

SPIS TREŚCI

1. Władysław Mizia: Kształtowanie właściwości transformatora dwuzwojeniowego z symetrycznie dzielonymi uzwojeniami cylindrycznymi	5
2. Władysław Mizia: Analiza teoretyczna transformatora wielozwojeniowego z uwzględnieniem sprzężeń uzwojeń poprzez pole rozproszenia magnetycznego	23
3. Krzysztof Kluszczyński, Dariusz Szymański: Schematy zastępcze transformatora 3-fazowego we współrzędnych 2-osiowych przy uwzględnieniu asymetrii magnetycznej rdzenia	39
4. Krzysztof Kluszczyński, Piotr Malicki: Pasożytnicze momenty synchroniczne w silniku klatkowym z pierścieniami dodatkowymi i nieizolowanymi prętami wirnika	51
5. Krzysztof Kluszczyński, Piotr Malicki: Obliczanie momentu synchronicznego dla przykładowego silnika klatkowego z pierścieniem dodatkowym i nieizolowaną klatką	61
6. Jerzy Kudła: Obliczanie nieliniowych charakterystyk sprzężeń magnetycznych pola magnetycznego głównego w maszynie synchronicznej z wydatnymi biegunami	71
7. Roman Krok, Roman Mikiewicz: Obwodowy model cieplny do obliczeń pola temperatur w uzwojeniu wzbudzenia turbogeneratorsa z chłodzeniem bezpośrednim zabierakowym	87
8. Dariusz Spatek: Szeregi Fouriera prądu magnesującego w nieliniowych magnetykach	101
9. Grzegorz Pawelczyk: Sprzęgło indukcyjne samowzbudne	109

CONTENTS

1. Władysław Mizia: Modification of characteristics of a two-winding transformer with symmetrically divided cylindrical windings..... 5
2. Władysław Mizia: Theoretical analysis of a multi-winding transformer taking into consideration linkages between windings by magnetic leakage 23
3. Krzysztof Kluszczyński, Dariusz Szymański: Equivalent circuits of 3-phase transformer in 2-axial coordinates allowing for magnetic asymmetry of the core..... 39
4. Krzysztof Kluszczyński, Piotr Malicki: Synchronous parasitic torques in squirrel-cage motor with additional ring and uninsulated rotor-bars..... 51
5. Krzysztof Kluszczyński, Piotr Malicki: Calculating synchronous torque for exemplary squirrel-cage motor with additional ring and uninsulated rotor-bars..... 61
6. Jerzy Kudła: Obliczenia nieliniowych charakterystyk sprzężeń magnetycznych pola magnetycznego głównego w maszynie synchronicznej z wydatnymi biegunami..... 71
7. Roman Krok, Roman Miksiewicz: Thermal/electrical diagram for calculation of the temperature field in excitation winding of a turbogenerator with a direct cooling system..... 87
8. Dariusz Spałek: Fourier series of magnetizing current in nonlinear magnetic materials..... 101
9. Grzegorz Pawełczyk: Inductive self-excited clutch..... 109

Władysław MIZIA
Katedra Maszyn i Urządzeń Elektrycznych

KSZTAŁTOWANIE WŁAŚCIWOŚCI TRANSFORMATORA DWUUZWOJENIOWEGO Z SYMETRYCZNIE DZIELONYMI UZWOJENIAMI CYLINDRYCZNYMI

Streszczenie. Przy symetrycznym podziale jedno z uzwojeń stanowi m jednakowych części, natomiast drugie $(m - 1)$ jednakowych części oraz dodatkowo dwie części dwukrotnie mniejsze od pozostałych. Części składowe uzwojeń - pierwotnego i wtórnego - mają jednakowe wysokości i są na przemian współśrodkowo umieszczone na kolumnie rdzenia magnetycznego. Dla takiego układu podano ogólne zależności na rezystancje, indukcyjności własne i wzajemne uzwojeń, umożliwiające określenie i kształtowanie parametrów schematu zastępczego, a tym samym właściwości transformatora. Podano również zależności szczegółowe, określające parametry schematu zastępczego transformatora z typowymi, symetrycznymi podziałami uzwojeń, a więc przy $m = 1$ oraz $m = 2$.

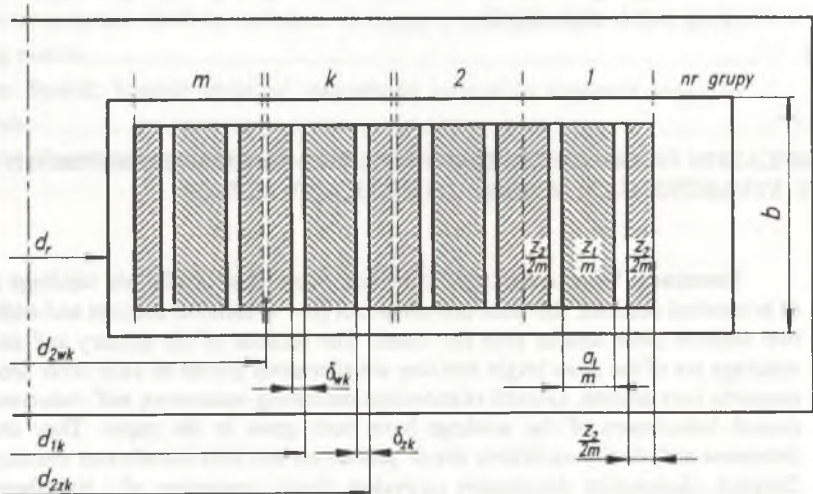
MODIFICATION OF CHARACTERISTICS OF A TWO-WINDING TRANSFORMER WITH SYMMETRICALLY DIVIDED CYLINDRICAL WINDINGS

Summary. When symmetrically divided, one of the transformer windings consists of m identical sections, the other one comprises $(m - 1)$ identical sections and additionally two sections twice smaller than the others. The sections of the primary and secondary windings are of the same height and they are alternately placed on each other around the magnetic core column. General relationships describing resistances, self-inductances and mutual inductances of the windings have been given in the paper. They enable to determine and modify equivalent circuit parameters and thus transformer characteristics. Detailed relationships determining equivalent circuit parameters of a transformer with typically, symmetrically divided windings for $m = 1$ and $m = 2$ have been given as well.

1. WSTĘP

Właściwości transformatora dwuuzwojeniowego w przejściowych i ustalonych stanach pracy zależą od parametrów jego schematu zastępczego. Parametry schematu zastępczego transformatora można kształtować, ponieważ zależą one od wymiarów geometrycznych i właściwości rdzenia magnetycznego oraz od rodzaju uzwojeń i ich rozmieszczenia na kolumnie rdzenia. Przedmiotem analizy jest transformator z symetrycznie dzielonymi uzwojeniami cylindrycznymi umieszczonymi współśrodkowo na kolumnie rdzenia magnetycznego. Zakłada się, że części składowe uzwojenia pierwotnego i wtórnego mają jednakowe wysokości i są nałożone na przemian na siebie.

Przy symetrycznym podziale jedno z uzwojeń, np. pierwotne o liczbie zwojów z_1 i grubości a_1 , jest podzielone na m części, z których każda zawiera z_1/m zwojów i ma grubość a_1/m i wtedy uzwojenie wtórne o liczbie zwojów z_2 i grubości a_2 jest podzielone na $(m-1)$ części, z których każda zawiera z_2/m zwojów i ma grubość a_2/m oraz dodatkowo na dwie części, z których każda ma liczbę zwojów $z_2/2m$ i grubość $a_2/2m$. Rozmieszczenie części składowych poszczególnych uzwojeń na kolumnie rdzenia magnetycznego przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Rozmieszczenie części składowych symetrycznie dzielonych uzwojeń cylindrycznych
Fig. 1. Arrangement of sections of symmetrically divided cylindrical windings

Z rys. 1 wynika, że symetrycznie dzielone uzwojenia cylindryczne stanowią m symetrycznych grup, z których każda składa się z jednej części uzwojenia pierwotnego oraz dwóch części uzwojenia wtórnego o liczbie zwojów $z_2/2m$ i grubości $a_2/2m$.

Na rys. 1 podano wymiary rdzenia magnetycznego oraz uzwojeń dowolnej k -tej grupy. Zgodnie z [3] na rys. 2 przedstawiono schemat zastępczy transformatora dwuuzwojeniowego ze stroną wtórną sprowadzoną do strony pierwotnej.

W schemacie zastępczym (rys. 2) R_1 , R_2' to rezystancje uzwojeń, natomiast indukcyjności zgodnie z [3] są określone zależnościami

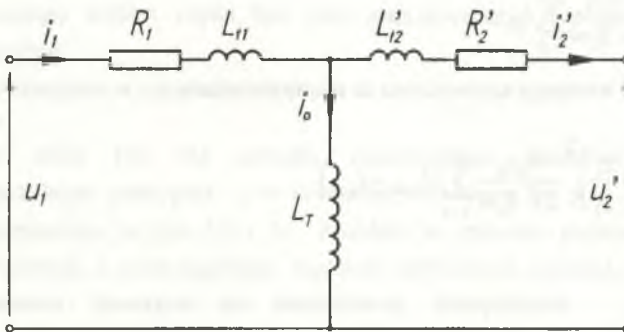
$$L_{11} = L_{1\sigma} - \frac{z_1}{z_2} M_{\sigma} \quad (1)$$

$$L'_{12} = L_{2\sigma} \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 - \frac{z_1}{z_2} M_{\sigma} \quad (2)$$

$$L_T = z_1^2 \Lambda_{Fe} + \frac{z_1}{z_2} M_{\sigma} \quad (3)$$

przy czym:

- $L_{1\sigma}, L_{2\sigma}$ - indukcyjności rozproszenia uzwojenia pierwotnego i wtórnego,
- M_{σ} - składowa indukcyjności wzajemnej uzwojeń wynikająca z pola magnetycznego rozproszenia
- Λ_{Fe} - permeancja rdzenia magnetycznego.



Rys. 2. Schemat zastępczy transformatora dwuuzwojeniowego

Fig. 2. Equivalent circuit of a two-winding transformer

Określenie parametrów schematu zastępczego transformatora jest więc możliwe przy znanych rezystancjach uzwojeń oraz ich indukcyjnościach własnych i wzajemnych z uwzględnieniem wpływu pola magnetycznego rozproszenia. Ustalenie zależności na rezystancje i indukcyjności uzwojeń cylindrycznych symetrycznie dzielonych na podstawie wymiarów geometrycznych i właściwości rdzenia magnetycznego oraz liczby zwojów i wymiarów części składowych uzwojeń umożliwia ich kształtowanie, a tym samym pozwala na uzyskanie pożądaných parametrów schematu zastępczego transformatora, określających jego właściwości w przejściowych i ustalonych stanach pracy. Często korzysta się z uproszczonego schematu zastępczego ($L_T = \infty$) i wtedy kształtowanie parametrów schematu zastępczego dotyczy rezystancji R_1 , R_2 uzwojeń i indukcyjności rozproszenia L_{T1} , L_{T2} schematu zastępczego, a więc zgodnie z zależnościami (1), (2) indukcyjności rozproszenia uzwojeń $L_{1\sigma}$, $L_{2\sigma}$ oraz składowej M_σ indukcyjności wzajemnej uzwojeń wynikającej z pola magnetycznego rozproszenia.

2. PARAMETRY ELEKTROMAGNETYCZNE UZWOJEŃ CYLINDRYCZNYCH SYMETRYCZNIE DZIELONYCH

2.1. Rezystancje uzwojeń

Rezystancja

- uzwojenia pierwotnego

$$R_1 = \frac{k_1 z_1}{\gamma S_1 m} \sum_{k=1}^m l_{1k}, \quad (4)$$

- uzwojenia wtórnego sprowadzona na stronę pierwotną

$$R'_2 = \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 \frac{k_2 z_2}{2\gamma S_2 m} \sum_{k=1}^m (l_{2wk} + l_{2zk}), \quad (5)$$

przy czym

- k_1, k_2 , - współczynniki powiększenia się rezystancji uzwojeń dla prądu przemiennego,
- S_1, S_2 , - powierzchnia przekroju przewodu nawojowego uzwojenia pierwotnego i wtórnego,
- γ - konduktywność,

a średnie długości zwojów uzwojenia pierwotnego oraz części wewnętrznej i zewnętrznej uzwojenia wtórnego w k -tej grupie

$$l_{1k} = \pi \left(d_{1k} + \frac{a_1}{m} \right),$$

$$l_{2wk} = \pi \left(d_{2wk} + \frac{a_2}{2m} \right),$$

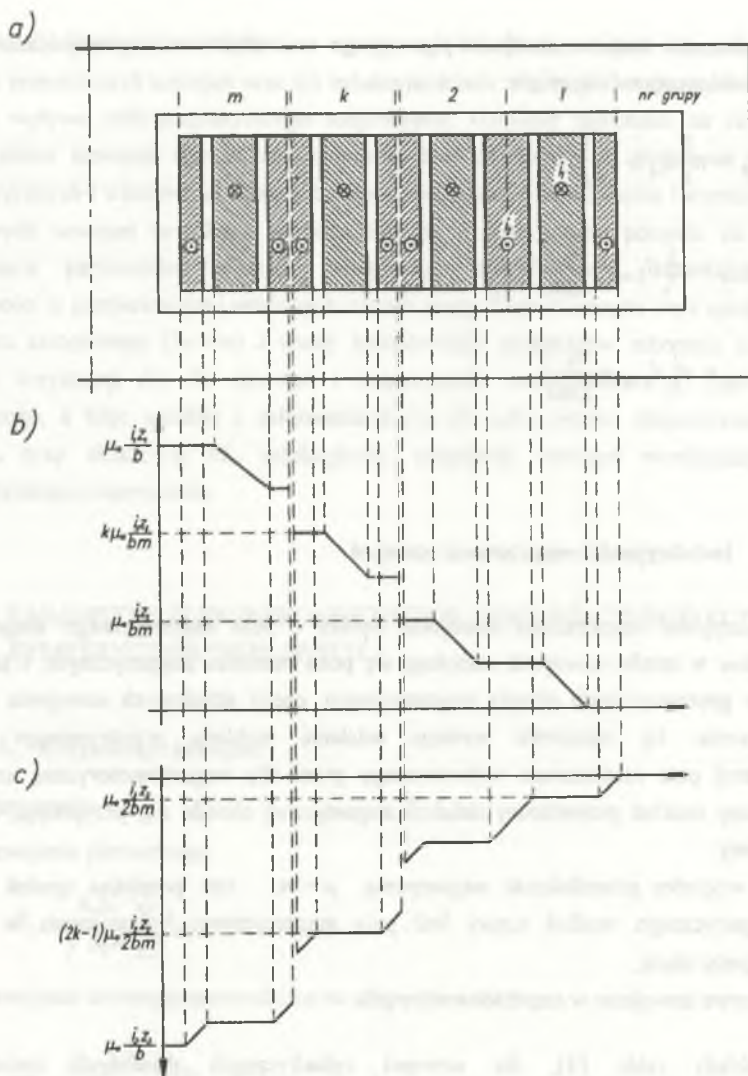
$$l_{2zk} = \pi \left(d_{2zk} + \frac{a_2}{2m} \right).$$
(6)

2.2. Indukcyjności rozproszenia uzwojeń

Indukcyjność rozproszenia uzwojenia wynika z pola magnetycznego rozproszenia, którego linie w strefie uzwojenia zamykają się poza rdzeniem magnetycznym, i zależy od wymiarów geometrycznych rdzenia magnetycznego, części składowych uzwojenia oraz ich rozmieszczenia. Jej określenie wymaga ustalenia rozkładu przestrzennego indukcji magnetycznej pola rozproszenia wytworzonego przez siłę magnetomotoryczną uzwojenia. Uproszczony rozkład przestrzenny indukcji magnetycznej określa się, przyjmując, że rdzeń magnetyczny:

- ma względną przenikalność magnetyczną $\mu = \infty$, tzn. pomijając spadek napięcia magnetycznego wzdłuż części linii pola magnetycznego rozproszenia w rdzeniu magnetycznym,
- pokrywa uzwojenie w częściach czołowych.

Rozkłady takie [4], dla uzwojeń cylindrycznych dzielonych symetrycznie, wytworzone niezależnie przez prąd i_1 w uzwojeniu pierwotnym lub prąd i_2 w uzwojeniu wtórnym przedstawiono na rys. 3 b i 3 c. Rozkłady te stanowią podstawę wyznaczania strumieni sprzężonych z poszczególnymi częściami składowymi uzwojeń, a następnie ich indukcyjności.



Rys. 3. Transformator dwuuzwojeniowy z symetrycznie dzielonymi uzwojeniami cylindrycznymi: a) rozmieszczenie części składowych uzwojeń, b), c) rozkłady przestrzenne indukcji magnetycznej pola rozproszenia wytwarzanego przez siłę magnetomotoryczną uzwojenia pierwotnego oraz wtórnego

Fig. 3. Two-winding transformer with symmetrically divided cylindrical windings: a) arrangement of winding sections, b), c) 2D distributions of the magnetic leakage flux density generated by magnetomotive force of the primary and secondary windings

Biorąc pod uwagę rys. 3 a i 3 b i rozpatrując strumienie sprzężone z kolejnymi częściami składowymi uzwojenia otrzymuje się uogólnioną zależność

$$L_{1\sigma k} = \frac{\mu_0}{b} \left(\frac{z_1}{m} \right)^2 \left[\pi \left(\frac{a_1 d_{1k}}{3m} + \frac{a_1^2}{6m^2} \right) + (k-1) \pi \left(\frac{a_1 d_{1k}}{2m} + \frac{a_1^2}{3m^2} \right) + k \frac{\pi}{4} (d_{1k}^2 - d_r^2) \right. \\ \left. + \pi \sum_{n=k+1}^m \left(\frac{a_1 d_{1n}}{2m} + \frac{a_1^2}{3m^2} \right) + \frac{\pi}{4} \sum_{n=k+1}^m (d_{1n}^2 - d_r^2) \right] \quad (7)$$

przy czym:

a_1, b, d_r, d_{1k} - podano na rys. 1,

na indukcyjność rozproszenia dowolnej k -tej części uzwojenia pierwotnego.

Indukcyjność rozproszenia uzwojenia pierwotnego

$$L_{1\sigma} = \sum_{k=1}^m L_{1\sigma k} \quad (8)$$

przy czym:

$L_{1\sigma k}$ - określa zależność (7).

Biorąc pod uwagę rys. 3a i 3c i rozpatrując strumienie sprzężone z częściami wewnętrznymi uzwojenia wtórnego kolejnych grup otrzymuje się, dla dowolnej k -tej grupy, zależność

$$L_{2w\sigma k} = \frac{\mu_0}{b} \left(\frac{z_2}{2m} \right)^2 \left[\pi \left(\frac{a_2 d_{2wk}}{6m} + \frac{a_2^2}{24m^2} \right) + (2k-1) \pi \left(\frac{a_2 d_{2wk}}{4m} + \frac{a_2^2}{12m^2} \right) + 2k \frac{\pi}{4} (d_{2wk}^2 - d_r^2) \right. \\ \left. + \pi \sum_{n=k+1}^m \left(\frac{a_2 d_{2wn}}{4m} + \frac{a_2^2}{12m^2} \right) + \frac{\pi}{4} \sum_{n=k+1}^m (d_{2wn}^2 - d_r^2) \right] \quad (9) \\ + \pi \sum_{n=k+1}^m \left(\frac{a_2 d_{2zn}}{4m} + \frac{a_2^2}{12m^2} \right) + \frac{\pi}{4} \sum_{n=k+1}^m (d_{2zn}^2 - d_r^2)$$

przy czym:

a_2, b, d_r, d_{2nk} - podano na rys. 1,

na indukcyjność rozproszenia części wewnętrznej uzwojenia wtórnego.

Postępując analogicznie otrzymuje się dla dowolnej k -tej grupy zależność

$$\begin{aligned}
 L_{2zok} = & \frac{\mu_0}{b} \left(\frac{z_2}{2m} \right)^2 \left[(2k-1)\pi \left(\frac{a_2 d_{2zk}}{4m} + \frac{a_2^2}{12m^2} \right) - \pi \left(\frac{a_2 d_{2zk}}{12m} + \frac{a_2^2}{24m^2} \right) + 2(k-1) \frac{\pi}{4} (d_{2zk}^2 - d_r^2) \right. \\
 & + \pi \sum_{n=k}^m \left(\frac{a_2 d_{2wn}}{4m} + \frac{a_2^2}{12m^2} \right) + \frac{\pi}{4} \sum_{n=k}^m (d_{2wn}^2 - d_r^2) \\
 & \left. + \pi \sum_{n=k}^m \left(\frac{a_2 d_{2zn}}{4m} + \frac{a_2^2}{12m^2} \right) + \frac{\pi}{4} \sum_{n=k}^m (d_{2zn}^2 - d_r^2) \right]
 \end{aligned} \quad (10)$$

na indukcyjność rozproszenia części zewnętrznej uzwojenia wtórnego.

Indukcyjność rozproszenia uzwojenia wtórnego

$$L_{2\sigma} = \sum_{k=1}^m (L_{2wok} + L_{2zok}) \quad (11)$$

przy czym:

L_{2wok}, L_{2zok} - określają zależności (9), (10).

2.3. Indukcyjność wzajemna uzwojeń wynikająca z pola magnetycznego rozproszenia

Indukcyjność wzajemną uzwojeń M_s określa stosunek strumienia sprzężonego z jednym z uzwojeń, wynikającego z pola magnetycznego rozproszenia, do prądu w uzwojeniu drugim, wytwarzającym to pole magnetyczne. Przyjmując, że pole magnetyczne rozproszenia jest wytwarzane przez uzwojenia pierwotne (rys. 3 b) i rozpatrując strumienie sprzężone z częściami wewnętrznymi uzwojenia wtórnego kolejnych grup (rys. 3 a) otrzymuje się dla dowolnej k -tej grupy zależność

$$M_{w\sigma k} = \frac{\mu_0}{2b} \cdot \frac{z_1 z_2}{m^2} \left\{ k \left[\pi \left(\frac{a_2 d_{2wk}}{4m} + \frac{a_2^2}{12m^2} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{2wk}^2 - d_r^2) \right] \right. \\ \left. + \pi \sum_{n=k+1}^m \left(\frac{a_1 d_{1n}}{2m} + \frac{a_1^2}{3m^2} \right) + \frac{\pi}{4} \sum_{n=k+1}^m (d_{1n}^2 - d_r^2) \right\} \quad (12)$$

na indukcyjność wzajemną tej części uzwojenia wtórnego z uzwojeniem pierwotnym wynikającą z pola magnetycznego rozproszenia.

Postępując analogicznie otrzymuje się, dla dowolnej k -tej grupy, zależność

$$M_{z\sigma k} = \frac{\mu_0}{2b} \cdot \frac{z_1 z_2}{m^2} \left\{ (k-1) \left[\pi \left(\frac{a_2 d_{2zk}}{4m} + \frac{a_2^2}{12m^2} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{2zk}^2 - d_r^2) \right] \right. \\ \left. + \pi \sum_{n=k}^m \left(\frac{a_1 d_{1n}}{2m} + \frac{a_1^2}{3m^2} \right) + \frac{\pi}{4} \sum_{n=k}^m (d_{1n}^2 - d_r^2) \right\} \quad (13)$$

na indukcyjność wzajemną części zewnętrznej uzwojenia wtórnego z uzwojeniem pierwotnym wynikającą z pola magnetycznego rozproszenia.

Indukcyjność wzajemną uzwojeń wynikającą z pola magnetycznego rozproszenia

$$M_{\sigma} = \sum_{k=1}^m (M_{w\sigma k} + M_{z\sigma k}). \quad (14)$$

Dla dzielonych uzwojeń cylindrycznych o liczbie m symetrycznych grup zależności (4), (5), (6) określają rezystancje R_1 , R_2' schematu zastępczego (rys. 2) transformatora dwuuzwojeniowego.

Podane zależności (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13), (14) określają możliwości kształtowania indukcyjności rozproszenia uzwojeń $L_{1\sigma}$, $L_{2\sigma}$ oraz składowej M_{σ} indukcyjności wzajemnej uzwojeń cylindrycznych, wynikającej z pola magnetycznego rozproszenia poprzez ich symetryczny podział, a tym samym, zgodnie z zależnościami (1), (2), (3), również na kształtowanie indukcyjności schematu zastępczego transformatora.

3. PARAMETRY ELEKTROMAGNETYCZNE SCHEMATÓW ZASTĘPCZYCH TRANSFORMATORÓW Z TYPOWYMI SYMETRYCZNYMI PODZIAŁAMI UZWOJEŃ CYLINDRYCZNYCH

W transformatorach energetycznych liczba m symetrycznych grup uzwojeń jest ograniczona i zwykle pożądane parametry schematów zastępczych transformatorów uzyskuje się przy $m = 1$ lub $m = 2$. Z tego powodu do takich przypadków ograniczono dalszą szczegółową analizę dotyczącą parametrów schematu zastępczego.

3.1. Uzwojenia cylindryczne z symetrycznym podziałem uzwojenia wtórnego na dwie części

Przy symetrycznym podziale tylko uzwojenia wtórnego $m = 1$ ($k = 1$) i po wprowadzeniu tych wartości do wyrażeń (7), (8), (9), (10) otrzymuje się następujące zależności na

- indukcyjność rozproszenia uzwojenia pierwotnego

$$L_{1\sigma 1} = L_{1\sigma} = \frac{\mu_0}{b} \cdot z_1^2 \left[\pi \left(\frac{a_1 d_{11}}{3} + \frac{a_1^2}{6} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{11}^2 - d_r^2) \right], \quad (15)$$

- indukcyjność rozproszenia części wewnętrznej uzwojenia wtórnego

$$L_{2\sigma 1} = \frac{\mu_0}{b} \cdot \frac{z_2^2}{4} \left[\pi \left(\frac{5a_2 d_{2w1}}{12} + \frac{a_2^2}{8} \right) + \frac{\pi}{2} (d_{2w1}^2 - d_r^2) \right], \quad (16)$$

- indukcyjność rozproszenia części zewnętrznej uzwojenia wtórnego

$$L_{2\sigma 2} = \frac{\mu_0}{b} \cdot \frac{z_2^2}{4} \left[\pi \left(\frac{a_2 d_{2z1}}{4} + \frac{a_2^2}{12} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{2w1}^2 - d_r^2) + \pi \left(\frac{a_2 d_{2z1}}{6} + \frac{a_2^2}{24} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{2z1}^2 - d_r^2) \right], \quad (17)$$

a po wprowadzeniu zależności (16), (17) do wyrażenia (11) indukcyjność rozproszenia uzwojenia wtórnego

$$L_{2\sigma} = \frac{\mu_0}{b} \cdot \frac{z_2^2}{4} \left[\pi \left(\frac{2a_2 d_{2w1}}{3} + \frac{5a_2^2}{24} \right) + \frac{3\pi}{4} (d_{2w1}^2 - d_r^2) + \pi \left(\frac{a_2 d_{2z1}}{6} + \frac{a_2^2}{24} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{2z1}^2 - d_r^2) \right]. \quad (18)$$

Wprowadzając $m = 1$ ($k = 1$) do wyrażen (12), (13), otrzymuje się zależności

$$M_{w\sigma 1} = \frac{\mu_0 z_1 z_2}{2b} \left[\pi \left(\frac{a_2 d_{2w1}}{4} + \frac{a_2^2}{12} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{2w1}^2 - d_r^2) \right], \quad (19)$$

$$M_{z\sigma 1} = \frac{\mu_0 z_1 z_2}{2b} \left[\pi \left(\frac{a_1 d_{11}}{2} + \frac{a_1^2}{3} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{11}^2 - d_r^2) \right], \quad (20)$$

określające indukcyjności wzajemne części wewnętrznej oraz części zewnętrznej uzwojenia wtórnego z uzwojeniem pierwotnym, wynikające z pola magnetycznego rozproszenia.

Po wprowadzeniu zależności (19), (20) do wyrażenia (14) indukcyjność wzajemna uzwojeń wynikająca z pola magnetycznego rozproszenia

$$M_{\sigma} = \frac{\mu_0 z_1 z_2}{2b} \left[\pi \left(\frac{a_2 d_{2w1}}{4} + \frac{a_2^2}{12} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{2w1}^2 - d_r^2) + \pi \left(\frac{a_1 d_{11}}{2} + \frac{a_1^2}{3} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{11}^2 - d_r^2) \right]. \quad (21)$$

Indukcyjność schematu zastępczego transformatora (rys. 2) określa się na podstawie wyrażen (1), (2), (3), (15), (18), (21) i otrzymuje się

$$L_{i1} = \frac{\mu_0 z_1^2}{b} \left[\frac{\pi a_1 d_{11}}{12} - \pi \left(\frac{a_2 d_{2w1}}{8} + \frac{a_2^2}{24} \right) + \frac{\pi}{8} (d_{11}^2 - d_{2w1}^2) \right], \quad (22)$$

$$L'_{i2} = \frac{\mu_0 z_1^2}{b} \left[-\pi \left(\frac{a_1 d_{11}}{4} + \frac{a_1^2}{6} \right) + \pi \left(\frac{a_2 d_{2w1}}{24} + \frac{a_2^2}{96} \right) + \pi \left(\frac{a_2 d_{2z1}}{24} + \frac{a_2^2}{96} \right) \right] \quad (23)$$

$$+ \frac{\pi}{16} (d_{2w1}^2 - d_{11}^2) + \frac{\pi}{16} (d_{2z1}^2 - d_{11}^2) \Big],$$

$$L_T = z_1^2 \left\{ \Lambda_{Fe} + \frac{\mu_0}{b} \left[\pi \left(\frac{a_2 d_{2w1}}{8} + \frac{a_2^2}{24} \right) + \frac{\pi}{8} (d_{2w1}^2 - d_r^2) + \pi \left(\frac{a_1 d_{11}}{4} + \frac{a_1^2}{6} \right) + \frac{\pi}{8} (d_{11}^2 - d_r^2) \right] \right\}. \quad (24)$$

Permeancję rdzenia magnetycznego

$$A_{Fe}) \frac{\mu_0}{b} \left[\pi \left(\frac{a_2 d_{2w1}}{8} + \frac{a_2^2}{24} \right) + \frac{\pi}{8} (d_{2w1}^2 - d_r^2) + \pi \left(\frac{a_1 d_{11}}{4} + \frac{a_1^2}{6} \right) + \frac{\pi}{8} (d_{11}^2 - d_r^2) \right]$$

i indukcyjność L_T , przy określonej liczbie zwojów z_1 uzwojenia pierwotnego, można kształtować głównie przez zmiany

- właściwości blach, z których jest zbudowany rdzeń magnetyczny,
- zastępczych szczelin powietrznych w rdzeniu magnetycznym.

Z wyrażen (22), (23) wynika, że charakterystyczna wielkość transformatora, jaką jest indukcyjność zwarcia

$$L_z = L_{l1} + L'_{l2} = \frac{\mu_0 z_1^2}{b} \left[-\pi \left(\frac{a_1 d_{11}}{6} + \frac{a_1^2}{6} \right) - \pi \left(\frac{a_2 d_{2w1}}{12} + \frac{a_2^2}{32} \right) + \pi \left(\frac{a_2 d_{2z1}}{24} + \frac{a_2^2}{96} \right) + \frac{\pi}{16} (d_{2z1}^2 - d_{2w1}^2) \right]. \quad (25)$$

Przyjmując $m = 1$ ($k = 1$) i posługując się, zgodnie z zależnościami (6), średnimi długościami zwojów oraz wprowadzając podane na rys. 1 grubości części składowych uzwojeń i szczelin międzyzwojeniowych, otrzymuje się:

$$L_{l1} = \frac{\mu_0 z_1^2}{b} \left[\frac{a_1 l_{11}}{12} + \frac{a_2 l_{2w1}}{8} + \frac{\delta_{w1} l_{\delta w1}}{2} - \frac{\pi}{12} (a_1^2 - \frac{a_2^2}{4}) \right], \quad (26)$$

$$L'_{l2} = \frac{\mu_0 z_1^2}{b} \left[\frac{a_2 l_{2z1}}{24} - \frac{a_2 l_{2w1}}{12} + \frac{\delta_{z1} l_{\delta z1} - \delta_{w1} l_{\delta w1}}{4} + \frac{\pi}{12} \left(a_1^2 - \frac{a_2^2}{4} \right) \right], \quad (27)$$

$$L'_z = \frac{\mu_0 z_1^2}{b} \left[\frac{a_1 l_{11}}{12} + \frac{a_2 l_{2w1}}{24} + \frac{a_2 l_{2z1}}{24} + \frac{\delta_{w1} l_{\delta w1} + \delta_{z1} l_{\delta z1}}{4} \right], \quad (28)$$

przy czym: $l_{\delta w1}, l_{\delta z1}$ - średnie długości szczelin międzyzwojeniowych.

