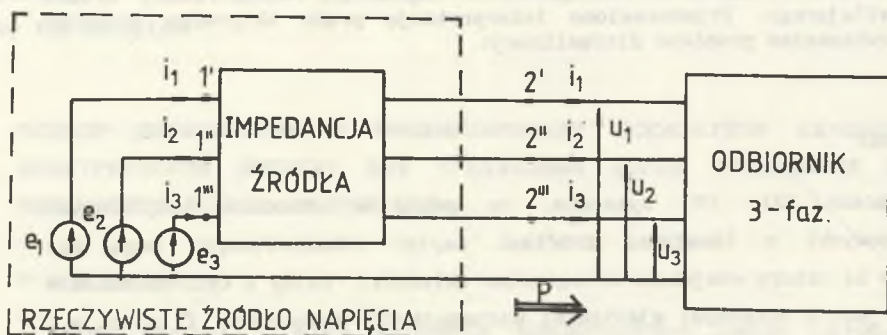
aktywnych minimalizujących wartości skuteczne prądów fazowych źródła rzeczywistego.

Dalsze uogólnienie stanowi analiza właściwości energetyczno-jakościowych układów ze źródłami rzeczywistymi napięć odkształconych przedstawiona w artykule.

Analizę tę przeprowadzono we wprowadzonej wcześniej [3], [4] przestrzeni Sobolewa  $W_{2,\alpha,3}^1$  oraz w skojarzonej z nią bijektywnie przestrzeni ciągowej  $l^2$  współczynników szeregów Fouriera napięć i prądów występujących w obwodach. Przedstawiona metoda umożliwiła uzyskanie wyników w postaci zamkniętej.

## 2. FORMALIZACJA PROBLEMU MINIMALIZACJI

Rozpatrujemy układ złożony z rzeczywistego źródła napięcia trójfazowego, odkształconego, zasilającego odbiornik trójfazowy (rys.1).



Rys.1. Odbiornik trójfazowy zasilany z rzeczywistego źródła napięcia trójfazowego, odkształconego

Fig.1. 3-phase receiver supplied by nonideal and nonsinusoidal 3-phase voltage source

Prąd  $i=(i_1, i_2, i_3)$  i napięcie  $u=(u_1, u_2, u_3)$  źródła są elementami przestrzeni Sobolewa  $W_{2,\alpha,n}^1(0,T)$  [3], z normą i iloczynem skalarnym, które określają wzory:

$$\|f\|_W = \sqrt{\sum_{k=0}^1 \alpha_k \sum_{\alpha=1}^3 \frac{1}{T} \int_0^T (f_{\alpha}^{(k)}(t))^2 dt} \quad (1)$$

$$({}_1f, {}_2f)_W = \sum_{k=0}^1 \alpha_k \sum_{\alpha=1}^3 \frac{1}{T} \int_0^T {}_1f_{\alpha}^{(k)}(t) {}_2f_{\alpha}^{(k)}(t) dt, \quad (2)$$

$$f = (f_1, f_2, f_3), \quad {}_1f = ({}_1f_1, {}_1f_2, {}_1f_3), \quad {}_2f = ({}_2f_1, {}_2f_2, {}_2f_3) \in W_{2,\alpha,3}^1,$$

gdzie:

$\alpha_k$  - ( $k \in \{0, \dots, 1\}$ ) - współczynnik wagi,

$f^{(k)}, {}_1f^{(k)}, {}_2f^{(k)}$  - k-te pochodne funkcji  $f, {}_1f, {}_2f$ ,

1 - maksymalny rząd pochodnych funkcji  $f, {}_1f, {}_2f$ .

Model rzeczywistego źródła napięcia trójfazowego, odkształconego opisuje macierzowy operator impedancji  $Z$ .

$$Z : W_{2,\alpha,3}^1(0, T) \times W_{2,\alpha,3}^1(0, T) \rightarrow W_{2,\alpha,3}^1(0, T) \quad (3)$$

określony wzorem:

$$u_{\alpha} = e_{\alpha} - \sum_{\beta=1}^3 Z^{\alpha\beta} i_{\beta} \quad (4)$$

$$\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\},$$

$$u, i, e \in W_{2,\alpha,3}^1(0; T).$$

Operatory skalarne  $Z^{\alpha\beta}$  są liniowymi, przyczynowymi i czasowo-niezmienniczymi operatorami typu splotu o jądrach należących do przestrzeni Sobolewa  $W_2^1(\mathbb{R})$ .

Formułujemy następujący problem optymalizacji:

Wyznaczyć

$$\min \left( \|i\|_W \right)^2 \quad (5)$$

przy ograniczeniu

$$P = (u, i)_L, \quad (6)$$

gdzie:

$P$  - zadana moc czynna doprowadzana do odbiornika,

$L_3^2$  - przestrzeń Hilberta będąca sumą prostą trzech egzemplarzy przestrzeni  $L^2(0; T)$ , z normą i iloczynem skalarnym, które określają wzory:



$$\|f\|_L = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^3 \frac{1}{T} \int_0^T f_{\alpha}^2(t) dt}, \quad (7)$$

$$(f_1, f_2)_L = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{1}{T} \int_0^T f_{1\alpha}(t) f_{2\alpha}(t) dt, \quad (8)$$

$$f_1, f_2 \in W_{2, \alpha, 3}^1(0, T) \subset L_3^2(0; T).$$

Problem optymalizacyjny opisany wzorami (5), (6) polega na wyznaczeniu prądu źródła, który realizuje zadany kompromis (za pomocą współczynników wagi  $\alpha_k$ ) pomiędzy minimum sumy kwadratów wartości skutecznych prądów fazowych źródła a minimum zniekształceń tych prądów, przy założeniu że do odbiornika doprowadzana jest zadana moc czynna  $P$ . Wykorzystując fakt (por. [3], [4]), że przyporządkowania funkcjom  $f \in W_{2, \alpha, 3}^1(0; T)$  ich współczynników szeregow Fouriera względem bazy trygonometrycznej przestrzeni  $W_{2, \alpha, 3}^1(0, T)$  i  $L_3^2(0, T)$  (podobnej do bazy trygonometrycznej przestrzeni  $L^2(0; T)$ ) są bijekcjami, problem optymalizacyjny (5), (6) sprowadza się do minimalizacji następującego funkcjonału Lagrange'a w przestrzeni ciągłej  $l^2$ :

$$\begin{aligned} L(A_{\alpha h}, B_{\alpha h}, \lambda) &= \sum_{h=0}^{\infty} \nu_h^2 \sum_{\alpha=1}^3 (A_{\alpha h}^2 + B_{\alpha h}^2) + \\ &+ \lambda \left[ P - \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^3 (E_{1\alpha h} A_{\alpha h} + E_{2\alpha h} B_{\alpha h}) \right] + \\ &+ \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^3 R_{\alpha \alpha h} (A_{\alpha h}^2 + B_{\alpha h}^2) + \\ &+ \sum_{h=0}^{\infty} \left( \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 R_{\alpha \beta h} (A_{\alpha h} A_{\beta h} + B_{\alpha h} B_{\beta h}) \right) + \end{aligned}$$

$$+ \left. \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 X_{\alpha\beta h} \left( A_{\alpha h} B_{\beta h} - A_{\beta h} B_{\alpha h} \right) \right) \quad (9)$$

gdzie:

$E_{\alpha h} = E_{\alpha h} - j_2 E_{\alpha h}$ ,  $I_{\alpha h} = A_{\alpha h} - j_2 B_{\alpha h}$  - wartości zespolone skuteczne SEM

$e_{\alpha} (\alpha \in \{1, 2, 3\})$  źródła i prądu  $i_{\alpha} (\alpha \in \{1, 2, 3\})$  źródła,

$Z_{\alpha\beta h}$  - wartości transformat Fouriera jąder operatorów

$Z^{\alpha\beta} (\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\})$  dla częstotliwości  $h\omega$ ,

$$h \in N^+(0), \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

$$Z_{\alpha\beta h} = R_{\alpha\beta h} + jX_{\alpha\beta h}, \quad (10)$$

$$V_h = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 (h\omega)^2 + \alpha_2 (h\omega)^4 + \dots + \alpha_1 (h\omega)^{21}}, \quad (11)$$

$\alpha_k$  - współczynniki wagi (por. wzór (1), (2)).

### 3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU MINIMALIZACJI

Warunki konieczne ekstremum [1] funkcjonału Lagrange'a określonego wzorem (9) podano poniżej:

$$2V_h^2 A_{\alpha h} - \lambda \left( E_{\alpha h} - 2R_{\alpha\alpha h} A_{\alpha h} - \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^3 (R_{\alpha\beta h} + R_{\beta\alpha h}) A_{\beta h} - \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 (X_{\alpha\beta h} - X_{\beta\alpha h}) B_{\beta h} \right) = 0, \quad (12)$$

$$\alpha \in \{1, 2, 3\}$$

$$2V_h^2 B_{\alpha h} - \lambda \left( 2 E_{\alpha h} - 2 R_{\alpha \alpha h} B_{\alpha h} - \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^3 (R_{\alpha \beta h} + R_{\beta \alpha h}) B_{\beta h} - \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 (X_{\alpha \beta h} - X_{\beta \alpha h}) A_{\alpha h} \right) = 0 \quad (13)$$

$$\alpha \in \{1, 2, 3\}$$

$$P - \sum_{h=0}^{\infty} \left[ \sum_{\alpha=1}^3 \left( E_{\alpha h} A_{\alpha h} + 2 E_{\alpha h} B_{\alpha h} \right) - R_{\alpha \alpha h} \left( A_{\alpha h}^2 + B_{\alpha h}^2 \right) - \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^3 R_{\alpha \beta h} \left( A_{\alpha h} A_{\beta h} + B_{\alpha h} B_{\beta h} \right) - \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^3 X_{\alpha \beta h} \left( A_{\alpha h} B_{\beta h} + A_{\beta h} B_{\alpha h} \right) \right] = 0 \quad (14)$$

Rozwiązanie układu równań (12), (13), (14) względem zmiennych  $(A_{\alpha h})$ ,  $(B_{\alpha h})$ ,  $\lambda$  pozwala wyznaczyć prąd aktywny  $(I_{\alpha} = A_{\alpha h} - jB_{\alpha h})$  stanowiący rozwiązanie problemu (5), (6).

Układ równań (12), (13) można zapisać w postaci następującego równania macierzowego (dla każdej harmonicznej  $h$ ):

$$A_h X_h = E_h, \quad (15)$$

gdzie:

$$X_h = \begin{bmatrix} A_{1h}, A_{2h}, A_{3h}, B_{1h}, B_{2h}, B_{3h} \end{bmatrix}^T, \quad (16)$$

$$E_h = \begin{bmatrix} 1 E_{1h}, 1 E_{2h}, 1 E_{3h}, 2 E_{1h}, 2 E_{2h}, 2 E_{3h} \end{bmatrix}^T \lambda,$$

$A_h$  - jest macierzą blokową o wymiarach  $6 \times 6$  i o budowie przedstawionej poniżej

$$A_h = \begin{array}{|c|c|} \hline M_h & N_h \\ \hline N_h & M_h \\ \hline \end{array} \quad (17)$$

Elementy macierzy  $M_h$ ,  $N_h$  o wymiarach (3x3) określają wzory:

$$M_{\alpha\beta h} = \begin{cases} 2V_h^2 + 2R_{\alpha\alpha h} \lambda & \text{dla } \alpha=\beta \\ \lambda \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^3 (R_{\alpha\beta h} + R_{\beta\alpha h}) & \text{dla } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (18)$$

$$N_{\alpha\beta h} = \begin{cases} 0 & \text{dla } \alpha=\beta \\ \lambda \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^3 (X_{\alpha\beta h} - X_{\beta\alpha h}) & \text{dla } \alpha > \beta \\ -\lambda \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^3 (X_{\alpha\beta h} - X_{\beta\alpha h}) & \text{dla } \alpha < \beta \end{cases} \quad (19)$$

Jeżeli

$$\bigwedge_{h \in N} \det M_h \neq 0 \wedge \det (M_h - N_h M_h^{-1} N_h) \neq 0, \quad (20)$$

to rozwiązanie układu równań (15) istnieje i wyraża się wzorami:

$$A_{\alpha h} = \sum_{\beta=1}^3 {}_1^a \alpha\beta h(\lambda) {}_1 E_{\beta h} + \sum_{\beta=1}^3 {}_2^a \alpha\beta h(\lambda) {}_2 E_{\beta h} \quad (21)$$

$$B_{\alpha h} = \sum_{\beta=1}^3 {}_3^a \alpha\beta h(\lambda) {}_1 E_{\beta h} + \sum_{\beta=1}^3 {}_4^a \alpha\beta h(\lambda) {}_2 E_{\beta h} \quad (22)$$

$$\alpha \in \{1, 2, 3\},$$

gdzie:

$$A_h^{-1} = \begin{bmatrix} \boxed{{}_1^a \alpha\beta h(\lambda)} & \boxed{{}_2^a \alpha\beta h(\lambda)} \\ \boxed{{}_3^a \alpha\beta h(\lambda)} & \boxed{{}_4^a \alpha\beta h(\lambda)} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Z równań (21), (22) wynika, że harmoniczne składowej aktywnej prądów fazowych  $I_{\alpha h} = A_{\alpha h} - jB_{\alpha h}$ , stanowiące rozwiązanie problemu (5), (6) w przestrzeni  $l^2$ , zależą od wszystkich składowych SEM ( $E_{1\alpha h}$ ), ( $E_{2\alpha h}$ ),  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  źródła zasilającego. Harmoniczne  $I_{\alpha h}$  wyraża wzór:

$$I_{\alpha h} = \lambda \sum_{\beta=1}^3 \left( 1_{\alpha\beta h}^a(\lambda) - j_3 1_{\alpha\beta h}^a(\lambda) \right) E_{\beta h} + \\ + \lambda \sum_{\beta=1}^3 \left( 2_{\alpha\beta h}^a(\lambda) - j_4 2_{\alpha\beta h}^a(\lambda) \right) E_{\beta h} \quad (24)$$

i stąd :

$$i_{\alpha}(t) = \lambda \sum_{\beta=1}^3 Z_{\alpha\beta 0}^e(\lambda) + \\ + \sqrt{2} \lambda \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^3 \left( 1_{\alpha\beta h}^e Z_{\alpha\beta h}^e(\lambda) E_{\beta h} + 2_{\alpha\beta h}^e Z_{\alpha\beta h}^e(\lambda) E_{\beta h} \right) \exp(jh\omega t), \quad (25)$$

gdzie

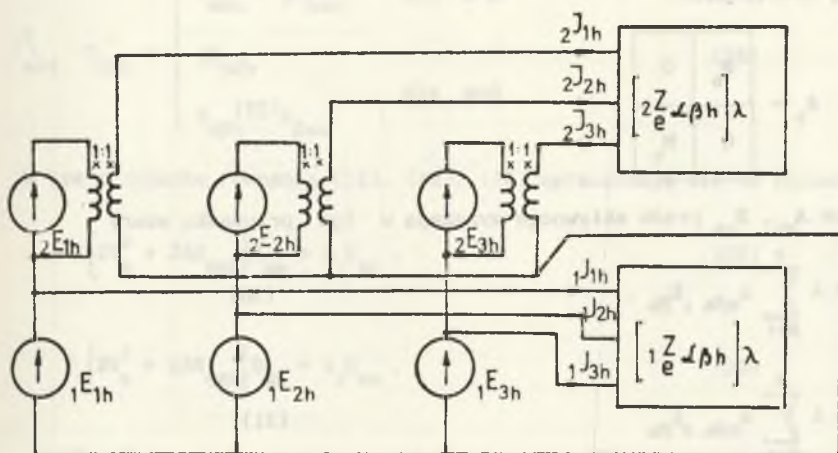
$$1_{\alpha\beta h}^e Z_{\alpha\beta h}^e(\lambda) = 1_{\alpha\beta h}^a(\lambda) - j_3 1_{\alpha\beta h}^a(\lambda), \quad (26)$$

$$2_{\alpha\beta h}^e Z_{\alpha\beta h}^e(\lambda) = 2_{\alpha\beta h}^a(\lambda) - j_4 2_{\alpha\beta h}^a(\lambda). \quad (27)$$

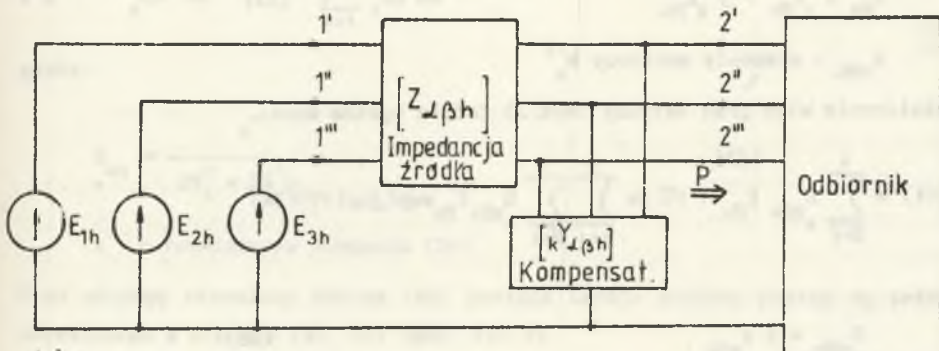
Podstawienie wzorów (21), (22) do wzoru (14) daje silnie nieliniowe równanie algebraiczne względem zmiennej  $\lambda$ .

Wydaje się, że rozwiązywanie tego równania można przeprowadzać wyłącznie metodami numerycznymi. Ponieważ interpretacja fizyczna prądu aktywnego (25) jest bardzo złożona (rys. 2a, 2b) (i nie daje żadnych wskazówek do kompensacji prądu różnicowego ( $i_{\alpha} - i_{\alpha}$ ) ( $i_{\alpha}$  - prąd całkowity danej fazy), przyjmijmy odnośnie do macierzy impedancji  $Z_{\alpha\beta h}$  (wzór (10)) następujące założenie :

$$\bigwedge_{h \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\substack{\alpha, \beta \\ \alpha \neq \beta}} \operatorname{Im} \left\{ Z_{\alpha\beta h} \right\} = \operatorname{Im} \left\{ Z_{\beta\alpha h} \right\} \quad (28)$$



a)



b)

Rys.2. Interpretacja prądu aktywnego (25) dla pojedynczej harmonicznej

Fig.2. Interpretation of active current (25) for single harmonics

Rozwiązanie równania (15) przeprowadzić należy wtedy dla macierzy  $A_h$  określonej następująco:

$$A_h = \begin{array}{|c|c|} \hline M_h & 0 \\ \hline 0 & M_h \\ \hline \end{array} \quad (29)$$

Współrzędne  $A_{\alpha h}$ ,  $B_{\alpha h}$  prądu aktywnego wyrażają w tym przypadku wzory

$$A_{\alpha h} = \lambda \sum_{\beta=1}^3 a_{\alpha\beta h} {}^1 E_{\beta h}, \quad (30)$$

$$B_{\alpha h} = \lambda \sum_{\beta=1}^3 a_{\alpha\beta h} {}^2 E_{\beta h} \quad (31)$$

i stąd

$${}_a I_{\alpha h} = \lambda \sum_{\beta=1}^3 a_{\alpha\beta h} E_{\beta h}, \quad (32)$$

gdzie:

$$E_{\beta h} = {}^1 E_{\beta h} - j {}^2 E_{\beta h} \quad (33)$$

$a_{\alpha\beta h}$  - elementy macierzy  $M_h^{-1}$

Ostatecznie więc prąd aktywny (Rys.3) źródła wyraża wzór:

$${}_a i(t) = \sum_{\beta=1}^3 G_{\alpha\beta 0} E_{\beta 0} + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^3 G_{\alpha\beta h} E_{\beta h} \exp(jh\omega t), \quad (34)$$

gdzie:

$$G_{\alpha\beta h} = \lambda a_{\alpha\beta h}. \quad (35)$$

Podstawienie wzorów (30), (31) do równania (14) daje również, jak w omawianym poprzednio przypadku, bardzo silnie nieliniowe równanie algebraiczne względem zmiennej  $\lambda$ . Analizą rozwiązań tego równania zajmować się nie będziemy.

Przyjmijmy obecnie (w celu dalszego uproszczenia rozważań), że model źródła rzeczywistego składa się z idealnych SEM  $e_{\alpha}(t)$  (rys.1) oraz układu pasywnego SLS modelującego impedancje wewnętrzne źródła. Wtedy:

$$\hat{\Lambda}_{h \in N} Z_{\alpha\beta h} = \begin{cases} R_{\alpha\alpha h} + jX_{\alpha\alpha h} & \text{dla } \alpha=\beta \\ jX_{\alpha\beta h} & \\ X_{\alpha\beta h} = X_{\beta\alpha h} & \text{dla } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (36)$$

W tym przypadku równania (12), (13), (14) upraszczają się do postaci:

$$\left( 2V_h^2 + 2\lambda R_{\alpha\alpha h} \right) A_{\alpha h} = \lambda_1 E_{\alpha h}, \quad (37)$$

$$\left( 2V_h^2 + 2\lambda R_{\alpha\alpha h} \right) B_{\alpha h} = \lambda_2 E_{\alpha h}, \quad (38)$$

$$P = \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^3 \left( \frac{\lambda}{2V_h^2 + 2\lambda R_{\alpha\alpha h}} - R_{\alpha\alpha h} \left( \frac{\lambda}{2V_h^2 + 2\lambda R_{\alpha\alpha h}} \right)^2 \right) |E_{\alpha h}|^2 \quad (39)$$

Równanie (39) jest podobne do równania rozpatrywanego w pracy [7].

Prąd aktywny źródła określa wzór:

$$i_{\alpha}(t) = G_{\alpha\alpha} E_{\alpha\alpha} + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} G_{\alpha h} E_{\alpha h} \exp(jh\omega t), \quad (40)$$

gdzie:

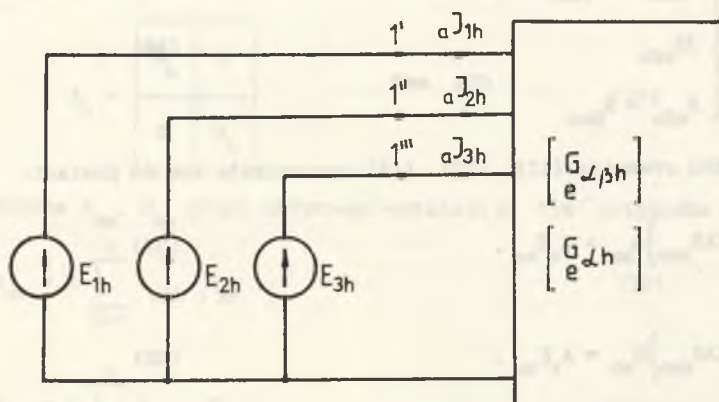
$$G_{\alpha h} = \frac{\lambda^*}{2V_h^2 + 2\lambda^* R_{\alpha\alpha h}}, \quad (41)$$

$\lambda^*$  - rozwiązanie równania (39).

Prąd aktywny określony wzorem (40) posiada bardzo podobną postać do prądu określonego w pracach [3], [4] (por. rys.3).

Jedyną różnicą jest fakt, że konduktancje zastępcze  $G_{\alpha h}$  są różne dla każdej fazy  $\alpha \in \{1, 2, 3\}$  w przypadku rzeczywistego źródła zasilającego.





Rys.3. Interpretacja prądu aktywnego (34), (40) dla pojedynczej harmonicznej

Fig.3. Interpretation of active current (34), (40) for single harmonics

Wykorzystując warunki wystarczające ekstremum warunkowego [1], można wykazać, że jeśli macierze  $Z_{\alpha\beta h}$  spełniają warunki określone wzorem (36), to funkcjonal (9) osiąga minimum na elemencie  $i$  określonym wzorem (40), gdy

$$\bigwedge_{h \in N} \bigwedge_{\alpha \in \{1, 2, 3\}} \nabla_h^2 + \lambda R_{\alpha\alpha h} > 0 \quad (42)$$

Prąd  $i$  określony wzorem (40) stanowi minimum funkcjonału (9), gdy  $\lambda > 0$ .

Podobnie wykorzystując warunki wystarczające ekstremum warunkowego [1] oraz twierdzenie Sylwestra o dodatniej określoności form kwadratowych, można wykazać, że gdy macierze  $Z_{\alpha\beta h}$  spełniają warunki określone wzorem (28), to funkcjonal (9) osiąga minimum na elemencie  $i$  określonym wzorem (34), gdy spełnione są warunki

1°

$$\bigwedge_{h \in N} \bigwedge_{\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}} \left( \nabla_h^2 + \lambda R_{\alpha\alpha h} \right) > 0 \wedge \left( R_{\alpha\beta h} + R_{\beta\alpha h} \right) \lambda > 0 \quad (43)$$

2° Forma kwadratowa zbudowana z macierzy  $r$  o wymiarach  $[3 \times 3]$  i określona wzorem:

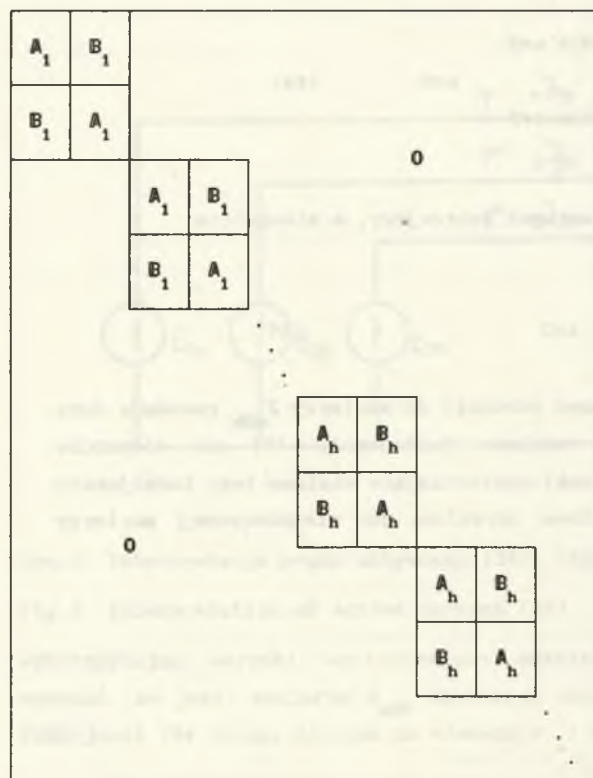
$$[r_{\alpha\beta}] = \begin{cases} 2 \frac{\nabla_h^2}{\lambda} + 2R_{\alpha\alpha h} & \text{dla } \alpha = \beta \\ R_{\alpha\beta h} + R_{\beta\alpha h} & \text{dla } \alpha \neq \beta \end{cases}, n \in \mathbb{N} \quad (44)$$

jest dodatnio określona.

Zamiast warunku 1° można przyjąć warunek ostrzejszy, a mianowicie (1°)'

$$\bigwedge_{h \in \mathbb{N}} \bigwedge_{\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}} R_{\alpha\beta h} > 0 \wedge \lambda > 0 \quad (45)$$

Pominięcie uczynionych wyżej założeń odnośnie do macierzy  $Z_{\alpha\beta h}$  powoduje dużą komplikację warunków istnienia minimum funkcjonału (9) na elemencie określonym wzorem (25). Wtedy warunki wystarczające minimum tego funkcjonału są spełnione, gdy forma kwadratowa określona na nieskończonej macierzy blokowej



gdzie ;

$$A_h = [A_{\alpha\beta h}] = \begin{cases} 2V_h^2 + 2\lambda R_{\alpha\alpha h} & \text{dla } \alpha=\beta \\ \lambda (R_{\alpha\beta h} + R_{\beta\alpha h}) & \text{dla } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (47)$$

$$B_h = [B_{\alpha\beta h}] = \begin{cases} 0 & \text{dla } \alpha=\beta \\ X_{\alpha\beta h} - X_{\beta\alpha h} & \text{dla } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (48)$$

$$\dim A_h = \dim B_h = [3 \times 3],$$

jest dodatnio określona. Bardziej szczegółowym badaniem warunków dodatniej określoności tej formy zajmować się nie będziemy.

Przejdźmy obecnie do analizy równania (39), które zapiszemy w postaci wzoru:

$$P=F(\lambda) , \quad (49)$$

gdzie:

$F(\lambda)$  oznacza funkcję występującą po prawej stronie wzoru (39).

Ponieważ dysponujemy z reguły skończonym widmem harmonicznych prądu i napięcia, a kompensacja w klasie układów skupionych dotyczy również skończonej liczby harmonicznych prądu źródła, to rozpatrzmy równanie przybliżone:

$$P=F^n(\lambda)=\sum_{h=0}^n f^h(\lambda)=\sum_{h=0}^n \sum_{\alpha=1}^3 f^{h\alpha}(\lambda) , \quad (50)$$

gdzie:

$$f^{h\alpha}(\lambda)=\left( \frac{\lambda}{2V^2+2\lambda R_{\text{osch}}} - R_{\text{osch}} \left( \frac{\lambda}{2V^2+2\lambda R_{\text{osch}}} \right)^2 \right) |E_{\text{osch}}|$$

Właściwości funkcji  $f^h$ , dla ustalonego  $h$ , są następujące:

1. Dla  $\lambda \in [0, \infty)$  pochodna  $(f^h)'$ :

$$(f^h)'(\lambda)=\sum_{\alpha=1}^3 \frac{4V_h^2}{\left(2V_h^2+2\lambda R_{\text{osch}}\right)^2} |E_{\text{osch}}|^2 > 0 \quad (51)$$

jest ściśle dodatnia, a więc funkcja  $F^n$  w przedziale  $[0, \infty)$  jest ściśle rosnąca.

2. Granice funkcji  $f^h$  przy  $\lambda \rightarrow \pm\infty$  wynoszą:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} f^h(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{|E_{\text{osch}}|^2}{4R_{\text{osch}}} = \sum_{\alpha=1}^3 P_{\text{osch}} , \quad (52)$$

gdzie:

$P_{d^{\alpha h}}$  - moc czynna wydawana przez h-tą harmoniczną  $E_{\alpha h}$  SEM  $e_{\alpha}$  ( $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ ) w warunkach dopasowania energetycznego, tzn. maksymalna moc wydawana przez h-tą harmoniczną SEM źródła.

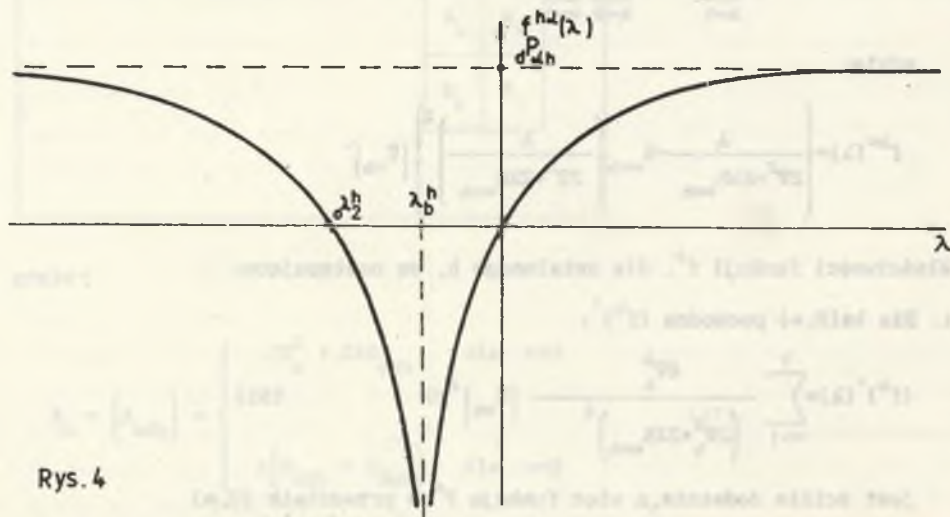
3. Zera funkcji  $f^{\alpha h}$  są następujące:

$$f^h(\lambda) = 0 \quad \text{dla} \quad \lambda_1^h = 0, \quad \lambda_2^h = -\frac{2V_h^2}{R_{\alpha \alpha h}} \quad (53)$$

4. Funkcja  $f^h(\lambda)$  posiada pojedynczy biegun  $\lambda_b^h$  na ujemnej półosi zmiennej  $\lambda$ :

$$\lambda_b^{\alpha h} = -\frac{V_h^2}{R_{\alpha \alpha h}} \quad (54)$$

Jakościowe właściwości funkcji  $f^{\alpha h}$  ilustruje rys. 4.