Zależności (26), (27), (28) określają możliwości kształtowania parametrów L_{α} , L_{α} schematu zastępczego (rys. 2) oraz indukcyjności zwarcia L_z transformatora dwuuzwojeniowego z uzwojeniami cylindrycznymi i symetrycznym podziałem tylko uzwojenia wtórnego na dwie części.

3.2. Uzwojenia cylindryczne z symetrycznym podziałem uzwojenia pierwotnego na dwie i uzwojenia wtórnego na cztery części

Przy symetrycznym podziale uzwojenia pierwotnego na dwie i uzwojenia wtórnego na cztery części liczba grup $m = 2$ ($k = 1, 2$). Na podstawie ogólnych wyrażeń (7), (9), (10) otrzymuje się następujące zależności na

- indukcyjność rozproszenia części uzwojenia pierwotnego w grupie pierwszej i drugiej

$$L_{1\sigma 1} = \frac{\mu_0}{b} \cdot \frac{z_1^2}{4} \left[\pi \left(\frac{a_1 d_{11}}{6} + \frac{a_1^2}{24} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{11}^2 - d_r^2) + \pi \left(\frac{a_1 d_{12}}{4} + \frac{a_1^2}{12} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{12}^2 - d_r^2) \right], \quad (29)$$

$$L_{1\sigma 2} = \frac{\mu_0}{b} \cdot \frac{z_1^2}{4} \left[\pi \left(\frac{a_1 d_{12}}{6} + \frac{a_1^2}{24} \right) + \pi \left(\frac{a_1 d_{12}}{4} + \frac{a_1^2}{12} \right) + \frac{\pi}{2} (d_{12}^2 - d_r^2) \right], \quad (30)$$

- indukcyjność rozproszenia części wewnętrznej i zewnętrznej uzwojenia wtórnego w grupie pierwszej

$$L_{2\sigma 1} = \frac{\mu_0}{b} \cdot \frac{z_2^2}{16} \left[\pi \left(\frac{5a_2 d_{2w1}}{24} + \frac{a_2^2}{32} \right) + \frac{\pi}{2} (d_{2w1}^2 - d_r^2) + \pi \left(\frac{a_2 d_{2w2}}{8} + \frac{a_2^2}{48} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{2w2}^2 - d_r^2) + \pi \left(\frac{a_2 d_{2z2}}{8} + \frac{a_2^2}{48} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{2z2}^2 - d_r^2) \right], \quad (31)$$

$$L_{2\sigma 1} = \frac{\mu_0}{b} \cdot \frac{z_2^2}{16} \left[\pi \left(\frac{a_2 d_{2z1}}{12} + \frac{a_2^2}{96} \right) + \pi \left(\frac{a_2 d_{2w1}}{8} + \frac{a_2^2}{48} \right) + \pi \left(\frac{a_2 d_{2w2}}{8} + \frac{a_2^2}{48} \right) + \pi \left(\frac{a_2 d_{2z2}}{8} + \frac{a_2^2}{48} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{2w1}^2 - d_r^2) + \frac{\pi}{4} (d_{2w2}^2 - d_r^2) + \frac{\pi}{4} (d_{2z1}^2 - d_r^2) + \frac{\pi}{4} (d_{2z2}^2 - d_r^2) \right], \quad (32)$$

- indukcyjność rozproszenia części wewnętrznej i zewnętrznej uzwojenia wtórnego w grupie drugiej

$$L_{2w\sigma 2} = \frac{\mu_0}{b} \cdot \frac{z_2^2}{16} \left[\pi \left(\frac{11a_2 d_{2w2}}{24} + \frac{7a_2^2}{96} \right) + \pi (d_{2w2}^2 - d_r^2) \right], \quad (33)$$

$$L_{2z\sigma 2} = \frac{\mu_0}{b} \cdot \frac{z_2^2}{16} \left[\pi \left(\frac{a_2 d_{2z2}}{3} + \frac{5a_2^2}{96} \right) + \frac{3\pi}{4} (d_{2z2}^2 - d_r^2) + \pi \left(\frac{a_2 d_{2w2}}{8} + \frac{a_2^2}{48} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{2w2}^2 - d_r^2) \right]. \quad (34)$$

Po wprowadzeniu zależności (29), (30) do wyrażenia (8) indukcyjność rozproszenia uzwojenia pierwotnego

$$L_{1\sigma} = \frac{\mu_0}{b} \cdot \frac{z_1^2}{4} \left[\pi \left(\frac{5a_1 d_{11}}{6} + \frac{a_1^2}{4} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{11}^2 - d_r^2) + \frac{3\pi}{4} (d_{12}^2 - d_r^2) \right]. \quad (35)$$

Po wprowadzeniu zależności (31), (32), (33), (34) do wyrażenia (11) indukcyjność rozproszenia uzwojenia wtórnego

$$L_{2\sigma} = \frac{\mu_0}{b} \cdot \frac{z_2^2}{16} \left[\pi \left(\frac{a_2 d_{2w1}}{3} + \frac{5a_2^2}{96} \right) + \frac{3\pi}{4} (d_{2w1}^2 - d_r^2) + \pi \left(\frac{a_2 d_{2z1}}{12} + \frac{a_2^2}{96} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{2z1}^2 - d_r^2) \right. \\ \left. + \pi \left(\frac{5a_2 d_{2w2}}{6} + \frac{13a_2^2}{96} \right) + \frac{7\pi}{4} (d_{2w2}^2 - d_r^2) + \pi \left(\frac{7a_2 d_{2z2}}{12} + \frac{3a_2^2}{32} \right) + \frac{5\pi}{4} (d_{2z2}^2 - d_r^2) \right]. \quad (36)$$

Przy liczbie grup $m = 2$ na podstawie ogólnych wyrażen (12), (13)

- indukcyjności wzajemne między uzwojeniem pierwotnym a częściami - wewnętrzną oraz zewnętrzną - uzwojenia wtórnego grupy pierwszej określają zależności

$$M_{w\sigma 1} = \frac{\mu_0}{b} \cdot \frac{z_1 z_2}{8} \left[\pi \left(\frac{a_2 d_{2w1}}{8} + \frac{a_2^2}{48} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{2w1}^2 - d_r^2) + \pi \left(\frac{a_1 d_{12}}{4} + \frac{a_1^2}{12} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{12}^2 - d_r^2) \right], \quad (37)$$

$$M_{z\sigma 1} = \frac{\mu_0}{b} \cdot \frac{z_1 z_2}{8} \left[\pi \left(\frac{a_1 d_{11}}{4} + \frac{a_1^2}{12} \right) + \pi \left(\frac{a_1 d_{12}}{4} + \frac{a_1^2}{12} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{11}^2 - d_r^2) + \frac{\pi}{4} (d_{12}^2 - d_r^2) \right], \quad (38)$$

- indukcyjności wzajemne między uzwojeniem pierwotnym a częściami - wewnętrzną oraz zewnętrzną - uzwojenia wtórnego grupy drugiej określają zależności

$$M_{w\sigma 2} = \frac{\mu_0}{b} \cdot \frac{z_1 z_2}{8} \left[2\pi \left(\frac{a_2 d_{2w2}}{8} + \frac{a_2^2}{48} \right) + \frac{\pi}{2} (d_{2w2}^2 - d_r^2) \right], \quad (39)$$

$$M_{z\sigma 1} = \frac{\mu_0}{b} \cdot \frac{z_1 z_2}{8} \left[\pi \left(\frac{a_2 d_{2z2}}{8} + \frac{a_2^2}{48} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{2z2}^2 - d_r^2) + \pi \left(\frac{a_1 d_{12}}{4} + \frac{a_1^2}{12} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{12}^2 - d_r^2) \right]. \quad (40)$$

Po wprowadzeniu zależności (37), (38), (39), (40) do wyrażenia (14) indukcyjność wzajemna uzwojeń - pierwotnego i wtórnego - wynikająca z pola magnetycznego rozproszenia

$$\begin{aligned} M_{\sigma} = & \frac{\mu_0}{b} \cdot \frac{z_1 z_2}{8} \left[\pi \left(\frac{a_1 d_{11}}{4} + \frac{a_1^2}{12} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{11}^2 - d_r^2) + 3\pi \left(\frac{a_1 d_{12}}{4} + \frac{a_1^2}{12} \right) + \frac{3\pi}{4} (d_{12}^2 - d_r^2) \right. \\ & + \pi \left(\frac{a_2 d_{2w1}}{8} + \frac{a_2^2}{48} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{2w1}^2 - d_r^2) + 2\pi \left(\frac{a_2 d_{2w2}}{8} + \frac{a_2^2}{48} \right) + \frac{\pi}{2} (d_{2w2}^2 - d_r^2) \\ & \left. + \pi \left(\frac{a_2 d_{2z2}}{8} + \frac{a_2^2}{48} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{2z2}^2 - d_k^2) \right], \quad (41) \end{aligned}$$

Indukcyjność schematu zastępczego transformatora (rys. 2) określa się na podstawie wyrażen (1), (2), (3), (35), (36), (38) i otrzymuje się

$$\begin{aligned} L_{11} = & \frac{\mu_0}{b} \cdot \frac{z_1^2}{16} \left[\frac{\pi a_1 d_{11}}{6} + \pi \left(\frac{7a_1 d_{12}}{6} + \frac{a_1^2}{3} \right) - \pi \left(\frac{a_2 d_{2w1}}{4} + \frac{a_2^2}{24} \right) - \pi \left(\frac{a_2 d_{2w2}}{2} + \frac{a_2^2}{12} \right) \right. \\ & \left. - \pi \left(\frac{a_2 d_{2z2}}{4} + \frac{a_2^2}{24} \right) + \frac{\pi}{2} (d_{11}^2 - d_{2w1}^2) + \pi (d_{12}^2 - d_{2w2}^2) + \frac{\pi}{2} (d_{12}^2 - d_{2z2}^2) \right], \quad (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L'_{i2} = & \frac{\mu_0}{b} \cdot \frac{z_1^2}{16} \left[\pi \left(\frac{a_2 d_{2w1}}{12} + \frac{a_2^2}{96} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{2w1}^2 - d_{11}^2) + \pi \left(\frac{a_2 d_{2z1}}{12} + \frac{a_2^2}{96} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{2z1}^2 - d_{11}^2) \right. \\
 & + \pi \left(\frac{a_2 d_{2w2}}{3} + \frac{5a_2^2}{96} \right) + \frac{3\pi}{4} (d_{2w2}^2 - d_{12}^2) + \pi \left(\frac{a_2 d_{2z2}}{3} + \frac{5a_2^2}{96} \right) + \frac{3\pi}{4} (d_{2z2}^2 - d_{12}^2) \quad (43) \\
 & \left. - \pi \left(\frac{a_1 d_{11}}{2} + \frac{a_1^2}{6} \right) - \pi \left(\frac{3a_1 d_{12}}{2} + \frac{a_1^2}{2} \right) \right],
 \end{aligned}$$

$$L_T = z_1^2 \Lambda_{Fe} + \frac{z_1}{z_2} M_\sigma, \quad (44)$$

przy czym M_σ określa zależność (41).

Z wyrażeń (42), (43) wynika, że charakterystyczna wielkość transformatora, jaką jest indukcyjność zwarcia

$$\begin{aligned}
 L_z = L_{t1} + L'_{i2} = & \frac{\mu_0}{b} \cdot \frac{z_1^2}{16} \left[-\pi \left(\frac{a_1 d_{11}}{3} + \frac{a_1^2}{6} \right) - \pi \left(\frac{a_1 d_{12}}{3} + \frac{a_1^2}{6} \right) + \pi \left(\frac{a_2 d_{2z1}}{12} + \frac{a_2^2}{96} \right) - \pi \left(\frac{a_2 d_{2w1}}{6} + \frac{a_2^2}{32} \right) \right. \\
 & \left. + \pi \left(\frac{a_2 d_{2z2}}{3} + \frac{a_2^2}{96} \right) - \pi \left(\frac{a_2 d_{2w2}}{6} + \frac{a_2^2}{32} \right) + \frac{\pi}{4} (d_{2z1}^2 - d_{2w1}^2) + \frac{\pi}{4} (d_{2z2}^2 - d_{2w2}^2) \right]. \quad (45)
 \end{aligned}$$

Przyjmując $m = 2$ i posługując się, zgodnie z zależnościami (6), średnimi długościami zwojów oraz wprowadzając podane na rys. 1 grubości części składowych uzwojeń i szczelin międzyzwojeniowych, otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 L_{i1} = & \frac{\mu_0}{b} \cdot \frac{z_1^2}{16} \left[\frac{a_1 l_{11}}{6} + \frac{a_1 l_{12}}{6} + \frac{a_2 l_{2w1}}{4} - \frac{a_2 l_{2z2}}{4} + \frac{a_2 l_{2w2}}{2} \right. \\
 & \left. + 2(\delta_{w1} l_{\delta w1} - \delta_{z2} l_{\delta z2} + 2\delta_{w2} l_{\delta w2}) + \frac{\pi}{12} (a_2^2 - 4a_1^2) \right], \quad (46)
 \end{aligned}$$

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{b} \cdot \frac{z_1^2}{16} \left[\frac{a_2 l_{2z1}}{12} - \frac{a_2 l_{2w1}}{6} + \frac{a_2 l_{2z2}}{3} - \frac{5a_2 l_{2w2}}{12} \right. \\ \left. + \delta_{z1} l_{\delta z1} - \delta_{w1} l_{\delta w1} + 3\delta_{z2} l_{\delta z2} - 3\delta_{w2} l_{\delta w2} - \frac{\pi}{12} (a_2^2 - 4a_1^2) \right], \quad (47)$$

$$L_z = \frac{\mu_0}{b} \cdot \frac{z_1^2}{16} \left[\frac{a_1 l_{11}}{6} + \frac{a_1 l_{12}}{6} + \frac{a_2 l_{2z1}}{12} + \frac{a_2 l_{2w1}}{12} + \frac{a_2 l_{2z2}}{12} \right. \\ \left. + \frac{a_2 l_{2w2}}{12} + \delta_{z1} l_{\delta z1} + \delta_{w1} l_{\delta w1} + \delta_{z2} l_{\delta z2} + \delta_{w2} l_{\delta w2} \right], \quad (48)$$

przy czym:

$l_{\delta z1}, l_{\delta w1}$ - średnie długości szczelin międzyzwojennych w grupie pierwszej,

$l_{\delta z2}, l_{\delta w2}$ - średnie długości szczelin międzyzwojennych w grupie drugiej.

Zależności (46), (47), (48) określają możliwości kształtowania parametrów L_{11} , L_{12} schematu zastępczego (rys. 2) oraz indukcyjności zwarcia L_z transformatora dwuzwojennego z uzwojeniami cylindrycznymi i symetrycznym podziałem uzwojenia pierwotnego na dwie i uzwojenia wtórnego na cztery części.

4. UWAGI KOŃCOWE

W pracy podano ogólne zależności na indukcyjności własne i wzajemne uzwojeń cylindrycznych, przy dowolnej liczbie m części ich symetrycznego podziału, wynikające z pola magnetycznego rozproszenia. Pozwala to na określenie wpływu symetrycznego podziału uzwojeń na parametry schematu zastępczego transformatora. W tym zakresie praca stanowi rozszerzenie teorii transformatorów.

Analiza szczegółowa przeprowadzona dla $m = 1$ oraz $m = 2$ wykazuje, że podział uzwojeń pozwala na skuteczne kształtowanie parametrów schematu zastępczego oraz indukcyjności zwarcia, a tym samym właściwości transformatora, np. zakresu zmian napięcia, krotności prądu zwarcia. Ponadto wprowadzenie podziału uzwojeń poprawia skuteczność ich chłodzenia.

LITERATURA

1. Jabłoński M.: Transformatory. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1994.
2. Jezierski E.: Transformatory - podstawy teoretyczne. WNT, Warszawa 1975.
3. Mizia W.: Wpływ rozmieszczenia uzwojeń cylindrycznych na parametry schematu zastępczego transformatora dwuuzwojeniowego. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej "Elektryka" nr 138, Gliwice 1994, str. 79.
4. Mizia W.: Parametry elektromagnetyczne transformatora dwuuzwojeniowego z dowolnie dzielonymi uzwojeniami cylindrycznymi. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej "Elektryka" nr 149, Gliwice 1996.
5. Turowski J.: Obliczenia elektromagnetyczne elementów maszyn i urządzeń elektrycznych. WNT, Warszawa 1982.

Recenzent: Dr hab. inż. Jerzy Hickiewicz, prof. WSI w Opolu

Wpłynęło do Redakcji dnia 15 marca 1996 r.

Abstract

The paper deals with a two-winding transformer with symmetrically divided cylindrical windings.

When symmetrically divided, one of the windings (for instance the primary one) consists of m identical sections, while the other one comprises $(m - 1)$ identical sections and additionally two sections twice smaller than the others. The sections of the primary and secondary windings are of the same height and they are alternately placed on each other around the magnetic core column. Such arrangements of the windings (Fig. 1) can be divided into m symmetrical groups, each of them consisting of one section of the primary winding with number of coils equal to z_1/m and two sections of the secondary winding with number of coils equal to $z_2/2m$.

General relationships describing components of self-inductances and mutual inductances of:

- sections of the windings in any k -th group,
 - the primary and secondary windings
- have been given.

It makes possible to determine equivalent circuit parameters at any number m of sections of symmetrically divided windings and thus to modify transformer characteristics. Parameters of equivalent circuits and short-circuit inductances of transformers with typically, symmetrically divided windings i.e. for $m = 1$ and $m = 2$ have been determined basing on the general relationships.

Władysław MIZIA
Katedra Maszyn i Urządzeń Elektrycznych

ANALIZA TEORETYCZNA TRANSFORMATORA WIELOUZWOJENIOWEGO Z UWZGLĘDNIENIEM SPRĘŻEŃ UZWOJEŃ POPRZEZ POLE ROZPROSZENIA MAGNETYCZNEGO

Streszczenie. W pracy jest podana analiza teoretyczna transformatora o dowolnej liczbie uzwojeń cylindrycznych o jednakowej wysokości, umieszczonych współśrodkowo na kolumnie rdzenia magnetycznego. Przyjęto, że jedno dowolne uzwojenie jest pierwotne, a więc zasilane, natomiast pozostałe to uzwojenia wtórne, do których są przyłączone odbiory. Analiza teoretyczna uwzględnia wzajemne sprzężenia uzwojeń poprzez pole magnetyczne rozproszenia, zależne od prądów we wszystkich uzwojeniach. Wynikiem analizy jest schemat zastępczy transformatora o dowolnej liczbie uzwojeń, który stanowi podstawę określania właściwości transformatora przy pracy w stanie nieustalonym i ustalonym. Praca stanowi rozszerzenie teorii transformatorów na transformatory o dowolnej liczbie uzwojeń oraz o ujęcie wpływu sprzężeń uzwojeń poprzez pole magnetyczne rozproszenia.

THEORETICAL ANALYSIS OF A MULTI-WINDING TRANSFORMER TAKING INTO CONSIDERATION LINKAGES BETWEEN WINDINGS BY MAGNETIC LEAKAGE

Summary. The theoretical analysis dealing with a transformer with any number of cylindrical windings of the same height which are concentrically placed around the magnetic core column has been presented in the paper.

It has been assumed that one winding is a primary one and it is supplied. The other windings are secondary ones and they are loaded. The theoretical analysis takes into account mutual linkages between windings by magnetic leakage which depends on currents in all windings. The analysis has resulted in working out of equivalent circuit of a transformer with any number of windings. This circuit is the basis for determining of a transformer characteristics at transient and steady states.

The analysis presented in this paper develops the transformer theory allowing to apply it to transformers with any number of windings when taking into account the influence of winding linkages by magnetic leakage.

1. WSTĘP

Właściwości transformatora jednofazowego zależą od rodzaju blach i rozwiązania rdzenia magnetycznego oraz od rodzaju uzwojeń, ich liczby i rozmieszczenia na rdzeniu magnetycznym. Przedmiotem analizy jest transformator jednofazowy o dowolnej liczbie uzwojeń cylindrycznych umieszczonych współśrodkowo na kolumnie rdzenia magnetycznego. Zakłada się, że:

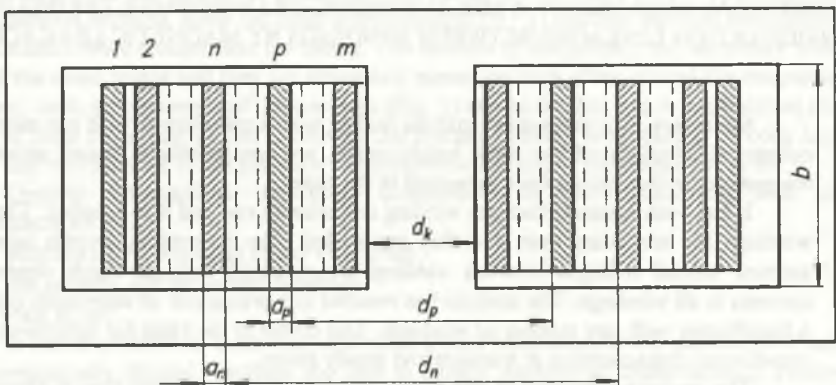
- uzwojenia mają jednakowe wysokości, zbliżone do wysokości kolumny rdzenia magnetycznego,
- jedno z uzwojeń jest pierwotne, a więc zasilane, natomiast pozostałe to uzwojenia wtórne, do których przyłączone są odbiory,
- dowolne spośród uzwojeń umieszczonych na kolumnie rdzenia magnetycznego może być uzwojeniem pierwotnym.

Przyjmując, że liczba uzwojeń wynosi m , na rys. 1 podano przyjętą numerację uzwojeń, podstawowe wymiary n -tego i p -tego uzwojenia oraz wymiary rdzenia magnetycznego, przy czym średnica kolumny

$$d_k = \sqrt{\frac{4S_k}{\pi}} \quad (1)$$

gdzie:

S_k - powierzchnia przekroju poprzecznego kolumny rdzenia magnetycznego, na której są umieszczone uzwojenia.



Rys. 1. Podstawowe wymiary rdzenia magnetycznego oraz n -tego i p -tego uzwojenia
 Fig. 1. Basic dimensions of magnetic core, n -th and p -th winding

Rezystancja dowolnego, np. n -tego uzwojenia cylindrycznego

$$R_n = k_n \frac{z_n l_n}{\gamma S_n} \quad (2)$$

przy czym:

- k_n - współczynnik powiększenia się rezystancji przy przepływie prądu przemiennego,
- $l_n = \pi(d_n + a_n)$ - średnia długość zwoju,
- γ, z_n, S_n - konduktywność, liczba zwojów, łączna powierzchnia przekroju poprzecznego gałęzi równoległych uzwojenia.

Z podziału pola magnetycznego wytworzonego przez siłę magnetomotoryczną uzwojenia na pole

- główne, którego linie zamykają się w rdzeniu magnetycznym,
- rozproszenia, którego linie w strefie uzwojenia przechodzą poza rdzeniem magnetycznym,

wynika, że indukcyjność własna n -tego uzwojenia

$$L_n = L_{nFe} + L_{n\sigma} \quad (3)$$

Składowa indukcyjności własnej, wynikająca z pola głównego

$$L_{nFe} = z_n^2 \Lambda_{Fe} \quad (4)$$

przy czym:

- Λ_{Fe} - permeancja rdzenia magnetycznego.

Składowa indukcyjności własnej, wynikająca z pola rozproszenia

$$L_{n\sigma} = z_n^2 \Lambda_{n\sigma} \quad (5)$$

Permeancję $\Lambda_{n\sigma}$ określa się przyjmując, że rdzeń magnetyczny:

- ma względną przenikalność magnetyczną $\mu = \infty$, tzn. pomijając spadek napięcia magnetycznego wzdłuż części linii pola magnetycznego w rdzeniu magnetycznym,
- pokrywa uzwojenia w częściach czołowych.

Na podstawie analizy szczegółowej podanej w pracy [3] permeancja

$$\Lambda_{n\sigma} = \frac{\mu_0}{b} \left[\frac{a_n l_n}{3} - \frac{\pi a_n^2}{6} + \frac{\pi}{4} (d_n^2 - d_k^2) \right] \quad (6)$$

przy czym b, a_n, d_n, d_k podano na rys. 1.

Z podziału pola magnetycznego wytworzonego przez siłę magnetomotoryczną uzwojenia na pole główne i rozproszenia wynika, że indukcyjność wzajemna między n -tym a p -tym uzwojeniem

$$M_{np} = M_{npFe} + M_{np\sigma} \quad (7)$$

przy czym:

- składowa indukcyjności wzajemnej wynikająca ze sprzężenia uzwojeń poprzez pole główne

$$M_{npFe} = z_n z_p \Lambda_{Fe}, \quad (8)$$

- składowa indukcyjności wzajemnej wynikająca ze sprzężenia uzwojeń poprzez pole rozproszenia

$$M_{np\sigma} = z_n z_p \Lambda_{np\sigma}. \quad (9)$$

Permeancję $\Lambda_{np\sigma}$ określa się przyjmując takie same założenia upraszczające jak przy określeniu permeancji $\Lambda_{n\sigma}$. Zgodnie z pracą [3] permeancja $\Lambda_{kn\sigma}$ zależy od wymiarów (d_k , b) rdzenia magnetycznego i wymiarów uzwojenia wewnętrznego. Przy przyjętej (rys. 1) numeracji uzwojeń:

- dla $n < p$ permeancja

$$\Lambda_{np\sigma} = \frac{\mu_0}{b} \left[\frac{a_p l_p}{2} - \frac{\pi a_p^2}{6} + \frac{\pi}{4} (d_p^2 - d_k^2) \right], \quad (10a)$$

- dla $n > p$ permeancja

$$\Lambda_{np\sigma} = \frac{\mu_0}{b} \left[\frac{a_n l_n}{2} - \frac{\pi a_n^2}{6} + \frac{\pi}{4} (d_n^2 - d_k^2) \right], \quad (10b)$$

przy czym:

- $a_n, a_p, b, d_n, d_p, d_k$ - podano na rys. 1,
- a_k, d_k, l_k - grubość, średnica wewnętrzna i średnia długość zwoju k -tego uzwojenia.

Składowa indukcyjności wzajemnej, wynikająca ze sprzężenia uzwojeń poprzez pole rozproszenia, zależy więc od iloczynu liczby zwojów uzwojeń, wymiarów rdzenia magnetycznego i wymiarów uzwojenia wewnętrznego.

Ze stwierdzenia tego

- dla $n < p$ wynika zależność

$$M_{np\sigma} = M_{(n-c)p\sigma} \frac{z_n}{z_{(n-c)}} \quad (11a)$$

przy czym:

$$c = 1, \dots, n - 1$$

- dla $n > p$ wynika zależność

$$M_{np\sigma} = M_{n(p-c)\sigma} \frac{z_p}{z_{(p-c)}} \quad (10b)$$

przy czym:

$$c = 1, \dots, p - 1.$$

Zależności (10), (11) określają charakterystyczną cechę dotyczącą indukcyjności wzajemnej uzwojeń cylindrycznych umieszczonych współśrodkowo na kolumnie rdzenia magnetycznego i są wykorzystywane w analizie teoretycznej przy wprowadzaniu schematu zastępczego i określaniu jego parametrów. W analizie teoretycznej przyjmuje się, że transformator jest elementem liniowym.

Indukcyjności wzajemne uzwojeń spełniają zależności

$$M_{np} = M_{pn}, \quad M_{npFe} = M_{pnFe}, \quad M_{np\sigma} = M_{pn\sigma}. \quad (12)$$

2. RÓWNANIA OGÓLNE – SCHEMAT ZASTĘPCZY

Jeżeli z sieci elektroenergetycznej jest zasilane jedno z uzwojeń, np. o numerze p , to uzwojenia o numerach $n = 1, 2, \dots, p - 1, p + 1, \dots, m$ są uzwojeniami wtórnymi. W stanie obciążenia transformatora pole magnetyczne główne, którego linie zamykają się wyłącznie w rdzeniu magnetycznym, jest wytworzone przez siłę magnetomotoryczną

$$i_{p0}z_p = i_p z_p - \sum_{k=1}^{p-1} i_k z_k - \sum_{k=p+1}^m i_k z_k. \quad (13)$$

W przybliżeniu jest ona taka sama jak w stanie jałowym, jeżeli napięcie zasilania uzwojenia p (pierwotnego) i jego częstotliwość nie uległy zmianie.

Napięcie zasilania transformatora ma zwykle znamionową częstotliwość, a jego wartość jest zbliżona do napięcia znamionowego uzwojenia pierwotnego. W tych warunkach zasilania można przyjąć, że transformator jest elementem liniowym. Dodatkowo pomija się straty w rdzeniu magnetycznym oraz pojemności międzyzwojowe i międzyzwojeniowe, ponieważ zagadnienia strat i przepięć nie są przedmiotem analizy teoretycznej.