Rys. 4

Rys. 4. Wykres funkcji  $F^{h\alpha}(\lambda)$

Fig. 4. Graph of function  $F^{h\alpha}(\lambda)$

Rozpatrzmy obecnie równanie przybliżone

$$P = f^1(\lambda) = f^h(\lambda) \Big|_{h=1} \quad (55)$$

oraz równanie

$$P = \bar{f}^1(\lambda) \quad (55a)$$

powstałe przez przyjęcie w równaniu (55) parametrów  $R_{\alpha\alpha 1}$ ,  $|E_{\alpha 1}|$  równych:

$$R_1 = \max_{\alpha} \{R_{\alpha\alpha 1}\}, \quad (56)$$

$$E = \min_{\alpha} \{|E_{\alpha 1}|\}. \quad (57)$$

Łatwo wykazać nierówność:

$$\bigwedge_{\lambda \in (0, \infty)} f^1(\lambda) > \bar{f}^1(\lambda) \quad (58)$$

oraz fakt, że rozwiązanie równania (55a) posiada dwa pierwiastki rzeczywiste o różnych znakach  ${}_p \lambda_1$ ,  ${}_p \lambda_2$ , określone wzorem:

$${}_p \lambda_{1,2} = -\frac{2V_h^2}{R_1} \pm \sqrt{\frac{4V_h^4}{R_1^2} - \frac{4V_h^2}{R_1^2} + \frac{4V_h^2}{\xi R_1}} \quad (59)$$

gdzie:

$$\xi = 1 - 4GR_1 > 0, \quad (60)$$

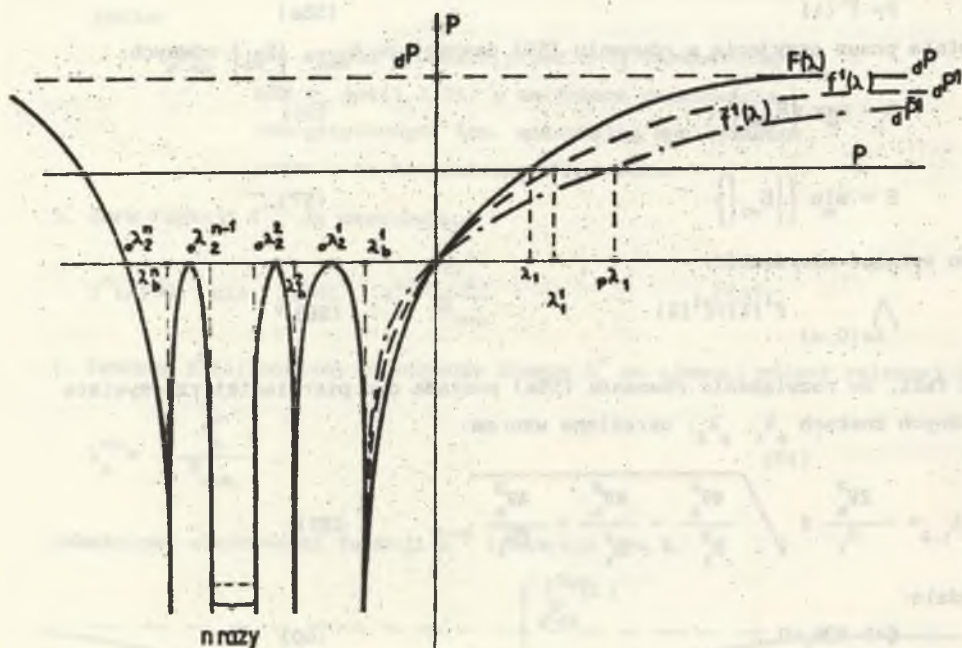
$$G = \frac{P}{3|E|^2}. \quad (61)$$

Ilustrację graficzną rozwiązań (55a), (55), (49) przedstawiono na rys. 5. Asymptoty krzywych przedstawionych na rys. 5 określają wzory:

$${}_d P = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^3 {}_d P_{\alpha h}, \quad (62)$$

$${}_d P = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{|E_{\alpha 1}|^2}{4R_{\alpha\alpha 1}}, \quad (63)$$

$${}_d \bar{P}_1 = 3 \frac{|E|^2}{4R_1}. \quad (63a)$$



Rys.5. Graficzna interpretacja rozwiązań równań (49), (55a), (55)

Fig.5. Graphical illustration of solutions of equations (49), (55a), (55)

Wzór (62) określa moc, oznaczoną przez  $P_d$ , jaką źródło trójfazowe napięć odkształconych transportuje do odbiornika w warunkach dopasowania energetycznego dla rozpatrywanej liczby harmonicznych  $h$ . Jest to maksymalna moc wydawana przez źródło zasilające (SEM).

Jeżeli

$$P < \bar{P}_d \quad (64)$$

gdzie:

$P$  - zadana moc czynna doprowadzana do odbiornika,

$\bar{P}_d$  - moc wydawana przez źródło idealne, symetryczne o wartości skutecznej napięć fazowych  $E$  (por. wzór (57)) i o rezystancjach wewnętrznych źródła równych  $R_1$  (por. wzór (56)),

to rozwiązanie równania przybliżonego (55) jest zawsze możliwe. Ponadto z nierówności (58) oraz wzoru (50) wynika, że dodatnie rozwiązania równań

(55a), (55), (49) spełniają oszacowania:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_1^1 < \lambda_{p1}^1 \quad (65)$$

gdzie:

$\lambda_1$  - rozwiązanie równania (49) (dokładne)

$\lambda_1^1$  - rozwiązanie równania (55) (przybliżone),

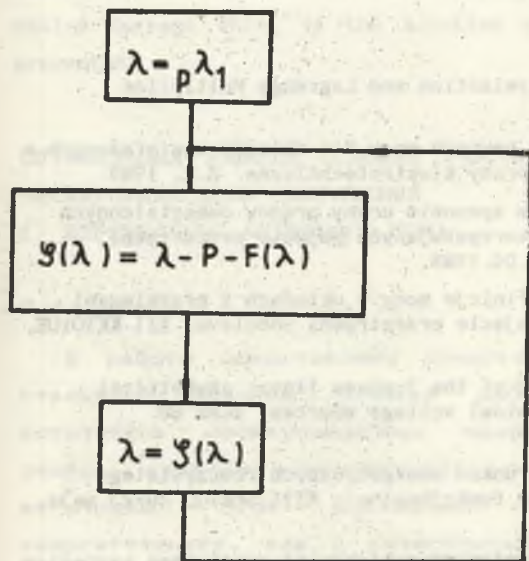
$\lambda_{p1}^1$  - rozwiązanie równanie (55a) (przybliżone).

Stosując do równania (49) metodę bisekcji w przedziale  $[0, \lambda_{p1}^1]$ , zawsze można wyznaczyć dodatni pierwiastek równania (49).

Jeżeli

$$\bigwedge_{\lambda \in (0, \lambda_{p1}^1)} \max_{p1} \left[ \sum_{h=0}^n \sum_{\alpha=1}^3 \left[ \left( 1 + \lambda \frac{R_{\alpha\alpha h}}{V_h^2} \right)^2 \right]^{-1} \left( \frac{|E_{\alpha h}|^2}{|E|^2} \right) \right] < 2, \quad (66)$$

to do rozwiązania równania (49) można również stosować metodę punktu stałego z przybliżeniem początkowym  $\lambda_{p1}^1$  (rys.6).



Rys.6. Metoda punktu stałego dla równania (49)

Fig.6. Fixed point method for equation (49)



## PODSUMOWANIE

1. Uzyskane w artykule wyniki dla układów trójfazowych z rzeczywistymi źródłami zasilającymi bez żadnych istotnych różnic przenoszą się na układy wielofazowe o dowolnej skończonej liczbie faz.
2. Istotną różnicę w stosunku do układów wielofazowych z idealnymi źródłami napięć odkształconych stanowi fakt, że konduktancje zastępcze (dla przypadku źródeł rzeczywistych) zależą nie tylko od numeru harmonicznych, ale i od numeru przewodu fazowego. Macierze tych konduktancji są macierzami diagonalnymi o różnych elementach na przekątnej bądź też macierzami symetrycznymi.

## LITERATURA

- [1] Bertsekas D.P.: Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods. Acad.Press. NY 1982.
- [2] Brodzki M., Pasko M.: Definicje pewnych mocy dla układów wielofazowych o przebiegach odkształconych. Rozprawy Elektrotechniczne. Z.2, 1989.
- [3] Brodzki M., Walczak J.: O pewnym sposobie oceny prądów odkształconych odbiorników wielozaciskowych wykorzystujących pojęcie przestrzeni Soboleva. XI SPETO Wisła, 20-23.04.1988.
- [4] Brodzki M., Walczak J.: Nowe definicje mocy w układach z przebiegami odkształconymi wykorzystujące pojęcie przestrzeni Soboleva. XII KKTOIUE, Myczkowce, 17-20.10.1989.
- [5] Czarnecki L.S.: New paper theory of the 3-phase linear asymmetrical circuits supplied from nonsinusoidal voltage sources. ICAS'88. Finlandia.
- [6] Ślwczyński M.: Optymalizacja warunków energetycznych rzeczywistego źródła napięcia metodami analizy funkcjonalnej. XIII SPETO, 20-23 maja, Wisła 1990.
- [7] Walczak J.: Rozkład prądu odbiornika dwuzaciskowego zasilanego napięciem odkształconym, z rzeczywistego źródła napięcia. XIII SPETO, 20-23 maja, Wisła 1990.

Recenzent: doc.dr inż.Zdzisław Klonowicz

Wpłynęło do Redakcji dnia 26 lutego 1991 r.

OPTIMIZATION OF OPERATING CONDITIONS OF NONIDEAL AND NONSINUSOIDAL  
THREE-PHASE VOLTAGE SOURCES

## I. DETERMINING THE ACTIVE CURRENT

## Summary

The paper presents the results of the analysis of energetic-quality operating conditions of nonideal and nonsinusoidal three-phase voltage sources. The problem of minimizing, performance index of the source current has been formulated and solved. It takes into account the evaluation of energetic and quality properties of the current, at the constrained condition on the active power supplied to the receiver. The solution of the problem has been carried out at three different assumptions concerning the inner impedance operator of the supplying source. The interpretation of the active current which is the solution of minimization problem has been presented.

ОПТИМИЗАЦИЯ РАБОТЫ УСЛОВИИ РЕАЛЬНЫХ ТРЕХФАЗОВЫХ ИСТОЧНИКОВ  
НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

## I. ВПРЕДЕЛЕНИЕ АКТИВНОГО ТОКА

## Резюме

В работе представлены результаты энергетическо-качественного анализа условий работы реальных трехфазных источников несинусоидальных напряжений. Формализована и решена проблема минимизации показателя качества тока источника. Этот показатель учитывает так оценку энергетических, как и качественных свойств тока. Проблема оптимизации решена при ограничении в виде плавности, относящегося к подведенной к приемнику активной мощности. Решение этой проблемы получено для трёх разных предпосылок относительно оператора внутреннего импеданса источника питания. В статье представлена интерпретация активного тока, который становится решением проблемы минимизации.

Janusz WALCZAK

OPTIMALIZACJA WARUNKÓW PRACY RZECZYWISTYCH TRÓJFAZOWYCH ŹRÓDEŁ NAPIĘĆ  
ODKSZTAŁCONYCH

## II. DEKOMPOZYCJA PRĄDU ŹRÓDŁA

Streszczenie. Artykuł stanowi kontynuację analizy optymalnych warunków pracy rzeczywistych, trójfazowych źródeł napięć odkształconych [4], dotyczy dekompozycji całkowitego prądu źródła na cztery składniki. Pierwszy z tych składników stanowi prąd aktywny dostarczający do odbiornika zadaną moc czynną, realizujący zadany kompromis pomiędzy minimum wartości skutecznej prądu (w sensie normy przestrzeni  $L_3^2$ ) a minimum jego zniekształceń. Pozostałe składniki wyróżnionego rozkładu prądu są niepożądane i należy je eliminować. W artykule omówiono zagadnienie wzajemnej ortogonalności wyróżnionych składników prądu źródła oraz zagadnienie ortogonalności wyróżnionych składników prądu źródła oraz zagadnienie ortogonalności tych składników względem SEM źródła. Podano koncepcję i warunek doboru układów do równoległej i szeregowej kompensacji niepożądanych składników prądu źródła.

## 1. WPROWADZENIE

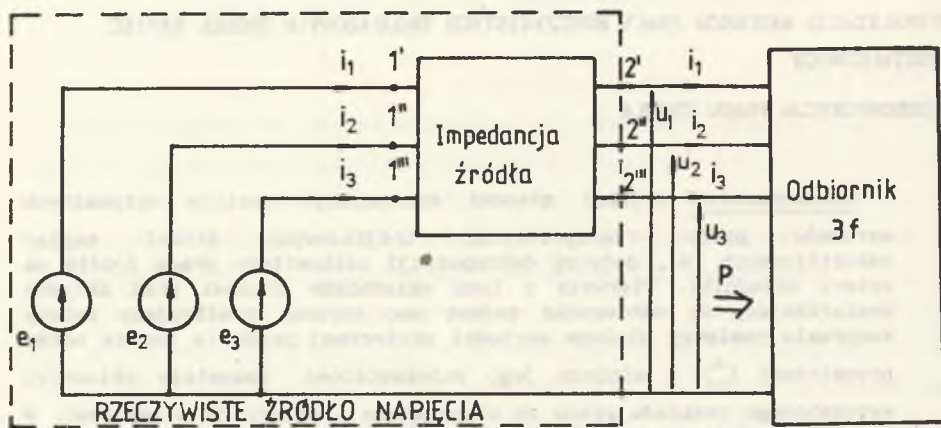
W artykule [4] analizowano warunki pracy trójfazowego źródła rzeczywistego napięć odkształconych, zasilającego odbiornik trójfazowy (rys. 1).

Minimalizacja kwadratu normy przestrzeni Sobolewa  $W_{2,a,3}^1$  funkcji prądu źródła, przy ograniczeniu równościowym na zadaną moc czynną doprowadzoną do odbiornika, spowodowała wyznaczenie prądu aktywnego źródła, określonego wzorem

$$i_{\alpha}(t) = G_{\alpha 0} E_{\alpha 0} + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} G_{\alpha h} E_{\alpha h} \exp(jh\omega t), \quad (1)$$

gdzie  $G_{\alpha h} = \frac{\lambda^*}{2V_h^2 + 2\lambda^* R_{\alpha h}}$ , (2)

$\lambda^*$  - rozwiązanie pewnego równania nieliniowego  
(por. [4], wzór (39)).



Rys.1. Odbiorniki 3-fazowy zasilany z rzeczywistego źródła napięcia odkształconego

Fig.1. 3-phase receiver supplied by nonideal and nonsinusoidal voltage source

Prąd aktywny (1) wyznaczono przy założeniu, że operator impedancyjny źródła (opisany dla każdej harmonicznej  $h \in \mathbb{N}$  macierzą  $Z_{\alpha\beta h}$ ,  $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$ ) spełnia warunki określone wzorem:

$$\bigwedge_{h \in \mathbb{N}} Z_{\alpha\beta h} = \begin{cases} R_{\alpha\alpha h} + jX_{\alpha\alpha h} & \text{dla } \alpha = \beta \\ jX_{\alpha\beta h} & \text{dla } \alpha \neq \beta, X_{\alpha\beta h} = X_{\beta\alpha h} \end{cases} \quad (3)$$

Zagadnieniem dekompozycji prądu całkowitego źródła (rys.1) na szereg składników (w tym składnik aktywny (1)) poświęcona jest dalsza część artykułu.

## 2. DEKOMPOZYCJA PRĄDU ŹRÓDŁA

Przyjmijmy, że odbiornik jest czterobiegunnikiem SLS (rys.1) i że jest on opisany dla każdej harmonicznej  $h \in \mathbb{N}$  macierzą impedancji  $Z_{\alpha\beta h}$ ,  $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$ . Prądy fazowe źródła (odbiornika)  $i_{\alpha}$  określa wzór:

$$i_{\alpha} = G_{\alpha\beta h} E_{\beta o} + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} z_{\alpha\beta h} Y_{\alpha\beta h} E_{\beta h} \exp(jh\omega t), \quad (4)$$

$\alpha \in \{1, 2, 3\}$

gdzie  $z_{\alpha\beta h} Y_{\alpha\beta h} = G_{\alpha\beta h} + jB_{\alpha\beta h}$ , (5)

$Y_{\alpha\beta h}$  - macierz odwrotna do macierzy  $Z_{\alpha\beta h} + Z_{\alpha\beta h}$ , czyli macierz admitancji układu widziana z zacisków źródła idealnego ( $1', 1'', 1'''$ ), (rys.1).

Prąd różnicowy  $i_{b\alpha}$  (określony podobnie jak w pracach [1], [2]) określa wzór:

$$\begin{aligned} i_{b\alpha} &= i_{\alpha} - i_{\alpha} = \\ &= \sum_{\beta=1}^3 \left( G_{\alpha\beta o} - G_{\alpha o} \delta_{\alpha\beta} \right) E_{\beta o} + \\ &+ \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^3 \left( z_{\alpha\beta h} Y_{\alpha\beta h} - G_{\alpha h} \delta_{\alpha\beta} \right) E_{\beta h} \exp(jh\omega t) \end{aligned} \quad (6)$$

$\alpha \in \{1, 2, 3\}$ .

Z twierdzenia o rzucie ortogonalnym w przestrzeniach Hilberta oraz ze wzoru ([4], wzór (39)) wynika nieortogonalność prądów  $i_a, i_b$  zarówno w normie przestrzeni  $L^2_3(0;T)$ , jak i przestrzeni  $W^1_{2,\alpha,3}(0;T)$ :

$$\left( i_a, i_b \right)_{L^2_3} = \left( i_a, i_b \right)_{L^2_3} \neq 0 \quad (7)$$

$$\left( i_a, i_b \right)_W = \left( i_a, i_b \right)_W \neq 0. \quad (8)$$

Prąd  $i_b$  (wzór (6)) wydawany przez źródło przenosi moc czynną.

Prąd  $i_{b\alpha}$  przedstawmy w postaci sumy:

$$i_{b\alpha} = i_{r\alpha} + i_{s\alpha}, \quad (9)$$

gdzie ;

$$i_{r\alpha} = \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^3 j B_{\alpha\beta h} E_{\beta h} \exp(jh\omega t) , \quad (10)$$

$$i_{s\alpha} = \sum_{\beta=1}^3 \left( G_{\alpha\beta o} - G_{\alpha o} \delta_{\alpha\beta} \right) E_{\beta o} + \\ + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^3 \left( G_{\alpha\beta h} - G_{\alpha h} \delta_{\alpha\beta} \right) E_{\beta h} \exp(jh\omega t) . \quad (11)$$

Prąd  $i_{r\alpha}$  nazywamy reaktacyjnym, odpowiada on za wymianę energii pola EM w układzie SEM - impedancje wewnętrzne źródła i odbiornika. Potrzeba wyodrębnienia tego składnika prądu wynika z możliwości jego kompensacji za pomocą układów pasywnych LC (por. [1], [2]).

Prąd rozproszenia  $i_{s\alpha}$  wynika z dyspersji konduktancji zastępczych widzianych z zacisków SEM źródła względem konduktancji zastępczych  $G_{\alpha h}$ . Prąd ten można przedstawić w postaci sumy dwóch składników:

$$i_{s\alpha} = i_{as\alpha} + i_{ds\alpha} , \quad (12)$$

gdzie

$$i_{as\alpha} = \sum_{\beta=1}^3 \left( G_{\alpha\beta o} - G_{\alpha o} \delta_{\alpha\beta} \right) E_{\beta o} + \\ + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^3 \left( G_{\alpha\beta h} - G_{\alpha h} \delta_{\alpha\beta} \right) E_{\beta h} \exp(jh\omega t) , \quad (13)$$

$$i_{ds\alpha} = \sum_{\beta=1}^3 \left( G_{\alpha o} - G_{\alpha o} \delta_{\alpha\beta} \right) E_{\beta o} + \\ + \sqrt{2} \operatorname{Re} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^3 \left( G_{\alpha h} - G_{\alpha h} \delta_{\alpha\beta} \right) E_{\beta h} \exp(jh\omega t) , \quad (14)$$

$$G_h = \frac{P_n}{|E_h|^2} , \quad (15)$$

$$P_h = \operatorname{Re} \sum_{\alpha=1}^3 E_{\alpha h} J_{\alpha h}^* \quad (16)$$

Składnik  $i_{as}$  prądu źródła wynika z asymetrii fazowej konduktancji widzianej z zacisków źródła, a składnik  $i_d$  prądu wynika z asymetrii częstotliwościowej konduktancji widzianych z zacisków źródła (por. prace [1], [2]).

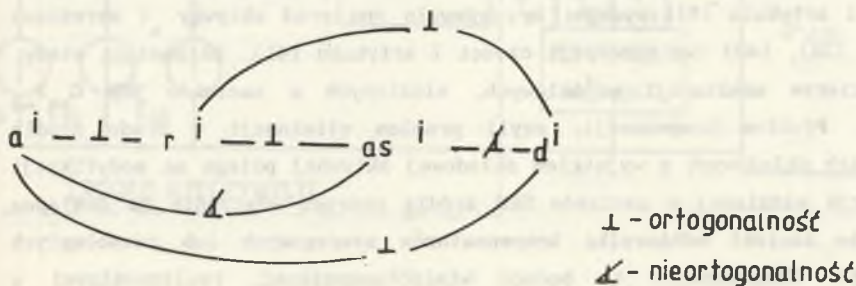
Tak samo jak w pracy [1], drogą prostych przekształceń, można wykazać wzory:

$$\begin{aligned} (i_a, i_r)_W &= 0, & (i_a, i_{as})_W &\neq 0, \\ (i_r, i_s)_W &= 0, & (i_a, i_d)_W &\neq 0, \\ (i_r, i_{as})_W &= 0, & (i_{as}, i_d)_W &\neq 0, \\ (i_r, i_d)_W &= 0, & (e, i_r)_{L_3^2} &= 0, \\ (i_a, i_s)_W &\neq 0, & (e, i_s)_{L_3^2} &\neq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Całkowity prąd odbiornika można przedstawić w postaci wzoru:

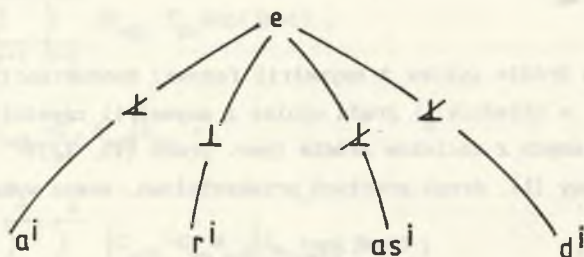
$$i = i_a + i_r + i_s = i_a + i_r + i_{as} + i_d \quad (18)$$

Wynik badania ortogonalności wyróżnionych składowych prądu (wzór (17)) względem siebie i względem SEM napięcia zasilania przedstawiono na rys.2,3.



Rys.2. Ortogonalność składowych prądu źródła w normie  $L_3^2$  i  $W_{2,\alpha,3}^1$

Fig.2. Orthogonality of current source components in the norm  $L_3^2$  i  $W_{2,\alpha,3}^1$



Rys. 3. Ortogonalność składowych prądu źródła względem SEM źródła w normie  $L_3^2$

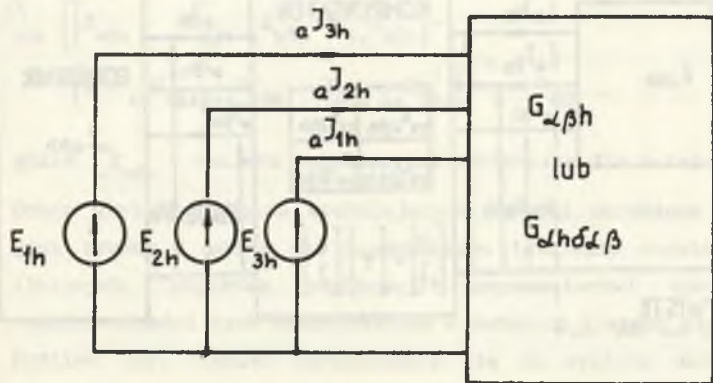
Fig. 3. Orthogonality of current source components for electromotive force (SEM) in the norm  $L_3^2$

Uzyskane wyniki odnośnie ortogonalności składowych prądu źródła są podobne jak w pracy [3] dla zasilania jednofazowego. Nieortogonalność niektórych z wyżej wymienionych składowych prądu źródła nie pozwala na konstrukcje prostopadłościanu mocy, jak to przeprowadzono w pracy [1] dla bezimpedancyjnych źródeł zasilania.

### 3. UWAGI O KOMPENSACJI

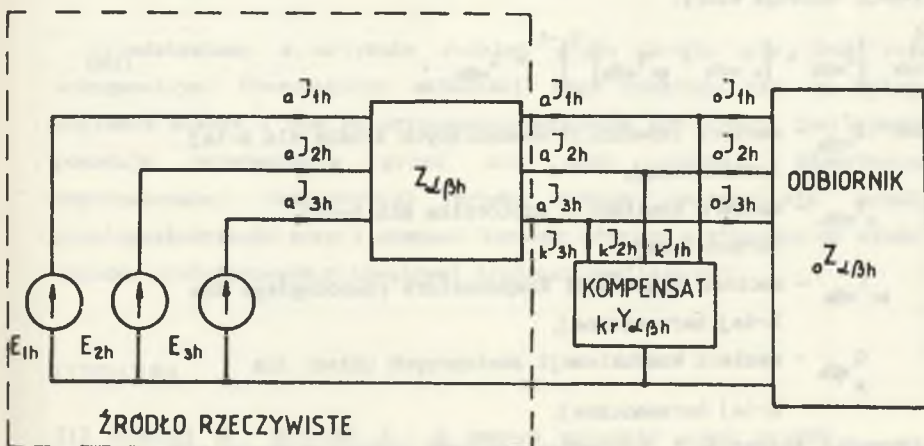
Optymalna praca źródła zasilającego (w sensie określonym wzorami (5), (6) części I artykułu [4]) wymaga, by wydawało ono prąd aktywny  $i_a$  określony wzorami (34), (40) (wg numeracji części I artykułu [4]), co nastąpi wtedy, gdy macierze admitancji wejściowych, widzianych z zacisków SEM  $G_{\alpha\beta}^{\delta}$  (rys.4). Problem kompensacji, czyli problem eliminacji z prądu źródła wszystkich składowych z wyjątkiem składowej aktywnej polega na modyfikacji admitancji widzianej z zacisków SEM źródła poprzez włączenie na dostępne fizycznie zaciski odbiornika kompensatorów szeregowych lub równoległych (rys.5,6). Kompensatory te będące wielobiegownikami, realizowalnymi w zadanych klasach, elementów nie powinny pobierać ze źródła zasilającego mocy czynnej.





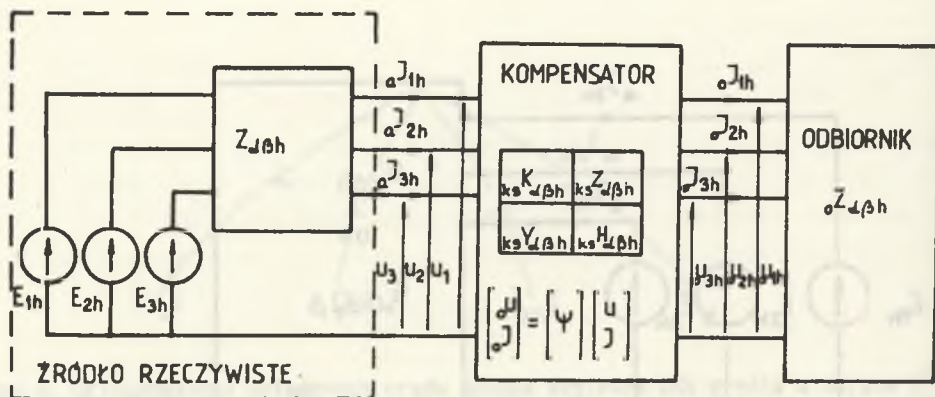
Rys. 4. Stan optymalny pracy trójfazowego źródła napięcia

Fig. 4. Optimum operating conditions of 3-phase voltage source



Rys. 5. Koncepcja kompensacji równoległej

Fig. 5. Idea of parallel compensation



Rys. 6. Koncepcja kompensacji szeregowej

Fig. 6. Idea of series compensation

W przypadku kompensacji równoległej warunki kompensacji wszystkich wyróżnionych składowych prądów fazowych źródła, z wyjątkiem składowej aktywnej, opisują wzory:

$$\bigwedge_{h \in N} \left( Z_{\alpha\beta h} + \left( Y_{\alpha\beta h} + k_r Y_{\alpha\beta h} \right)^{-1} \right)^{-1} = G_{\alpha\beta h} \quad (19)$$

gdzie:  $Z_{\alpha\beta h}$  - macierz impedancji wewnętrznych źródła dla h-tej harmonicznej,

$Y_{\alpha\beta h}$  - macierz admittancji odbiornika dla h-tej harmonicznej,

$k_r Y_{\alpha\beta h}$  - macierz admittancji kompensatora równoległego dla h-tej harmonicznej,

$G_{\alpha\beta h}$  - macierz konduktancji zastępczych układu dla h-tej harmonicznej.

W przypadku kompensacji szeregowej warunki doboru kompensatora opisanego równaniami:

$$\bigwedge_{h \in N} U_{\alpha h} = k_s K_{\alpha\beta h} U_{\beta h} + k_s Z_{\alpha\beta h} I_{\beta h} \quad (20)$$

$$\bigwedge_{h \in N} I_{\alpha h} = k_s Y_{\alpha\beta h} U_{\beta h} + k_s H_{\alpha\beta h} I_{\beta h} \quad (21)$$

gdzie:  $K_{\alpha\beta h}$ ,  $Z_{\alpha\beta h}$ ,  $Y_{\alpha\beta h}$ ,  $H_{\alpha\beta h}$  macierze immitancji kompensatora szeregowego dla h-tej harmonicznej, są następujące:

$$\bigwedge_{h \in N} \left[ \left( Z_{\alpha\beta h} + K_{\xi\gamma h} \circ Z_{\gamma\delta h} + Z_{\alpha\xi h} \right) \cdot \left( 1 + K_{\eta\gamma h}^{-1} Y_{\gamma\delta h} \cdot Z_{\delta\xi h} K_{\beta\gamma h}^{-1} \right) \right]^{-1} = G_{\alpha\beta h}, \quad (22)$$

gdzie:  $Z_{\alpha\beta h}$  - macierz impedancyjna odbiornika dla h-tej harmonicznej.

Dobór wielobiegowników spełniających warunki określone wzorami (19), (22) jest trudny i wiąże się z problemem istnienia rozwiązań układów równań liniowych (względem admitancji kompensatorów) spełniających warunki realizowalności tych kompensatorów w zadanych klasach elementów.

Możliwe jest również ograniczenie się do syntezy układów kompensujących wybrane składowe przedstawionego w artykule rozkładu prądu. Wymieniony problem nawet dla układów jednofazowych z rzeczywistymi źródłami zasilającymi nie zawsze musi posiadać rozwiązanie [3].

### Podsumowanie

Przedstawiony w artykule rozkład prądu źródła nie jest rozkładem ortogonalnym. Poszczególne składniki tego rozkładu nie są ortogonalne względem siebie i nie są ortogonalne względem SEM źródła zasilającego, co powoduje przenoszenie przez nie mocy czynnej. Nieortogonalność zaproponowanej dekompozycji prądu źródła uniemożliwia konstrukcję prostopadłościaków mocy i stanowi istotną różnicę w stosunku do właściwości układów wielofazowych z idealnymi źródłami zasilającymi.

### LITERATURA

- [1] Brodzki M., Walczak J.: O pewnym sposobie oceny prądów odkształconych odbiorników wielozaciskowych wykorzystującym pojęcie przestrzeni Sobolewa. XI SPETO. 20-23 kwiecień. Wisła 1988.
- [2] Brodzki M., Walczak J.: Nowa definicja mocy w układach z przebiegami odkształconymi wykorzystująca pojęcie przestrzeni Sobolewa. XII KKT01UE. Myczkowce, 17-20.X.1989.

- [3] Walczak J.: Rozkład prądu odbiornika dwuzaciskowego zasilanego napięciem odkształconym z rzeczywistego źródła napięcia. XIII SPETO. 20-25 maj. Wisła 1990.
- [4] Walczak J.: Optymalizacja warunków pracy rzeczywistych, trójfazowych, źródeł napięć odkształconych.  
I. Wyznaczanie prądu aktywnego źródła. ZN. Pol. Śl. Elektryka. z.122, 1991.

Recenzent: doc.dr inż. Zdzisław Klonowicz

Wpłynęło do Redakcji dnia 26 lutego 1991 r.