Napięcie zasilania uzwojenia pierwotnego

$$u_p = R_p i_p + \frac{d\Psi_p}{dt}, \quad (14)$$

natomiast siła elektromotoryczna indukowana w dowolnym k -tym uzwojeniu wtórnym

$$\frac{d\Psi_k}{dt} = R_k i_k + u_k. \quad (15)$$

Strumień sprzężony z uzwojeniem pierwotnym

$$\Psi_p = (L_{pFe} + L_{p\sigma})i_p - \sum_{n=p+1}^m (M_{npFe} + M_{np\sigma})i_n - \sum_{n=1}^{p-1} (M_{npFe} + M_{np\sigma})i_n. \quad (16)$$

Strumień sprzężony z k -tym uzwojeniem wtórnym

$$\begin{aligned} \Psi_k = & (M_{pkFe} + M_{pk\sigma})i_p - (L_{kFe} + L_{k\sigma})i_k - \sum_{n=1}^{k-1} (M_{nkFe} + M_{nk\sigma})i_n \\ & - \sum_{n=k+1}^{p-1} (M_{nkFe} + M_{nk\sigma})i_n - \sum_{n=p+1}^m (M_{nkFe} + M_{nk\sigma})i_n \end{aligned} \quad (17a)$$

jeżeli $k < p$, a więc gdy uzwojenie k -tej strony wtórnej jest uzwojeniem zewnętrznym, a uzwojenie pierwotne wewnętrznym, lub

$$\begin{aligned} \Psi_k = & (M_{pkFe} + M_{pk\sigma})i_p - (L_{kFe} + L_{k\sigma})i_k - \sum_{n=1}^{p-1} (M_{nkFe} + M_{nk\sigma})i_n \\ & - \sum_{n=p+1}^{k-1} (M_{nkFe} + M_{nk\sigma})i_n - \sum_{n=k+1}^m (M_{nkFe} + M_{nk\sigma})i_n. \end{aligned} \quad (17b)$$

Z równania (13) wynika, że prąd

– w uzwojeniu pierwotnym

$$i_p = i_{p0} + \sum_{n=1}^{p-1} \frac{z_n}{z_p} i_n + \sum_{n=p+1}^m \frac{z_n}{z_p} i_n = i_{p0} + \sum_{n=1}^{p-1} i_n' + \sum_{n=p+1}^m i_n'' \quad (18)$$

przy czym

$$i_n' = \frac{z_n}{z_p} i_n, \quad (19)$$

– w k -tym uzwojeniu wtórnym zewnętrznym w stosunku do uzwojenia pierwotnego

$$i_k = \frac{z_p}{z_k} (i_p - i_{p0}) - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{z_n}{z_k} i_n - \sum_{n=k+1}^{p-1} \frac{z_n}{z_k} i_n - \sum_{n=p+1}^m \frac{z_n}{z_k} i_n, \quad (20a)$$

– w k -tym uzwojeniu wtórnym wewnętrznym w stosunku do uzwojenia pierwotnego

$$i_k = \frac{z_p}{z_k} (i_p - i_{p0}) - \sum_{n=1}^{p-1} \frac{z_n}{z_k} i_n - \sum_{n=p+1}^{k-1} \frac{z_n}{z_k} i_n - \sum_{n=k+1}^m \frac{z_n}{z_k} i_n. \quad (20b)$$

Po wprowadzeniu wyrażenia (18) do zależności (16) i uwzględnieniu zależności (4) i (8) strumień sprzężony z uzwojeniem pierwotnym

$$\Psi_p = L_{pF_e} i_{p0} + L_{p\sigma} i_p - \sum_{n=1}^{p-1} M_{np\sigma} i_n - \sum_{n=p+1}^m M_{np\sigma} i_n. \quad (21)$$

Z wyrażen (17a), (20a) po uwzględnieniu zależności (4) i (8) wynika, że strumień sprzężony z k -tym uzwojeniem wtórnym zewnętrznym w stosunku do uzwojenia pierwotnego

$$\Psi_k = M_{pkF_e} i_{p0} + M_{pk\sigma} i_p - L_{k\sigma} i_k - \sum_{n=1}^{k-1} M_{nk\sigma} i_n - \sum_{n=k+1}^{p-1} M_{nk\sigma} i_n - \sum_{n=p+1}^m M_{nk\sigma} i_n. \quad (22a)$$

Z wyrażen (17b), (20b) po uwzględnieniu zależności (4) i (8) wynika, że strumień sprzężony z k -tym uzwojeniem wtórnym wewnętrznym w stosunku do uzwojenia pierwotnego

$$\Psi_k = M_{pkF_e} i_{p0} + M_{pk\sigma} i_p - L_{k\sigma} i_k - \sum_{n=1}^{p-1} M_{nk\sigma} i_n - \sum_{n=p+1}^{k-1} M_{nk\sigma} i_n - \sum_{n=k+1}^m M_{nk\sigma} i_n. \quad (22b)$$

Wprowadzając zależności (21), (22a), lub (21), (22b) do wyrażeń (14), (15) otrzymuje się:

– dla strony pierwotnej

$$u_p = R_p i_p + L_{pFe} \frac{di_{p0}}{dt} + L_{p\sigma} \frac{di_p}{dt} - \sum_{n=1}^{p-1} M_{np\sigma} \frac{di_n}{dt} - \sum_{n=p+1}^m M_{np\sigma} \frac{di_n}{dt}, \quad (23)$$

– dla k -tej strony wtórnej, której uzwojenie jest zewnętrzne w stosunku do uzwojenia pierwotnego

$$u_k = M_{pkFe} \frac{di_{p0}}{dt} + M_{pk\sigma} \frac{di_p}{dt} + L_{k\sigma} \frac{di_k}{dt} - R_k i_k - \sum_{n=1}^{k-1} M_{nk\sigma} \frac{di_n}{dt} - \sum_{n=k+1}^{p-1} M_{nk\sigma} \frac{di_n}{dt} - \sum_{n=p+1}^m M_{nk\sigma} \frac{di_n}{dt}, \quad (24a)$$

– dla k -tej strony wtórnej, której uzwojenie jest wewnętrzne w stosunku do uzwojenia pierwotnego

$$u_k = M_{pkFe} \frac{di_{p0}}{dt} + M_{pk\sigma} \frac{di_p}{dt} + L_{k\sigma} \frac{di_k}{dt} - R_k i_k - \sum_{n=1}^{p-1} M_{nk\sigma} \frac{di_n}{dt} - \sum_{n=p+1}^{k-1} M_{nk\sigma} \frac{di_n}{dt} - \sum_{n=k+1}^m M_{nk\sigma} \frac{di_n}{dt}. \quad (24b)$$

Jeżeli równanie (24a) lub (24b) pomnożymy przez z_p/z_k , co oznacza sprowadzenie k -tej strony wtórnej do strony pierwotnej, wówczas po uwzględnieniu zależności (4), (8) otrzymuje się:

$$u'_k = L_{pFe} \frac{di_{p0}}{dt} + \frac{z_p}{z_k} M_{pk\sigma} \frac{di_p}{dt} - L'_{k\sigma} \frac{di'_k}{dt} - R'_k i'_k - \frac{z_p}{z_k} \sum_{n=1}^{k-1} M_{nk\sigma} \frac{di_n}{dt} - \frac{z_p}{z_k} \sum_{n=k+1}^{p-1} M_{nk\sigma} \frac{di_n}{dt} - \frac{z_p}{z_k} \sum_{n=p+1}^m M_{nk\sigma} \frac{di_n}{dt}, \quad (25a)$$

lub

$$u'_k = L_{pFe} \frac{di_{p0}}{dt} + \frac{z_p}{z_k} M_{pk\sigma} \frac{di_p}{dt} - L'_{k\sigma} \frac{di'_k}{dt} - R'_k i'_k$$

$$- \frac{z_p}{z_k} \sum_{n=1}^{p-1} M_{nk\sigma} \frac{di_n}{dt} - \frac{z_p}{z_k} \sum_{n=p+1}^{k-1} M_{nk\sigma} \frac{di_n}{dt} - \frac{z_p}{z_k} \sum_{n=k+1}^m M_{nk\sigma} \frac{di_n}{dt},$$
(25b)

przy czym

$$u'_k = \frac{z_p}{z_k} u_k, \quad i'_k = \frac{z_k}{z_p} i_k,$$

$$R'_k = \left(\frac{z_p}{z_k}\right)^2 R_k, \quad L'_k = \left(\frac{z_p}{z_k}\right)^2 L_k.$$

Z wyrażeń (19), (23) wynika, że napięcie zasilania strony pierwotnej

$$u_p = R_p i_p + L_{pFe} \frac{di_{p0}}{dt} + L_{p\sigma} \frac{di_p}{dt} - \sum_{n=1}^{p-1} \frac{z_p}{z_n} M_{np\sigma} \frac{di'_n}{dt}$$

$$- \sum_{n=p+1}^{m-1} \frac{z_p}{z_n} M_{np\sigma} \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma} \frac{di'_m}{dt},$$
(26)

natomiast na podstawie równania (18) sprowadzony na stronę pierwotną prąd m -tej strony wtórnej

$$i'_m = i_p - i_{p0} - \sum_{n=1}^{p-1} i'_n - \sum_{n=p+1}^{m-1} i'_n.$$
(27)

Wprowadzając zależność (27) do wyrażenia (26) otrzymuje się:

$$u_p = R_p i_p + \left(L_{p\sigma} - \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma}\right) \frac{di_p}{dt} + e_p + \left(L_{pFe} + \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma}\right) \frac{di_{p0}}{dt},$$
(28)

przy czym:

$$e_p = \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma} \sum_{n=1}^{p-1} \frac{di'_n}{dt} - \sum_{n=1}^{p-1} \frac{z_p}{z_n} M_{np\sigma} \frac{di'_n}{dt} + \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma} \sum_{n=p+1}^{m-1} \frac{di'_n}{dt} - \sum_{n=p+1}^{m-1} \frac{z_p}{z_m} M_{nk\sigma} \frac{di'_n}{dt}. \quad (29)$$

Równanie (28) uwzględnia wpływ sprzężeń uzwojenia pierwotnego z uzwojeniami wtórnymi poprzez pole magnetyczne rozproszenia. Wpływ ten określa siła elektromotoryczna e_p .

Z wyrażeń (19), (25a) wynika, że dla k -tej sprowadzonej strony wtórnej, której uzwojenie znajduje się na zewnątrz uzwojenia pierwotnego

$$u'_{kz} = L_{pFe} \frac{di_{p0}}{dt} + \frac{z_p}{z_k} M_{pk\sigma} \frac{di_p}{dt} - L'_{k\sigma} \frac{di'_k}{dt} - R'_k i'_k - \frac{z_p^2}{z_k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_p^2}{z_k} \sum_{n=k+1}^{p-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_p^2}{z_k} \sum_{n=p+1}^{m-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_p^2}{z_k} \cdot \frac{M_{mk}}{z_m} \cdot \frac{di'_m}{dt}. \quad (30)$$

Na podstawie równania (18) sprowadzony na stronę pierwotną prąd m -tej strony wtórnej

$$i'_m = i_p - i_{p0} - \sum_{n=1}^{k-1} i'_n - i'_k - \sum_{n=k+1}^{p-1} i'_n - \sum_{n=p+1}^{m-1} i'_n. \quad (31)$$

Wprowadzając zależność (31) do wyrażenia (30) otrzymuje się

$$u'_{kz} = \left(L_{pFe} + \frac{z_p^2}{z_k} \cdot \frac{M_{mk\sigma}}{z_m} \right) \frac{di_{p0}}{dt} - \left(L'_{k\sigma} - \frac{z_p^2}{z_k} \cdot \frac{M_{mk\sigma}}{z_m} \right) \frac{di'_k}{dt} - R'_k i'_k + \left(\frac{z_p}{z_k} M_{pk\sigma} - \frac{z_p^2}{z_k} \cdot \frac{M_{mk\sigma}}{z_m} \right) \frac{di_p}{dt} + \frac{z_p^2}{z_k} \left(\frac{M_{mk\sigma}}{z_m} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{di'_n}{dt} - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} \right) + \frac{z_p^2}{z_k} \left(\frac{M_{mk\sigma}}{z_m} \sum_{n=k+1}^{p-1} \frac{di'_n}{dt} - \sum_{n=k+1}^{p-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} \right) + \frac{z_p^2}{z_k} \left(\frac{M_{mk\sigma}}{z_m} \sum_{n=p+1}^{m-1} \frac{di'_n}{dt} - \sum_{n=p+1}^{m-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} \right). \quad (32)$$

W przypadku k -tej strony wtórnej, której uzwojenie jest zewnętrzne w stosunku do uzwojenia pierwotnego ($k < p < m$), zgodnie z ogólną zależnością (11a)

$$\frac{z_p^2}{z_k} \cdot \frac{M_{mk\sigma}}{z_m} = \frac{z_p^2}{z_k} \cdot \frac{M_{mp\sigma}}{z_m} \cdot \frac{z_k}{z_p} = \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma}. \quad (33)$$

Wprowadzając zależności (33) do wyrażenia (32) otrzymuje się

$$u'_{kz} = (L_{pFe} + \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma}) \frac{di_{p0}}{dt} + e_{kz} - (L'_{k\sigma} - \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma}) \frac{di'_k}{dt} - R'_k i'_k, \quad (34)$$

przy czym

$$\begin{aligned} e_{kz} = & \left(\frac{z_p}{z_k} M_{pk\sigma} - \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma} \right) \frac{di_p}{dt} + \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_p^2}{z_k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} + \\ & + \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma} \sum_{n=k+1}^{p-1} \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_p^2}{z_k} \sum_{n=k+1}^{p-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} \\ & + \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma} \sum_{n=p+1}^{m-1} \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_p^2}{z_k} \sum_{n=p+1}^{m-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt}. \end{aligned} \quad (35)$$

Równanie (34) uwzględnia wpływ sprzężeń rozpatrywanego uzwojenia wtórnego z pozostałymi uzwojeniami poprzez pole magnetyczne rozproszenia. Z wyrażen (19), (25b) wynika, że dla k -tej sprowadzonej strony wtórnej, której uzwojenie znajduje się wewnątrz uzwojenia pierwotnego

$$\begin{aligned} u'_{kw} = & L_{pFe} \frac{di_{p0}}{dt} + \frac{z_p}{z_k} M_{pk\sigma} \frac{di_p}{dt} - L'_{k\sigma} \frac{di'_k}{dt} - R'_k i'_k - \frac{z_p^2}{z_k} \sum_{n=1}^{p-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} \\ & - \frac{z_p^2}{z_k} \sum_{n=p+1}^{k-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_p^2}{z_k} \sum_{n=k+1}^{m-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_p}{z_k} \cdot \frac{M_{mk\sigma}}{z_m} \cdot \frac{di'_m}{dt}. \end{aligned} \quad (36)$$

Na podstawie równania (18) sprowadzony na stronę pierwotną prąd m -tej strony wtórnej

$$i'_m = i_p - i_{p0} - \sum_{n=1}^{p-1} i'_n - \sum_{n=p+1}^{k-1} i'_n - i'_k - \sum_{n=k+1}^{m-1} i'_n \quad (37)$$

i po wprowadzeniu zależności (37) do wyrażenia (36) otrzymuje się

$$\begin{aligned} u'_{kw} = & \left(L_{pFe} + \frac{z_p^2}{z_k} \cdot \frac{M_{mk\sigma}}{z_m} \right) \frac{di_{p0}}{dt} - \left(L_{k\sigma} - \frac{z_p^2}{z_k} \cdot \frac{M_{mk\sigma}}{z_m} \right) \frac{di'_k}{dt} - R'_k i'_k \\ & + \left(\frac{z_p}{z_k} M_{pk\sigma} - \frac{z_p^2}{z_k} \cdot \frac{M_{mk\sigma}}{z_m} \right) \frac{di_p}{dt} + \frac{z_p^2}{z_k} \left(\frac{M_{mk\sigma}}{z_m} \sum_{n=1}^{p-1} \frac{di'_n}{dt} - \sum_{n=1}^{p-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} \right) \\ & + \frac{z_p^2}{z_k} \left(\frac{M_{mk\sigma}}{z_m} \sum_{n=p+1}^{k-1} \frac{di'_n}{dt} - \sum_{n=p+1}^{k-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} \right) + \frac{z_p^2}{z_k} \left(\frac{M_{mk\sigma}}{z_m} \sum_{n=k+1}^{m-1} \frac{di'_n}{dt} - \sum_{n=k+1}^{m-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

W przypadku k -tej strony wtórnej, której uzwojenie jest wewnętrzne w stosunku do uzwojenia pierwotnego ($p < k < m$), a zatem spełniona jest zależność (33) i po jej uwzględnieniu

$$u'_{kw} = (L_{pFe} + \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma}) \frac{di_{p0}}{dt} + e_{kw} - (L_k - \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma}) \frac{di'_k}{dt} - R'_k i'_k, \quad (39)$$

przy czym

$$\begin{aligned}
 e_{kw} = & \left(\frac{z_p}{z_k} M_{pk\sigma} - \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma} \right) \frac{di_p}{dt} + \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma} \sum_{n=1}^{p-1} \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_p^2}{z_k} \sum_{n=1}^{p-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} + \\
 & + \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma} \sum_{n=p+1}^{k-1} \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_p^2}{z_k} \sum_{n=1}^{p-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} \\
 & + \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma} \sum_{n=p+1}^{k-1} \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_p^2}{z_k} \sum_{n=p+1}^{k-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt} \\
 & + \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma} \sum_{n=k+1}^{m-1} \frac{di'_n}{dt} - \frac{z_p^2}{z_k} \sum_{n=k+1}^{m-1} \frac{M_{nk\sigma}}{z_n} \cdot \frac{di'_n}{dt}.
 \end{aligned} \tag{40}$$

W analizie literą k oznaczono dowolną spośród stron wtórnych, przy czym wyróżniono zewnętrzne lub wewnętrzne położenie jej uzwojenia w stosunku do uzwojenia pierwotnego. Równaniom (18), (28), (34), (39) odpowiada schemat zastępczy (rys. 2) transformatora jednofazowego m -uzwojeniowego, w którym strony wtórne zostały sprowadzone na stronę pierwotną.

W schemacie zastępczym (rys. 2) siłę elektromotoryczną

- e_p określa wyrażenie (29),
- $e_{k\sigma}$ dla $k = 1, \dots, p - 1$ określa wyrażenie (35),
- e_{kw} dla $k = p + 1, \dots, m$ określa wyrażenie (40),

natomiast indukcyjność

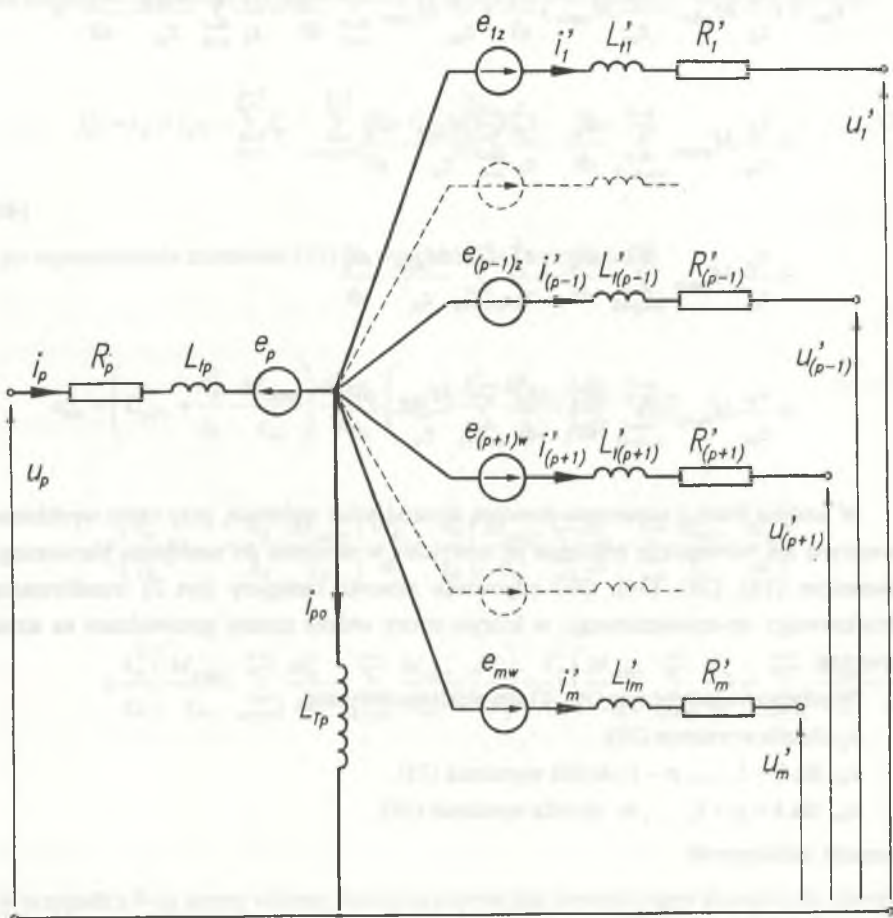
$$L_{Tp} = L_{pFe} + \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma}, \tag{41}$$

$$L_{Tp} = L_{p\sigma} - \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma}, \tag{42}$$

$$L'_{ik} = L'_{k\sigma} - \frac{z_p}{z_m} M_{mp\sigma}, \tag{43}$$

dla

$$k = 1, \dots, p - 1, p + 1, \dots, m.$$



Rys. 2. Schemat zastępczy transformatora jednofazowego m -uzwojeniowego, w którym strony wtórne sprowadzono na stronę pierwotną

Fig. 2. Equivalent circuit of single-phase, m -winding transformer whose secondary sides are referred to a primary side

Wprowadzony schemat zastępczy stanowi podstawę analizy właściwości transformatora w stanie nieustalonym i ustalonym. Ilościowa analiza wymaga znajomości parametrów elektromagnetycznych - rezystancji i indukcyjności schematu zastępczego.

4. WNIOSKI

Wprowadzony schemat zastępczy transformatora o dowolnej liczbie uzwojeń cylindrycznych nałożonych na siebie na kolumnie rdzenia magnetycznego uwzględnia wzajemne sprzężenia uzwojeń poprzez pole magnetyczne rozproszenia, zależne od prądów we wszystkich uzwojeniach. Wpływ wzajemnych sprzężeń uzwojeń poprzez pole magnetyczne rozproszenia pogarsza właściwości eksploatacyjne transformatora, w szczególności przy dużej liczbie uzwojeń. Z tych powodów bardzo rzadko stosuje się transformatory jedno- lub trójfazowe o liczbie uzwojeń $m > 3$. Przedstawiona analiza teoretyczna może być podstawą uproszczonych, np. z pominięciem prądu jałowego, analiz szczegółowych, dotyczących schematów zastępczych i ich parametrów dla zwykle stosowanych transformatorów wielouzwojeniowych.

LITERATURA

1. Jabłoński M.: Transformatory. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1994.
2. Jezierski E.: Transformatory - podstawy teoretyczne. WNT, Warszawa 1975.
3. Mizia W.: Wpływ rozmieszczenia uzwojeń cylindrycznych na parametry schematu zastępczego transformatora dwuuzwojeniowego. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej "Elektryka" nr 138, Gliwice 1994, str. 79.
4. Turowski J.: Obliczenia elektromagnetyczne elementów maszyn i urządzeń elektrycznych. WNT, Warszawa 1982.

Recenzent: Dr hab. inż. Jerzy Hickiewicz, prof. WSI w Opolu

Wpłynęło do Redakcji dnia 15 marca 1996 r.

Abstract

The theoretical analysis dealing with a transformer with any number of cylindrical windings of the same height which are concentrically placed around the magnetic core column

has been presented in the paper. It has been assumed that one winding is a primary one and it is supplied. The other windings are secondary ones and they are loaded. The theoretical analysis takes into account mutual linkages between windings by magnetic leakage which depends on currents in all windings. The result of such approach is essential because it develops the transformer theory allowing to apply it to transformers with any number of windings when taking into consideration the influence of winding linkages by magnetic leakage. These linkages make operating characteristics of a transformer worse, which above all refers to transformers with a large number of windings. That is why single- or three-phase transformers with m windings, where m is greater than 3, are very seldom used.

The presented theoretical analysis can be the base for simplified (for instance when neglecting no-load current) detailed analyses dealing with equivalent circuits of multi-winding transformers.



Fig. 2. Schematic diagram of a transformer with m windings. The primary winding is connected to an AC source and the secondary windings are connected to a load.

The diagram shows a transformer with a primary winding on the left and multiple secondary windings on the right. The primary winding is connected to an AC source, and the secondary windings are connected to a load. The transformer core is represented by a rectangular loop.

Krzysztof KLUSZCZYŃSKI
Katedra Maszyn i Urządzeń Elektrycznych
Politechniki Śląskiej

Dariusz SZYMAŃSKI
ABB ZWUS Signal sp. z o.o., Katowice

SCHEMATY ZASTĘPCZE TRANSFORMATORA 3-FAZOWEGO WE WSPÓLRZĘDNYCH 2-OSIOWYCH PRZY UWZGLĘDNIENIU ASYMETRII MAGNETYCZNEJ RDZENIA

Streszczenie. W artykule przedstawiono metodę analizy transformatora 3-fazowego z uwzględnieniem asymetrii magnetycznej rdzenia. Została określona nowa macierz transformacji 2-osiowej, która umożliwia rozsprzężenie układu równań różniczkowych, co pozwala na sformułowanie schematu zastępczego transformatora 3-fazowego w postaci dwóch niezależnych schematów zastępczych transformatorów 1-fazowych. Jako przykład obliczeniowy rozpatrzono załączenie 3-fazowego transformatora na sieć.

EQUIVALENT CIRCUITS OF 3-PHASE TRANSFORMER IN 2-AXIAL COORDINATES ALLOWING FOR MAGNETIC ASYMMETRY OF THE CORE

Summary. In this paper the method for analysing a 3-phase transformer with magnetic asymmetry of the core is presented. The new 2-axis transformation matrix is determined which enables to decouple the set of differential equations. This leads to formulating 3-phase transformer equivalent circuit consisting of two autonomous 1-phase transformer equivalent circuits. As an example the switch-on of a 3-phase transformer is considered at steady and transient state.

1. WSTĘP I ZAŁOŻENIA

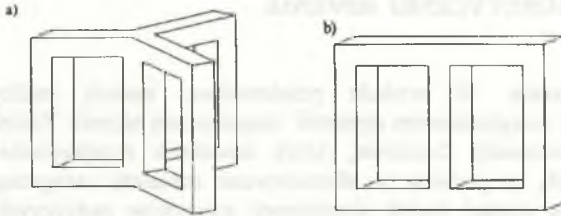
W klasycznej analizie pracy transformatora 3-fazowego przyjmuje się założenie upraszczające o pełnej symetrii magnetycznej rdzenia, które to założenie można wyrazić następująco:

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = \Lambda_k \quad (1)$$

gdzie:

- $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ - przewodności magnetyczne poszczególnych kolumn,
- Λ_k - średnia przewodność magnetyczna kolumny.

Własności magnetyczne opisane równością (1) posiada rdzeń transformatora przedstawiony na rys. 1a .



Rys. 1. Rdzeń transformatora symetrycznego i asymetrycznego magnetycznie
Fig. 1. Symmetrical and asymmetrical transformer core

W niniejszych rozważaniach zrezygnowano z założenia (1), przyjmując asymetrię magnetyczną rdzenia, charakterystyczną dla rzeczywistego transformatora:

$$\Lambda_1 = \Lambda_3 = \Lambda_k; \quad \Lambda_2 = k\Lambda_k, \quad (2)$$

gdzie:

- Λ_1, Λ_3 - przewodności magnetyczne kolumn skrajnych,
- Λ_2 - przewodność magnetyczna kolumny środkowej,
- $k > 1$ - współczynnik asymetrii magnetycznej.

Własności opisane równaniami (2) posiada rdzeń przedstawiony na rys. 1b.

Celem pracy jest określenie transformacji 2-osiowej K_k , umożliwiającej sformułowanie schematów zastępczych transformatora 3-fazowego z asymetrią magnetyczną rdzenia w nowym układzie współrzędnych $\alpha_k, \beta_k, 0$. W rozważaniach pominięto nieliniowość obwodu magnetycznego transformatora, co może być źródłem istotnych błędów; w obliczeniach technicznych nieliniowość obwodu magnetycznego można jednak uwzględnić w przybliżony sposób poprzez modyfikację wartości indukcyjności magnesującej za pomocą współczynnika szczytu prądu magnesującego σ_2 . Dla ustalenia uwagi przyjęto przekładnię napięciową transformatora $n_{12} = 1$. Ponadto założono zerową wartość przewodności dla tzw. strumienia jarzmowego (strumienia zerowego zamykającego się pomiędzy kolumnami poprzez olej i każdą lub poprzez powietrze - poza obrębem rdzenia).

2. ZARYS TEORII TRANSFORMATORA Z RDZENIEM O SYMETRII MAGNETYCZNEJ

Transformator 3-fazowy opisany jest następującymi równaniami:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} u_1 &= [u_{1A}, u_{1B}, u_{1C}]^T && \text{- wektor napięć strony pierwotnej,} \\ u_2 &= [u_{2A}, u_{2B}, u_{2C}]^T && \text{- wektor napięć strony wtórnej,} \\ R_1 &= \text{diag}[R_1, R_1, R_1] && \text{- macierz rezystancji strony pierwotnej,} \\ R_2 &= \text{diag}[R_2, R_2, R_2] && \text{- macierz rezystancji strony wtórnej,} \end{aligned}$$

przy czym:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \left(\begin{bmatrix} L_{1\sigma} & 0 \\ 0 & L_{2\sigma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M & M \\ M & M \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} L_{\sigma 1} &= \text{diag}[L_{\sigma 1}, L_{\sigma 1}, L_{\sigma 1}] && \text{- macierz indukcyjności rozproszeń strony pierwotnej,} \\ L_{\sigma 2} &= \text{diag}[L_{\sigma 2}, L_{\sigma 2}, L_{\sigma 2}] && \text{- macierz indukcyjności rozproszeń strony wtórnej,} \\ M &= \begin{bmatrix} L_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & L_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & L_{33} \end{bmatrix} && \text{- macierz indukcyjności własnych głównych i wzajemnych.} \end{aligned} \quad (5)$$

Przy uwzględnieniu założenia (1) otrzymuje się macierz indukcyjności własnych głównych i wzajemnych w następującej postaci:

$$M = \frac{2}{3} \Lambda_1 z^2 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Podstawą dla wyznaczenia ortonormalnej macierzy transformacji K diagonalizującej macierz (6) jest równanie:

$$(M - \lambda_i I) X_i = 0 \quad i=1, 2, 3 \quad (7)$$

gdzie:

- λ_i - i -ta wartość własna macierzy indukcyjności M ,
- X_i - wektor własny macierzy indukcyjności M odpowiadający i -tej wartości własnej,

oraz warunki ortogonalności i unormowania wektorów własnych:

$$X_i^T X_j = 0 \quad i \neq j, \quad X_i^T X_i = 1. \quad (8)$$

Wartości własne wyznaczone z równania (7) wynoszą:

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}, \lambda_2 = \frac{3}{2}, \lambda_3 = 0. \quad (9)$$

Wyznaczając wektory własne na podstawie relacji (6) ÷ (9) otrzymuje się macierz transformacji 2-osiowej K o postaci:

$$K = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (10)$$

prowadzącą do diagonalizacji macierzy (6).

Wektory napięć, prądów i strumieni skojarzonych odpowiednio strony pierwotnej i wtórnej w nowym układzie współrzędnych (we współrzędnych α , β , 0) wyznaczone są według relacji:

$$w_{1,2}^{\alpha,\beta} = K_k w_{1,2}, \quad w_{1,2} = u_{1,2}, \dot{i}_{1,2}, \psi_{1,2} \quad (11)$$

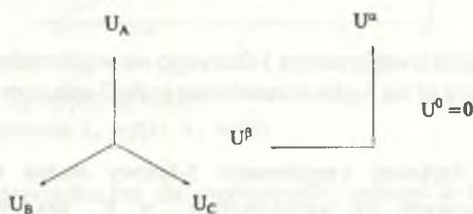
gdzie:

$$w_{1,2}^{\alpha,\beta} = [w_{1,2}^\alpha, w_{1,2}^\beta, w_{1,2}^0]^T, \quad w_{1,2} = [w_{1,2A}, w_{1,2B}, w_{1,2C}]^T.$$

Zgodnie z relacjami (11) dla 3-fazowego symetrycznego układu napięć otrzymuje się:

$$u_1^\alpha = \sqrt{3}U \sin(\omega t + \alpha), \quad u_1^\beta = \sqrt{3}U \cos(\omega t + \alpha), \quad u_1^0 = 0 \quad (12)$$

a więc 2-fazowy symetryczny układ napięć (gdzie: α - kąt początkowy napięcia fazowego fazy A). Wskazy napięć symetrycznego układu 3-fazowego oraz układu 2-fazowego przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Wskazy napięć układu 3-fazowego A,B,C oraz układu 2-fazowego α , β , 0
Fig. 2. The A,B,C 3-phase and the α , β , 0 2-phase phazors

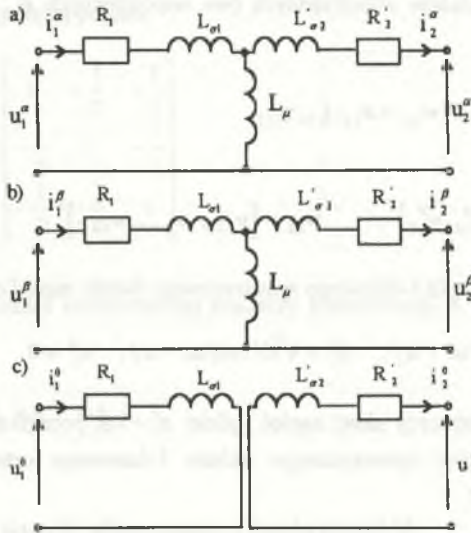
Równania transformatora (3), (4) po transformacji do współrzędnych 2-osiowych α , β , 0 przy użyciu macierzy transformacji K (10) przyjmują postać:

$$\begin{bmatrix} u_1^{\alpha,\beta} \\ u_2^{\alpha,\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1^{\alpha,\beta} \\ i_2^{\alpha,\beta} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{\sigma 1} + L_\mu & 0 \\ 0 & L_{\sigma 2} + L_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1^{\alpha,\beta} \\ i_2^{\alpha,\beta} \end{bmatrix} \quad (13)$$

gdzie:

$$L_\mu = \begin{bmatrix} L_\mu & 0 & 0 \\ 0 & L_\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_\mu = \Lambda_k z^2. \quad (14)$$

Z równań (13), (14) wynikają schematy zastępcze transformatora przedstawione na rys. 3:



Rys. 3. Schematy zastępcze transformatora 3-fazowego we współrzędnych 2-osiowych α , β , 0
Fig. 3. Equivalent circuits of the 3-phase transformer in the 2-axis coordinates α , β , 0

W interpretacji fizycznej transformator 3-fazowy można więc zastąpić dwoma transformatorami 1-fazowymi dla współrzędnych α , β oraz prostym obwodem dla współrzędnej 0.

3. TEORIA TRANSFORMATORA Z RDZENIEM O ASYMETRII MAGNETYCZNEJ

Przy uwzględnieniu założenia (2) otrzymuje się macierz indukcyjności własnych głównych i wzajemnych w następującej postaci:

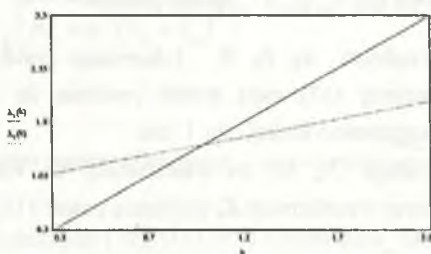
$$M = \frac{2}{k+2} \Lambda_k z^2 \begin{bmatrix} \frac{k+1}{2} & -\frac{k}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{k}{2} & k & -\frac{k}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{k}{2} & \frac{k+1}{2} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Dla szczególnego przypadku, tzn. dla współczynnika asymetrii $k=1$ (wzór 2), odpowiadającego symetrycznej budowie rdzenia (wzór 1), macierz indukcyjności własnych głównych i wzajemnych (15) przekształca się do macierzy (6).

Wartości własne wyznaczone z równania (7) przy uwzględnieniu (15) wynoszą:

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}k, \quad \lambda_2 = \frac{k+2}{2}, \quad \lambda_3 = 0. \quad (16)$$

Przebieg wartości własnych w funkcji współczynnika asymetrii $\lambda_1 = f(k)$, $\lambda_2 = f(k)$, przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Wykres funkcji $\lambda_1 = f(k)$, $\lambda_2 = f(k)$
Fig. 4. Graph of the functions $\lambda_1 = f(k)$, $\lambda_2 = f(k)$

Dla szczególnego przypadku, tzn. dla współczynnika asymetrii $k=1$, wartości własne (16) przechodzą do postaci określonych wzorem (9). Wyznaczając wektory własne na podstawie relacji (15), (7), (8), (16) otrzymuje się macierz transformacji 2-osiowej K_k o postaci:

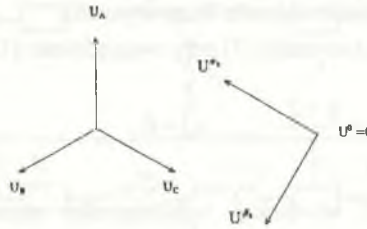
$$K_k = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

prowadzącą do diagonalizacji macierzy (15), jak i macierzy (6), będącej szczególnym przypadkiem macierzy (15) dla wartości współczynnika $k=1$. Macierz transformacji (17) zawiera te same elementy co macierz (10), ale w innym uporządkowaniu.

Zgodnie z relacjami (11) dla 3-fazowego symetrycznego układu napięć otrzymuje się:

$$u_1^{*a} = \sqrt{3}U \sin(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{3}), \quad u_1^{*b} = \sqrt{3}U \cos(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{3}), \quad u_1^{*c} = 0. \quad (18)$$

Wskaźy napięć symetrycznego układu 3-fazowego oraz układu 2-fazowego - otrzymanego po transformacji - przedstawiono na rys. 5.



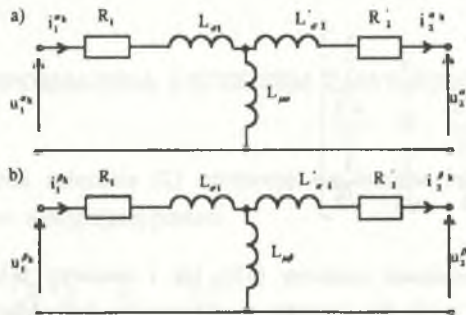
Rys. 5. Wskaźy napięć układu 3-fazowego oraz układu 2-fazowego $\alpha_k, \beta_k, 0$
Fig. 5. The A,B,C 3-phase and $\alpha_k, \beta_k, 0$ 2-phase phazors

Napięcia we współrzędnych $\alpha_k, \beta_k, 0$ 3-fazowego symetrycznego układu napięć, uzyskane za pomocą macierzy (17), mają postać podobną do (12) i różnią się tylko współczynnikiem $\pi/3$ w argumencie funkcji sin i cos.

Równania transformatora (3), (4) po transformacji do współrzędnych 2-osiowych $\alpha_k, \beta_k, 0$ przy użyciu macierzy transformacji K_k przyjmują postać (13), przy czym:

$$L_{\mu} = \begin{bmatrix} L_{\mu\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & L_{\mu\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L_{\mu\alpha} = \frac{3k}{k+2} L_{\mu}, \quad L_{\mu\beta} = L_{\mu}. \quad (19)$$

Z równań (13) po uwzględnieniu relacji (19) wynikają schematy zastępcze transformatora przedstawione na rys. 6, przy czym schemat dla składowej 0 jest identyczny ze schematem przedstawionym na rys. 3c.



Rys. 6. Schematy zastępcze transformatora 3-fazowego we współrzędnych 2-osiowych α_k, β_k
Fig. 6. Equivalent circuits of the 3-phase transformer in the 2-axis co-ordinates α_k, β_k

W przypadku transformatora z rdzeniem symetrycznym ($k=1$) zachodzi: $L_{\mu\alpha} = L_{\mu\beta} = L_{\mu}$.

4. ANALIZA PORÓWNAWCZA ZAŁĄCZANIA TRANSFORMATORA NA SIĘĆ BEZ UWZGLĘDNIENIA I PRZY UWZGLĘDNIENIU ASYMETRII RDZENIA

Analizie poddano przykładowy 3-fazowy transformator o następujących danych znamionowych: $U_{1n}=110\text{kV}$, $U_{2n}=33\text{kV}$, $S_n=1\text{MV}\cdot\text{A}$, $f_n=50\text{Hz}$, $\Delta P_{\text{Cun}}=82\text{kW}$, $\Delta P_{\text{Fem}}=25\text{kW}$, $I_{0n\%}=3.2\%$, $u_{2\%}=10.5\%$, $Yy0$, $R_1=R_2=4.8\Omega$, $L_{\sigma 1}=L_{\sigma 2}=0.2\text{H}$, $L_\mu=120\text{H}$.

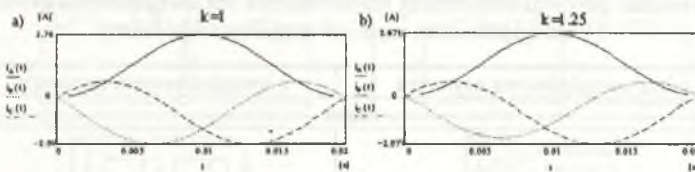
Przy wykorzystaniu wyrażenia na prąd stanu nieustalonego 1-fazowego transformatora załączanego na sieć:

$$i(t) = \frac{U_{1n} (\sin(\omega t + \alpha - \varphi_0) - \sin(\alpha - \varphi_0) e^{-\frac{t}{T_0}})}{\sqrt{3} \sqrt{[R_1^2 + \omega^2 (L_\sigma + L_\mu)^2]}}$$

gdzie:

$$\alpha - \text{kąt początkowy napięcia fazowego, } \varphi_0 = \arctg\left(\frac{\omega L_\sigma + \omega L_\mu}{R_1}\right), \quad T_0 = \frac{L_\sigma + L_\mu}{R_1},$$

oraz po wykorzystaniu zależności (18), (13), (19) i schematów zastępczych z rys. 6 uzyskano, dla załączenia 3-fazowego transformatora w chwili przejścia przez zero napięcia fazy A ($\alpha=0$ - najniekorzystniejszy przypadek), przebiegi prądów fazowych przedstawione na rys. 7a (dla współczynnika asymetrii $k=1$) i rys. 7b (dla współczynnika asymetrii $k=1.25$).



Rys. 7. Wykres czasowy prądów fazowych przy załączaniu transformatora na sieć

Fig. 7. Current v. time curves during the 3-phase transformer switch-on

Jak widać z wykresów 7 a), b) wartości maksymalne prądów w poszczególnych fazach uzyskane przy uwzględnieniu asymetrii magnetycznej rdzenia ($k=1.25$) są mniejsze niż wartości maksymalne uzyskane przy założonej symetrii rdzenia ($k=1$) zarówno w stanie nieustalonym, jak i ustalonym. Uzyskane wyniki dla stanu nieustalonego i ustalonego zestawiono w tablicy 1.

Tablica 1
Stosunek wartości maksymalnych prądów fazowych przy $k=1.25$
do wartości maksymalnych prądów fazowych przy $k=1$

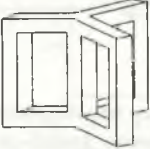
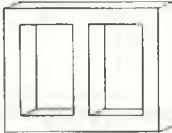
Stan nieustalony			Stan ustalony		
faza A	faza B	faza C	faza A	faza B	faza C
0.97	0.87	1	0.97	0.87	0.97

4. PODSUMOWANIE

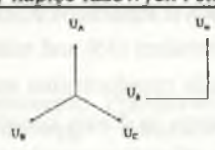
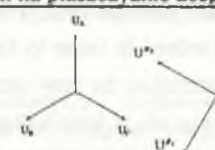
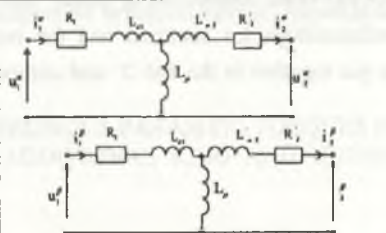
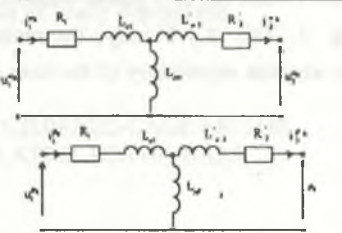
W niniejszym artykule przedstawiono sposób uwzględnienia asymetrii magnetycznej rdzenia transformatora 3-fazowego. Wykazano, iż przy rezygnacji z założenia o pełnej symetrii magnetycznej rdzenia można również określić macierz transformacji 2-osiowej K_k prowadzącej do rozsprężenia układu równań różniczkowych. Przy użyciu transformacji o macierzy K_k można sformułować schematy zastępcze transformatora 3-fazowego we współrzędnych $\alpha_k, \beta_k, 0$ w postaci dwóch transformatorów 1-fazowych o różnych indukcyjnościach magnesujących $L_{\mu\alpha}, L_{\mu\beta}$. Zestawienie porównawcze analizy transformatora bez uwzględnienia asymetrii i z uwzględnieniem asymetrii magnetycznej rdzenia przedstawiono w tablicy 2.

Tablica 2

Zestawienie porównawcze analizy transformatora bez uwzględnienia asymetrii
i z uwzględnieniem asymetrii magnetycznej rdzenia

bez uwzględnienia asymetrii	z uwzględnieniem asymetrii
rdzeń	
	
założenie	
$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = \Lambda_k$	$\Lambda_1 = \Lambda_3 = \Lambda_k; \quad \Lambda_2 = k\Lambda_k,$
macierz indukcyjności własnych głównych i wzajemnych	
$M = \frac{2}{3} \Lambda_k z^2 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$	$M = \frac{2}{k+2} \Lambda_k z^2 \begin{bmatrix} k+1 & -k & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -k & k & -k \\ -1 & -k & k+1 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

c.d. Tablicy 2

wartości własne	
$\lambda_1 = \frac{3}{2}, \lambda_2 = \frac{3}{2}, \lambda_3 = 0$	$\lambda_1 = \frac{3}{2}k, \lambda_2 = \frac{k+2}{2}, \lambda_3 = 0$
macierz transformacji 2-osiowej	
$K = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$	$K_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
napięcia 3-fazowego układu we współrzędnych 2-osiowych	
$u_1^0 = \sqrt{3}U \sin(\alpha t + \alpha),$ $u_1^{\beta} = \sqrt{3}U \cos(\alpha t + \alpha), u_1^{\gamma} = 0$	$u_1^{\alpha} = \sqrt{3}U \sin(\alpha t + \alpha + \frac{\pi}{3}),$ $u_1^{\beta} = \sqrt{3}U \cos(\alpha t + \alpha + \frac{\pi}{3}), u_1^{\gamma} = 0$
wskazy napięć fazowych i transformowanych na płaszczyźnie zespolonej	
	
schematy zastępcze	
	

LITERATURA

1. Bajorek Z.: Modelowanie matematyczne transformatorów trójfazowych przy pracy niesymetrycznej. PWN, Warszawa 1983.
2. Kluszczyński K.: Składowe aktywne i zerowe prądu w obwodach elektromagnetycznych. Rozprawy Elektrotechniczne nr 27 z. 3, Warszawa 1981.

Recenzent: Dr hab. inż. Piotr Wach, prof. WSI Opole

Wpłynęło do Redakcji dnia 15 marca 1996 r.

Abstract

In the paper the method for analysing a 3-phase transformer with magnetic asymmetry of the core is presented. At the beginning on the base of the assumption (1) theory of a symmetrical core transformer is briefly presented. Basing on the transformer equations (3), (4) and transformer inductances matrices (5), (6) the equation (7) is obtained which enables - together with the ortogonality and normalization conditions (8) - to find the eigenvalues (9) and related eigenvectors. It results in determining the 2-axis transformation matrix K (10) which decouples the set of differential equations (3), (4). With the help of the transformation K the 2-axis voltage, current and flux coordinates (11) are found and the 3-phase transformer equivalent circuits (Fig. 3) are determined. In the next stage the asymmetrical core transformer theory is developed. On the base of the assumption (2) the transformer inductances matrix (15) is determined and the equation (7) with the supporting conditions (8) is solved in order to find the new eigenvalues (16) and related eigenvectors. This allows to determine the new (more general) 2-axis transformation matrix K_k (17) for matrix (15). Basing on it new voltage-current equations in 2-axis coordinates α_k , β_k are obtained and the 3-phase transformer equivalent circuits are determined (Fig. 6). As an example the switch-on of 3-phase transformer has been considered at steady and transient states (Fig. 7, Tab. 1.) Finally, the main relationships for standard and the new theory taking into account asymmetry of the core are put together in the Tab 2. and compared.

Krzysztof KLUSZCZYŃSKI,
Katedra Maszyn i Urządzeń Elektrycznych
Politechniki Śląskiej

Piotr MALICKI
Południowy Zakład Automatyki i Zabezpieczeń,
ENERGOEFEKT sp. z o.o., Ruda Śląska

PASOŻYTNICZE MOMENTY SYNCHRONICZNE W SILNIKU KLATKOWYM Z PIERŚCIENIEM DODATKOWYM I NIEIZOLOWANYMI PRĘTAMI WIRNIKA

Streszczenie. Przedstawiono model matematyczny trójfazowego indukcyjnego silnika klatkowego z dodatkowym pierścieniem zwierającym uwzględniającym prądy poprzeczne płynące pomiędzy nieizolowanymi prętami klatki poprzez żelazo wirnika. Wykazano, że pierścień dodatkowy może być dogodnym środkiem ograniczania momentów synchronicznych, niewrażliwym na prądy poprzeczne.

SYNCHRONOUS PARASITIC TORQUES IN SQUIRREL-CAGE MOTOR WITH ADDITIONAL RING AND UNINSULATED ROTOR-BARS

Summary. A mathematical model of the squirrel-cage induction motor with additional ring taking into account cross-currents flowing between adjacent bars through the rotor-iron is presented in the paper. It has been shown that the additional ring can be a convenient method of suppressing synchronous torques, not influenced by cross-currents.

1. WPROWADZENIE

W trójfazowym indukcyjnym silniku klatkowym, oprócz momentu asynchronicznego głównego związanego z harmoniczną główną rozkładu przestrzennego pola magnetycznego w szczelinie powietrznej, powstają pasożytne momenty asynchroniczne i synchroniczne. Momenty te zniekształcają charakterystykę mechaniczną silnika związaną z główną

harmoniczną przestrzenną, pogarszają własności maszyny przy rozruchu i nawrocie, wywołują drgania skrętne wału, obniżają sprawność silnika, wzmagają hałas itp.

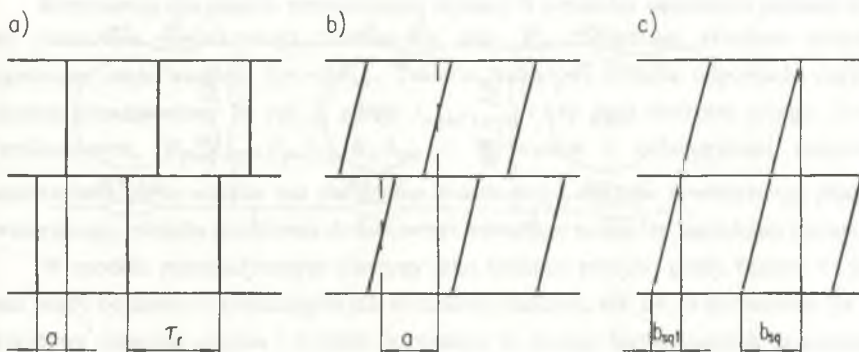
Momenty pasożytnicze powstają w maszynie w wyniku elektrodynamicznego oddziaływania wyższych harmonicznych przestrzennych pola magnetycznego w szczelinie powietrznej, których występowanie spowodowane jest głównie wyższymi harmonicznymi przestrzennymi przepływu uzwojeń, nierównomiernością szczeliny powietrznej oraz nieliniowością obwodu magnetycznego.

Momenty pasożytnicze są w produkowanych silnikach ograniczane różnymi metodami. Bardzo często stosowaną metodą jest skos żłobków wirnika. Jednak wprowadzenie skosu w silniku z nieizolowanymi prętami wirnika, a zwłaszcza w silniku z kłatką odlewana, powoduje bardzo silny wzrost prądów poprzecznych płynących pomiędzy prętami klatki poprzez żelazo wirnika. Wskutek tego w wielu przypadkach następuje osłabienie tłumiącego działania skosu na momenty pasożytnicze. Skutecznym sposobem redukowania momentów synchronicznych jest wprowadzenie dodatkowego pierścienia zwierającego w środek pakietu blach wirnika i odpowiednie skrócenie względem siebie tak powstałych połówek wirnika. Istotę działania pierścienia dodatkowego w odniesieniu do momentów synchronicznych wyjaśniono w pracy [4], ograniczając się jednak do najczęściej spotykanego przypadku wzajemnie przedłużających się skośnych prętów wirnika (rys. 1 c) i przy pominięciu zjawiska prądów poprzecznych odgrywającego istotną rolę w silnikach z prętami skośnymi.

Przedstawiony w niniejszym artykule model matematyczny silnika z pierścieniem dodatkowym, uwzględniający wyższe harmoniczne przestrzenne przepływu uzwojeń oraz prądy poprzeczne w wirniku, umożliwia wykazanie, że tłumienie momentów synchronicznych za pomocą dodatkowego pierścienia zwierającego jest - w przeciwieństwie do skosu - sposobem niewrażliwym na izolowanie lub nieizolowanie klatki wirnika.

2. MODEL MATEMATYCZNY SILNIKA

Model matematyczny indukcyjnego silnika klatkowego z dodatkowym pierścieniem zwierającym w wirniku uwzględniający wyższe harmoniczne przestrzenne przepływu uzwojeń oraz prądy poprzeczne pomiędzy prętami klatki wirnika otrzymano poprzez rozszerzenie modelu silnika bez pierścienia dodatkowego, uwzględniającego wyższe harmoniczne przestrzenne, a pomijającego prądy poprzeczne, przedstawionego w pracy [3]. W modelu założono równomierność szczeliny powietrznej, pominięto spadek napięcia magnetycznego w rdzeniu, prądy wirowe oraz wypieranie prądu w prętach klatki [5].

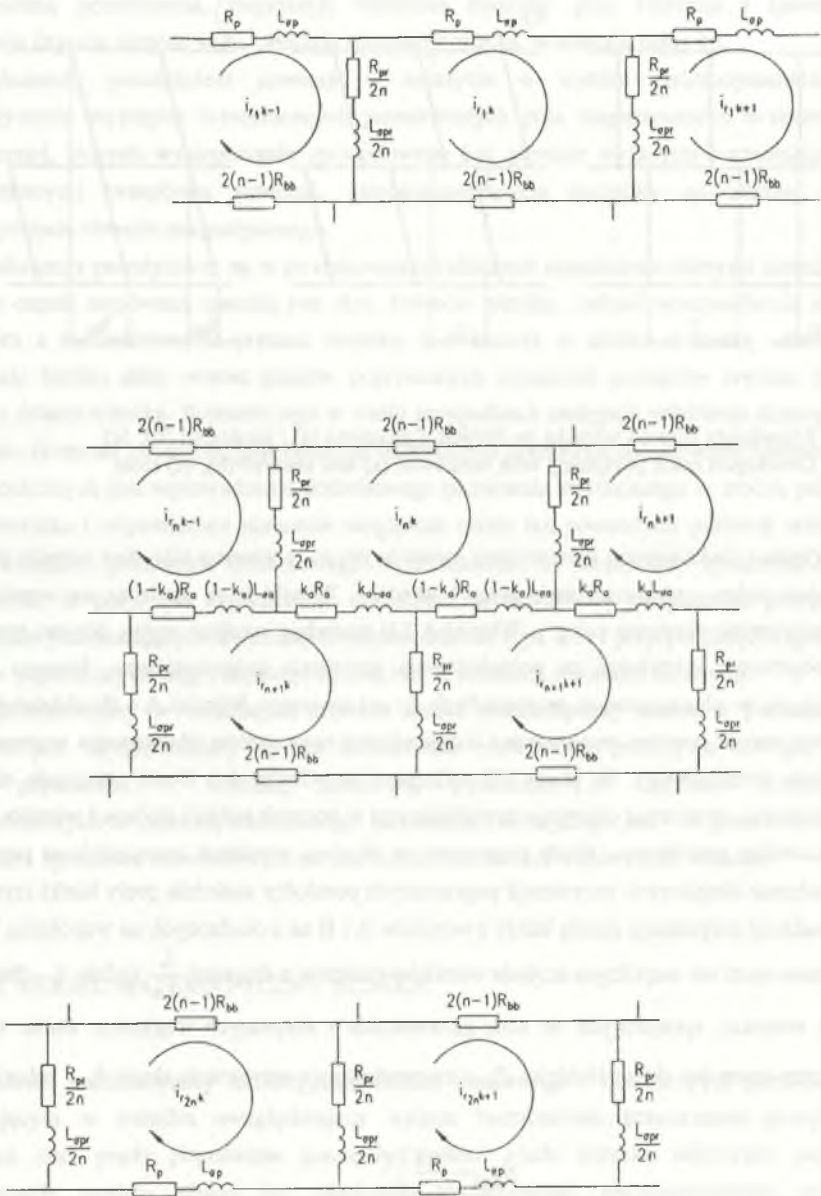


Rys. 1. Rozwinięty obwód wirnika ze żłobkami prostymi (a) i skośnymi (b), (c)
 Fig. 1. Developed rotor periphery with unskewed (a) and skewed (b), (c) slots

Wirnik z dodatkowym pierścieniem zwierającym potraktowano jako dwa wirniki A i B posiadające jeden z pierścieni zwierających wspólny. Wirniki te są osadzone na wspólnym wale i wzajemnie skręcone o kąt γ . Wirniki A i B posiadają wspólny stojan. Stojan sprzęga się z obydwoma wirnikami za pośrednictwem strumienia magnetycznego, którego linie zamykają się w płaszczyznach prostopadłych do osi maszyny. Wirniki A i B oddziałują na siebie wzajemnie poprzez rezystancje i indukcyności rozproszenia żłobkowego segmentów pierścienia dodatkowego. W pracy [5] wykazano, że wirniki A i B nie sprzęgają się za pośrednictwem strumienia osiowego przenikającego w poprzek pakietu stojana i wirnika oraz przez szczelinę powietrzną. Prądy poprzeczne w obydwu wirnikach uwzględniono poprzez wprowadzenie skupionych rezystancji poprzecznych pomiędzy sąsiednie pręty klatki (rys. 2). Wprowadzone rezystancje dzielą każdy z wirników A i B na n osadzonych na wspólnym wale i umieszczonych we wspólnym stojanie wirników-plastrów o długości $\frac{l_r}{2n}$ (gdzie l_r - długość rdzenia wirnika), sprzężonych ze sobą galwanicznie i skręconych względem siebie o kąt $\frac{\beta_{sq1}}{n-1}$, przy czym kąt skosu żłobków β_{sq1} jest powiązany z szerokością skosu b_{sq1} relacją:

$$\beta_{sq1} = \frac{b_{sq1} 2\pi}{\tau_r Q_r} \tag{1}$$

gdzie: τ_r - podziałka żłobkowa wirnika, Q_r - liczba żłobków wirnika.



Rys. 2. Rozwinięty schemat elektryczny wirnika ze skupionymi rezystancjami poprzecznymi
 Fig. 2. Developed electric scheme of rotor with lumped resistances for cross-currents

Rezystancję dla prądów poprzecznych płynących pomiędzy sąsiednimi prętami wirnika bez pierścienia dodatkowego oznacza się jako R_{bb} . Wówczas skupione rezystancje poprzeczne mają wartość $2(n-1)R_{bb}$. Takiemu modelowi wirnika odpowiada rozwinięty schemat przedstawiony na rys. 2, gdzie: i_{rnk}, i_{rn+k} - k -ty prąd oczkowy n -tego, $(n+1)$ -go wirnika-plastra, $R_{pr}, L_{opr}, R_p, L_{op}, R_a, L_{oa}$ - rezystancje i indukcyjności rozproszenia odpowiednio: pręta wirnika bez pierścienia dodatkowego, odcinka zewnętrznego pierścienia zwierającego, odcinka pierścienia dodatkowego zawartego pomiędzy sąsiednimi prętami.

W modelu matematycznym maszyny jako zmienne przyjęto prądy fazowe w stojanie oraz prądy oczkowe w poszczególnych wirnikach-plastrach, tak jak to zaznaczono na rys. 2. Przepływy uzwojeń stojana i wirnika rozwinięto w szeregi harmonicznych przestrzennych Fouriera. Wprowadzono układ współrzędnych $\alpha\beta$ dla prądów i napięć stojana i wirnika.

W celu uzyskania schematu zastępczego maszyny dla stanu ustalonego przy stałej prędkości obrotowej i symetrycznych sinusoidalnych napięciach zasilających przyjęto założenie, że reakcją wirnika na v -tą harmoniczną przestrzenną stojana jest tylko harmoniczna przestrzenna o rzędzie v . Ponadto wprowadzono transformacje obrotu dla wektorów przestrzennych prądów wirnika generowanych przez poszczególne harmoniczne przestrzenne na płaszczyznie nieruchome względem stojana. W efekcie otrzymuje się schemat zastępczy przedstawiony na rys. 3. Schemat ten stanowi szeregowe połączenie rezystancji i reaktancji rozproszenia stojana oraz ciągów sprzężonych oczek związanych z poszczególnymi harmonicznymi przestrzennymi. Na rys. 3 zaznaczono ciąg oczek dla v -tej harmonicznej przestrzennej. Poszczególne oczka w ciągach odpowiadają kolejnym wirnikom-plastram. Schemat ten umożliwi wyznaczenie prądu reakcji pierwotnej stojana I_s (składowej prądu stojana o pulsacji sieci ω_0) oraz prądów reakcji pierwotnej wirników-plastrów dla poszczególnych harmonicznymi przestrzennymi I_{rv} (składowych prądu wirnika o pulsacjach $\omega_0 s_v$ lub $\omega_0(2-s_v)$), gdzie: s_v - poślizg dla v -tej harmonicznej przestrzennej:

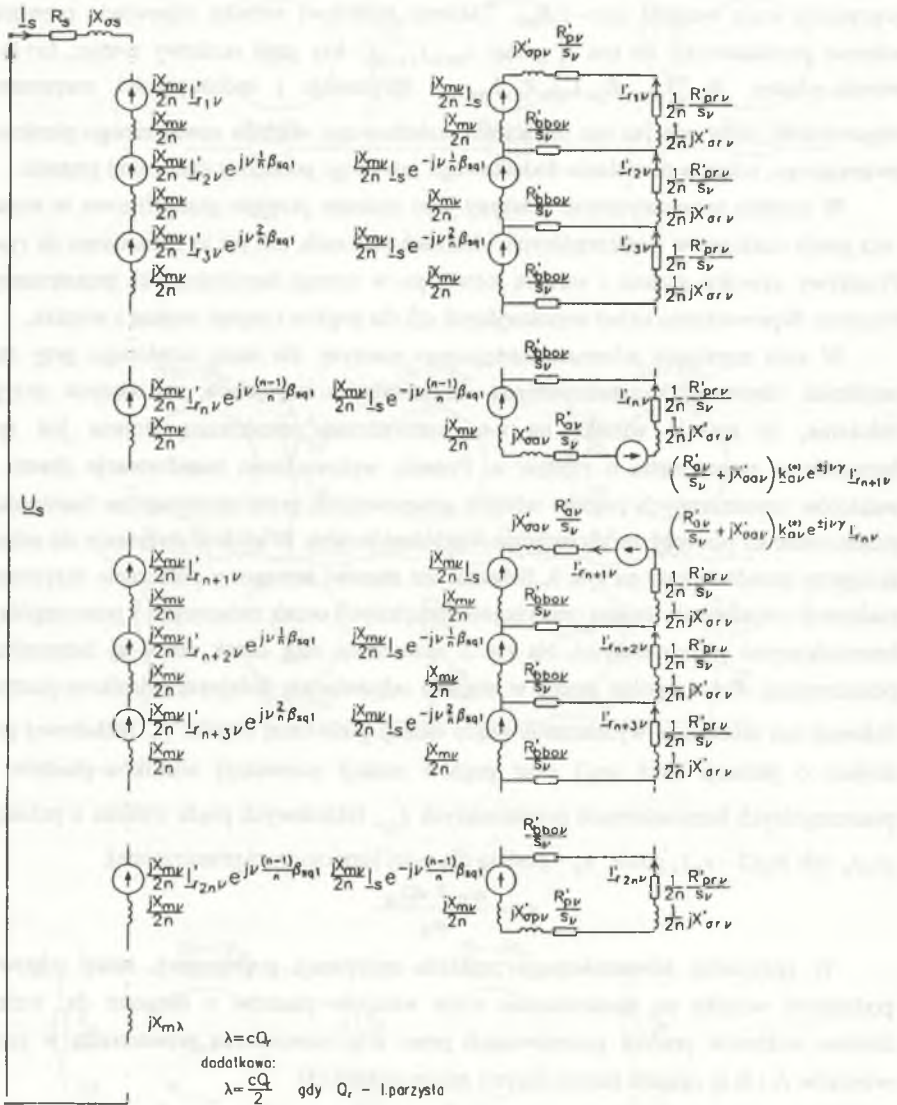
$$s_v = \frac{\omega_0 \mp v\Omega_m}{\omega_0} \quad (2)$$

W przypadku równomiernego rozkładu rezystancji poprzecznej, który odpowiada podziałowi wirnika na nieskończenie wiele wirników-plastrów o długości dx , rozkłady liniowe wektorów prądów generowanych przez v -tą harmoniczną przestrzenną w prętach wirników A i B są opisane następującymi zależnościami [5]:

$$\dot{I}'_{rvA}(x) = \underline{B}_v(e^{-j\alpha_v x} + \underline{K}_{1vA} e^{k_v x} + \underline{K}_{2vA} e^{-k_v x}) \underline{I}_s \quad (3a)$$

$$\dot{I}'_{rvB}(x) = \underline{B}_v(e^{-j\alpha_v x} + \underline{K}_{1vB} e^{k_v x} + \underline{K}_{2vB} e^{-k_v x}) \underline{I}_s \quad (3b)$$

gdzie: $\alpha_v = \pm \frac{v\beta_{sq}}{l_r}$, \underline{B}_v, k_v - współczynniki związane z parametrami schematu zastępczego.



Rys. 3. Schemat zastępczy dla silnika ze skupionymi rezystancjami pomiędzy prętami wirnika
 Fig. 3. Equivalent circuit for squirrel-cage motor with lumped interbar resistance

Współrzędna liniowa x dla wirnika A jest odległością od krawędzi pakietu wirnika A od strony zewnętrznego pierścienia zwierającego. Natomiast współrzędna x dla wirnika B jest odległością od krawędzi pakietu wirnika B od strony dodatkowego pierścienia zwierającego. Gęstość liniowa prądu poprzecznego płynącego pomiędzy sąsiednimi prętami wirnika A, B, generowanego przez v -tą harmoniczną przestrzenną wyraża się następującymi wzorami:

$$\underline{j}_{bbv_A}'(x) = \frac{d\underline{i}_{rv_A}'(x)}{dx} = \underline{B}_v(-j\alpha_v e^{-j\alpha_v x} + \underline{k}_v \underline{K}_{1v_A} e^{\underline{k}_v x} - \underline{k}_v \underline{K}_{2v_A} e^{-\underline{k}_v x}) \underline{I}_s, \quad (4a)$$

$$\underline{j}_{bbv_B}'(x) = \frac{d\underline{i}_{rv_B}'(x)}{dx} = \underline{B}_v(-j\alpha_v e^{-j\alpha_v x} + \underline{k}_v \underline{K}_{1v_B} e^{\underline{k}_v x} - \underline{k}_v \underline{K}_{2v_B} e^{-\underline{k}_v x}) \underline{I}_s, \quad (4b)$$

Stałe $\underline{K}_{1v_A}, \underline{K}_{1v_B}, \underline{K}_{2v_A}, \underline{K}_{2v_B}$ można wyznaczyć korzystając z warunków brzegowych (na krawędziach pakietów obydwu wirników A i B zachodzi równość spadków napięć w pakiecie i w pierścieniach zwierających):

- dla krawędzi od strony zewnętrznych pierścieni zwierających:

$$\underline{i}_{rv_A}'(0) \underline{Z}_{pv} = \underline{j}_{bbv_A}'(0) R_{bbv_A} l_r, \quad (5)$$

$$\underline{i}_{rv_B}'\left(\frac{l_r}{2}\right) \underline{Z}_{pv} = -\underline{j}_{bbv_B}'\left(\frac{l_r}{2}\right) R_{bbv_B} l_r, \quad (6)$$

- dla krawędzi od strony pierścienia dodatkowego:

$$\underline{i}_{rv_A}'\left(\frac{l_r}{2}\right) \underline{Z}_{av} - \underline{i}_{rv_B}'(0) \underline{Z}_{av} \underline{k}_{av}^* e^{\pm jv\gamma} = -\underline{j}_{bbv_A}'\left(\frac{l_r}{2}\right) R_{bbv_A} l_r, \quad (7)$$

$$\underline{i}_{rv_B}'(0) \underline{Z}_{av} - \underline{i}_{rv_A}'\left(\frac{l_r}{2}\right) \underline{Z}_{av} \underline{k}_{av}^* e^{\pm jv\gamma} = \underline{j}_{bbv_B}'\left(\frac{l_r}{2}\right) R_{bbv_B} l_r, \quad (8)$$

gdzie:

$\underline{Z}_{pv}, \underline{Z}_{av}$ - impedancja segmentu odpowiednio: zewnętrznego i dodatkowego pierścienia zwierającego dla v -tej harmonicznej przestrzennej,

\underline{k}_{av} - współczynnik zależny od relacji pomiędzy kątem skosu żłobków a kątem skręcenia γ .