## OPTIMIZATION OF OPERATING CONDITIONS OF NONIDEAL AND NONSINUSOIDAL THREE-PHASE VOLTAGE SOURCES

### II. DECOMPOSITION OF THE SOURCE CURRENT

#### S u m m a r y

The paper is a continuation of the analysis of the optimum operating conditions of nonideal and nonsinusoidal three-phase voltage sources [4] and describes decomposition of the source current into four components. The active current supplying the receiver with the active power is the first of the components, it realizes a given compromise between the minimum RMS value current (in the sense of a space norm  $L_3^2$ ) and the minimum of its distortion. The other components of the current decomposition are undesirable and they should be eliminated. The paper discusses the questions of mutual orthogonality of the source current components and the problem of orthogonality of these components towards electromotive force of the source. The idea and the conditions of the system selection for parallel and serial compensation of undesirable components of the source current have been given.

ОПТИМИЗАЦИЯ РАБОТЫ УСЛОВИИ РЕАЛЬНЫХ ТРЕХФАЗОВЫХ ИСТОЧНИКОВ  
НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

## II ДЕКОМПОЗИЦИЯ ТОКА ИСТОЧНИКА

## Резюме

Данная статья является продолжением анализа оптимальных условия работы реальных, трёхфазных источников несинусоидальных напряжений. Она относится к декомпозиции общего тока на четыре составляющие. Первая составляющая является активным током, который транспортирует определённую активную мощность к приёмнику и которой определяет заданный компромисс между минимум от эффективного тока (в смысле нормы пространства  $L_3^2$ ) а минимум от его деформации. Другие составляющие этой декомпозиции нежелательные и надо их исключать. В работе решена проблема взаимной ортогональности составляющих тока и также проблема ортогональности этих составляющих относительно ЭДС источника. Представлена концепция и условия подбора компенсационных устройств для параллельной и последовательной компенсации нежелательных составляющих тока.

Lesław TOPÓR-KAMIŃSKI

## ZASTOSOWANIE DIODY POJEMNOŚCIOWEJ W UKŁADACH NIELINIOWYCH SC

Streszczenie. Przedstawiono możliwość wykonania układów nieliniowych SC z zastosowaniem złącz p-n jako pojemności zależnych od przyłożonego napięcia. Przedstawiono wyniki pomiarów przykładowych pięciu diod krzemowych, charakterystyki napięciowe badanego układu SC oraz przebiegi pojemności statycznych tych diod w funkcji napięcia wejściowego. Dla porównania pokazano także wyniki badań typowej diody pojemnościowej. Przedstawiono przykładowy układ SC dokonujący odejmowania charakterystyk nieliniowych p-n w celu uzyskania charakterystyki niemonotonicznej z ekstremum. Otrzymane z jego pomiarów wyniki przedstawiono w postaci wykresu.

Elementem nieliniowym w układach SC analogicznym do nieliniowej rezystancji w układach rezystancyjnych jest nieliniowa pojemność, w której zgromadzony ładunek nie zależy liniowo od przyłożonego napięcia. Najpowszechniej dostępną pojemnością nieliniową jest złącze półprzewodnikowe spolaryzowane zaporowo. Funkcja zmian ładunku gromadzonego w złączu w zależności od przyłożonego napięcia zależy od koncentracji domieszek spowodowanej rodzajem technologii ich wytwarzania [2]. Do teoretycznego opisu tego zjawiska przyjmuje się dwa wyidealizowane modele rozkładu domieszek: skokowy (technologia stopowa, epitaksjalna i dyfuzyjna) i liniowy (technologia głęboko dyfuzyjna).

Przyrost ładunku na złączu skokowym spolaryzowanym zaporowo w funkcji napięcia opisuje zależność [1]:

$$q = K_a \left( \sqrt{\psi_0} - \sqrt{\psi_0 - U_z} \right), \quad (1)$$

w której:

$\psi_0$  - napięcie kontaktowe półprzewodników w złączu,

$K_a$  - stała zależna od powierzchni złącza i szybkości zmian koncentracji domieszek.

W typowych zastosowaniach wykorzystujących pojemności złącza p-n (diody pojemnościowe) istotna jest pojemność różniczkowa złącza, którą opisuje zależność:

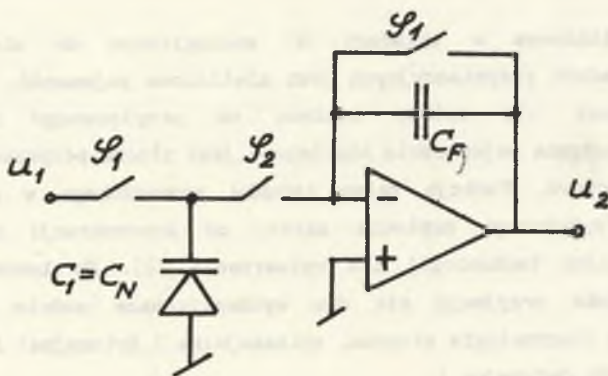
$$C_J = \frac{dQ}{dU_z} \quad (2)$$

gdyż pracują one tam dla małych sygnałów dużej częstotliwości, a przestrajane są słabym napięciem  $U_0$ .

W układach SC pojemności ładowane są do wartości sygnałów wejściowych wolnozmiennych modulowanych częstotliwością przełączającą klucze. Istotna jest zatem w nich pojemność statyczna złącza  $C_N$  w zależności od napięcia polaryzacji:

$$C_N = \frac{Q_N}{U_z} \quad (3)$$

W celu przebadania pracy złącza p-n w układach SC zbudowano układ pokazany na rys.1.



Rys.1.

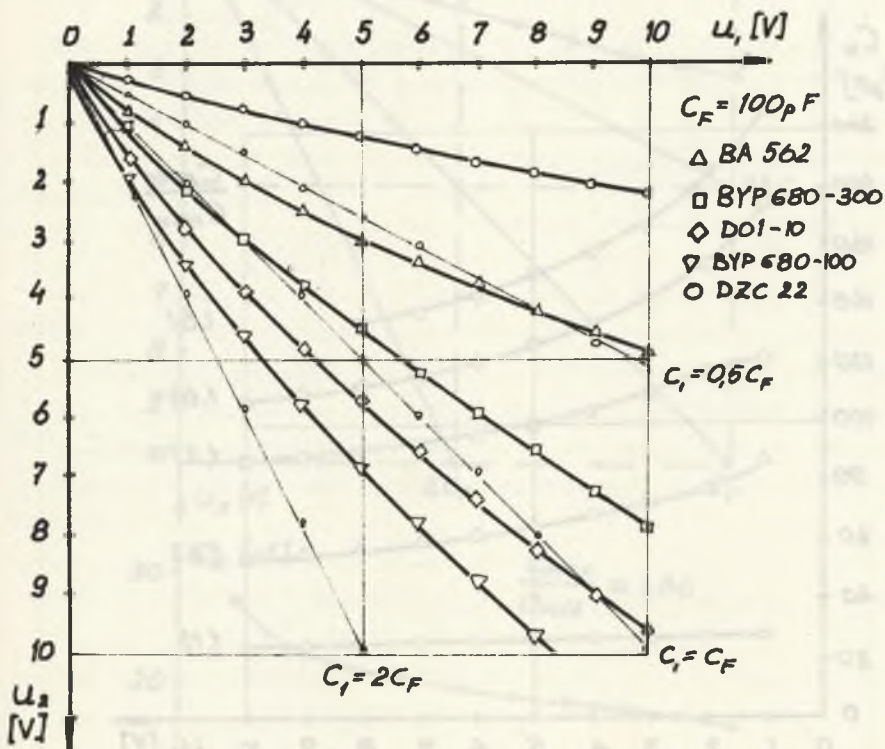
W układzie tym  $Q_N$  zgromadzony na pojemności złącza  $C_N$  zależy nieliniowo od napięcia  $u_1$  i ładuje pojemność liniową  $C_F$  wytwarzając napięcie wyjściowe  $u_2$  zgodnie z zależnością:

$$u_2 = - \frac{Q_N}{C_F} \quad (4)$$

Korzystając z relacji (3) można zapisać (4) inaczej jako:

$$u_2 = - \frac{Q_N}{C_F} u_1. \quad (5)$$

W przedstawionym układzie przebadano pięć zwykłych diod półprzewodnikowych prostowniczych jako przykłady złącz o różnych charakterystykach pojemnościowych. Wyniki pomiarów przedstawiono na rys.2.



Rys. 2.

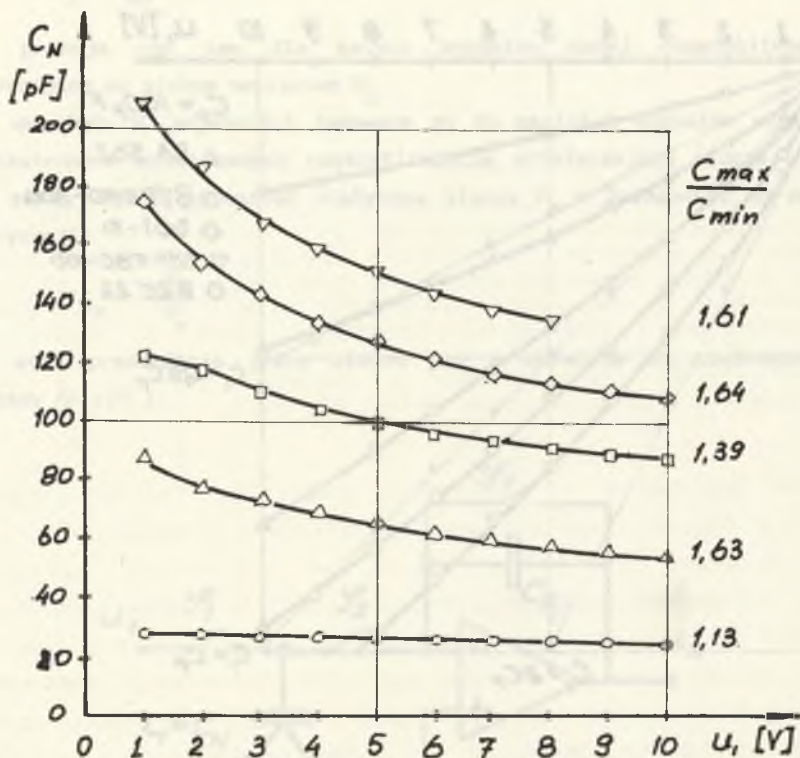
Sygnal wejściowy  $u_1$  był napięciem stałym 0-10 V, natomiast sygnał wyjściowy  $u_2$  mierzono woltomierzem wartości szczytowej w celu wygładzenia przebiegu impulsowego.

Linie proste na wykresie otrzymano z pomiarów dla pojemności  $C_1$  liniowych o wartościach będących wielokrotnościami pojemności  $C_F$ . Wyznaczono je w celu weryfikacji dokładności działania układu (np. liniowość kluczy).

Na rys.3 przedstawiono przebiegi  $C_N$  dla każdego przykładowego złącza obliczone według przekształconej relacji (5) na podstawie wyników pomiarów w

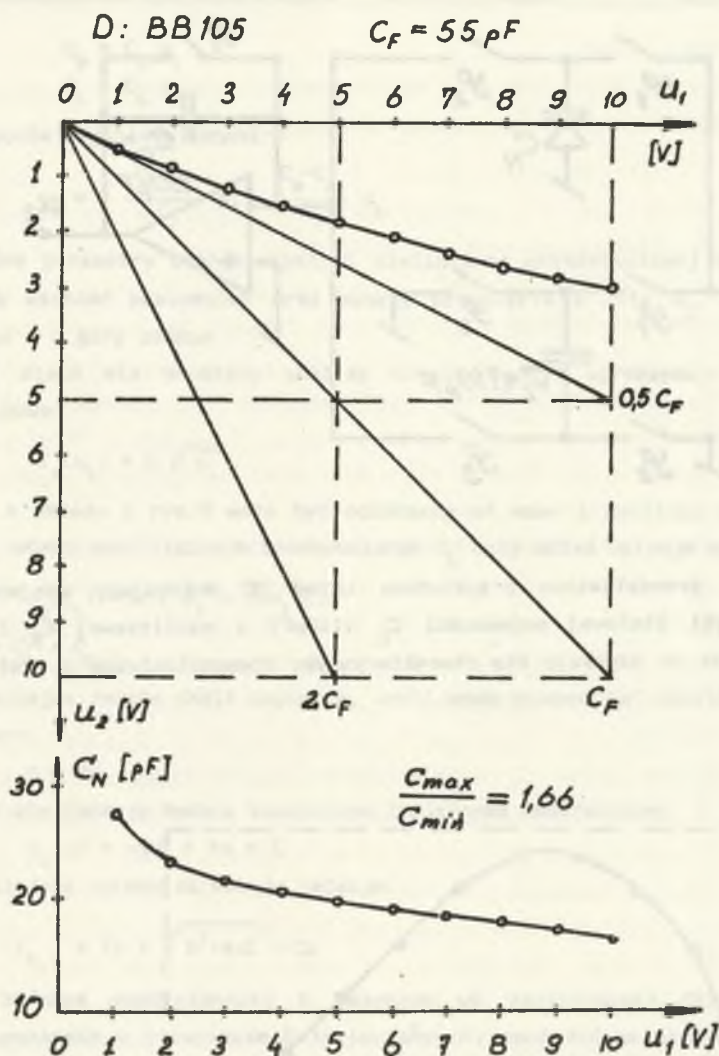


układzie z rys. 2. Zamieszczono także wartości stosunków największej pojemności  $C_N$  do najmniejszej w badanym zakresie napięć, określających w przybliżeniu względny zakres zmian pojemności statycznej złącza. Zbadane diody są zwykłymi diodami prostowniczymi o różnych powierzchniach złącza (różne prądy znamionowe).



Rys. 3.

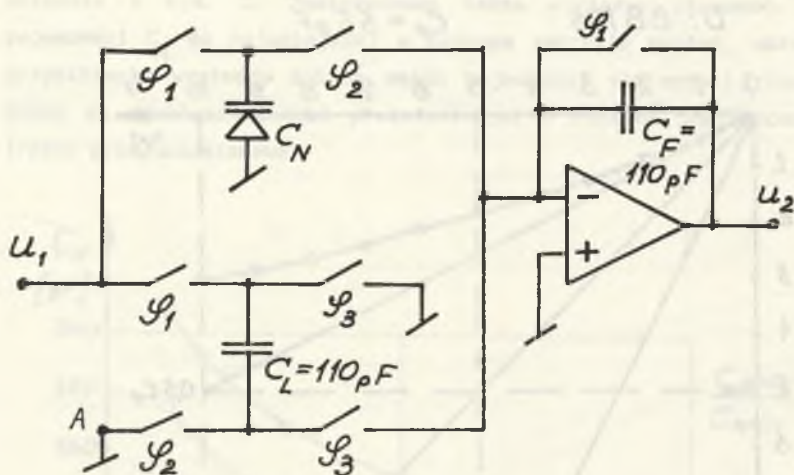
Na rys.4 przedstawione są natomiast wyniki pomiarów diody krzemowej BB105, specjalnie skonstruowanej jako pojemnościowa. Wykazuje ona mniejsze wartości bezwzględne pojemności złącza (mała powierzchnia złącza), lecz największą jej zmienność w stosunku do pozostałych diod.



Rys. 4.

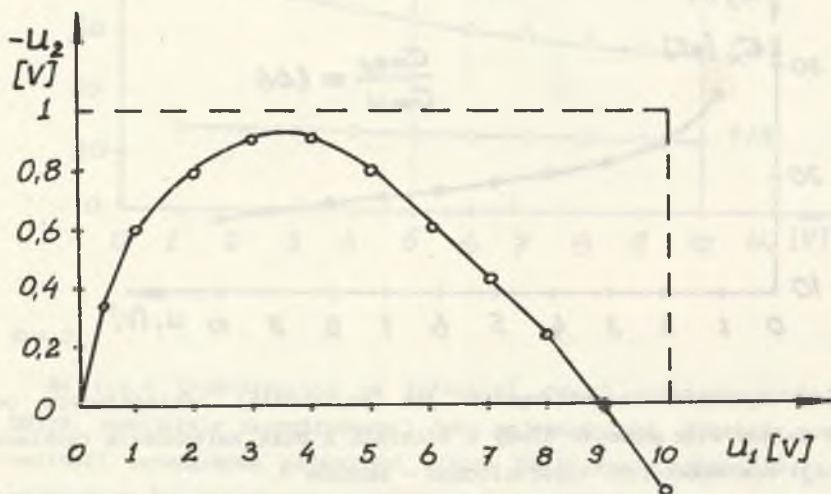
W celu uzyskania charakterystyk jak najbardziej odbiegających od liniowych należy więc stosować diody o złączach z dużą zmiennością rozkładu koncentracji domieszek (np. hiperboliczno - skokowe).