Na uwagę zasługuje szczególny przypadek, gdy rezystancje i reaktancje rozproszenia zewnętrznych pierścieni zwierających oraz pierścienia dodatkowego są równe zero. Warunki brzegowe (5)-(8) przyjmują wtedy następującą postać:

$$\underline{j}_{bbv_A}'(0) = 0, \quad \underline{j}_{bbv_A}'\left(\frac{l_r}{2}\right) = 0, \quad \underline{j}_{bbv_B}'(0) = 0, \quad \underline{j}_{bbv_B}'\left(\frac{l_r}{2}\right) = 0 \quad (9,10,11,12)$$

Po wstawieniu (4a,b) do (9)-(12) można wyznaczyć stałe $\underline{K}_{1v_A}, \underline{K}_{1v_B}, \underline{K}_{2v_A}, \underline{K}_{2v_B}$:

$$\underline{K}_{1v_A} = \underline{K}_{1v_B} = \frac{j\alpha_v e^{-j\alpha_v \frac{l_r}{2}} - e^{-k_v \frac{l_r}{2}}}{k_v e^{k_v \frac{l_r}{2}} - e^{-k_v \frac{l_r}{2}}}, \quad (13)$$

$$\underline{K}_{2v_A} = \underline{K}_{2v_B} = \frac{j\alpha_v e^{-j\alpha_v \frac{l_r}{2}} - e^{-k_v \frac{l_r}{2}}}{k_v e^{k_v \frac{l_r}{2}} - e^{-k_v \frac{l_r}{2}}}. \quad (14)$$

Równości (13), (14) oznaczają, że przy pominięciu rezystancji i reaktancji rozproszenia pierścieni zawierających rozkłady prądów $\dot{I}'_{rv_A}(x)$ i $\dot{I}'_{rv_B}(x)$ generowanych w wirnikach A i B przez v -tą harmoniczną przestrzenną są identyczne. Identyczne są również rozkłady gęstości prądów poprzecznych $\dot{J}'_{bbv_A}(x)$ i $\dot{J}'_{bbv_B}(x)$. Wniosek ten umożliwia uzasadnienie skuteczności działania pierścienia dodatkowego w obecności prądów poprzecznych.

3. PASOŻYTNICZE MOMENTY SYNCHRONICZNE

Znajomość prądów reakcji pierwotnej stojana i wirnika wyznaczonych w oparciu o schemat zastępczy z rys. 3 wystarcza do wyznaczenia dominujących składowych momentów pasożytniczych - tzw. momentów pasożytniczych I rzędu. Pasożytniczy moment synchroniczny I rzędu związany z parą harmonicznymi przestrzennymi (v , ρ), powstający w silniku z pierścieniem dodatkowym jest w przypadku równomiernego rozkładu rezystancji poprzecznej opisany następującą zależnością [5]:

$$T_{e(v,\rho)s} = a'_{(v,\rho)} \operatorname{Re} \left[\pm j \underline{I}'_s \frac{1}{2} \left(\frac{2}{l_r} \int_0^{\frac{l_r}{2}} (\dot{I}'_{rv_A}(x) + \dot{I}'_{rv_B}(x)) e^{\pm j(v \pm \rho)y} e^{\pm j\alpha_v x} dx \right)^{(*)} e^{\pm j(v \pm \rho)\vartheta_0} \right] + \\ + a''_{(v,\rho)} \operatorname{Re} \left[\pm j \underline{I}'_s \frac{1}{2} \left(\frac{2}{l_r} \int_0^{\frac{l_r}{2}} (\dot{I}'_{r\rho_A}(x) + \dot{I}'_{r\rho_B}(x)) e^{\pm j(v \pm \rho)y} e^{\pm j\alpha_v x} dx \right)^{(*)} e^{\pm j(v \pm \rho)\vartheta_0} \right] \quad (15)$$

Jeśli przyjąć założenie, że rezystancje i indukcyjności rozproszenia zewnętrznych pierścieni zawierających oraz pierścienia dodatkowego są równe zero, to - jak wykazano wcześniej - rozkłady prądów generowanych w wirnikach A i B przez v -tą lub ρ -tą harmoniczną przestrzenną są identyczne:

$$\dot{I}_{rv_A}(x) = \dot{I}_{rv_B}(x) = \dot{I}_{rv}(x) \quad (16)$$

$$\dot{I}_{r\rho_A}(x) = \dot{I}_{r\rho_B}(x) = \dot{I}_{r\rho}(x) \quad (17)$$

Wzór na moment synchroniczny (15), przyjmuje wówczas następującą postać:

$$T_{e(v,\rho)s} = \dot{a}_{(v,\rho)} \operatorname{Re} \left\{ \pm j \dot{I}_s^* \frac{1}{2} \left(\frac{2}{l_r} \int_0^{\frac{l_r}{2}} \dot{I}_{rv}(x) (1 + e^{\pm j(v \pm \rho)\gamma}) e^{\pm j\alpha_\rho x} dx \right)^{(*)} e^{\pm j(v \pm \rho)\vartheta_0} \right\} + \\ + \dot{a}_{(v,\rho)}'' \operatorname{Re} \left\{ \pm j \dot{I}_s^* \frac{1}{2} \left(\frac{2}{l_r} \int_0^{\frac{l_r}{2}} \dot{I}_{r\rho}(x) (1 + e^{\pm j(v \pm \rho)\gamma}) e^{\pm j\alpha_\rho x} dx \right)^{(*)} e^{\pm j(v \pm \rho)\vartheta_0} \right\} \quad (18)$$

Przy kącie wzajemnego skręcenia połówek wirnika określonym zależnością:

$$\gamma = \frac{\pi}{v \pm \rho} \quad (19)$$

wyrażenie $1 + e^{\pm j(v \pm \rho)\gamma}$ we wzorze (18) staje się równe zero. Następuje więc wówczas całkowite słumienie momentu synchronicznego związanego z parą harmonicznymi (v, ρ) , pomimo że w wirniku płyną prądy poprzeczne pomiędzy prętami klatki.

4. WNIOSKI

W artykule przedstawiono model matematyczny indukcyjnego silnika klatkowego z dodatkowym pierścieniem zwierającym, uwzględniający prądy poprzeczne w wirniku. Z zależności określających amplitudy pasożytniczych momentów synchronicznych wynika, że wprowadzenie pierścienia dodatkowego jest - w przypadku odpowiednio małych rezystancji i indukcyjności rozproszenia zewnętrznych pierścieni zwierających i pierścienia dodatkowego - dogodnym środkiem ograniczania pasożytniczych momentów synchronicznych niewrażliwym na prądy poprzeczne.

LITERATURA

1. Hickiewicz J., Łukaniszyn M., Szymaniec S., Wach P.: On reducing the vibration and noise level of induction motors with integral and fractional slot windings. Archiv für Elektrotechnik 73, 1990, 163-171.

2. Jordan H., Weis M.: Nutenschrägung und ihre Wirkungen. ETZ-A 88, 1967, 528-533.
3. Kluszczyński K., Miksiewicz R.: Momenty pasożytnicze w indukcyjnych silnikach klatkowych. Prace Sekcji Maszyn Elektrycznych i Transformatorów Komitetu Elektrotechniki PAN, PTETiS, Warszawa - Gliwice 1993.
4. Kluszczyński K., Miksiewicz R.: Squirrel-cage motor with additional ring in rotor. Electric Machines and Power Systems 21, 1993, 1-9.
5. Malicki P.: Momenty pasożytnicze w trójfazowych indukcyjnych silnikach klatkowych bez oraz z dodatkowym pierścieniem zwierającym w wirniku przy uwzględnieniu prądów poprzecznych. Praca doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1995.
6. Williamson S., Adams N., K.: Cage induction motors with inter-rings. IEE Proc. 136B, 1989, 263-274.

Recenzent: Dr hab. inż. Piotr Wach, prof. WSI w Opolu

Wpłynęło do Redakcji dnia 10 listopada 1995 r.

Abstract

In an induction motor, besides the main asynchronous torque, asynchronous and synchronous parasitic torques arise. The reason for generating parasitic torques is mainly interaction among MMF space harmonics in the air gap. Synchronous parasitic torques arising in an induction motor deteriorate dynamic properties of the motor at starting and reversals, increase the noise and cause vibrations. Parasitic synchronous torques arising in a squirrel cage induction motor can be suppressed by skewing the rotor slots as well as by an additional ring joining all the bars of the cage in the midst of the rotor length. In the motor with uninsulated rotor-bars cross currents flowing from one bar to another through the iron change distribution of rotor current. It is known that effectiveness of the skew in a motor with uninsulated rotor-bars is significantly lower than that in the motor with insulated rotor-bars. A mathematical model of the squirrel-cage induction motor with additional ring taking into account cross-currents flowing between adjacent bars through the rotor-iron is presented in the paper. The additional ring divides the rotor into two halves which can be turned mutually around the shaft. These two halves can be treated as two separate rotors having one ring in common. The interbar resistance R_{bb} is substituted by n lumped resistances of the value $(n-1)R_{bb}$. Developed rotor electric scheme and the lumped-parameter equivalent-circuit corresponding to such a model are presented in Fig. 2 and 3 respectively. If resistances and leakage reactances of end-rings and the additional ring are equal to zero, the distributions of currents related to any MMF harmonic will be the same in both halves of the rotor (16), (17). Then if the halves are mutually turned by the angle γ given by relation (19), the synchronous parasitic torque, related to the pair of harmonics (ν, ρ) given by relation (18), will be suppressed just as in the motor with insulated rotor-bars.

Krzysztof KLUSZCZYŃSKI
Katedra Maszyn i Urządzeń Elektrycznych
Politechniki Śląskiej

Piotr MALICKI
Południowy Zakład Automatyki i Zabezpieczeń,
ENERGOEFEKT sp. z o.o., Ruda Śląska

OBLICZANIE MOMENTU SYNCHRONICZNEGO DLA PRZYKŁADOWEGO SILNIKA KLATKOWEGO Z PIERŚCIENIEM DODATKOWYM I NIEIZOLOWANĄ KLATKĄ

Streszczenie. W artykule przedstawiono wyniki obliczeń amplitudy dominującego momentu synchronicznego powstającego w trójfazowym indukcyjnym silniku klatkowym bez oraz z dodatkowym pierścieniem zwierającym i nieizolowanymi prętami wirnika. Wykazano, że pierścień dodatkowy jest skutecznym środkiem ograniczania momentów synchronicznych, niewrażliwym na prądy poprzeczne.

CALCULATING SYNCHRONOUS TORQUE FOR EXEMPLARY SQUIRREL-CAGE MOTOR WITH ADDITIONAL RING AND UNINSULATED ROTOR-BARS

Summary. Calculations of dominant synchronous torque arising in a squirrel-cage induction motor without and with additional ring and uninsulated rotor-bars are presented in the paper. It has been shown, that the additional ring, which is not influenced by cross-currents, suppresses synchronous torques with good result.

1. WPROWADZENIE

Pasożytnicze momenty synchroniczne powstające w indukcyjnym silniku klatkowym o określonej liczbie żłobków stojana i wirnika można tłumić poprzez zastosowanie odpowiedniego skosu żłobków wirnika, jak również poprzez wprowadzenie dodatkowego pierścienia zwierającego i wzajemne skręcenie połówek wirnika o odpowiedni kąt.

Z praktyki konstrukcyjnej wynika, że tłumiące działanie skosu żłobków na momenty pasożytnicze jest w znacznym stopniu niwelowane przez prądy poprzeczne płynące pomiędzy prętami wirnika, przez co skuteczność tego sposobu jest ograniczona, zwłaszcza w silniku z klatką aluminiową odlewaną.

Innym sposobem tłumienia momentów synchronicznych jest wprowadzenie dodatkowego pierścienia zwierającego w środek pakietu wirnika i odpowiednie skrócenie obydwu połówek wirnika. Pierścień dodatkowy jest stosowany często łącznie ze skosem żłobków, którego wprowadzenie powoduje znaczny wzrost prądów poprzecznych. Celem niniejszego artykułu jest wykazanie, że skuteczność działania pierścienia dodatkowego jest praktycznie niezależna od istnienia prądów poprzecznych pomiędzy prętami wirnika, a więc - że prawidłowo zaprojektowany pierścień dodatkowy dla silnika z klatką izolowaną będzie spełniał swoją rolę również w przypadku silnika z nieizolowaną klatką wirnika.

2. ISTOTA DZIAŁANIA PIERŚCIENIA DODATKOWEGO

Pasożytniczy moment synchroniczny związany z parą harmonicznych przestrzennych (v, ρ) powstaje w maszynie zatrzymanej, a więc przy prędkości $\Omega_{ms} = 0$, albo w zakresie pracy silnikowej przy prędkości $\Omega_{ms} = \frac{2\omega_0}{cQ_r}$, bądź też w zakresie pracy hamulcowej przy prędkości $\Omega_{ms} = -\frac{2\omega_0}{cQ_r}$ (gdzie: ω_0 - pulsacja sieci, Q_r - liczba żłobków wirnika, c - liczba całkowita) [1]. Moment ten w stanie ustalonym ma wartość stałą, zależną tylko od kąta ϑ_0 położenia wirnika w chwili $t=0$. Zależność ta, nazywana charakterystyką kątową momentu pasożytniczego, jest sinusoidalna, a jej okres wynosi [1]:

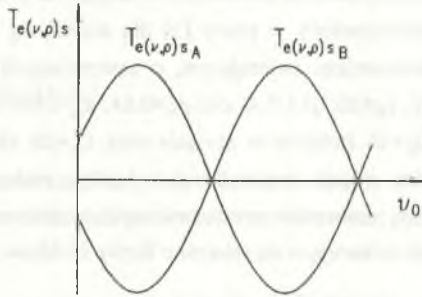
$$T = \frac{2\pi}{\rho \pm v} = \frac{2\pi}{cQ_r} = \frac{|\Omega_{ms}|}{\omega_0} \pi. \quad (1)$$

Moment synchroniczny powstający w silniku z dodatkowym pierścieniem zwierającym jest sumą momentów związanych z obydwoma połówkami wirnika. Jeżeli połówki wirnika są wzajemnie skrócone o kąt

$$\gamma = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{v \pm \rho} = \frac{\pi}{cQ_r} = \frac{|\Omega_{ms}|}{2\omega_0} \pi, \quad (2)$$

to w silniku z izolowanymi prętami wirnika, przy założeniu że rezystancja i indukcyjność rozproszenia pierścienia dodatkowego są równe zero, następuje wzajemne przesunięcie charakterystyk kątowych momentów związanych z obydwoma połówkami o pół okresu

i w konsekwencji - wzajemne ich wygaszenie (rys. 1). Z rozważań przedstawionych w [3] wynika, że w silniku z niez izolowanymi prętami wirnika całkowite stłumienie momentu synchronicznego byłoby możliwe, gdyby rezystancje i indukcyjności rozproszenia zewnętrznych pierścieni zwierających i pierścienia dodatkowego były równe zero.



Rys. 1. Charakterystyki kątowe pasożytniczych momentów synchronicznych związanych z połówkami wirnika skręconymi o kąt $T/2$

Fig. 1. Synchronous torque - angle ϑ_0 curves corresponding to the halves of the rotor mutually turned by the angle $T/2$

Zazwyczaj istnieje w maszynie wiele par harmonicznych przestrzennych generujących momenty pasożytnicze o tej samej prędkości synchronicznej Ω_{ms} . Wypadkowy moment synchroniczny powstający przy prędkości Ω_{ms} jest sumą składników związanych z odpowiednimi parami harmonicznych przestrzennych. Charakterystyki kątowe momentów synchronicznych powstających przy tej samej prędkości $\Omega_{ms} \neq 0$ mają takie same okresy dane wzorem (1). Zatem przy kącie wzajemnego skręcenia połówek wirnika określonym wzorem (2) następuje wygaszenie wypadkowego momentu synchronicznego powstającego przy prędkości Ω_{ms} różnej od zera, gdyż wygaszone zostają wszystkie jego składniki. Charakterystyki kątowe momentów synchronicznych powstających przy prędkości $\Omega_{ms} = 0$ mogą mieć w ogólnym przypadku różne okresy. Całkowite wygaszenie wypadkowego momentu synchronicznego powstającego przy prędkości $\Omega_{ms} = 0$ poprzez wprowadzenie pierścienia dodatkowego nie jest w takim przypadku możliwe. Można wtedy wygasić tylko wybrane momenty składowe o takim samym okresie charakterystyk kątowych [2].

3. TLUMIENIE MOMENTU SYNCHRONICZNEGO W SILNIKU Sg 132 S-4

W rzeczywistym silniku rezystancje i indukcyjności rozproszenia pierścieni zwierających są różne od zera. Badanie wpływu prądów poprzecznych na skuteczność działania dodatkowego pierścienia zwierającego przy uwzględnieniu rzeczywistych wartości rezystancji i indukcyjności rozproszenia pierścieni zwierających przeprowadzono w oparciu o model matematyczny przedstawiony w pracy [3] dla silnika Sg 132 S-4 produkowanego seryjnie z dodatkowym pierścieniem zwierającym, o następujących danych znamionowych: $P_n=5.5$ kW, $U_n=380/220$ V, $I_n=20.2/11.7$ A, $\cos \phi_n=0.84$, $n_n=1450$ obr/min, $p=2$.

Silnik ten posiada $Q_S=36$ żłobków w stojanie oraz $Q_r=28$ żłobków w wirniku. Taka kombinacja liczby żłobków stojana i wirnika jest bardzo niekorzystna ze względu na powstawanie pasożytniczych momentów synchronicznych w zakresie pracy silnikowej [1]. Spełnione są dwie równości wskazujące na zakazane liczby żłobków:

$$Q_r=(6k+2)p \quad \text{dla } k=2 \quad (3)$$

$$Q_r=Q_S-4p \quad (4)$$

Na rys. 6 przedstawiono obliczoną charakterystykę mechaniczną silnika bez dodatkowego pierścienia zwierającego w przypadku prostych żłobków z zaznaczoną amplitudą momentu synchronicznego I rzędu powstającego w zakresie pracy silnikowej przy prędkości obrotowej 214.3 obr/min. Amplituda momentu pasożytniczego jest znacznie większa od momentu krytycznego. Dominujące składniki tego momentu są związane z parami harmonicznymi (2,26) i (10,38). Harmoniczna o rzędzie 2 jest harmoniczną główną ($v=p$), harmoniczna o rzędzie 26 - harmoniczną żłobkową wirnika ($v=Q_r-p$), harmoniczna o rzędzie 38 - harmoniczną żłobkową stojana ($v=Q_S+p$), a harmoniczna o rzędzie 10 - harmoniczną strefową stojana o dużej amplitudzie ($v=5p$). Prędkości synchroniczne rozważanych składników są równe:

$$\Omega_{ms} = \frac{2\omega_0}{\rho + \nu} = \frac{2 \cdot 2\pi \cdot 50}{26 + 2} = 22.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \text{dla składnika związanego z parą (2,26),} \quad (5)$$

$$\Omega_{ms} = \frac{2\omega_0}{\rho - \nu} = \frac{2 \cdot 2\pi \cdot 50}{38 - 10} = 22.4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \text{dla składnika związanego z parą (10,38)} \quad (6)$$

równe są też okresy ich charakterystyk kątowych:

$$T = \frac{2\pi}{\rho + \nu} = \frac{2\pi}{26 + 2} = 0.224 \text{ rad} \quad \text{dla składnika związanego z parą (2,26),} \quad (7)$$

$$T = \frac{2\pi}{\rho - \nu} = \frac{2\pi}{38 - 10} = 0.224 \text{ rad} \quad \text{dla składnika związanego z parą (10,38).} \quad (8)$$

Wypadkowy moment synchroniczny ma więc także okres T , który odpowiada podziałce żłobkowej wirnika:

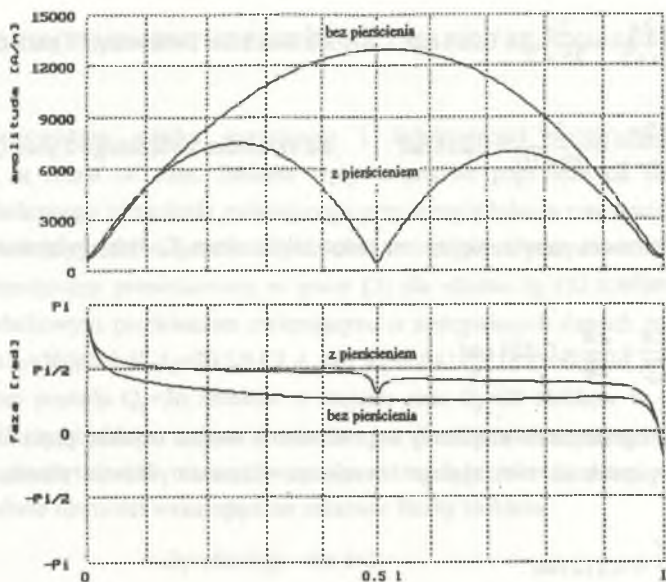
$$T = \frac{2\pi}{Q} = \frac{2\pi}{28} = 0.224 \text{ rad}. \quad (9)$$

Znaczne ograniczenie amplitudy tego momentu można uzyskać przez wprowadzenie dodatkowego pierścienia zwierającego i wzajemne skręcenie połówek wirnika wokół wału o kąt:

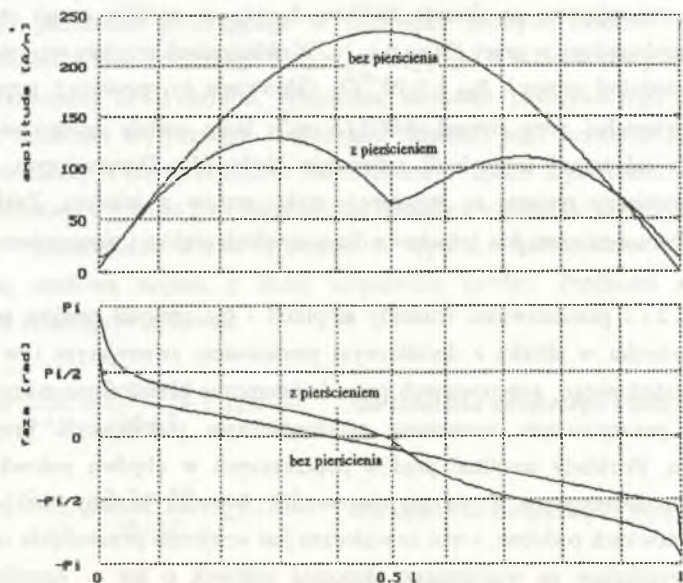
$$\gamma = \frac{T}{2} = 0.112 \text{ rad} \quad (10)$$

odpowiadający połowie podziałki żłobkowej. Taki właśnie kąt skręcenia połówek wirnika został zastosowany w rozpatrywanym silniku. Silnik ten jest produkowany z dodatkowym pierścieniem zwierającym, ze skosem żłobków $b_{sk} = \tau_r$, w wyniku czego otrzymuje się przypadek przedstawiony w pracy [3] na rys. 1c. W obliczeniach przyjęto wartość rezystancji pomiędzy sąsiednimi prętami $R_{bb} = 5 \cdot 10^{-5} \Omega$. Odpowiada to rezystancji poprzecznej dla jednostki powierzchni pręta równej $0.003 \Omega \cdot \text{cm}^2$, która została zmierzona dla silnika Sg 132 S-6 o tej samej technologii odlewania klatki [4]. Dominującym składnikiem rezystancji pomiędzy prętami są rezystancje styku prętów z żelazem. Zakłada się, że rezystancja styku z żelazem jest jednakowa dla wszystkich prętów i równomiernie rozłożona wzdłuż pręta.

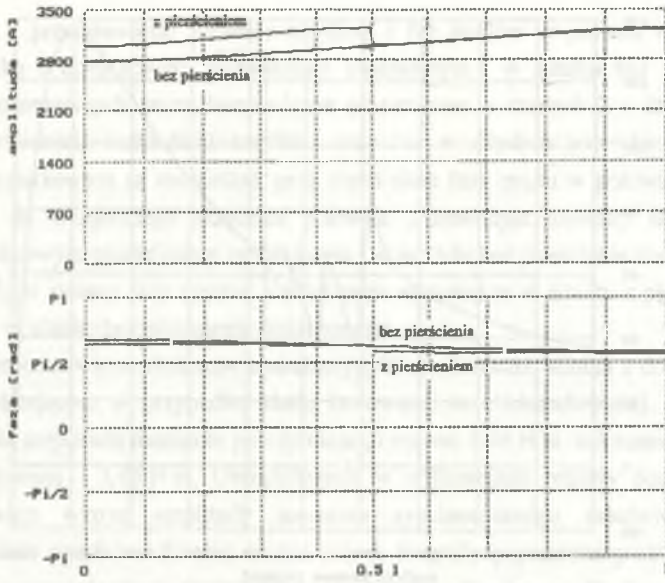
Na rys. 2 i 3 przedstawiono rozkłady amplitud i faz gęstości prądów poprzecznych wzdłuż osi wirnika w silniku z dodatkowym pierścieniem zwierającym i w silniku bez pierścienia dodatkowego, generowanych przez harmoniczne przestrzenne o rzędach 2 i 26, związane z pasywnym momentem synchronicznym powstającym przy prędkości 214.3 obr/min. Rozkłady amplitud prądów poprzecznych w obydwu połówkach wirnika z pierścieniem dodatkowym różnią się nieznacznie. Również kształty rozkładów faz są w obydwu połówkach podobne, z tym że widoczne jest wzajemne przesunięcie odpowiednich rozkładów wynikające ze wzajemnego skręcenia połówek o kąt γ . Amplitudy prądów poprzecznych w silniku z pierścieniem dodatkowym są mniejsze niż w silniku bez pierścienia dodatkowego i osiągają lokalne minimum w środku długości pakietu.



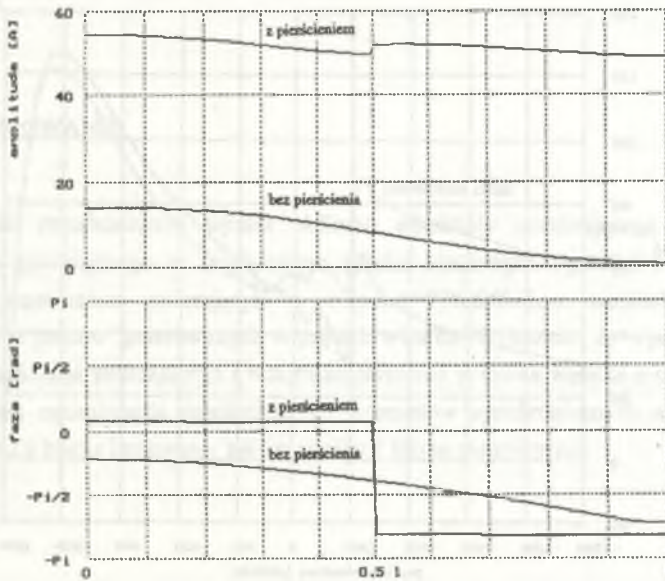
Rys. 2. Rozkłady gęstości liniowej prądu poprzecznego od 2 harmonicznej przestrzennej
 Fig. 2. Distributions of the cross-current density corresponding to the 2nd space harmonic



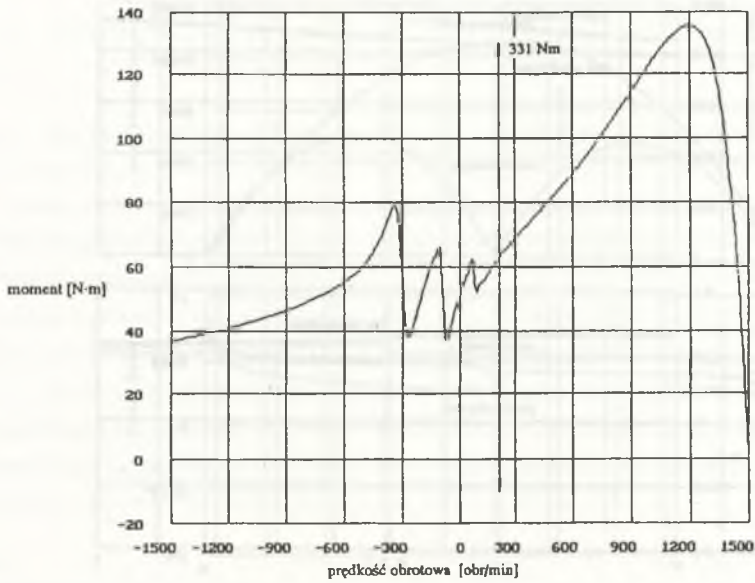
Rys. 3. Rozkłady gęstości liniowej prądu poprzecznego od 26 harmonicznej przestrzennej
 Fig. 3. Distributions of the cross-current density corresponding to the 26th space harmonic



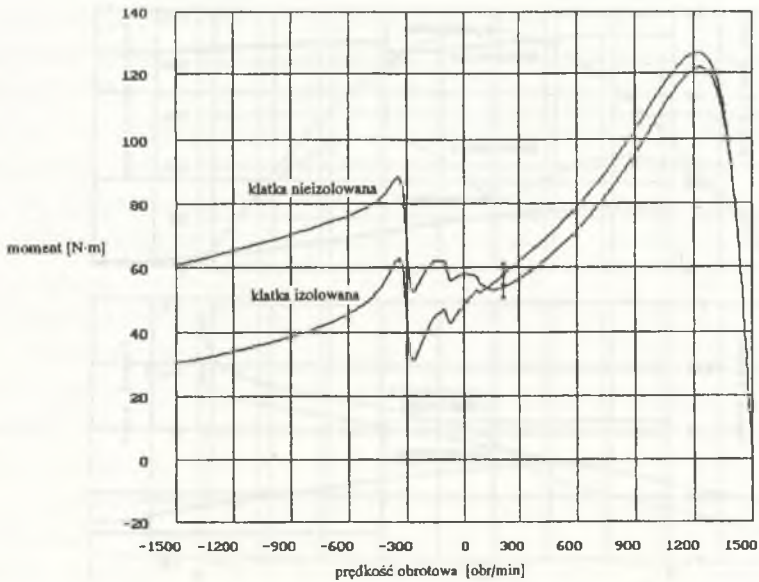
Rys. 4. Rozkłady prądu generowanego w pręcie wirnika przez 2 harmoniczną przestrzenną
 Fig. 4. Distributions of the bar-current corresponding to the 2nd space harmonic



Rys. 5. Rozkłady prądu generowanego w pręcie wirnika przez 26 harmoniczną przestrzenną
 Fig. 5. Distributions of the bar-current corresponding to the 26th space harmonic



Rys. 6. Charakterystyka mechaniczna silnika bez pierścienia dodatkowego
 Fig. 6. Torque-speed curve of the motor without additional ring



Rys. 7. Charakterystyka mechaniczna silnika z pierścieniem dodatkowym
 Fig. 7. Torque-speed curve of the motor with additional ring

Na rys. 4 i 5 przedstawiono rozkłady amplitud i faz prądów w prętach wzdłuż ich długości w silniku z dodatkowym pierścieniem zwierającym i w silniku bez pierścienia dodatkowego, generowanych przez harmoniczne przestrzenne o rzędach 2 i 26. Różnice pomiędzy odpowiednimi rozkładami amplitud oraz faz w obydwu połówkach wirnika z pierścieniem dodatkowym są niewielkie, przy czym skok fazy prądu w połowie długości wirnika wynika ze wzajemnego skręcenia połówek. Porównując rozkłady faz prądów w modelu z dodatkowym pierścieniem zwierającym i w modelu bez pierścienia dodatkowego można zauważyć, że zmiany fazy prądów wzdłuż pręta są mniejsze w silniku z pierścieniem dodatkowym niż w silniku bez pierścienia dodatkowego.

Na rys. 7 przedstawiono obliczone charakterystyki mechaniczne silnika z dodatkowym pierścieniem zwierającym w przypadku klatki izolowanej oraz nieizolowanej. W silniku z klatką izolowaną amplituda momentu pasożytniczego wynosi 3.46 N·m, natomiast w silniku z klatką nieizolowaną - 3.65 N·m. Uwzględnienie w obliczeniach prądów poprzecznych spowodowało więc wzrost amplitudy momentu synchronicznego zaledwie o 5%. W kontekście takich wyników obliczeń można uznać, że prądy poprzeczne praktycznie nie pogarszają skuteczności działania dodatkowego pierścienia zwierającego. Porównując rys. 6 i 7 można stwierdzić, że moment synchroniczny w silniku z pierścieniem dodatkowym jest praktycznie stłumiony, co potwierdzają wyniki pomiarów momentu dla silnika z klatką nieizolowaną [5].

4. PODSUMOWANIE

W artykule przedstawiono wyniki obliczeń amplitudy dominującego momentu synchronicznego powstającego w trójfazowym silniku klatkowym Sg 132 S-6 bez oraz z dodatkowym pierścieniem zwierającym w wirniku. Przedstawiono rozkłady prądów poprzecznych oraz prądów generowanych w prętach wirnika. Wykazano, że wprowadzenie dodatkowego pierścienia zwierającego i wzajemne skręcenie połówek wirnika o odpowiedni kąt jest sposobem ograniczania pasożytniczych momentów synchronicznych skutecznym zarówno w silniku z klatką izolowaną, jak i w silniku z klatką nieizolowaną.

LITERATURA

1. Kluszczyński K., Miksiewicz R.: Momenty pasożytnicze w indukcyjnych silnikach klatkowych. Prace Sekcji Maszyn Elektrycznych i Transformatorów Komitetu Elektrotechniki PAN, PTETiS, Warszawa - Gliwice 1993.
2. Kluszczyński K., Miksiewicz R.: Squirrel-cage motor with additional ring in rotor. *Electric Machines and Power Systems* 21, 1993, 1-9.
3. Kluszczyński K., Malicki P.: Pasożytnicze momenty synchroniczne w silniku klatkowym z pierścieniem dodatkowym i niez izolowanymi prętami wirnika. *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka* z. 154, Gliwice 1996.
4. Malicki P.: Momenty pasożytnicze w trójfazowych indukcyjnych silnikach klatkowych bez oraz z dodatkowym pierścieniem zwierającym w wirniku przy uwzględnieniu prądów poprzecznych. Praca doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1995.
5. Krytyczna analiza i weryfikacja istniejących metod obliczeń momentów pasożytniczych w silnikach indukcyjnych na przykładzie silników o wzniosie osi wału 132 - 180 mm. Opracowanie nr 5/138/87/88 Instytut Maszyn i Urządzeń Elektrycznych Politechniki Śląskiej, Gliwice 1988. Praca zbiorowa nie publikowana. Autorzy: K. Kluszczyński, R. Miksiewicz, B. Drak, W. Paszek, M. Noga, J. Rusek.

Recenzent: Dr hab. inż. Piotr Wach, prof. WSI w Opolu

Wpłynęło do Redakcji dnia 9 listopada 1995 r.

Abstract

Parasitic synchronous torques arising in a squirrel cage induction motor can be suppressed by skewing the rotor slots as well as by inserting an additional ring joining all the bars of the cage in the midst of the rotor length. In the motor with uninsulated rotor-bars cross currents flowing from one bar to another through the iron change distribution of rotor current. Effectiveness of the skew in a motor with uninsulated rotor-bars is significantly lower than that in the motor with insulated rotor-bars. A rotor with additional ring can have skewed slots. In a motor with skewed rotor-slots cross-currents are significantly increased. Cross-current density distributions corresponding to the 2nd and 26th space harmonics related to the dominant synchronous torque, calculated for a 5.5 kW motor are presented in Fig. 2 and 3. Bar-current density distributions corresponding to the 2nd and 26th space harmonics are presented in Fig. 4 and 5. Torque-speed curves calculated for the motor without and with additional ring are presented in Fig. 6 and 7, respectively. The parasitic torque in the motor with additional ring is practically suppressed. The amplitude of the synchronous torque in the motor with additional ring and uninsulated rotor-bars is only about 5% greater than that in the motor with insulated rotor-bars. Therefore, the additional ring can be regarded as a convenient method of suppressing synchronous torques, not influenced by cross-currents.

Jerzy KUDŁA

Katedra Maszyn i Urządzeń Elektrycznych

OBLICZANIE NIELINIOWYCH CHARAKTERYSTYK SPRĘŻEŃ MAGNETYCZNYCH POLA MAGNETYCZNEGO GŁÓWNEGO W MASZYNIE SYNCHRONICZNEJ Z WYDATNYMI BIEGUNAMI

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodykę obliczeń pola magnetycznego głównego w maszynach elektrycznych z wydatnymi biegunami przy uwzględnieniu nieliniowych charakterystyk magnesowania rdzeni ferromagnetycznych stojana i wirnika, opartą na numerycznym rozwiązaniu równań pola magnetycznego metodą elementów skończonych. Wyznaczono charakterystyki sprzężeń magnetycznych tego pola z obwodami elektrycznymi maszyny w osiach d i q oraz dokonano ich aproksymacji za pomocą syntetycznych charakterystyk sprzężeń. Obliczenia szczegółowe przeprowadzono dla hydrogeneratora o mocy 150 MV·A.

CALCULATIONS OF NONLINEAR CHARACTERISTICS OF MAIN MAGNETIC FLUX LINKAGES IN A SYNCHRONOUS MACHINE WITH SALIENT POLES

Summary. Methodology of main magnetic flux calculations for electric machines with salient poles when taking into account nonlinear magnetization characteristics of rotor and stator ferromagnetic cores has been presented in the paper. It is based on numerical solution of magnetic flux equations by the finite element method. Characteristics of magnetic flux linkages with machine electric circuits in d and q axes have been determined. Their approximation has been made by means of the synthetic characteristics of magnetic linkages. The detailed calculations have been carried out for a hydrogenerator with 150 MV·A power.

1. WPROWADZENIE

Zjawisko nasycenia rdzeni ferromagnetycznych stojana i wirnika maszyn elektrycznych prądu przemiennego, spowodowane nieliniowymi charakterystykami magnesowania materiałów magnetycznych tworzących rdzenie, utrudnia sformułowanie poprawnych modeli matematycznych maszyn elektrycznych. Pominięcie tego zjawiska lub też uwzględnienie go w niedostatecznym stopniu może być jedną z przyczyn rozbieżności między wynikami obliczeń oraz wynikami pomiarów laboratoryjnych. Rozbieżności te mogą pojawić się zwłaszcza przy badaniach takich stanów pracy maszyny, w których stan nasycenia rdzeni ferromagnetycznych zmienia się w szerokich granicach.

W ostatnich kilkunastu latach w wielu ośrodkach naukowych podejmowane są różnorodne próby uwzględnienia zjawiska nasycenia w obwodowych modelach matematycznych maszyn elektrycznych, za pośrednictwem nieliniowych charakterystyk sprzężeń magnetycznych pola magnetycznego w maszynie z jej obwodami elektrycznymi [1]...[9]. Z technicznego punktu widzenia na szczególną uwagę zasługują prace bazujące na rozdziale wypadkowego pola magnetycznego w maszynie na pola składowe: główne i rozproszenia i na oddzielnej analizie zjawiska nasycenia rdzeni ferromagnetycznych przez te pola. Dzięki takiemu sposobowi postępowania wspomniane wyżej charakterystyki wyrazić można za pomocą niewielkiej liczby zmiennych niezależnych, co w znacznym stopniu upraszcza model matematyczny maszyny oraz ułatwia wyznaczenie jego parametrów. W artykule rozpatrzono zjawisko nasycenia rdzeni ferromagnetycznych przez pole magnetyczne główne w maszynie synchronicznej z wydatnymi biegunami. Podano metodykę obliczeń tego pola oraz charakterystyk jego sprzężeń z obwodami elektrycznymi maszyny w osiach d i q . Przeprowadzono analizę tych charakterystyk oraz zaproponowano ich aproksymację za pomocą syntetycznych charakterystyk sprzężeń magnetycznych. Obliczenia szczegółowe wykonano dla hydrogeneratora ADV - 566 o mocy 150 MV·A.

2. METODYKA OBLICZEŃ POLA MAGNETYCZNEGO GŁÓWNEGO W MASZYNACH ELEKTRYCZNYCH PRĄDU PRZEMIENNEGO Z WYDATNYMI BIEGUNAMI

Wyznaczenie pola magnetycznego głównego w maszynie elektrycznej, w której uwzględnia się jej rzeczywistą strukturę geometryczną, nieliniowe, jednoznaczne charakterystyki magnesowania rdzeni ferromagnetycznych stojana i wirnika oraz uzwojenia

umieszczone w żłobkach, wymaga opracowania modeli fizycznych maszyny, w których to pole występuje w sposób dominujący, oraz opracowania metodyki jego obliczenia.

Przy realizacji obydwu zadań skorzystać można z:

- wynikającej z całkowitego prawa przepływu koncepcji uzwojenia lub uzwojeń magnesujących, wytwarzających pole magnetyczne główne i zastępujących działanie uzwojeń stojana i wirnika (w sensie równoważności ich okładów prądowych),
- wynikającej z analizy sprzężeń magnetycznych w wyidealizowanej maszynie elektrycznej wydawnobiegunowej o idealnie gładkich powierzchniach stojana i wirnika i sinusoidalnie rozłożonych uzwojeniach magnesujących możliwości stosowania transformacji dwuosiowej Parka przy nasycających się rdzeniach ferromagnetycznych stojana i wirnika [4].

Korzystając z nich przyjęto do obliczeń pola magnetycznego głównego model fizyczny maszyny elektrycznej o następujących cechach:

- rdzenie ferromagnetyczne stojana i wirnika są względem siebie nieruchome (wynik transformacji Parka),
- uzwojenia magnesujące, wytwarzające pole magnetyczne główne, umieszczone są jedynie w żłobkach stojana,
- uzwojenia i obwody elektryczne wirnika są otwarte.

W modelu tym, odwzorowującym w sposób wierny strukturę geometryczną maszyny, pole magnetyczne sprzęgające się z uzwojeniami magnesującymi nie jest wyłącznie polem magnetycznym głównym. Dlatego też w pracy przyjęto, że pole magnetyczne główne w maszynie tworzy podstawowa harmoniczna przestrzenna składowej promieniowej indukcji magnetycznej w szczelinie powietrznej maszyny, występująca na powierzchni wyznaczonej przez promień zewnętrzny wirnika.

Wyznaczenie podstawowej harmonicznej przestrzennej składowej promieniowej indukcji magnetycznej wymaga rozwiązania nieliniowego zagadnienia magnetostatycznego w przekroju płaskim maszyny, określonego przez równanie (1)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\nu(B) \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu(B) \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -j, \quad (1)$$

gdzie:

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}, \quad B_x = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial A}{\partial x}, \quad \nu(B) = \frac{1}{\mu(B)}, \quad (2)$$

w którym wartości przenikalności magnetycznej oraz gęstości prądu zależą od rodzaju jednorodnego podobszaru maszyny, co pokazano w tablicy 1.

Tablica 1

Rodzaj jednorodnego podobszaru	μ	j
szczelina powietrzna żłobki wirnika	$\mu = \mu_0$	$j = 0$
rdzenie ferromagnetyczne stojana i wirnika	$\mu = \mu(B)$	$j = 0$
żłobki stojana	$\mu = \mu_0$	$j \neq 0$

Gęstości prądów płynących w żłobkach stojana określone są poprzez wartości chwilowe fazowych prądów magnesujących, wyrażonych za pośrednictwem wektora przestrzennego prądu magnesującego według relacji (3).

$$i_{\mu A} = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Re}\{L_{\mu}\}, \quad i_{\mu B} = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Re}\{a^2 L_{\mu}\}, \quad i_{\mu C} = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{Re}\{a L_{\mu}\}, \quad (3)$$

$$L_{\mu} = I_{\mu} e^{j\gamma_{\mu}}.$$

Przy rozwiązywaniu wyżej wymienionego zagadnienia brzegowego konieczne jest uwzględnienie:

- jednorodnego warunku brzegowego Dirichleta ($A = 0$) na brzegu zewnętrznym otaczającym maszynę,
- warunków symetrii bądź antysymetrii na częściach brzegu powstałych z rozcięcia przekroju poprzecznego maszyny na powtarzające się segmenty,
- warunków przejścia na granicach jednorodnych podobszarów (k i l)

$$A_k = A_l$$

(4)

$$\frac{1}{\mu_k} \cdot \frac{\partial A_k}{\partial n} = \frac{1}{\mu_l} \cdot \frac{\partial A_l}{\partial n}$$

Rozwiązanie nieliniowego zagadnienia magnetostatycznego w rozpatrywanym modelu fizycznym maszyny jest możliwe tylko przy wykorzystaniu metod numerycznych (np. metody elementów skończonych).

Biorąc pod uwagę, że w maszynach elektrycznych z wydatnymi biegunami amplituda i położenie (argument) wyznaczanego wektora przestrzennego podstawowej harmonicznej składowej promieniowej indukcji magnetycznej zależy od modułu i argumentu wektora przestrzennego prądu magnesującego, obliczenia rozkładu pola magnetycznego należy przeprowadzić dla różnych wartości modułu i argumentu tego prądu.

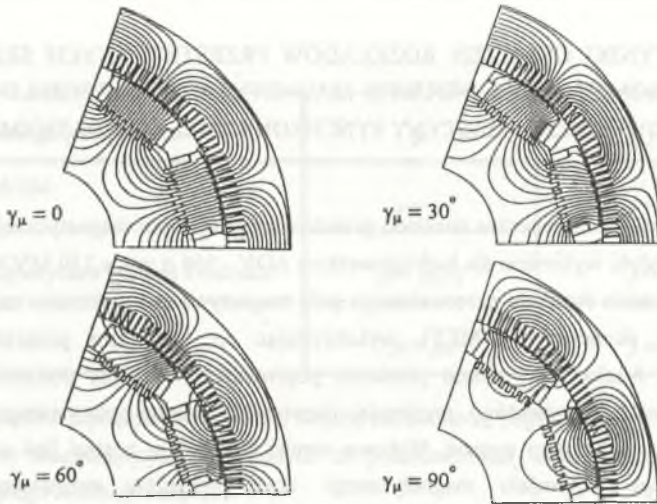
2. WYNIKI OBLICZEŃ ROZKŁADÓW PRZESTRZENNYCH SKŁADOWEJ PROMIENIOWEJ INDUKCJI MAGNETYCZNEJ W SZCELINIE POWIETRZNEJ MASZYNY SYNCHRONICZNEJ Z WYDATNYMI BIEGUNAMI

Obliczenia numeryczne rozkładu przestrzennego indukcji magnetycznej według podanej wyżej metodyki wykonano dla hydrogeneratora ADV - 566 o mocy 150 MVA.

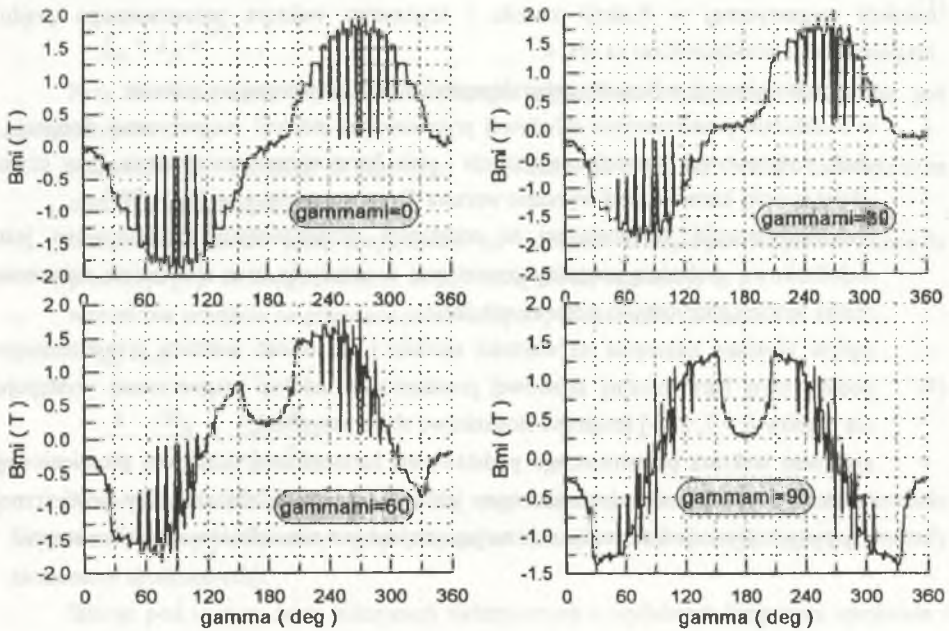
Obliczenia rozkładu przestrzennego pola magnetycznego wykonano za pomocą metody elementów skończonych (MES), wykorzystując do tego celu program komputerowy FEMAG*. Analizowany obszar przekroju poprzecznego maszyny podzielono na elementy trójkątne (~9 tys. elementów), przyjmując rozwiązanie równań pola wewnątrz nich w postaci wielomianu pierwszego stopnia. Wybrane wyniki obliczeń w postaci linii ekwipotencjalnych wektorowego potencjału magnetycznego oraz rozkładów przestrzennych składowej promieniowej indukcji magnetycznej i jej widma harmonicznego obliczonych dla $I_{\mu} = 1,8$ [-]; $\gamma_{\mu} = 0^{\circ}, 30^{\circ}, 60^{\circ}, 90^{\circ}$ przedstawiono na rys. 1, 2, 3. Natomiast charakterystyki modułu i argumentu wektora przestrzennego podstawowej harmonicznego składowej promieniowej indukcji magnetycznej w funkcji modułu i argumentu wektora przestrzennego prądu magnesującego przedstawiono na rys. 4.

Z przedstawionych wykresów i charakterystyk wynikają następujące wnioski:

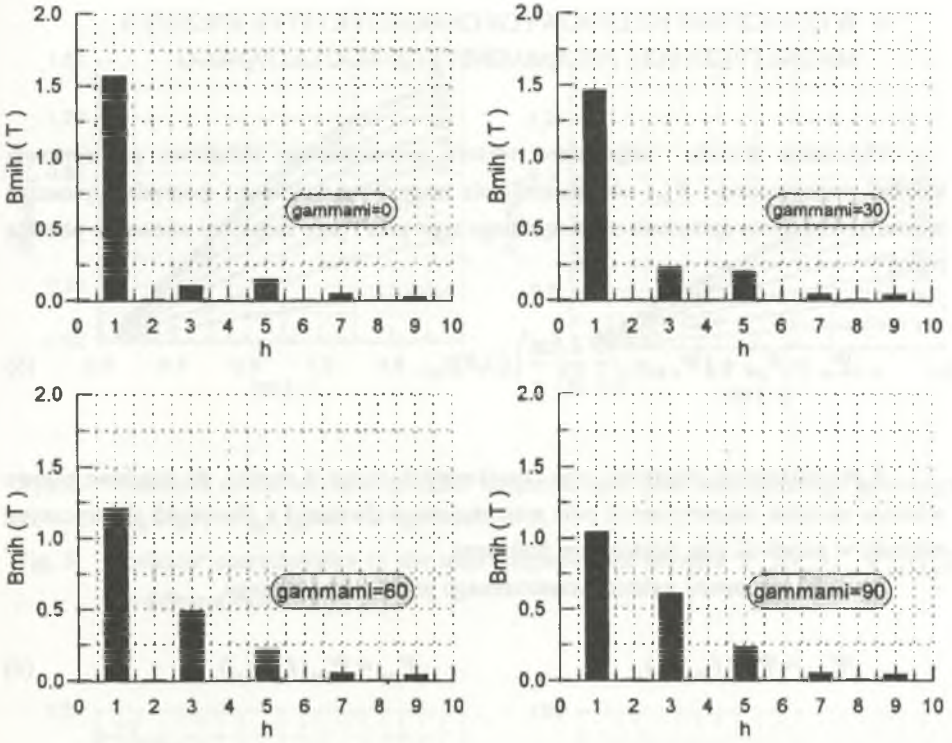
- w rozkładzie przestrzennym składowej promieniowej indukcji magnetycznej dominują, obok podstawowej harmonicznego, trzecia i piąta harmoniczna przestrzenna, przy czym udział trzeciej harmonicznego wyraźnie wzrasta dla argumentów $\gamma_{\mu} \in (60^{\circ} \div 90^{\circ})$,
- obecność trzeciej harmonicznego w rozkładzie przestrzennym spowodowana jest niejednakową grubością szczeliny powietrznej w maszynie oraz zjawiskiem nasycenia rdzeni ferromagnetycznych stojana i wirnika,
- wpływ zjawiska nasycenia na wartości modułu i argumentu wektora przestrzennego podstawowej harmonicznego składowej promieniowej indukcji magnetycznej występuje dla prądów $I_{\mu} > 1, 2$ [-] (maszyna stosunkowo słabo nasycona),
- argument wektora przestrzennego podstawowej harmonicznego składowej promieniowej indukcji magnetycznej zdeterminowany jest zmienną grubością szczeliny powietrznej maszyny, wpływ zjawiska nasycenia na jego zmianę jest niewielki i wynosi kilka stopni.



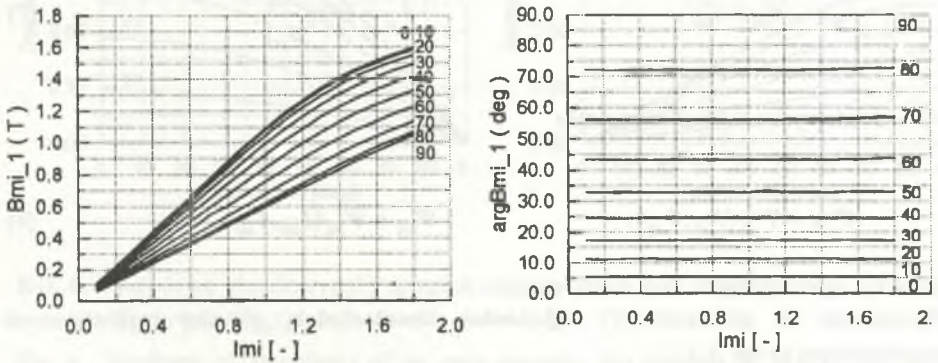
Rys. 1. Linie ekwipotencjalne wektorowego potencjału magnetycznego
 Fig. 1. Isolines of the magnetic vector potential



Rys. 2. Rozkład przestrzenny składowej promieniowej indukcji magnetycznej na powierzchni wyznaczonej przez promień zewnętrzny wirnika
 Fig. 2. Distribution of radial component of magnetic flux density on the surface determined by the rotor external radius



Rys. 3. Widmo harmoniczne rozkładu przestrzennego składowej promieniowej indukcji magnetycznej
 Fig. 3. Harmonic spectrum of radial component of magnetic flux density



Rys. 4. Charakterystyki modułu i argumentu wektora przestrzennego podstawowej harmonicznej przestrzennej indukcji magnetycznej
 Fig. 4. Plots of the magnitude and argument of the space vector of fundamental harmonic of magnetic flux density

4. WYZNACZENIE NIELINIOWYCH CHARAKTERYSTYK SPRĘŻEŃ MAGNETYCZNYCH POLA MAGNETYCZNEGO GŁÓWNEGO

Obliczenie modułu i argumentu wektora przestrzennego składowej promieniowej indukcji magnetycznej $\underline{B}_{\mu 1}$, określającej pole magnetyczne główne, pozwala wyznaczyć wektor przestrzenny sprzężenia magnetycznego tego pola i jego składowe osiowe za pomocą relacji

$$\underline{\Psi}_{\mu} = \Psi_{\mu d} + j\Psi_{\mu q} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2}{p} \left(\frac{z_1}{a} \right) \xi_{1l} R \underline{B}_{\mu 1}. \quad (5)$$

Z przedstawionej zależności oraz charakterystyk na rys. 4 wynika, że składowe osiowe wektora sprzężeń magnetycznych pola magnetycznego głównego z obwodami elektrycznymi maszyny w osiach d i q są nieliniowymi funkcjami:

– modułu i argumentu wektora przestrzennego prądu magnesującego

$$\Psi_{\mu d} = \Psi_{\mu d}(I_{\mu}, \gamma_{\mu}), \quad \Psi_{\mu q} = \Psi_{\mu q}(I_{\mu}, \gamma_{\mu}), \quad (6)$$

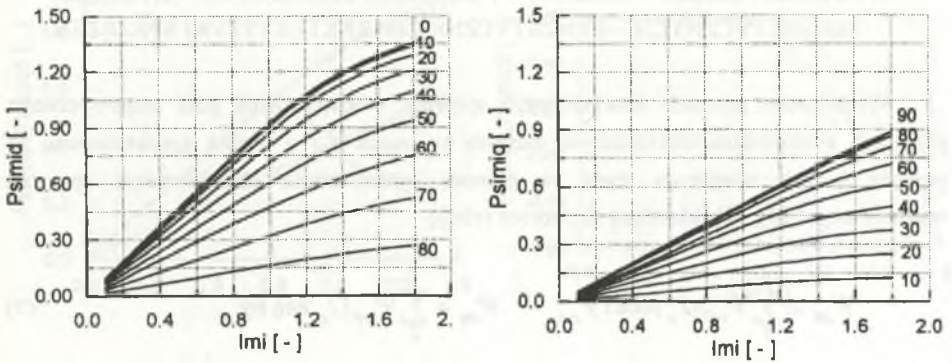
lub też uwzględniając, że

$$I_{\mu} = \sqrt{I_{\mu d}^2 + I_{\mu q}^2}, \quad \gamma_{\mu} = \arctg \frac{I_{\mu q}}{I_{\mu d}}, \quad (7)$$

– składowych osiowych tego prądu

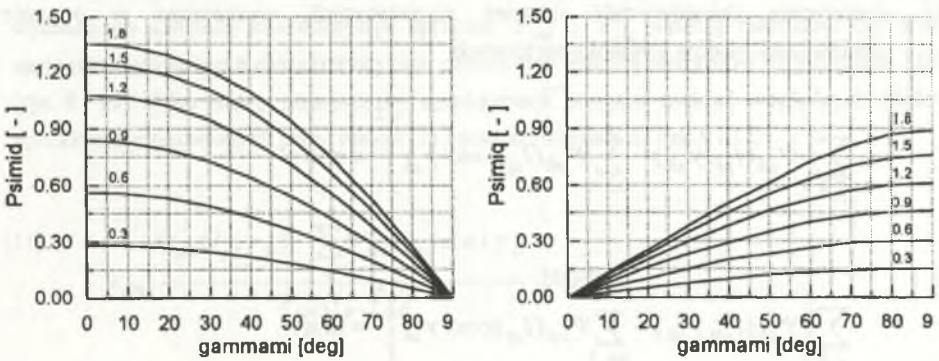
$$\Psi_{\mu d} = \Psi_{\mu d}(I_{\mu d}, I_{\mu q}), \quad \Psi_{\mu q} = \Psi_{\mu q}(I_{\mu d}, I_{\mu q}). \quad (8)$$

Wyznaczone na podstawie (5) odpowiednie charakterystyki sprzężeń magnetycznych przedstawiono na rys. 5, 6.



Rys. 5. Nieliniowe charakterystyki sprzężeń magnetycznych pola magnetycznego głównego $\Psi_{\mu d}(I_{\mu})$, $\Psi_{\mu q}(I_{\mu})$ dla różnych wartości γ_{μ}

Fig. 5. Nonlinear characteristics of the main magnetic flux linkages $\Psi_{\mu d}(I_{\mu})$, $\Psi_{\mu q}(I_{\mu})$ for different values of γ_{μ}



Rys. 6. Nieliniowe charakterystyki sprzężeń magnetycznych pola magnetycznego głównego $\Psi_{\mu d}(\gamma_{\mu})$, $\Psi_{\mu q}(\gamma_{\mu})$ dla różnych wartości I_{μ}

Fig. 6. Nonlinear characteristics of the main magnetic flux linkages $\Psi_{\mu d}(I_{\mu})$, $\Psi_{\mu q}(I_{\mu})$ for different values of I_{μ}

5. APROKSYMACJA NIELINIOWYCH CHARAKTERYSTYK SPRĘŻEŃ MAGNETYCZNYCH – SYNTETYCZNE CHARAKTERYSTYKI SPRĘŻEŃ

Wyznaczone gromady charakterystyk sprzężeń magnetycznych pola magnetycznego głównego z obwodami elektrycznymi maszyny w osiach d i q można aproksymować za pomocą funkcji sklejanych, bądź za pomocą syntetycznych charakterystyk sprzężeń magnetycznych [4], [6], określonych poprzez relację

$$\Psi_{\mu d} \cong \sum_i \Psi_{\mu di}(I_\mu) \cos i \gamma_\mu, \quad \Psi_{\mu q} \cong \sum_i \Psi_{\mu qi}(I_\mu) \sin i \gamma_\mu. \quad (9)$$

W pracy jako syntetyczne charakterystyki sprzężeń magnetycznych przyjęto:

- a) charakterystyki sprzężeń magnetycznych, obliczone dla dwóch szczególnych położenia wektora przestrzennego prądu magnesującego $\gamma_\mu = 0$ i $\gamma_\mu = \pi/2$, czyli

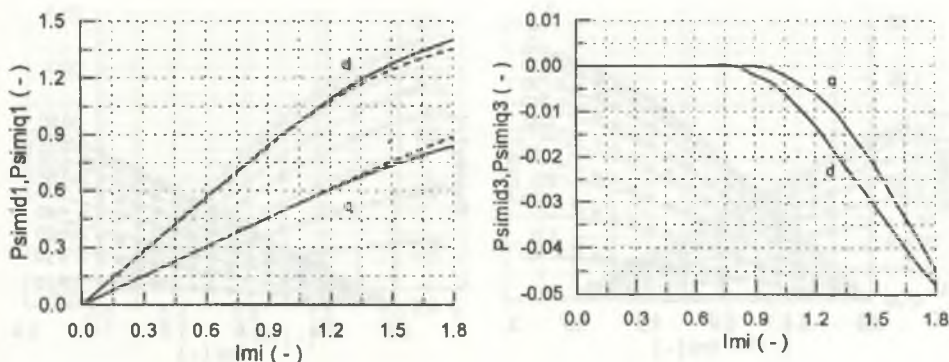
$$\Psi_{\mu d1} = \Psi_{\mu d}(I_\mu, \gamma_\mu = 0), \quad \Psi_{\mu q1} = \Psi_{\mu q}(I_\mu, \gamma_\mu = \pi/2), \quad (10)$$

- b) syntetyczne charakterystyki sprzężeń magnetycznych, wyznaczone w procesie minimalizacji błędów średniokwadratowych

$$\sum_{j,k} \left(\Psi_{\mu d}(I_{ij}, \gamma_{\mu k}) - \sum_{i=1,3} \Psi_{\mu di}(I_{ij}) \cos i \gamma_{\mu k} \right)^2 = \min, \quad (11)$$

$$\sum_{j,k} \left(\Psi_{\mu q}(I_{ij}, \gamma_{\mu k}) - \sum_{i=1,3} \Psi_{\mu qi}(I_{ij}) \cos i \gamma_{\mu k} \right)^2 = \min.$$

Oba rodzaje syntetycznych charakterystyk przedstawiono na rys. 7.



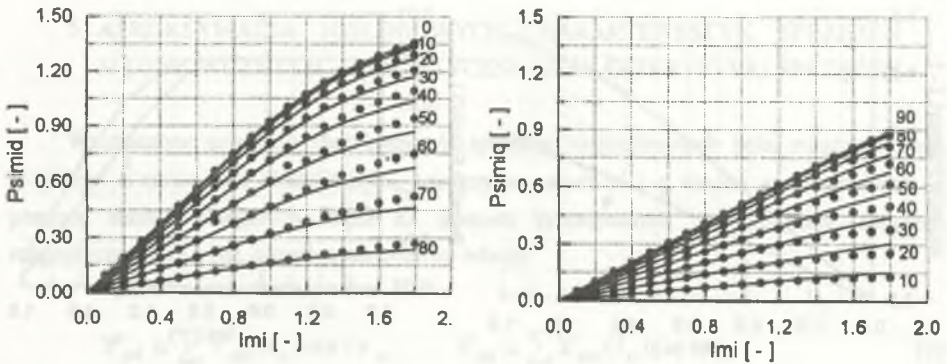
Rys. 7. Syntetyczne charakterystyki $\Psi_{\mu d,q1}(I_{\mu})$, $\Psi_{\mu d,q3}(I_{\mu})$
 - - - - - wyznaczone wg a), ————— wyznaczone wg b)

Fig. 7. Synthetic characteristics $\Psi_{\mu d,q1}(I_{\mu})$, $\Psi_{\mu d,q3}(I_{\mu})$
 - - - - - determined according to a), ————— determined according to b)

Wykorzystując obydwa rodzaje syntetycznych charakterystyk sprzężeń magnetycznych wyznaczono gromady charakterystyk sprzężeń $\Psi_{\mu d}$ i $\Psi_{\mu q}$ według zależności (9), które następnie porównano z charakterystykami obliczonymi metodą elementów skończonych MES (rys. 8 i 10). Jako miarę poprawności aproksymacji przyjęto rozkład względnych błędów aproksymacji określonych przez relacje (2) i przedstawionych na rys. 9 i 11.