Inne charakterystyki nieliniowe można uzyskać przez zastosowanie rozbudowanych układów SC przekształcających pierwotne charakterystyki pojemności  $C_N$  przez wykonanie na nich takich operacji, jak: odwrótność, dodawanie i odejmowanie.



Rys. 5.

Na rys.5 przedstawiono przykładowy układ SC dokonujący odejmowania charakterystyki liniowej pojemności  $C_L$  (110pF) i nieliniowej  $C_N$  (dioda DO1-10), przez co uzyskuje się charakterystykę niemonotoniczną z ekstremum (rys.6).



Rys. 6.

W układzie tym klucze sterowane są zegarem trójfazowym. Na pojemnościach wejściowych gromadzą się ładunki  $Q_N$  i  $Q_L$  sumowane następnie na pojemności  $C_F$  o wartościach:

$$Q_N = C_N u_1, \quad (6)$$

$$Q_L = C_L u_1. \quad (7)$$

Stąd napięcie wyjściowe wynosi:

$$u_2 = - \frac{Q_N + Q_L}{C_F} = - \frac{C_N - C_L}{C_F} u_1. \quad (8)$$

Niektóre parametry charakterystyki nieliniowej przedstawionej na rys.6, takie jak wartość maksymalna oraz punkty przecięcia z osią  $u_1$ , mogą być regulowane i z góry zadane.

I tak niech dla prostoty analizy krzywa  $f_N(u_1)$  aproksymuje funkcja pierwiastkowa:

$$f_N(u_1) = b \sqrt{u_1}. \quad (9)$$

Punkt A układu z rys.5 może być odłączony od masy i zasilany napięciem stałym E, wtedy przy liniowym kondensatorze  $C_L$  cały układ opisuje zależność:

$$u_2(u_1) = b \sqrt{u_1} - (a u_1 - E), \quad (10)$$

gdzie  $a = C_L / C_F$ .

Wprowadzając zmianę skali napięcia, czyli nową zmienną "z" zdefiniowaną następująco:

$$z = \sqrt{x} \quad (11)$$

otrzymuje się funkcję będącą klasycznym trójmianem kwadratowym:

$$u_2(z) = -az^2 + bz + E. \quad (12)$$

Jego miejsca zerowe określają relacje:

$$z_{1,2} = (b \pm \sqrt{b^2 + 4aE}) / 2a. \quad (13)$$

Przy zadanym współczynniku b zależnym od zastosowanej diody można wyliczyć parametr a i napięcie E takie, aby otrzymać żądane miejsca zerowe na podstawie relacji (13), z których otrzymuje się zależności:

$$a = b / (z_1 + z_2), \quad (14)$$

$$c = -0,25 b (z_1 + z_2). \quad (15)$$

Wartość ekstremum otrzymanej nieliniowości można określić wstawiając do relacji (12) zmienną z o wartości:

$$z_m = (z_1 + z_2) / 2 \quad (16)$$

Ekstremum to może być dodatkowo regulowane bez zmiany położenia miejsc zerowych przez dodatkowy stopień wzmacniający napięcie  $u_2$ , dołączony do

wyjścia całego układu.

Przedstawiony układ może mieć zastosowanie do aproksymacji funkcji

$f_N(z) = k \sin \alpha z$  w granicach  $0 < \alpha z < \pi / 2$ , czyli:

$$f_N(z) = k [A(z/\alpha) - B(z/\alpha)^2] \quad (17)$$

Przy założeniu  $k, \alpha = 1$  i punktach aproksymacji  $z_1 = 0,736$  rad i  $z_2 = \pi/2$  rad otrzymuje się funkcję aproksymującą o postaci:

$$f_N(z) = 1,15z - 0,33z^2, \quad (18)$$

przy czym maksymalny błąd odchylenia od funkcji zadanej nie przekracza  $\pm 2,1\%$ .

Podobnie można poszukiwać współczynników dla aproksymacji przy podstawieniu  $z^2 = u_1$ .

Układy aproksymujące funkcję sinus mogą mieć zastosowanie w generatorach funkcyjnych budowanych w technice SC.

Przy badaniu przedstawionych układów nie zauważono, większego niż błąd pomiaru, wpływu zmian częstotliwości kluczowania przełączników w granicach od 1,8 do 36 kHz na przebieg badanych zależności nieliniowych. Radań wpływu temperatury na modelowane charakterystyki nie przeprowadzono, lecz, jak wynika z przytoczonej literatury, nie ma ona znaczącego wpływu na wartość pojemności złącza.

Przedstawione układy i przeprowadzone pomiary wskazują na możliwość zastosowania półprzewodnikowych złączy p-n jako pojemności nieliniowych w układach SC.

#### LITERATURA

- [1] Gray P.E., Searle C.L.: Electronic Principles, Physics, Models and Circuits. John Wiley, New York 1969.
- [2] Marciniak W.: Przyrządy półprzewodnikowe i układy scalone. WNT, Warszawa 1984.
- [3] Pasko M., Topór-Kamiński L.: Uniwersalny przełącznikowo-kondensatorowy układ nieliniowy. XI KKT0iUE, Ryto 1988.
- [4] Topór-Kamiński L.: Układ nieliniowy SC z komparatorem napięcia. SPETO, Wisła 1989.
- [5] Pasko M., Topór-Kamiński L.: Modelowanie funkcji ciągłych odcinkami liniowymi w układach SC z komparatorami. XII KKT0iUE, Myczkowce, 1989.

Recenzent: doc.dr hab.inż. Andrzej Cichoński

Wpłynęło do Redakcji dnia 24 maja 1990 r.

## USE OF CAPACITANCE DIODE IN NONLINEAR SC NETWORKS

## S u m m a r y

The possibilities of obtaining of nonlinear SC networks with the use of p-n functions depending on applied voltage have been shown. The results of the measurements of five selected silicon diodes, voltage characteristics of the examined SC network substracting nonlinear p-n characteristics to obtain nonmonotonous characteristic with extremum has been shown as the example. Its experimental characteristics have been plotted.

## ПРИМЕНЕНИЕ ЕМКОСТНОГО ДИОДА В НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ SC

## Р е з ю м е

Представлена возможность построения нелинейных цепей SC с применением переходов p-n как ёмкостей зависящих отложенного напряжения. Представлены результаты измерений пяти примерных кремневых диодов, электрические характеристики исследуемой цепи SC, а также изменения статических ёмкостей этих диодов в зависимости от входящего напряжения. Для сравнения указаны также результаты измерений типичного ёмкостного диода. Представлена примерная цепь SC выполняющая операцию отнимания нелинейных характеристик p-n с целью получения немонотонной характеристики с максимумом. Полученные результаты измерения представлены в виде графика.

Zofia CICHOWSKA

## TOPOLOGICZNA ANALIZA OBWODÓW SLS

Streszczenie. Opisano algorytmy: poszukiwania drzewa, tworzenia macierzy oczek fundamentalnych i przekrojów fundamentalnych oraz rozwiązywania obwodów metodą prądów strun i metodą napięć konarowych w obwodach liniowych zawierających również źródła sterowane. Wymienione metody zaprezentowano dla obwodów o wymuszeniach sinusoidalnych w stanie ustalonym.

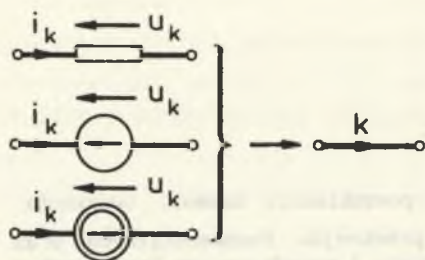
## 1. WPROWADZENIE

Analiza obwodów elektrycznych i elektronicznych o parametrach skupionych za pomocą metod topologicznych jest sposobem znanym i obecnie bardzo często stosowanym [1,3,6,8]. W bogatej literaturze związanej z tą problematyką nie ma jednak jednolitego podejścia do przedstawionych zagadnień. Niniejsza praca stanowi kwintesencję różnych podejść wzbogaconą o własne przemyślenia. Głównym jej zadaniem jest podanie przejrzystych algorytmów służących do: poszukiwania drzewa, tworzenia macierzy oczek fundamentalnych, tworzenia macierzy przekrojów fundamentalnych, rozwiązywania obwodów metodą prądów strun lub napięć konarowych przy wprowadzeniu do analizy minimalnej liczby niewiadomych.

## 2. ZAŁOŻENIA WSTĘPNE I OZNACZENIA

Rozważany jest obwód elektryczny SLS planarny lub nieplanarny złożony z elementów RLC(M), źródeł autonomicznych i źródeł sterowanych. Źródła sterowane są sterowane prądami lub napięciami gałęzi pasywnych. Graf G obwodu jest mocno spójny. Oznaczamy przez  $w$  liczbę węzłów, a przez  $g$  liczbę

gałęzi grafu ( i obwody), przy czym gałąź jest to pojedynczy element pasywny R, L lub C, lub aktywny - idealnie źródło. Wszystkie gałęzie są ostrzażkowane jednolicie - napięcie przeciwko prądowi. Orientację gałęzi w grafie wyznacza prąd tej gałęzi (rys.1).



Rys. 1.

Do analizy obwodu wprowadza się 2g niewiadomych prądów i napięć gałęziowych. Obwód jako całość jest opisany dwoma wektorami

$$u = [u_1, u_2, \dots, u_g]^T, \quad (1)$$

$$i = [i_1, i_2, \dots, i_g]^T. \quad (2)$$

Zbiór gałęzi dzielimy na pięć podzbiorów (grup gałęzi):

- 1) sterowane źródła prądowe w liczbie  $n'_j$ ,
- 2) autonomiczne źródła prądowe w liczbie  $n_j$ ,
- 3) gałęzie pasywne w liczbie  $g_p$ ,
- 4) autonomiczne źródła napięciowe w liczbie  $n_e$ ,
- 5) sterowane źródła napięciowe w liczbie  $n'_e$ .

W obrębie gałęzi pasywnych przebiega podział na struny i konary. Wynika to z warunku koniecznego rozwiązalności obwodu: wszystkie źródła prądowe sterowane i autonomiczne muszą zmieścić się w dopełnieniu D grafu, są więc strunami (aktywnymi), natomiast wszystkie źródła napięciowe sterowane i autonomiczne w drzewie T - są więc konarami (aktywnymi) [3,6].

Część gałęzi pasywnych w liczbie  $g_{kp}$  wchodzi w skład drzewa stanowiąc konary pasywne, pozostałe gałęzie pasywne w liczbie  $g_{sp}$  wchodzi w skład dopełnienia stanowiąc struny pasywne

$$g_{sp} + g_{kp} = g_p. \quad (3)$$

### 3. WYBÓR DRZEWA GRAFU

Liczba wszystkich konarów wynosi  $w-1$ , więc

$$g_{kp} + n_e + n'_e = w-1. \quad (4)$$



Wybór drzewa może być przeprowadzony np. opierając się na badaniu kwadratowej podmacierzy  $A'$  stopnia  $w-1$  macierzy incydencji  $A$  [1]. Macierz  $A'$  jest nieosobliwa, a jej kolumny odpowiadają gałęziom drzewa, jeżeli

$$\det A' = \pm 1 \text{ i wtedy } A' = A_T. \quad (5)$$

W celu utworzenia macierzy  $A'$  należy brać pod uwagę tylko  $g_{kp} = w-1 - n_e - n'_e$  gałęzi pasywnych oraz wszystkie gałęzie grup 4 i 5. Pierwsza kombinacja  $g_{kp}$  gałęzi grupy 3 i gałęzi grup 4 i 5 spełniająca warunek (5) tworzy drzewo, które może być wybrane do dalszej analizy.

Po wyborze drzewa i wprowadzeniu numeracji gałęzi macierz incydencji  $A$  można przedstawić w postaci

$$A = \begin{bmatrix} A_L & A_T \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Wektory prądów i napięć z uwzględnieniem podziału na 5 grup oraz podziału na struny i konary mają postać

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_s \\ \dots \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_{sp} \\ \dots \\ u_{kp} \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_s \\ \dots \\ i_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_{sp} \\ \dots \\ i_{kp} \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix}. \quad (7) \quad (8)$$

#### 4. TWORZENIE MACIERZY $B_f$ I $Q_f$

W oparciu o wybrane drzewo przy tej samej numeracji gałęzi dla macierzy oczek fundamentalnych  $B_f = \begin{bmatrix} 1 & B_{f12} \end{bmatrix}$ , macierzy przekrojów fundamentalnych  $Q_f = \begin{bmatrix} Q_{f11} & 1 \end{bmatrix}$  i macierzy incydencji  $A = \begin{bmatrix} A_L & A_T \end{bmatrix}$  zachodzą związki zwane quasi-ortogonalnością odpowiednich macierzy

$$AB_f^T = 0, \quad Q_f B_f^T = 0 \quad (9), (10)$$

i wynikający z równania (10) warunek

$$Q_{f11} = -B_{f12}^T \quad (11)$$

Na podstawie tych związków można utworzyć macierze  $B_f$  i  $Q_f$  opierając się na znajomości macierzy  $A$  [1]

$$B_f = \begin{bmatrix} 1 & -A^T (A^{-1})^T \\ & L \\ & & T \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$Q_f = A_{f1}^{-1} A. \quad (13)$$

## 5. MACIERZOWE RÓWNANIA WYJŚCIOWE

Prawa Kirchhoffa zapisane na podstawie macierzy  $Q_f$  i  $B_f$  mają postać

$$Q_f i = 0, \quad B_f u = 0. \quad (14), (15)$$

Wykorzystując podział na struny i konary opisany wzorami (7) i (8) oraz quasi-ortogonalność w postaci warunku (11) prawa Kirchhoffa można przekształcić do postaci transformacji przekrojowej i oczkowej

$$u = Q_f^T u_k, \quad i = B_f^T i_s. \quad (16), (17)$$

Równania (14) i (16) wraz z prawem Ohma zapisanym dla wszystkich gałęzi obwodu stanowią podstawę wyprowadzenia metody napięć konarowych, a równania (15) i (17) wraz z prawem Ohma - podstawę wyprowadzenia metody prądów strun (metoda oczkowa).

Prawo Ohma w obwodzie o dowolnych wymuszeniach i znanych warunkach początkowych wszystkich cewek i kondensatorów ma postać

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i_z \\ 0 \\ e \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_{13}(D) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{33}(D) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{53}(D) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K'_{13} \\ 0 \\ u_c(0) \\ 0 \\ K'_{53} \end{bmatrix} \quad (18)$$

gdzie  $D = \frac{d}{dt}$ ,  $D^{-1} = \int_0^t (\cdot) dt$ .

Zakłada się ciągłość przebiegów prądów w cewkach i napięć na kondensatorach w chwili  $t=0$ .  $i_L(0^-)=i_L(0^+)=i_L(0)$ ,  $u_c(0^-)=u_c(0^+)=u_c(0)$ .

## 6. METODA PRĄDÓW STRUN

Rozpisane równania wyjściowe dla obwodu o wymuszeniach sinusoidalnych w stanie ustalonym przy zastosowaniu metody symbolicznej mają postać:

$$B_f U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & B_{13} & B_{14} & B_{15} \\ 0 & \boxed{1} & B_{23} & B_{24} & B_{25} \\ 0 & 0 & B_{33} & B_{34} & B_{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = 0, \quad (15a)$$

$$I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = B_f^T I_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ B_{13}^T & B_{23}^T & B_{33}^T \\ B_{14}^T & B_{24}^T & B_{34}^T \\ B_{15}^T & B_{25}^T & B_{35}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_{sp} \end{bmatrix} \quad (17a)$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_z \\ 0 \\ E \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_{13} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{53} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix}, \quad (18a)$$

$$\text{gdzie } \mathbf{Z}_{33} = \begin{bmatrix} R_{33} & 0 & 0 \\ 0 & j\omega L_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{j\omega} S_{33} \end{bmatrix} \quad (19)$$

jest macierzą zespolonych impedancji gałęziowych. We wzorach (15a), (17a), (18a) konturami przerywanymi zaznaczono macierze dotyczące obwodów bez źródeł sterowanych. Przekształcenie równań wyjściowych prowadzi do układu  $g-w+1-n_j$  równań metody prądów strun o postaci:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} - \mathbf{K}_{13} \mathbf{B}_{13}^T & -\mathbf{K}_{13} \mathbf{B}_{13}^T \\ \mathbf{B}_{33} \mathbf{Z}_{33} \mathbf{B}_{13}^T + \mathbf{B}_{35} \mathbf{K}_{53} \mathbf{B}_{13}^T & \mathbf{B}_{33} \mathbf{Z}_{33} \mathbf{B}_{33}^T + \mathbf{B}_{35} \mathbf{K}_{53}^T \mathbf{B}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_{sp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{13} \mathbf{B}_{23}^T \mathbf{I}_Z \\ \mathbf{B}_{34} \mathbf{E} - (\mathbf{B}_{33} \mathbf{Z}_{33} \mathbf{B}_{23}^T + \mathbf{B}_{35} \mathbf{K}_{53}^T \mathbf{B}_{23}) \mathbf{I}_Z \end{bmatrix} \quad (20)$$

Równania te można zapisać skrótowo w postaci

$$\mathbf{Z}_m \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_{sp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \mathbf{E}_m \end{bmatrix} \quad (20a)$$

Dla obwodu bez źródeł sterowanych (SLSBP) równania (20) redukują się do postaci

$$\mathbf{B}_{33} \mathbf{Z}_{33} \mathbf{B}_{33}^T \mathbf{I}_{sp} = -\mathbf{B}_{34} \mathbf{E} - \mathbf{B}_{33} \mathbf{Z}_{33} \mathbf{B}_{23}^T \mathbf{I}_Z \quad (21)$$

Dla układu SLS należy sprawdzić warunek  $\det \mathbf{Z}_m \neq 0$  (warunek wystarczający rozwiązalności), dla układu SLSBP wybór odpowiedniego drzewa gwarantuje rozwiązalność.