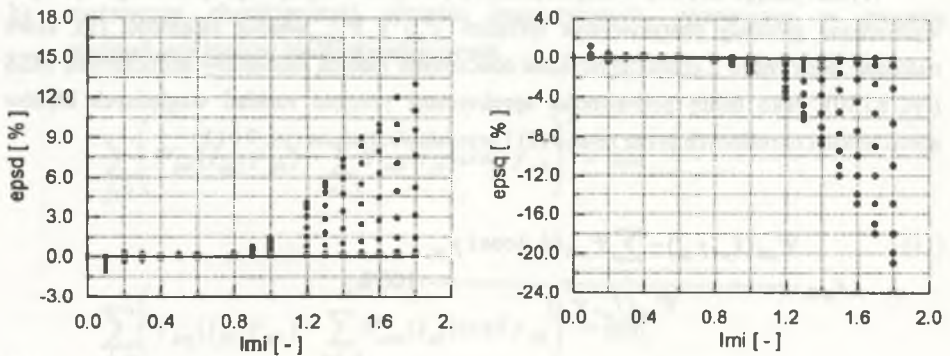
$$\varepsilon_{d\%} = \frac{\Psi_{\mu d}(I_{\mu}, \gamma_{\mu}) - \sum_i \Psi_{\mu di}(I_{\mu}) \cos i \gamma_{\mu}}{\Psi_{\mu d}(I_{\mu}, \gamma_{\mu})} \cdot 100\%, \tag{12}$$

$$\varepsilon_{q\%} = \frac{\Psi_{\mu q}(I_{\mu}, \gamma_{\mu}) - \sum_i \Psi_{\mu qi}(I_{\mu}) \sin i \gamma_{\mu}}{\Psi_{\mu q}(I_{\mu}, \gamma_{\mu})} \cdot 100\%.$$



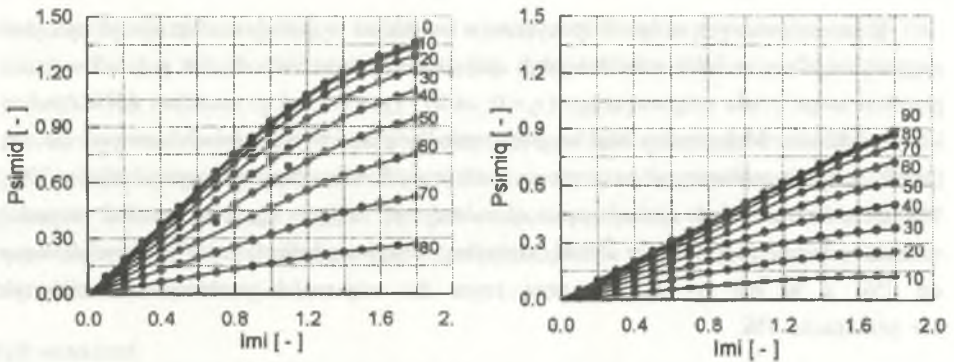
Rys. 8. Porównanie charakterystyk $\Psi_{\mu,d}(I_{\mu})$, $\Psi_{\mu,q}(I_{\mu})$ dla różnych kątów γ_{μ}
 ••••• - obliczonych (MES), ——— - aproksymowanych za pomocą syntetycznych charakterystyk wyznaczonych według a)

Fig. 8. Comparison of characteristics $\Psi_{\mu,d}(I_{\mu})$, $\Psi_{\mu,q}(I_{\mu})$ for different angles γ_{μ}
 ••••• - calculated (FEM), ——— - approximated by means of the synthetic characteristics determined according to a)



Rys. 9. Rozkład wartości względnego błędu procentowego $\epsilon_{d\%}$, $\epsilon_{q\%}$ pomiędzy charakterystykami $\Psi_{\mu,d}(I_{\mu}, \gamma_{\mu})$, $\Psi_{\mu,q}(I_{\mu}, \gamma_{\mu})$ obliczonymi metodą MES oraz za pomocą syntetycznych charakterystyk wyznaczonych według a)

Fig. 9. Distribution of the relative percentage error values $\epsilon_{d\%}$, $\epsilon_{q\%}$ between characteristics $\Psi_{\mu,d}(I_{\mu}, \gamma_{\mu})$, $\Psi_{\mu,q}(I_{\mu}, \gamma_{\mu})$ calculated by the FEM and by means of the synthetic characteristics determined according to a)

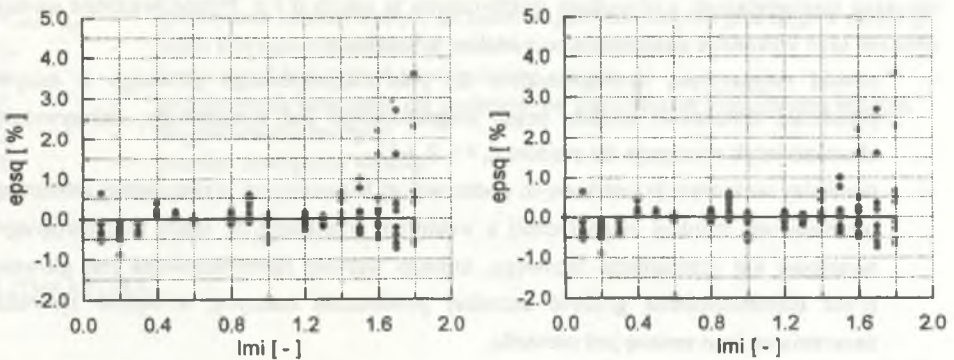


Rys. 10. Porównanie charakterystyk $\Psi_{\mu d}(I_{\mu})$, $\Psi_{\mu q}(I_{\mu})$ dla różnych kątów γ_{μ}

••••• - obliczonych (MES), ——— - aproksymowanych za pomocą syntetycznych charakterystyk wyznaczonych według b)

Fig. 10. Comparison of characteristics $\Psi_{\mu d}(I_{\mu})$, $\Psi_{\mu q}(I_{\mu})$ for different angles γ_{μ}

••••• - calculated (FEM), ——— - approximated by means of the synthetic characteristics determined according to b)



Rys. 11. Rozkład wartości względnego błędu procentowego $\epsilon_{d\%}$, $\epsilon_{q\%}$ pomiędzy charakterystykami $\Psi_{\mu d}(I_{\mu}, \gamma_{\mu})$, $\Psi_{\mu q}(I_{\mu}, \gamma_{\mu})$ obliczonymi metodą (MES) oraz za pomocą syntetycznych charakterystyk wyznaczonych według b)

Fig. 11. Distribution of relative percentage error values $\epsilon_{d\%}$, $\epsilon_{q\%}$ between characteristics $\Psi_{\mu d}(I_{\mu}, \gamma_{\mu})$, $\Psi_{\mu q}(I_{\mu}, \gamma_{\mu})$ calculated by the FEM and by means of the synthetic characteristics determined according to b)

Z przedstawionych na rys. 7-10 wykresów wynika, że wyrażenie charakterystyk sprzężeń magnetycznych za pomocą charakterystyk sprzężeń obliczonych dla dwóch położenia wektora przestrzennego prądu magnesującego ($\gamma_\mu = 0$; oś d) i ($\gamma_\mu = \pi/2$; oś q) umożliwi tylko zgrubne ich przybliżenie. Maksymalny błąd względny między charakterystykami obliczonymi metodą (MES) a aproksymowanymi za pomocą syntetycznych charakterystyk wynosi około 20%. Wyznaczenie natomiast syntetycznych charakterystyk $\Psi_{\mu d, q1}$, $\Psi_{\mu d, q2}$ w wyniku procedur minimalizacji daje zadowalające wyniki. Maksymalny błąd względny w osi d jest zredukowany do 1%, a w osi q do 3%, przy czym dla większości punktów charakterystyk nie przekracza 1%.

5. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawiona metodyka obliczeń pola magnetycznego głównego w maszynach elektrycznych z wydatnymi biegunami, bazująca na numerycznym rozwiązaniu nieliniowego zagadnienia magnetostaticznego w przekroju płaskim maszyny, pozwoliła na wyznaczenie tego pola dla hydrogenerators ADV-566 i na obliczenie nieliniowych charakterystyk jego sprzężeń magnetycznych z obwodami elektrycznymi w osiach d i q . Przeprowadzone wyniki obliczeń oraz wykonane na ich podstawie analizy pokazały, że:

- obwód magnetyczny hydrogenerators dla pola magnetycznego głównego w dużym przedziale zmienności modułu prądu magnesującego jest nienasycony, zakrzywienie charakterystyk występuje dla prądów $I_\mu > 1, 2$ [-],
- pomiędzy wektorem przestrzennym podstawowej harmonicznnej przestrzennej składowej promieniowej indukcji magnetycznej a wektorem przestrzennym prądu magnesującego występuje kąt przesunięcia fazowego, którego wartość zdeterminowana jest głównie przez nierównomierną grubość szczeliny powietrznej maszyny, a wpływ zjawiska nasycenia na jego zmianę jest niewielki,
- w rozkładzie przestrzennym składowej promieniowej indukcji magnetycznej występuje duży udział 3 harmonicznnej przestrzennej spowodowany zarówno nierównomierną grubością szczeliny powietrznej jak i zjawiskiem nasycenia,
- nieliniowe charakterystyki sprzężeń magnetycznych pola magnetycznego głównego z obwodami elektrycznymi maszyny można z dobrą dokładnością aproksymować za pomocą dwóch w każdej osi syntetycznych charakterystyk sprzężeń magnetycznych (błąd względny jest praktycznie w całym zakresie mniejszy od 1%),

- korzystanie tylko z jednej w każdej osi syntetycznej charakterystyki wyznaczonej dla $\gamma_\mu = 0$, $\gamma_\mu = \pi/2$, stosowane w praktyce jest mało dokładne (błąd względny mniejszy od 20%).

Syntetyczne charakterystyki sprzężeń magnetycznych stanowią wygodne narzędzie do opisu sprzężeń magnetycznych obwodów elektrycznych maszyny z polem magnetycznym głównym. Ich wyznaczenie możliwe jest już za pomocą dwóch charakterystyk sprzężeń magnetycznych obliczonych dla kątów $\gamma_\mu \neq 0, \pi/2$ (np. $\gamma_\mu = 20^\circ$, $\gamma_\mu = 70^\circ$), co wydatnie skraca czas obliczeń komputerowych.

Spis oznaczeń

- $A = A_z$ - składowa w osi z wektorowego potencjału magnetycznego,
- B_x, B_y, B - składowe w osi x, y wektora indukcji magnetycznej oraz jego moduł,
- $I_\mu, I_{\mu d}, \gamma_\mu$ - wektor przestrzenny prądu magnesującego, jego moduł i argument (względem osi d wirnika),
- $I_{\mu d}, I_{\mu q}$ - składowe osiowe wektora przestrzennego prądu magnesującego,
- $i_{\mu A}, i_{\mu B}, i_{\mu C}$ - wartości chwilowe prądów magnesujących płynących w fazach A, B, C stojana,
- $B_{\mu 1}, B_{\mu 2}$ - wektor przestrzenny podstawowej harmonicznej przestrzennej składowej promieniowej indukcji magnetycznej i jego moduł,
- $\Psi_{\mu d}, \Psi_{\mu d s}, \Psi_{\mu q}$ - wektor przestrzenny sprzężenia magnetycznego pola magnetycznego głównego i jego składowe osiowe,
- $\Psi_{\mu d s}, \Psi_{\mu q s}$ - syntetyczne charakterystyki sprzężeń magnetycznych pola głównego w osi d i q ,
- z_1 - liczba szeregowo połączonych zwojów uzwojeń stojana,
- a - liczba par gałęzi równoległych uzwojeń stojana,
- ξ_1 - współczynnik uzwojenia dla podstawowej harmonicznej przestrzennej indukcji,
- l_h - długość idealna maszyny,
- R - promień zewnętrzny wirnika.

LITERATURA

1. de Mello F.P., Hannett L.N.: Representation of saturation in synchronous machines, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. PWRS-1, No 4, November 1986, pp.8-18.
2. El-Serafi A.M., Abdallah A.S.: Effect of the saturation curves in various axes on salient-pole synchronous machines; Proc of ICEM'90, pp 404-409.
3. Filc R.W., Ljabuk N.N.: Matematičeskoje modelirovanje javnopoljusnich sinchronnych maszin. Izdatielstvo Svit, Lwow 1991.
4. Kudła J.: Indukcyjności maszyn elektrycznych prądu przemiennego z nieliniowym obwodem magnetycznym głównym; XVI Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów, SPETO, Gliwice - Ustroń 1993, Tom II, ss. 369-375.

5. Kudła J.: Nieliniowe charakterystyki sprzężeń magnetycznych pola głównego w maszynie synchronicznej cylindrycznej. Prace XXXI Międzynarodowego Sympozjum Maszyn Elektrycznych, Ustroń 1995.
6. Ramshaw R.S., Xie G.: Nonlinear model of nonsalient synchronous machines, Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-103, No 7, July 1984.
7. Shackhaft G., Henser P.B.: Model of generator saturation for use in power system studies. Proc. IEE, vol. 126, No 8, August 1979, pp. 759-763.
8. Sobczyk T.J., Sobczyk K.: On modelling of electromechanical energy converters with nonlinear magnetic circuit. Proc. of ICEM'90, Cambridge 1990, pp. 1012-1015.
9. Vas P.: Generalized analysis of saturated A.C. machines. Archiv für Elektrotechnik (64) 1981, No. 1, pp. 57-62.

Recenzent: Dr hab. inż. Jerzy Hickiewicz, prof. WSI w Opolu

Wpłynęło do Redakcji dnia 25 lutego 1996 r.

Abstract

Methodology of main magnetic flux calculations for electric machines with salient poles when taking into account nonlinear magnetization characteristics of rotor and stator ferromagnetic cores has been presented in the paper. It has been based on numerical solution of nonlinear magnetostatic problem (1) by the finite elements method, and has enabled to determine the fundamental radial component of a magnetic density in the machine air-gap. Calculations of the magnetic field distributions have been carried out for different values of magnitude and argument of the magnetizing current space vector (Figs. 1-3). Characteristics of magnetic linkages (5) of the machine electric circuits in d and q axes (Figs. 5, 6) have been determined basing on the calculated characteristics (Fig. 4). Approximation of these characteristics using the synthetic characteristics of magnetic linkages (9) has been suggested. Linkage characteristics calculated for $\gamma_\mu = 0$ and $\gamma_\mu = \pi/2$ (10) and characteristics determined by mean-square error minimization (11) have been assumed to be the synthetic characteristics of magnetic linkages. Comparison of the magnetic linkage characteristics calculated by the finite element method (FEM) and those calculated by means of the synthetic characteristics of magnetic linkages (Figs. 8-11) has proved that it is possible to approximate these characteristics by two (in each axis) synthetic characteristics. Use of one synthetic characteristic only (in each axis) leads to unsatisfactory results. Application of the synthetic characteristics of magnetic linkages makes analysis of machine properties easier and reduces number of calculations necessary for determination of these properties.

Roman KROK, Roman MIKSIEWICZ
Katedra Maszyn i Urządzeń Elektrycznych

OBWODOWY MODEL CIEPLNY DO OBLICZEŃ POLA TEMPERATUR W UWZOJENIU WZBUDZENIA TURBOGENERATORA Z CHŁODZENIEM BEZPOŚREDNIM ZABIERAKOWYM

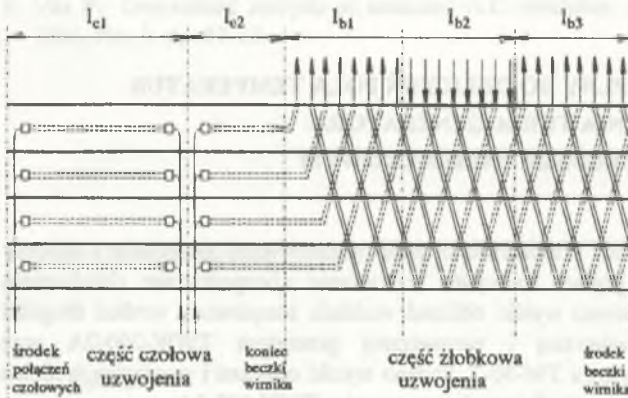
Streszczenie. W pracy przedstawiono model matematyczny pozwalający obliczyć rozkład temperatury w prętach uzwojenia wzbudzenia z bezpośrednim chłodzeniem zabierakowym. Przedstawiono wyniki obliczeń rozkładu temperatury wzdłuż długości prętów dla cewki zewnętrznej i wewnętrznej generatora TWW-200-2A oraz zmodernizowanego generatora TW-50-2. Podano wyniki obliczeń i pomiarów średnich temperatur uzwojeń wzbudzenia dla trzech generatorów TWW-200-2A.

THERMAL/ELECTRICAL DIAGRAM FOR CALCULATION OF THE TEMPERATURE FIELD IN EXCITATION WINDING OF A TURBOGENERATOR WITH A DIRECT COOLING SYSTEM

Summary. The paper presents a mathematical model describing temperature distribution in the bars of excitation winding with direct cooling system. Calculation results of temperature distribution along the bar length for the inner and outer coils of TWW-200-2A and moderised TW-50-2 generators are given. Calculation and measurement results of excitation windings mean temperatures for three TWW-200-2A generators are presented as well.

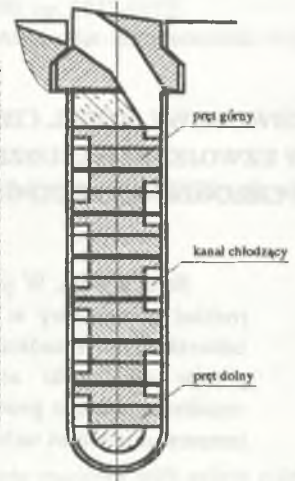
1. WSTĘP

Zabierakowy system chłodzenia uzwojenia wzbudzenia stosowany jest w generatorach produkcji krajowej o mocy 200 MW. Sposób rozmieszczenia kanałów wentylacyjnych w żłobkach wirnika oraz kierunek przepływu wodoru w kanałach jest przedstawiony na rys. 1 i 2.



Rys.1. Zabierakowy system chłodzenia uzwojenia wzbudzenia turbogenerators TWW-200-2A

Fig.1. Direct radial-axial cooling system of excitation winding of TWW-200-2A turbogenerator



Rys.2. Przekrój żłobka wirnika

Fig.2. Cross-section of a rotor slot

System zabierakowy (szczegółowo opisany w [1]) działa na zasadzie samoczynnej wentylacji i pozwala na wielostrugowe chłodzenie uzwojenia wzbudzenia przez dwa niezależne systemy wentylacji:

- aksjalnej w częściach czołowych uzwojenia,
- aksjalno-radialnej w części żłobkowej uzwojenia.

W artykule [1] przedstawiono model matematyczny opisujący jednowymiarowy rozkład temperatury w górnym (leżącym pod zabierakiem) pręcie uzwojenia wzbudzenia, przy założeniu między innymi braku przepływu ciepła do pręta sąsiedniego oraz do beczki wirnika. W poszczególnych obszarach związanych z systemem wentylacji pręt ten podzielono (wzdłuż długości) na odcinki elementarne. Równaniom bilansu mocy dla poszczególnych elementarnych odcinków pręta przyporządkowano zastępcze schematy cieplne. W wyniku łańcuchowego połączenia schematów elementarnych, odpowiadającego połączeniu szeregowemu

poszczególnych elementarnych odcinków pręta, uzyskano zastępczy schemat cieplny dla pręta górnego, stanowiący podstawę dla wyznaczania rozkładu temperatury w analizowanym pręcie.

Z analizy drogi przepływu medium chłodzącego wynika, że największe przyrosty temperatur oraz największa nierównomierność rozkładu temperatury występują w pręcie górnym każdej z cewek i dla niego też zwykle wykonuje się obliczenia. Stosowanie jednak bardzo uproszczonego modelu cieplnego, w którym górny pręt uzwojenia traktuje się jako element autonomiczny (pomija się przepływ ciepła z tego pręta do prętów sąsiednich oraz do beczki wirnika), powoduje, że obliczenia wykonane z jego pomocą obarczone są znacznym błędem i mogą być traktowane jedynie jako obliczenia szacunkowe. Całościowa analiza rozkładu temperatury, we wszystkich prętach uzwojenia wzbudzenia, wymaga uwzględnienia przepływu ciepła pomiędzy sąsiednimi prętami cewki uzwojenia oraz pomiędzy prętami a beczką wirnika. Istnieje więc potrzeba opracowania modelu cieplnego opisującego rozkład temperatury w uzwojeniu z uwzględnieniem przepływu ciepła w żłobku wirnika w kierunku aksjalnym oraz radialnym.

2. MODEL CIEPLNY DO OBLICZEŃ ROZKŁADU TEMPERATURY W CEWKACH UZWOJENIA WZBUDZENIA

Prezentowany w niniejszej pracy model cieplny stosowany do obliczeń pola temperatur w cewkach uzwojenia wzbudzenia, stanowi rozszerzenie modelu prezentowanego w pracy [1]. W stosunku do modelu uproszczonego uwzględniono:

- przepływ ciepła pomiędzy prętami uzwojenia,
- przepływ ciepła w części żłobkowej z prętów uzwojenia do beczki wirnika.

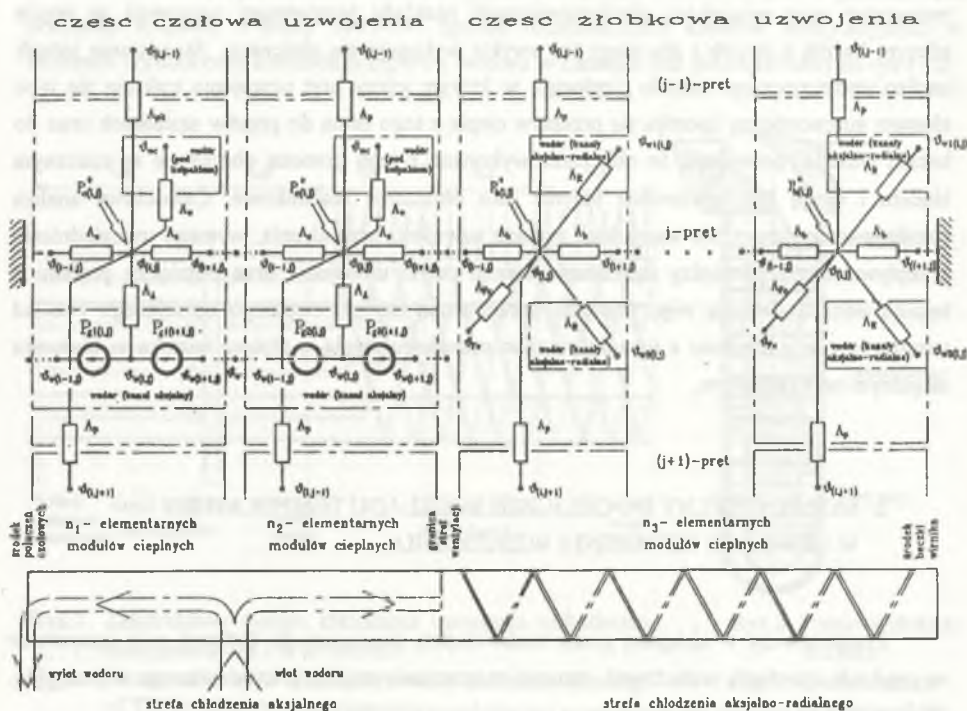
Nadal utrzymane są w mocy pozostałe założenia upraszczające, a mianowicie:

- medium wpływające do kanałów ze szczeliny ma we wszystkich strefach wlotu jednakową temperaturę,
- przewodność cieplna właściwa materiału uzwojenia, izolacji oraz współczynnik wnikania ciepła do medium chłodzącego nie zależą od temperatury.

Przyjęto ponadto stałość gęstości liniowej strumienia cieplnego konwekcji w kanałach aksjalno-radialnych.

Zastępczy schemat cieplny uzwojenia wzbudzenia (rys.3) otrzymano w wyniku łańcuchowego połączenia schematów cieplnych zbudowanych dla poszczególnych prętów [1] za pośrednictwem przewodności cieplnych Λ_p (elementarnych odcinków przekładki izolacyjnej pomiędzy prętami) oraz poprzez dołączenie przewodności cieplnych Λ_{Fe}

(reprezentujących przewodności cieplne elementarnych odcinków izolacji żłobkowej, związanych z przepływem ciepła z prętów uzwojenia do beczki wirnika).



Rys.3. Zastępczy ciepło-elektryczny schemat dla zabierakowego systemu wentylacji

Fig.3. Equivalent thermal/electrical diagram for direct system of ventilation

Schemat ten stanowi podstawę do obliczeń dwuwymiarowego rozkładu temperatury w cewkach uzwojenia. Można w nim wyróżnić 3 strefy wzdłuż długości każdego z prętów, związane ściśle ze sposobem chłodzenia:

- dwie strefy w obszarze chłodzenia aksjalnego różniące się kierunkiem przepływu medium chłodzącego w kanałach wykonanych w prętach (czoła uzwojeń),
- jedna strefa w obszarze chłodzenia aksjalno-radialnego (część żłobkowa uzwojeń).

Każdą ze stref podzielono odpowiednio na równe odcinki elementarne, którym odpowiada podział na n_1 , n_2 , n_3 części i przyporządkowano im elementarne moduły cieplne. Schemat cieplny każdej z wymienionych stref składa się więc z połączonych łańcuchowo

– **moc cieplna unoszona przez przepływający w kanale aksjalnym wodór:**

$P_{gk(i,j)}$ - moc cieplna unoszona przez wodór przepływający przez i-ty odcinek elementarny kanału aksjalnego wewnątrz j-tego pręta w k-tej strefie wentylacji ($k=1,2$)

$$P_{gk(i,j)} = L_{gk} (\mathcal{Q}_{w(i-1,j)} + \mathcal{Q}_{w(i,j)})$$

gdzie:

L_{gk} - współczynnik określający wydatek źródeł mocy cieplnych w k-tej strefie chłodzenia aksjalnego,

– **przewodności cieplne związane ze zjawiskiem przewodzenia ciepła:**

Λ_c, Λ_b - dla ruchu ciepła wzdłuż prętów odpowiednio w części czołowej i żłobkowej,

Λ_p - dla ruchu ciepła poprzez przekładki izolacyjne umieszczone pomiędzy prętami,

Λ_{Fe} - dla ruchu ciepła z prętów poprzez izolację żłobkową do żelaza beczki wirnika,

$$\Lambda_c = \frac{\lambda S_c}{\Delta x}, \quad \Lambda_b = \frac{\lambda S_b}{\Delta x}, \quad \Lambda_p = \frac{\lambda_p b \Delta x}{g_p}, \quad \Lambda_{Fe} = \frac{2 \lambda_z h \Delta x}{g_z},$$

gdzie:

λ - przewodność cieplna właściwa materiału pręta,

λ_p - przewodność cieplna właściwa przekładki izolacyjnej,

λ_z - przewodność cieplna właściwa izolacji żłobkowej,

b - szerokość pręta,

h - wysokość pręta,

g_p - grubość przekładki izolacyjnej,

g_z - jednostronna grubość izolacji żłobkowej,

– **przewodności cieplne związane ze zjawiskiem konwekcji:**

Λ_A - dla ruchu ciepła z powierzchni kanału aksjalnego do omywającego ją wodoru,

Λ_R - dla ruchu ciepła z powierzchni kanału aksjalno-radialnego do omywającego ją wodoru,

Λ_w - dla ruchu ciepła z powierzchni prętów w części czołowej do wodoru pod kołpakiem,

$$\Lambda_A = \alpha_A u_A \Delta x, \quad \Lambda_R = \alpha_R u_R \Delta x, \quad \Lambda_w = 2 \alpha_w h \Delta x,$$

gdzie:

α_A, α_R - współczynniki oddawania ciepła z powierzchni kanałów aksjalnych i radialnych do chłodzącego je wodoru,

- α_w - współczynnik oddawania ciepła z powierzchni izolowanych prętów do wodoru pod kołpakiem,
- u_A - obwód kanału aksjalnego w części czołowej,
- u_B - zastępczy obwód styku wodoru i miedzi pręta w radialnym kanale chłodzącym [2],

- **współczynniki określające wydatki źródeł mocy cieplnych:**

współczynnik L_{gk} - w k-tej strefie chłodzenia aksjalnego:

$$L_{gk} = \frac{cQ_k}{2}, \quad k=1, 2$$

gdzie:

- c - ciepło właściwe medium chłodzącego,
- Q_k - wydatek medium chłodzącego w pojedynczym kanale aksjalnym w k-tej strefie ($k=1, 2$).

3. ALGORYTM OBLICZEŃ I PROGRAM KOMPUTEROWY

Rozkład dwuwymiarowego pola temperatury w uzwojeniu wzbudzenia uzyskuje się rozwiązując układ równań algebraicznych opisujących schemat cieplny przedstawiony na rys.3. Opracowany na podstawie tego schematu algorytm:

- * buduje i rozwiązuje układ równań odpowiadający schematowi cieplnemu (rys.3) o liczbie węzłów wynikającej z liczby podziału prętów oraz liczby prętów w żłobku.

Elementem zasadniczym zastosowanego algorytmu jest zaproponowany sposób obliczeń umożliwiający ograniczenie liczby rozwiązywanych równań w każdej iteracji. Dzięki temu program wymaga mniejszej pamięci operacyjnej oraz uzyskuje się przyspieszenie czasu obliczeń, umożliwiając ich wykonywanie na komputerach klasy PC (schematy o liczbie węzłów kilka tysięcy rozwiązywane są w ciągu kilkunastu minut).

W celu uzyskania wstępnych (startowych) wartości temperatur w węzłach schematu cieplnego pomija się w fazie obliczeń wstępnych przepływ ciepła pomiędzy prętami uzwojenia oraz z prętów do żelaza beczki wirnika. Umożliwia to rozwiązanie schematu cieplnego dla każdego pręta uzwojenia oddzielnie. Układ równań wynikający z zastosowania metody potencjałów węzłowych (tutaj temperatur węzłowych) do schematu cieplnego j-tego pręta ma postać:

$$[A]_{(j)} [S_p]_{(j)} = [B]_{(j)} \quad (1)$$

gdzie:

$[A]_{(j)}$ - macierz przewodności cieplnych,

$[B]_{(j)}$ - wektor wymuszeń cieplnych,

$$[\mathfrak{S}_p]_{(j)} = \left[[\mathfrak{S}]_{(j)} \quad [\mathfrak{S}_w]_{(j)} \right]^T$$

$[\mathfrak{S}]_{(j)}$ - wektor temperatur węzłów reprezentujących elementarne odcinki j-tego pręta,

$[\mathfrak{S}_w]_{(j)}$ - wektor temperatur węzłów reprezentujących wodór przepływający w kanałach aksjalnych w j-tym przecie.

Struktura macierzy występujących w układzie równań (1) została szczegółowo przedstawiona w pracy [1].