Dalszy tok rozwiązania przebiega następująco:

- obliczenie macierzy  $\mathbf{Z}_m^{-1}$ ,
- obliczenie niewiadomych metody  $[\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_{sp}]^T = \mathbf{Z}_m^{-1} [\mathbf{I}_m, \mathbf{E}_m]^T$ ,

c) uzupełnienie obliczonego wektora o prądy pozostałych strun aktywnych

$$\mathbf{I}_a = [\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_{sp}]^T,$$

d) obliczenie wszystkich prądów gałęziowych  $\mathbf{I} = [\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3, \mathbf{I}_4, \mathbf{I}_5]^T = \mathbf{B}_f^T \mathbf{I}_a$ ,

e) obliczenie napięć na gałęziach pasywnych  $\mathbf{U}_3 = \mathbf{Z}_{33} \mathbf{I}_3$ ,

f) obliczenie napięć na źródłach napięciowych sterowanych  $\mathbf{U}_5 = \mathbf{K}_{53} \mathbf{I}_3$ ,

g) obliczenie napięć na źródłach prądowych sterowanych

$$\mathbf{U}_1 = -\mathbf{B}_{13} \mathbf{U}_3 - \mathbf{B}_{14} \mathbf{E} - \mathbf{B}_{15} \mathbf{U}_5,$$

h) obliczenie napięć na autonomicznych źródłach prądowych

$$\mathbf{U}_2 = -\mathbf{B}_{23} \mathbf{U}_3 - \mathbf{B}_{24} \mathbf{E} - \mathbf{B}_{25} \mathbf{U}_5,$$

i) zestawienie wektora wszystkich napięć gałęziowych

$$\mathbf{U} = [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4, \mathbf{U}_5]^T.$$

Dla obwodów SLSBP nie występują punkty f) i g), a pozostałe są prostsze.

## 7. METODA NAPIĘĆ KONAROWYCH

Rozpisane równania wyjściowe dla obwodu o wymuszeniach sinusoidalnych w stanie ustalonym mają postać

$$\mathbf{G}_r \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{11} & \mathbf{0}_{12} & \mathbf{0}_{13} & \mathbf{0}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} & \mathbf{0}_{23} & \mathbf{1}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}_{31} & \mathbf{0}_{32} & \mathbf{0}_{33} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{I}_5 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (14a)$$

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = Q_f^T U_k = \begin{bmatrix} Q_{11}^T & Q_{21}^T & Q_{31}^T \\ Q_{12}^T & Q_{22}^T & Q_{32}^T \\ Q_{13}^T & Q_{23}^T & Q_{33}^T \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{kp} \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} \quad (16a)$$

oraz równanie (18a) rozpisane poprzednio.

Dla potrzeb metody konieczne jest wprowadzenie macierzy zespolonych admittancji gałęziowych  $Y_{33}$ . Jest ona odwrotnością macierzy  $Z_{33}$  opisanej równaniem (19).

$$Y_{33} = \begin{bmatrix} R_{33} & 0 & 0 \\ 0 & j\omega L_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{j\omega} S_{33} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} G_{33} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{j\omega} \Gamma & 0 \\ 0 & 0 & j\omega C_{33} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Macierz  $Y_{33}$  istnieje, jeżeli dla każdej pary cewek sprzężonych zachodzi nierówność

$$L_q L_k > M_{qk}^2 \quad (23)$$

Przekształcenie równań wyjściowych (14a), (16a) i (18a) prowadzi do układu w-1-n równań metody napięć konarowych o postaci

$$\begin{bmatrix} (Q_{11} K_{13} + Q_{13}) Y_{33} Q_{13}^T & (Q_{11} K_{13} + Q_{13}) Y_{33} Q_{33}^T \\ -K_{53} Y_{33} Q_{13}^T & 1 - K_{53} Y_{33} Q_{33}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{kp} \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(Q_{11} K_{13} + Q_{13}) Y_{33} Q_{23}^T E - Q_{12} I_2 \\ K_{53} Y_{33} Q_{23}^T E \end{bmatrix} \quad (24)$$

Równania te można zapisać skrótowo w postaci

$$Y_p \begin{bmatrix} U_{kp} \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p \\ E_p \end{bmatrix} \quad (24a)$$

Dla obwodu bez źródeł sterowanych równania (24) przybierają postać

$$Q_{13} Y_{33} Q_{13}^T U_{kp} = -Q_{13} Y_{33} Q_{23} E - Q_{12} I_z \quad (25)$$

Dla układu SLS należy sprawdzić warunek  $\det Y_p \neq 0$ .

Dalszy tok rozwiązania przebiega następująco:

- obliczenie macierzy  $Y_p^{-1}$ ,
- obliczenie niewiadomych metody  $[U_{kp}, U_5]^T = Y_p^{-1} [I_p, E_p]^T$ ,
- uzupełnienie obliczonego wektora o napięcia pozostałych konarów aktywnych  $U_k = [U_{kp}, E, U_5]^T$ ,
- obliczenie wszystkich napięć gałęziowych

$$U = [U_1, U_2, U_3, U_4, U_5]^T = Q_f^T U_k,$$

- obliczenie prądów gałęzi pasywnych  $I_3 = Y_{33} U_3$ ,
- obliczenie prądów źródeł prądowych sterowanych  $I_1 = K_{13} I_3$ ,
- obliczenie prądów autonomicznych źródeł napięciowych

$$I_4 = -Q_{21} I_1 - Q_{22} I_z - Q_{23} I_3,$$

- obliczenie prądów źródeł napięciowych sterowanych

$$I_5 = -Q_{31} I_1 - Q_{32} I_z - Q_{33} I_3,$$

- zestawienie wektora wszystkich prądów gałęziowych

$$I = [I_1, I_2, I_3, I_4, I_5]^T,$$

## 8. ZAKOŃCZENIE

Zaproponowane algorytmy poszukiwania drzewa, tworzenia macierzy  $B_f$  i  $Q_f$ , układania równań obwodu metodą prądów strun i napięć konarowych stanowią bazę do opracowania programów komputerowych. Tworzone obecnie w Instytucie Elektrotechniki Teoretycznej i Przemysłowej Politechniki Śląskiej programy

komputerowe umożliwiają analizę dowolnie złożonych obwodów SLS zarówno planarnych, jak i nieplanarnych. Proponowany w pracy algorytm poszukiwania drzewa może być z powodzeniem stosowany przy topologicznym formułowaniu równań stanu.

#### LITERATURA

1. Chua L.O., Lin P.M.: Komputerowa analiza układów elektronicznych. Algorytmy i metody obliczeniowe. WNT, Warszawa 1981.
2. Cichowska Z.: Topologiczna analiza obwodów elektrycznych liniowych. Skrypt Uczelniany Politechniki Śląskiej nr 1578, Gliwice 1990.
3. Juszczak A.: Równania teorii obwodów, cz.I. Skrypt Uczelniany AGH nr 656, Kraków 1978.
4. Kulikowski J.L.: Zarys teorii grafów. Zastosowania w technice. PWN, Warszawa 1976.
5. Rajski Cz.: Teoria obwodów, t.I. WNT, Warszawa 1971.
6. Seshu S., Reed M.: Linear graphs and electrical networks. Addison - Wesley, 1961.
7. Wilson R.J.: Wprowadzenie do teorii grafów. PWN, Warszawa 1985.
8. Wołski W., Uruski M.: Teoria obwodów, cz.I i II. Skrypty Uczelniane Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1982, 1983.

Recenzent: doc.dr inż. Zdzisław Klonowicz

Wpłynęło do Redakcji dnia 1 marca 1991 r.

#### TOPOLOGICAL METHODS IN THEORETIC ELECTROTECHNICS EDUCATION

#### S u m m a r y

Algorithms of tree searching as well as fundamental circuit matrix and fundamental cut set matrix creation are presented. Moreover choral current method and branch voltage method used to solve circuits with controlled generators are described. These methods have been presented to sinusoidal circuits in the steady state.



## ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

## Резюме

В работе описаны алгоритмы: поиска дерева, создания матрицы фундаментальных контуров и фундаментальных сечений, а также решения цепей методом струнных токов и методом ветвевых напряжений для линейных цепей содержащих также управляемые источники. Названные методы представлены для цепей с синусоидальными воздействиями и в статическом состоянии.

Zofia CICHOWSKA

CEWKI SPRĘŻONE MAGNETYCZNIE W TOPOLOGICZNEJ METODZIE ANALIZY  
OBWODÓW SLS

Streszczenie. Opisano sposób uwzględnienia w analizie obwodów cewek sprężonych poprzez wprowadzenie schematów zastępczych ze źródłami sterowanymi, co prowadzi do diagonalizacji macierzy impedancji i admitancji gałęziowych. Opisano również możliwość wykorzystania dwóch typów schematów zastępczych. Dla każdej pary cewek sprężonych połączonych we wspólnym węźle schemat zastępczy zawiera trzy cewki niesprężone połączone w gwiazdę lub trójkąt.

Niniejszy artykuł stanowi kontynuację rozważań przeprowadzonych w artykule [3].

Rozważany jest obwód SLS, którego graf jest mocno spójny. Obwód (i graf) zawiera  $w$  węzłów i  $g$  gałęzi. Źródła sterowane są sterowane prądami lub napięciami gałęzi pasywnych. Gałąź jest rozumiana jako pojedynczy element pasywny RLC lub aktywny - idealne źródło. Gałęzie są ostrzałkowane jednolicie - napięcie przeciwko prądowi. Orientację gałęzi wyznacza prąd. Zbiór wszystkich gałęzi został podzielony na 5 grup:

- 1) sterowane źródła prądowe w liczbie  $n'_i$ ,
- 2) autonomiczne źródła prądowe w liczbie  $n_i$ ,
- 3) gałęzie pasywne w liczbie  $g_p$ ,
- 4) autonomiczne źródła napięciowe w liczbie  $n_e$ ,
- 5) sterowane źródła napięciowe w liczbie  $n'_e$ .

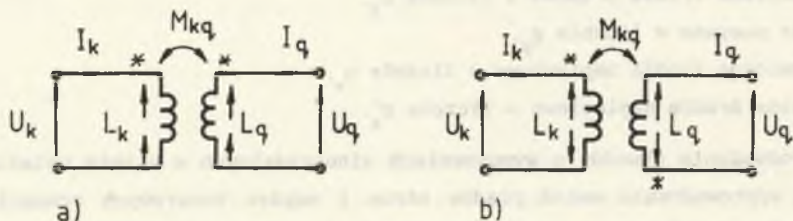
Przy rozważaniu obwodów o wymuszeniach sinusoidalnych w stanie ustalonym [2] przy wyprowadzaniu metod prądów strun i napięć konarowych równaniami wyjściowymi są: jedno z praw Kirchhoffa (I lub II), pozostałe prawo Kirchhoffa przekształcone do postaci transformacji oczkowej lub przekrojowej oraz prawo Ohma:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \\ 0 \\ E \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{53} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} \quad (1)$$

gdzie  $Z_{33}$  jest kwadratową macierzą zespolonych impedancji gałęziowych o postaci

$$Z_{33} = \begin{bmatrix} R_{33} & 0 & 0 \\ 0 & j\omega L_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{j\omega} S_{33} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Macierze rezystancji  $R_{33}$  i elastancji  $S_{33}$  są to macierze diagonalne, natomiast macierz indukcyjności  $L_{33}$  w przypadku występowania cewek sprzężonych jest macierzą niediagonalną. Na przekątnej głównej występują indukcyjności własne cewek, natomiast poza przekątną indukcyjności wzajemne, które mogą być parami dodatnie lub parami ujemne w zależności od tego, jak są ostrzałkowane prądy w cewkach w stosunku do zacisków jednoimiennych. Jeżeli prądy są zastrzałkowane jednakowo względem jednoimiennych zacisków (rys. 1a), a napięcie całkowite na każdej cewce zastrzałkowane przeciwko prądowi (zgodnie z przyjętą na wstępie umową), wówczas z równań opisujących cewki sprzężone



Rys. 1.

$$U_k = j\omega L_k I_k + j\omega M_{kq} I_q \quad (3)$$

$$U_q = j\omega L_q I_q + j\omega M_{qk} I_k$$

wynika odpowiedni element macierzy  $L_{33}$

$$L_{33} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \cdots L_k \cdots & \cdots M_{kq} \cdots \\ \vdots & \vdots \\ \cdots M_{qk} \cdots & \cdots L_q \cdots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (4)$$

Jeżeli  $M_{kq} = M_{qk}$  macierz  $L_{33}$  jest symetryczna.

Jeżeli prądy są zastrzałkowane niejednakowo względem jednoimiennych zacisków (rys. 1b), wówczas z równań opisujących cewki

$$U_k = j\omega L_k I_k - j\omega M_{kq} I_q \quad (5)$$

$$U_q = j\omega L_q I_q - j\omega M_{qk} I_k \quad (6)$$

wynika odpowiedni element macierzy

$$L_{33} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \cdots L_k \cdots & \cdots -M_{kq} \cdots \\ \vdots & \vdots \\ \cdots -M_{qk} \cdots & \cdots L_q \cdots \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (6a)$$

Macierz  $L_{33}$  z uwzględnieniem sprzężeń magnetycznych nie wprowadza żadnych trudności przy wyprowadzaniu równań metody prądów strun. Trudności pojawiają się przy przekształcaniu równań wyjściowych w metodzie napięć konarowych. Dla potrzeb metody konieczne jest wprowadzenie macierzy zespolonych admitancji gałęziowych, która jest odwrotnością macierzy  $Z_{33}$ .

$$Y_{33} = \begin{bmatrix} R_{33} & 0 & 0 \\ 0 & j\omega L_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{j\omega} S_{33} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} G_{33} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{j\omega} \Gamma_{33} & 0 \\ 0 & 0 & j\omega C_{33} \end{bmatrix} \quad (7)$$

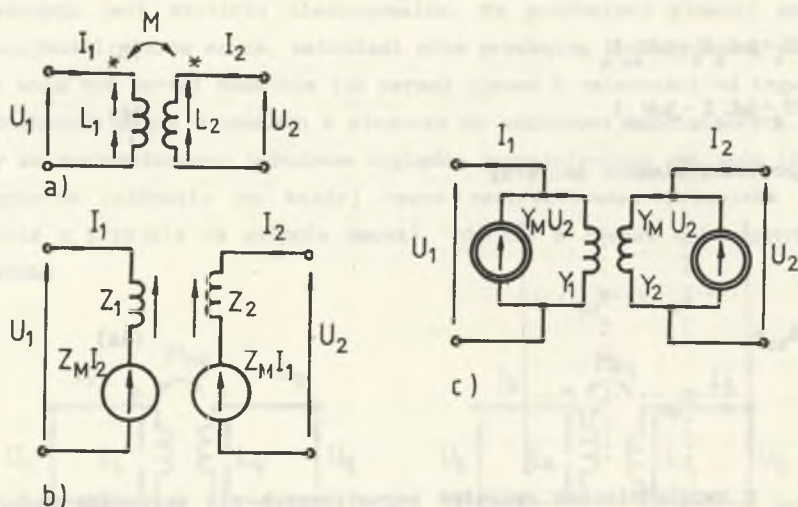
Warunkiem koniecznym istnienia macierzy  $Y_{33}$  jest, by w każdej parze cewek sprzężonych zachodziła nierówność (przy  $M_{kq} = M_{qk}$ )

$$L_k L_q > M_{kq}^2 \quad (8)$$

Macierz  $\Gamma_{33}$  jest niediagonalną macierzą kwadratową.

Rozważmy szczegółowo równania prowadzące do wyznaczenia macierzy  $\Gamma_{33}$  na przykładzie dwóch cewek sprzężonych  $L_1, L_2, M$  dla dwóch przypadków ostrzałkowania prądów cewek względem jednoimiennych zacisków.

A. Prądy ostrzałkowane jednakowo względem jednoimiennych zacisków (rys. 2).



Rys. 2.

Równaniom opisującym układ z rys. 2a

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_1 I_1 + Z_M I_2, \\ U_2 &= Z_2 I_2 + Z_M I_1, \end{aligned} \quad (9)$$

gdzie

$$Z_1 = j\omega L_1, \quad Z_2 = j\omega L_2, \quad Z_M = j\omega M, \quad (10)$$

można przyporządkować układ zastępczy ze źródłami sterowanymi napięciowymi przedstawiony na rys.2b. Rozwiązanie równań (9) ze względu na prądy przy spełnieniu warunku  $L_1 L_2 > M^2$  prowadzi do równań

$$I_1 = Y_1 U_1 - Y_M U_2, \quad (11)$$

$$I_2 = Y_2 U_2 - Y_M U_1,$$

gdzie

$$Y_1 = \frac{L_2}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)}, \quad Y_2 = \frac{L_1}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)}, \quad (12)$$

$$Y_M = \frac{M}{j\omega(L_1 L_2 - M^2)}.$$

Równaniom (11) można przyporządkować układ zastępczy ze źródłami sterowanymi prądowymi przedstawiony na rys.2c.

Macierze  $L_{33}$  i  $\Gamma_{33}$  mają w tym przypadku postać

$$j\omega L_{33} = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_M \\ Z_M & Z_2 \end{bmatrix}; \quad \frac{1}{j\omega} \Gamma_{33} = \begin{bmatrix} Y_1 & -Y_M \\ -Y_M & Y_2 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

B. Prądy ostrzałkowane niejednakowo względem jednoimiennych zacisków (rys.3).

Odpowiednie równania mają teraz postać

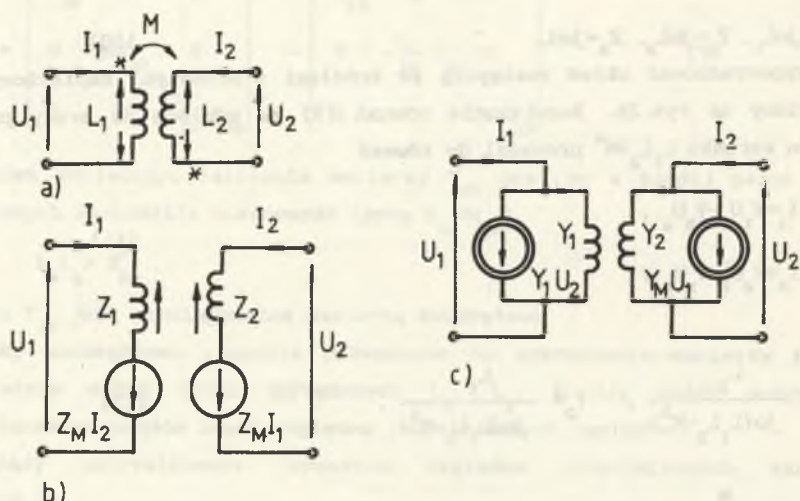
$$U_1 = Z_1 I_1 - Z_M I_2, \quad (14)$$

$$U_2 = Z_2 I_2 - Z_M I_1,$$

a po przekształceniu

$$I_1 = Y_1 U_1 + Y_M U_2, \quad (15)$$

$$I_2 = Y_2 U_2 + Y_M U_1.$$



Rys. 3.

Schematy zastępcze ze źródłami sterowanymi odpowiadające równaniom (14) i (15) przedstawiono na rys.3b i c.

Macierze  $\mathbf{L}_{33}$  i  $\mathbf{\Gamma}_{33}$  mają teraz postać

$$j\omega \mathbf{L}_{33} = \begin{bmatrix} Z_1 & -Z_M \\ -Z_M & Z_2 \end{bmatrix}; \quad \frac{1}{j\omega} \mathbf{\Gamma}_{33} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_M \\ Y_M & Y_2 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Schematy zastępcze pokazane na rys.2b i c oraz 3b i c, w których występują po dwa napięciowe lub prądowe źródła sterowane, mogą stanowić podstawę do modyfikacji metody prądów strun i metody napięć konarowych. Modyfikacja ta polegająca na uwzględnieniu zastępczych źródeł sterowanych reprezentujących sprzężenia magnetyczne w grupie odpowiednich źródeł sterowanych (1 lub 5) prowadzi do diagonalizacji macierzy  $\mathbf{L}_{33}$  i  $\mathbf{\Gamma}_{33}$ . Każda para cewek sprzężonych wprowadza do rozważań dwie dodatkowe gałęzie do grupy 1 lub 5 gałęzi będących sterowanymi źródłami prądowymi (struny aktywne), lub sterowanymi źródłami napięciowymi (konary aktywne).

W przypadku rozważania obwodu z cewkami sprzężonymi przy dowolnych wymuszeniach w stanach nieustalonych schematy zastępcze wynikające z równań operatorowych zawierają oprócz źródeł sterowanych również źródła

autonomiczne reprezentujące warunki początkowe w chwili  $t=0$ . Zakładając ciągłość przebiegów prądów cewek w chwili  $t=0$  mamy  $i(0^-)=i(0^+)=i(0)$ .

Równania dla przypadku A mają postać

$$U_1(s) = sL_1 I_1(s) + sMI_2(s) - L_1 i_1(0) - Mi_2(0), \quad (17)$$

$$U_2(s) = sL_2 I_2(s) + sMI_1(s) - L_2 i_2(0) - Mi_1(0),$$

a po przekształceniu

$$I_1(s) = Y_1(s)U_1(s) - Y_M(s)U_2(s) + \frac{i_1(0)}{s}, \quad (18)$$

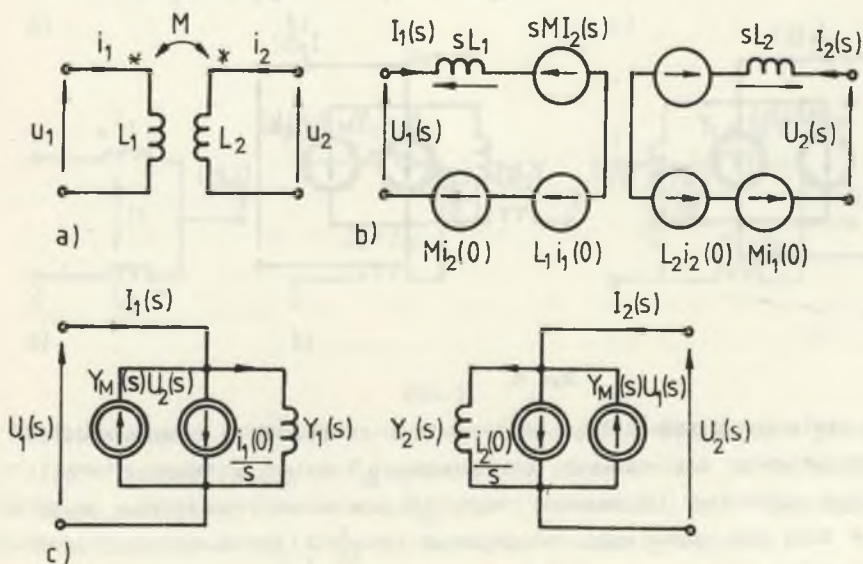
$$I_2(s) = Y_2(s)U_2(s) - Y_M(s)U_1(s) + \frac{i_2(0)}{s},$$

gdzie

$$Y_1(s) = \frac{L_2}{s(L_1 L_2 - M^2)}, \quad Y_2(s) = \frac{L_1}{s(L_1 L_2 - M^2)}, \quad (19)$$

$$Y_M(s) = \frac{M}{s(L_1 L_2 - M^2)}.$$

Schematy zastępcze odpowiadające równaniom (17) i (18) przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4.



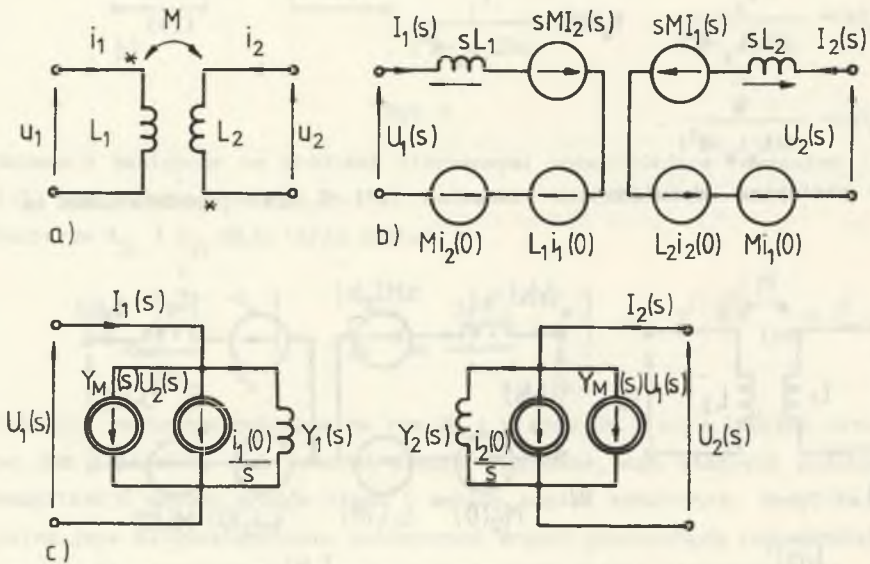
Równania dla przypadku B mają postać

$$\begin{aligned} U_1(s) &= sL_1 I_1(s) - sMI_2(s) - L_1 i_1(0) + Mi_2(0), \\ U_2(s) &= sL_2 I_2(s) - sMI_1(s) - L_2 i_2(0) + Mi_1(0), \end{aligned} \quad (20)$$

a po przekształceniu

$$\begin{aligned} I_1(s) &= Y_1(s)U_1(s) + Y_M(s)U_2(s) + \frac{i_1(0)}{s}, \\ I_2(s) &= Y_2(s)U_2(s) + Y_M(s)U_1(s) + \frac{i_2(0)}{s}. \end{aligned} \quad (21)$$

Schematy zastępcze odpowiadające równaniom (20) i (21) przedstawiono na rys. 5.

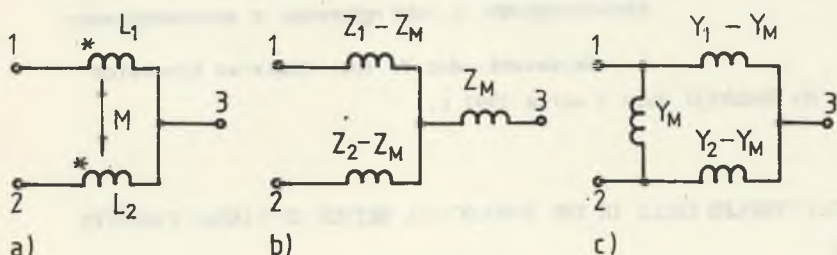


Rys. 5.

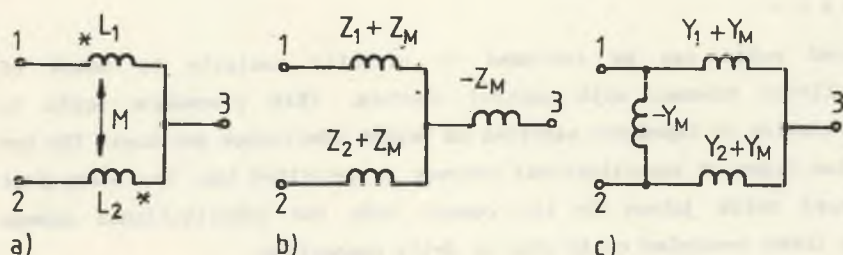
Schematy zastępcze przedstawione na rys. 4b i c oraz 5b i c oprócz dwóch źródeł sterowanych napięciowych lub prądowych zawierają również źródła autonomiczne napięciowe, lub prądowe reprezentujące warunki początkowe cewek. Źródła te mogą być odpowiednio dołączone do grupy 2 lub 4 autonomicznych źródeł prądowych, lub autonomicznych źródeł napięciowych, co prowadzi do

diagonalizacji macierzy  $s\mathbf{L}_{33}$  oraz  $\frac{1}{s}\mathbf{\Gamma}_{33}$ . W przypadku takiej modyfikacji każda para cewek sprzężonych wprowadza dwie gałęzie do grupy 1 lub 5 (źródła sterowane) oraz dwie gałęzie do grupy 2 (autonomiczne źródła prądowe), lub cztery gałęzie do grupy 4 (autonomiczne źródła napięciowe).

Rozważmy jeszcze szczególny przypadek obwodu, w którym każda para cewek sprzężonych jest połączona we wspólnym węźle. W takim przypadku również można doprowadzić do diagonalizacji macierzy  $\mathbf{L}_{33}$  wprowadzając schematy zastępcze bez sprzężeń. Dla wymuszeń sinusoidalnych przekształcając równania (9) i (14) opisujące układ dwóch cewek sprzężonych dla każdego z dwóch przypadków połączenia zacisków jednoimiennych względem wspólnego węzła, można uzyskać po dwa schematy zastępcze (niezależnie od strzałkowania prądów) złożone z trzech cewek niesprzężonych przedstawione na rys. 6 b i c oraz 7b i c przy oznaczeniach określonych wzorami (10) i (12).



Rys. 6.



Rys. 7.

Każda para cewek sprzężonych zwiększa liczbę gałęzi pasywnych o jedną, a więc rozmiar macierzy  $\mathbf{L}_{33}$  i  $\mathbf{\Gamma}_{33}$  odpowiednio wzrasta, ale są to macierze diagonalne. Istnienie macierzy  $\mathbf{\Gamma}_{33}$ , jak poprzednio, jest uwarunkowane spełnieniem nierówności  $L_k L_q > M_{kq}^2$  dla każdej pary cewek sprzężonych.

Dla dowolnych wymuszeń schematy zastępcze wynikające z przekształconych równań operatorowych zawierają również odpowiednie źródła autonomiczne reprezentujące warunki początkowe.

## LITERATURA

1. Chua L.O., Lin P.M.: Komputerowa analiza układów elektronicznych. Algorytmy i metody obliczeniowe. WNT, Warszawa 1981.
2. Cichowska Z.: Topologiczna analiza obwodów elektrycznych liniowych. Skrypt uczelniany Politechniki Śląskiej nr 1578, Gliwice 1990.
3. Cichowska Z.: Topologiczna analiza obwodów SLS. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej Elektryka z.122, Gliwice 1991.
3. Juszczak A.: Równania teorii obwodów, cz.I. Skrypt uczelniany AGH nr 656, Kraków 1978.
4. Seshu S., Reed M.: Linear graphs and electrical networks. Addison - Wesley, 1961.
5. Wołski W., Uruski M.: Teoria obwodów, cz.I i II. Skrypty uczelniane Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1982, 1983.

Recenzent: doc.dr inż. Zdzisław Klonowicz

Wpłynęło do Redakcji dnia 1 marca 1991 r.

## MAGNETICALLY COUPLED COILS IN THE TOPOLOGICAL METHOD OF LINEAR CIRCUITS ANALYSIS

### Summary

Coupled coils can be included in circuits analysis by means of substitutional schemes with control sources. This procedure leads to diagonalization of impedance matrices as branch admittance matrices. The use of the two types of substitutional schemes is described too. For every pair of coupled coils joined in the common node the substitutional scheme contains three decoupled coils star or delta connection.

**СОПРЯЖЕННЫЕ МАГНИТНЫЕ КАТУШКИ В ТОПОЛОГИЧЕСКОМ МЕТОДЕ  
АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ****Р е з ю м е**

В работе описан способ учета во время анализа цепей сопряженных катушек путем введения эквивалентных схем с управляемыми источниками. Это приводит к диагонализации матрицы импеданса и ветвевых адмитансов. Описана также возможность использования двух типов эквивалентных схем. Для каждой пары сопряженных катушек соединенных в совместном узле эквивалентная схема содержит 3 несопряженные катушки соединенные в звезду или в треугольник.