Jeżeli uwzględnić wymianę ciepła pomiędzy prętami oraz do żelaza beczki wirnika, wówczas układ równań opisujący rozkład temperatury w pojedynczym przecie można przedstawić w postaci:

$$[A]_{(j)} [\mathfrak{S}_p]_{(j)} = [B]_{(j)} - [P]_{(j)}, \quad (2)$$

gdzie:

$[P]_{(j)}$ - wektor mocy cieplnych przekazywanych z rozpatrywanego j-tego pręta do prętów sąsiednich oraz do żelaza:

$$[P]_{(j)} = \left[P_{1(j)} \quad P_{2(j)} \quad \dots \quad P_{i(j)} \quad \dots \quad P_{n(j)} \quad ; \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right]^T \quad (3)$$

$P_{1(j)} + P_{n(j)}$ - moce cieplne wprowadzane do węzłów schematu reprezentujących elementarne odcinki pręta j-tego,

n - liczba węzłów schematu reprezentujących elementarne odcinki j-tego pręta ($n = n_1 + n_2 + n_3$).

$$P_{i(j)} = -\Lambda'_{Fe} (\mathfrak{S}_{(i,j)} - \mathfrak{S}_{(i,j-1)}) - \Lambda''_{Fe} (\mathfrak{S}_{(i,j)} - \mathfrak{S}_{(i,j+1)}) - \Lambda'_{Fe} (\mathfrak{S}_{(i,j)} - \mathfrak{S}_{Fe}) \quad (4)$$

gdzie:

$\Lambda'_{Fe} = 0$ - dla i odpowiadającego numerowi węzła reprezentującego elementarny odcinek pręta znajdujący się w obszarze połączeń czołowych,

$\Lambda'_{Fe} = \Lambda_{Fe}$ - dla i odpowiadającego numerowi węzła reprezentującego elementarny odcinek pręta znajdujący się w strefie żłobkowej.

dla $j=1 \quad \Rightarrow \Lambda'_p = \Lambda_p; \quad \Lambda''_p = 0$ - pręt górny pod klinem,

dla $j=2, \dots, 1_p - 1 \quad \Rightarrow \Lambda'_p = \Lambda''_p = \Lambda_p$ - pręty środkowe,

dla $j=1_p \quad \Rightarrow \Lambda'_p = 0; \quad \Lambda''_p = \Lambda_p$ - pręt dolny na dnie żłobka.

Dodatkowym problemem jest wyznaczenie rozkładów temperatur w kanałach aksjalno-radialnych, czyli temperatur $\mathfrak{S}_{w1(i,j)}$ oraz $\mathfrak{S}_{w2(i,j)}$ występujących na schemacie zastępczym.

Konsekwencją założenia stałej gęstości liniowej strumienia cieplnego konwekcji w kanałach aksjalno-radialnych jest liniowy rozkład temperatury wodoru w kanałach, poczynając od zadanej temperatury na wlocie do tych kanałów, a kończąc na znanej temperaturze na wylocie. Szczegółowa analiza przepływu poszczególnych równoległych strug wodoru w kanałach aksjalno-radialnych, z uwzględnieniem podanych wcześniej założeń upraszczających, pozwala na wyznaczenie temperatur $\vartheta_{w1(i,j)}$ oraz $\vartheta_{w2(i,j)}$ w schematach cieplnych poszczególnych prętów.

W zaproponowanym iteracyjnym algorytmie rozwiązywania schematu cieplnego można wyróżnić następujące etapy:

1) Określenie wstępnych wartości temperatur w węzłach schematu.

W etapie tym budowane są kolejno oraz rozwiązywane układy równań (1) dla $j=1,2,\dots,l_p$.

W wyniku ich rozwiązania wyznacza się wstępne wartości temperatur we wszystkich węzłach schematu przy założeniu braku wymiany ciepła pomiędzy prętami oraz z prętów do beczki wirnika.

2) Obliczenie wektorów mocy cieplnych przekazywanych z poszczególnych prętów do prętów sąsiednich oraz do żelaza.

W oparciu o relację (4) buduje się kolejne wektory mocy cieplnych (3) dla $j=1,2,\dots,l_p$.

Obliczenia wykonuje się korzystając z wartości temperatur wyznaczonych w poprzednim kroku iteracyjnym (lub wyznaczonych w punkcie 1 wstępnych wartości temperatur w przypadku pierwszej iteracji).

3) Obliczenie kolejnych przybliżeń wartości temperatur w węzłach schematu cieplnego.

Kolejne przybliżenia wartości temperatur węzłowych wyznacza się budując i rozwiązując kolejno układy równań (2) dla $j=1,2,\dots,l_p$, korzystając przy tym z wektorów mocy cieplnych $[P]_{(i)}$ wyznaczanych w etapie 2.

Warunkiem zakończenia iteracji jest uzyskanie założonej dokładności obliczeń temperatur węzłowych na danym etapie iteracyjnym.

Dzięki proponowanej metodzie obliczeniowej w poszczególnych etapach budowane są i rozwiązywane oddzielnie schematy cieplne opisujące rozkłady temperatury w pojedynczych prętach, co pozwala na znaczne ograniczenie wymaganej pamięci operacyjnej. Niemniej jednak metoda ta wymaga wielokrotnego powtarzania obliczeń.

Korzystając jednak z faktu, że o rozkładzie temperatur w prętach uzwojenia decyduje w głównej mierze moc cieplna przekazywana z prętów do wodoru w kanałach aksjalnych oraz aksjalno-radialnych (jest ona znacznie większa od mocy cieplnej przekazywanej pomiędzy prętami oraz z prętów do żelaza), uzyskane w etapie 1 wstępne przybliżenie temperatur węzłowych jest stosunkowo bliskie wartościom końcowym i dzięki temu ilość wymaganych iteracji jest stosunkowo niewielka.

3. WYNIKI OBLICZEŃ

Wykorzystując opracowany program komputerowy wykonano obliczenia rozkładu temperatury w uzwojeniu wzbudzenia turbogenerators TW-200-2A w znamionowym warunkach pracy:

$$S_N = 235 \text{ MV} \cdot \text{A}, \quad U_N = 15.75 \text{ kV}, \quad \cos \varphi_N = 0.8 \text{ i}, \quad I_N = 8625 \text{ A}, \quad I_{WN} = 2660 \text{ A}.$$

Prędkości wodoru w poszczególnych kanałach przyjęto z obliczeń układu wentylacyjnego przeprowadzonych w pracy [3].

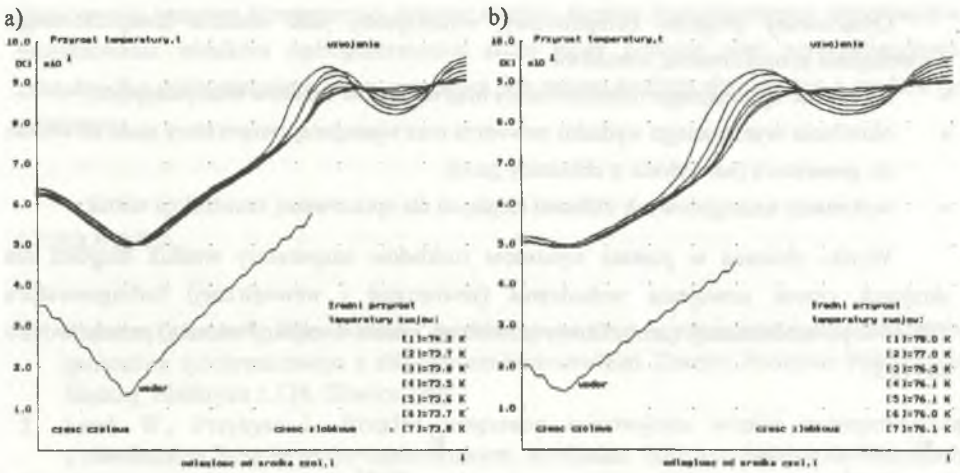
Uzwojenie wzbudzenia składa się w tym przypadku z 7 prętów umieszczonych w żłobku (licząc od klina żłobkowego do dna żłobka). Poszczególne pręty podzielono na równe odcinki elementarne, którym przyporządkowano elementarne moduły cieplne. Zbudowany z nich schemat cieplny dla przyjętych danych ma następującą liczbę węzłów:

- w prętach uzwojenia - 420,
- w wodorze w kanałach aksjalnych - 250,
- w wodorze w kanałach aksjalno-radialnych - 340,
- całkowita liczba węzłów - 1010.

Wyniki obliczeń w postaci wykresów rozkładów temperatury wzdłuż długości dla skrajnych cewek (zewewnętrznej i wewnętrznej) przedstawiono na rys.4.

Z wykresów wynikają następujące wnioski:

- największe nierównomierności rozkładu temperatury w części żłobkowej oraz największe przyrosty temperatur lokalnych występują w przecie górnym (pierwszym pod klinem) dla każdej z cewek (na wykresach odpowiadają im przebiegi temperatury o największej amplitudzie zmian w części żłobkowej). Maksymalny przyrost temperatury w części żłobkowej wynosi 107.5% wartości średniego przyrostu temperatury w tej części,
- największy lokalny przyrost temperatury występuje w przecie górnym cewki wewnętrznej (cewki o najkrótszych połączeniach czołowych) i wynosi 97 K, co stanowi 129% średniego przyrostu temperatury uzwojenia wzbudzenia. W pozostałych cewkach maksymalne przyrosty temperatur różnią się niewiele (maksymalnie o 1.5 K) od wartości maksymalnej cewki wewnętrznej,
- pomimo znacznych różnic w rozkładach temperatur wzdłuż długości poszczególnych zezwojów w obrębie cewki, jak i w poszczególnych cewkach, średnie przyrosty temperatur poszczególnych zezwojów oraz cewek są zbliżone. Maksymalna różnica średnich przyrostów temperatury poszczególnych zezwojów w cewce wynosi 4.2 K, zaś poszczególnych cewek 3.0 K.



Rys. 4. Rozkład przyrostów temperatur wzdłuż długości pręta uzwojenia wzbudzenia dla generatora TWW-200-2A: a) cewka zewnętrzna, b) cewka wewnętrzna

Fig. 4. Distributions of temperature rise along bars of excitation winding for turbogenerator with the power 200 MW: a) outer coil, b) inner coil

Weryfikacja wyników obliczeń opiera się na porównaniu średnich przyrostów temperatur dla całego uzwojenia (obliczonych oraz zmierzonych metodą oporową). W tabelicy 1

Tabela 1

Prąd wzbudz. [A]	Przyrost średniej temperatury [K]			
	Pomiary			Oblicz.
	Gen. 1	Gen. 2	Gen. 3	
2460	74.5	71.6	77.0	72.2
2220	60.7	62.0	63.0	61.0
1670	39.3	33.1	38.1	40.7

zestawiono wartości średnich przyrostów temperatury uzwojeń wzbudzenia dla trzech generatorów TWW-200-2A (pracujących w elektrowni Rybnik), przy trzech wartościach prądów wzbudzenia (przy zachowaniu znamionowych warunków wentylacji), zmierzonych metodą

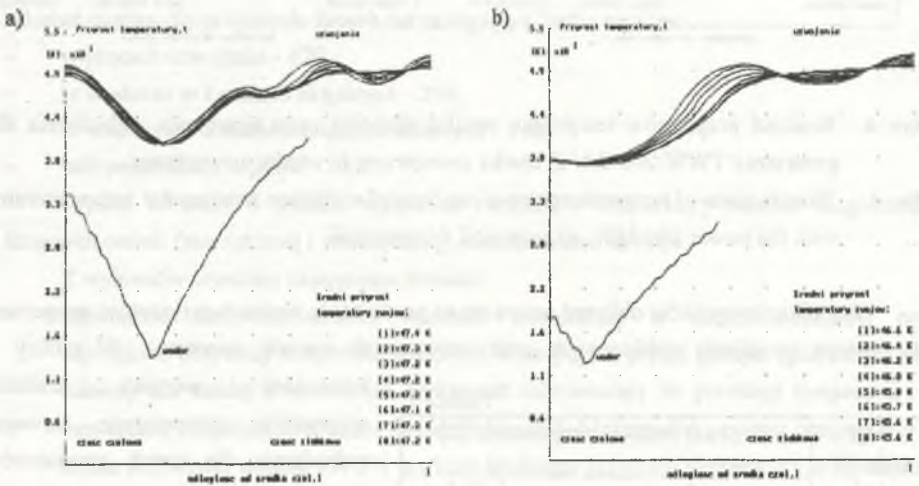
oporową oraz wyniki obliczeń wg prezentowanej metody. Wyniki weryfikacji pomiarowej modelu cieplnego można uznać za zadowalające.

Prezentowany program komputerowy wykorzystany został również w procesie projektowania układu wentylacyjnego oraz uzwojenia wzbudzenia wirnika turbogeneratora TW-50-2 podczas jego modernizacji. Celem prowadzonej modernizacji turbogeneratora jest zmiana medium chłodzącego z wodoru na powietrze. Zmiana ta pociągnęła za sobą konieczność przejścia z systemu wentylacji pośredniego na bezpośredni zabierakowy.

Opracowany program komputerowy, wykorzystany jako element komputerowego wspomaganego projektowania, umożliwił:

- określenie optymalnego rozmieszczenia oraz wymiarów kanałów wentylacyjnych,
- określenie wymaganego wydatku powietrza oraz wymaganej temperatury gazu na wlocie do generatora (na wylocie z chłodnicy gazu),
- wykonanie szczegółowych obliczeń cieplnych dla opracowanej konstrukcji wirnika.

Wyniki obliczeń w postaci wykresów rozkładów temperatury wzdłuż długości dla skrajnych cewek uzwojenia wzbudzenia (zewnętrznej i wewnętrznej) turbogeneratora TW-50-2 po modernizacji (zabierakowy powietrzny system wentylacji wirnika) przedstawiono na rys.5.



Rys. 5. Rozkład przyrostów temperatur wzdłuż długości pręta uzwojenia wzbudzenia dla generatora TW-50-2 po modernizacji (zabierakowy, powietrzny system wentylacji wirnika): a) cewka zewnętrzna, b) cewka wewnętrzna

Fig. 5. Distributions of temperature rise along bars of excitation winding for TW-50-2 modernised generator (direct, air ventilation system of rotor): a) outer coil, b) inner coil

Przedstawiona weryfikacja pomiarowa wyników symulacji komputerowych wykonanych dla wirnika turbogeneratora TWW-200-2A potwierdza możliwość stosowania prezentowanego modelu do badań symulacyjnych oraz analiz projektowych.

Opracowany program komputerowy stanowi obecnie element komputerowego wspomagania projektowania wirników turbogeneratorów dużej mocy podczas prac modernizacyjnych związanych z podwyższeniem mocy generatora, lub zmianą medium chłodzącego z wodoru na powietrze.

LITERATURA

1. Kapinos J., Krok R., Miksiewicz R.: Rozkład temperatury w pręcie uzwojenia wzbudzenia generatora synchronicznego z chłodzeniem bezpośrednim. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z.138, Gliwice 1994.
2. Latek W., Przybysz J.: Rozkład temperatur w uzwojeniu wirnika turbogeneratora z chłodzeniem bezpośrednim zabierakowym. Archiwum Elektrotechniki, z.3, Warszawa 1969.
3. Filippow I. F.: Osnovy tieploobmienu w elektriczeskich maszinach. Energija 1974.
4. Paszek W., Drak B., Kapinos J., Miksiewicz R., Krok R., Pilch Z.: Modernizacja turbogeneratora TWW-200-2A w celu podwyższenia mocy do 220 MW przy współczynniku mocy $\cos\varphi = 0.85$ i zachowaniu istniejącego sposobu chłodzenia turbogeneratora. Instytut Maszyn i Urządzeń Elektrycznych Politechniki Śląskiej. Opracowanie Nr 6/59/RE-4/94.

Recenzent: Dr hab. inż. Jerzy HICKIEWICZ, prof. WSI w Opolu

Wpłynęło do Redakcji dnia 16 listopada 1995 r.

Abstract

The paper presents a mathematical model describing temperature distribution in the bars of excitation winding with direct cooling system. A thermal model of this winding is shown in Fig.3. Among other things it takes into account axial heat flow in the bars and radial heat flow between the winding bars. A calculation algorithm allowing to limit the number of equations solved at each iterative stage (which enables calculations for a number of nodes) is suggested for the system of algebraic equations.

Calculation results of temperature distribution along the bar length for the inner and outer coils of TWW-200-2A and TW-50-2 modernised generator with direct air ventilation system of rotor are shown in Fig.4 and Fig.5 respectively. Calculation and measurement results of excitation windings mean temperatures for three TWW-200-2A generators and three values of exciting current are presented in Tab.1. The obtained results of calculations indicate good concurrence with results of the measurements.

The presented method and computer program enable easy and quick computation of successive variants analysed on the stage of design and make very useful elements of the procedure of computer-aided design of rotors with direct system of ventilation whenever cooling medium composed of hydrogen or air is used.



Fig. 4. Temperature distribution along the bar length for the inner and outer coils of TWW-200-2A and TW-50-2 modernised generator with direct air ventilation system of rotor.

Dariusz SPAŁEK

Katedra Maszyn i Urządzeń Elektrycznych

SZEREGI FOURIERA PRĄDU MAGNESUJĄCEGO W NIELINIOWYCH MAGNETYKACH

Streszczenie. W artykule przedstawiono trzy twierdzenia pozwalające wnioskować o charakterze szeregu Fouriera prądu magnesującego nieliniowy ferromagnetyk. Pierwsze z nich określa znak współczynnika trzeciej harmonicznej. Drugie z twierdzeń określa znaki wszystkich współczynników szeregu Fouriera prądu magnesującego. Przedstawiono również warunek konieczny i wystarczający naprzemiennej zmienności znaków kolejnych współczynników szeregu Fouriera.

FOURIER SERIES OF THE MAGNETIZING CURRENT IN NONLINEAR MAGNETIC MATERIALS

Summary. In this paper three theorems which describe features of Fourier's series of magnetizing current in nonlinear ferromagnetic have been presented. The first theorem considers the sign of the third harmonic. The second theorem describes all coefficients of Fourier series of the magnetizing current. The sufficient and necessary condition for alternative change of Fourier series coefficient signs has been given as well.

1. WPROWADZENIE

W wielu zagadnieniach dotyczących magnesowania w transformatorach bądź wirujących maszynach elektrycznych należy uwzględniać występujące nieliniowości związane z własnościami magnetycznymi ośrodka ferromagnetycznego. W takich układach przy wymuszeniu indukcji magnetycznej (zasilanie uzwojenia ze źródła napięcia sinusoidalnie zmiennego w czasie przy pomijalnej rezystancji obwodu) dogodnie jest

przedstawić zależność pomiędzy natężeniem pola magnetycznego a wymuszoną indukcją w postaci:

$$H = v(B)B, \quad (1)$$

gdzie :

H - natężenie pola magnetycznego,

B - indukcja pola magnetycznego,

v - reluktywność magnetyczna ośrodka.

Relacja (1a) odnosi się do ośrodka magnetycznego nieliniowego, izotropowego bez pętli histerezy.

Załóżmy, iż indukcja pola magnetycznego B(t) jest sinusoidalnie zmienna w czasie:

$$B(t) = B_m \sin(\omega t). \quad (1b)$$

Jeżeli $v = \text{const}$, to natężenie pola H(t) ma również monoharmoniczny przebieg w czasie. Jeżeli reluktywność $v(\cdot)$ jest funkcją indukcji B(t), to natężenie pola magnetycznego H(t) jest przebiegiem odkształconym - zawierającym wyższe harmoniczne czasowe.

W artykule zaprezentowane zostaną twierdzenia (wraz z dowodami) pozwalające wnioskować o charakterze zawartość wyższych harmonicznych w czasowym przebiegu natężenia pola magnetycznego oraz prądzie magnesującym w żelazie.

2. ANALIZA HARMONICZNA NATĘŻENIA POLA MAGNETYCZNEGO ORAZ PRĄDU MAGNESUJĄCEGO

Współczynniki Fouriera natężenia pola magnetycznego, a tym samym prądu magnesującego w żelazie wynoszą [1]:

$$a_0 = \frac{A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(B_m \sin(\omega t)) \cdot B_m \sin(\omega t) dt$$

$$a_h = \frac{2A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(B_m \sin(\omega t)) \cdot B_m \sin(\omega t) \cdot \cos(h\omega t) dt$$

$$b_h = \frac{2A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(B_m \sin(\omega t)) \cdot B_m \sin(\omega t) \cdot \sin(h\omega t) dt$$

dla $h = 1, 2, \dots$, $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$.

Czasowy przebieg $y(t)$ (wielkość ta oznacza bądź natężenie pola magnetycznego $H(t)$, wtedy $A=1$, lub prąd magnesujący w żelazie $I_m(t)$, wtedy A jest stałą zależną od geometrii obwodu magnesowanego oraz liczby zwojów uzwojenia magnesującego zgodnie z prawem Ampera) można przedstawić przy założeniu istnienia powyższych całek i ograniczoneści otrzymanych współczynników Fouriera szeregiem zbieżnym o następującej postaci:

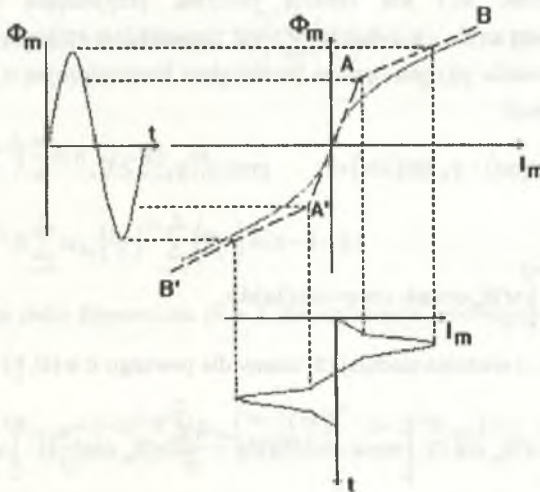
$$y(t) = \sum_{h=0}^{\infty} y_h(t) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h \cos(h\omega t) + b_h \sin(h\omega t). \quad (2)$$

Jeżeli reluktywność $v(\cdot)$ jest funkcją parzystą indukcji magnetycznej $v(-B)=v(B)$, to można następująco wnioskować o wartości współczynników rozwinięcia szeregu Fouriera [1]:

1. $a_0 = 0$ - brak składowej stałej w czasowym przebiegu $y(t)$,
2. $a_h = 0$ - przebieg czasowy $y(t)$ jest nieparzystą funkcją czasu,
3. $b_{2k} = 0$ - nie występują w przebiegu $y(t)$ harmoniczne parzyste ($k=1,2,\dots$; $h=2k$).

Przebieg czasowy funkcji magnesowania $y(t)$ jest funkcją nieparzystą antysymetryczną zmiennej czasu t .

Dla porównania zasadę graficznej analizy przebiegu czasowego prądu magnesującego I_m przy wymuszeniu sinusoidalnie zmiennej indukcji magnetycznej (strumienia magnetycznym) w czasie - przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Analiza graficzna przebiegu prądu magnesującego

Fig. 1. Graphical analysis of the magnetizing current

Dokonajmy dalszej analitycznej oceny wartości współczynników szeregu Fouriera (3) natężenia pola magnetycznego.

3. TWIERDZENIA O ZAWARTOŚCI WYŻSZYCH HARMONICZNYCH W PRĄDZIE MAGNESUJĄCYM

Jedynie niezerowe współczynniki rozwinięcia funkcji $y(t)$ wynoszą (dla $h=2k+1$):

$$b_{2k+1} = \frac{2A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(B_m \sin(\omega t)) \cdot B_m \sin(\omega t) \cdot \sin((2k+1)\omega t) dt.$$

Dokonując zmiany zmiennych zgodnie z relacją: $\varphi = \omega(t - \frac{T}{2})$, uzyskujemy:

$$b_{2k+1} = (-1)^k \frac{4X}{\pi} \int_0^{\pi/2} v(B_m \cos \varphi) \cdot \cos \varphi \cdot \cos((2k+1)\varphi) d\varphi,$$

gdzie oznaczono dla uproszczenia $X=AB_m$; zaś w dalszym ciągu wartość bezwzględną tych współczynników oznaczać będziemy jako: $y_h = |b_h|$ dla $h=2k+1$.

Zachodzą następujące:

TWIERDZENIE 1

Jeżeli reluktywność $v(\cdot)$ jest funkcją parzystą, przyjmującą wartości dodatnie, monotonicznie rosnącą na R_+ , a indukcja $B(t)$ jest sinusoidalnie zmienną funkcją czasu (1b), to funkcja magnesowania $y(t)$ jest opisana przebiegiem harmonicznym o pierwszej i trzeciej harmonicznej w postaci:

$$y(t) = y_1 \sin(\omega t) - y_3 \sin(3\omega t) + \dots \quad \text{przy: } y_1, y_3, \dots \geq 0. \quad (3)$$

Dowód. Jest:

$$b_3 = -\frac{4X}{\pi} \int_0^{\pi/2} v(B_m \cos \varphi) \cdot \cos \varphi \cdot \cos(3\varphi) d\varphi.$$

Po zastosowaniu tw. o wartości średniej [5] mamy dla pewnego $c \in (0, \frac{\pi}{2})$:

$$b_3 = -\frac{4X}{\pi} v(B_m \cos 0) \cdot \int_0^c \cos \varphi \cdot \cos(3\varphi) d\varphi - \frac{4X}{\pi} v(B_m \cos(\frac{\pi}{2})) \cdot \int_c^{\pi/2} \cos \varphi \cdot \cos(3\varphi) d\varphi$$

$$b_3 = -\frac{X}{2\pi} \{v(B_m) - v(0)\} \cdot \{\sin 4c + \sin c\} \leq 0.$$

Powyższa relacja dowodzi, iż trzecia harmoniczna ma amplitudę "ujemną" w sensie zapisu (3): $y_1 = b_1 \geq 0$, $y_3 = -b_3 \geq 0$.

TWIERDZENIE 2

Jeżeli reluktywność $v(\cdot)$ jest funkcją dającą się rozwinąć w szereg Maclaurina zawierający tylko nieujemne parzyste współczynniki, a wymuszona indukcja $B(t)$ jest sinusoidalnie zmienną funkcją czasu (1b), to $y(t)$ jest przebiegiem o harmonicznym z naprzemiennie zmiennymi znakami o postaci:

$$y(t) = y_1 \sin(\omega t) - y_3 \sin(3\omega t) + y_5 \sin(5\omega t) - y_7 \sin(7\omega t) + y_9 \sin(9\omega t) - \dots$$

$$\text{przy: } y_1, y_3, y_5, y_7, \dots \geq 0. \quad (4)$$

Dowód. Jest:

$$b_{2k+1} = (-1)^k \frac{4X}{\pi} \int_0^{\pi/2} v(B_m \cos \varphi) \cdot \cos \varphi \cdot \cos((2k+1)\varphi) d\varphi \Rightarrow$$

$$\text{a zgodnie z założeniem: } v(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n} (\cdot)^{2n} \Rightarrow$$

$$b_{2k+1} = (-1)^k \frac{4X}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n} B_m^{2n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(\varphi) \cdot \cos \varphi \cdot \cos((2k+1)\varphi) d\varphi \Rightarrow$$

Obliczając wartość całki ([5] str. 40, 116) mamy:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(\varphi) \cdot \cos((2k+1)\varphi) d\varphi = 2^{-2n} \int_0^{\pi/2} \sum_{i=0}^n \binom{2n+1}{i} \cos((2n-2i+1)\varphi) \cdot \cos((2k+1)\varphi) d\varphi =$$

$$= 2^{-2n} \sum_{i=0}^n \binom{2n+1}{i} \frac{\pi}{4} \delta(n-i-k) \Rightarrow$$

$$b_{2k+1} = (-1)^k X \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n} \left(\frac{B_m}{2}\right)^{2n} \sum_{i=0}^n \binom{2n+1}{i} \delta(n-i-k) \quad (5a)$$

gdzie $\delta(\cdot)$ oznacza deltę Kroneckera ($\delta = 1$ dla argumentu zerowego, $\delta = 0$ dla argumentu różnego od zera).

$$b_{2k+1} = (-1)^k X \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_{2n} \binom{2n+1}{n-k} \left(\frac{B_m}{2}\right)^{2n} = (-1)^k |b_{2k+1}| = (-1)^k y_{2k+1}. \quad (5b)$$

Wzór (5b) dowodzi, iż w świetle poczynionych założeń współczynniki rozwinięcia w szereg Fouriera natężenia pola magnetycznego oraz prądu magnesującego w żelazie przy wymuszeniu sinusoidalnie zmiennej indukcji magnetycznej mają znaki naprzemiennie zmienne zgodnie ze wzorem (4).

Zestawienie uzyskanych rezultatów przedstawia tablica 1.

Tablica 1

Założenie: $B(t) = B_m \sin(\omega t)$	Teza: $y(t) = H(t)$ lub $I_m(t) \dots$
Reluktywność $\nu(\cdot)$ jest funkcją monotonicznie malejącą - Tw.1.	Trzecia harmoniczna jest w "przeciw-fazie" w sensie zapisu we wzorze (3).
Reluktywność $\nu(\cdot)$ jest funkcją parzystą; znana jest postać szeregu Maclaurina - Tw.2	Harmoniczne nieparzyste prądu mag. są naprzemiennie zmienne w sensie zapisu we wzorze (4).
Ocena zawartości amplitud poszczególnych harmoniczných jest możliwa przy wykorzystaniu WKW (6).	Istnieje warunek (6) konieczny i wystarczający pozwalający oceniać zawartość wyższych harmoniczných dla danego szeregu reluktywności $\nu(\cdot)$.

4. PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ

4.1 Twierdzenie 1 oraz 2 tłumaczą znany fakt doświadczalny ([2], [3], [4]) mówiąc, iż w nieliniowym ferromagnetyku przy wymuszeniu sinusoidalnie zmiennej w czasie indukcji magnetycznej czasowy przebieg natężenia pola magnetycznego jest opisany szeregiem Fouriera zawierającym w rozkładzie tylko nieparzyste harmoniczne funkcji sinus o naprzemiennie zmiennych znakach:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k y_{2k+1} \sin((2k+1)\omega t)$$

(współczynniki y_{2k+1} są nieujemne), czyli:

$$y(t) = y_1 \sin(\omega t) - y_3 \sin(3\omega t) + y_5 \sin(5\omega t) - y_7 \sin(7\omega t) + y_9 \sin(9\omega t) + \dots$$

W takim przebiegu czasowym natężenia pola magnetycznego i prądu magnesującego w żelazie amplituda wypada w tej samej chwili czasowej co amplituda wymuszonej indukcji pola magnetycznego. Na powyższą własność i postać szeregu (4) powołuje się wielu Autorów ([2],[3],[4] i inni) nie podając jednak żadnych warunków na to, aby przebieg odkształcony mógł być opisany szeregiem o postaci (4).

4.2. Relacja (5b) podaje ogólnie warunek wystarczający i konieczny na zachodzenie tezy Tw.2. Mianowicie, teza Tw.2 jest spełniona **wtedy i tylko wtedy**, gdy:

$$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha_{2n} \binom{2n+1}{n-k} \left(\frac{B_m}{2}\right)^{2n} \geq 0 \quad (6)$$

4.3. Jeżeli szereg Maclaurina $v(\cdot)$ o wyrazach parzystych urywa się dla $n > N$ (N jest pewną znaną liczbą naturalną wynikającą np. z żądanej dokładności aproksymacji funkcji $v(\cdot)$ wielomianem):

$$v(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n}(\cdot)^{2n} = \sum_{n=0}^N \alpha_{2n}(\cdot)^{2n}$$

to zanikają wszystkie współczynniki rozwinięcia szeregu $y(t)$ dla $k > N$ (gdy $k > N \Rightarrow b_{2k+1} = 0$ zgodnie ze wzorem (5b)).

LITERATURA

1. Bolkowski S.: Elektrotechnika techniczna. WNT, Warszawa 1986.
2. Richter R.: Elektrische Maschinen, dritter Band. 1954.
3. Otto J.: Dynamisches Verhalten elektrischer Maschine (Eine Einführung in die numerische Modellierung mit PSPICE). Friedr. View & Sonn Verlagsgesellschaft GmbH, Braunschweig- Wiesbaden 1991.
4. Jezierski E.: Transformatory " WNT. Warszawa 1965.
5. Ryznik A.: Tablice całkowań, sum, ciągów i pochodnych. Moskwa 1951.
6. Spátek D.: Twierdzenia o zawartości wyższych harmonicznych w przebiegach odkształconych. 5-th Slovak and Tschech International Conference "Sensor and Sensors System". Prešov, XII 1994 pp.58-63.

Recenzent: Dr hab. inż. Jerzy Hickiewicz, prof. WSI w Opolu

Wpłynęło do Redakcji dnia 10 czerwca 1995 r.

Abstract

This paper deals with a nonlinear magnetic circuit which is magnetized (supplied) by a sinusoidal time-depending flux. Ferromagnetic H-B characteristic is homogeneous ($H = \nu B$), where ν - is magnetic reluctivity. In case linear ferromagnetic the magnetizing current is the sine time-depending function, too. If the ferromagnetic is non-linear, the magnetizing current $I_m(t)$ and magnetic field strength $H(t)$ is described by the Fourier series. The theorems which presented in this article say:

- If the reluctivity is an increasing function $\nu(\cdot)$ of magnetic flux density B then the third harmonic (theorem 1) of the ferromagnetic magnetising current is negative:

$$b_3 \leq 0.$$

- If the even coefficient of Maclaurin series of magnetic reluctivity $\nu(\cdot)$ versus B are positive and odd coefficient are equal to zero, the magnetising current of ferromagnetic is described by the Fourier series with odd coefficient (theorem 2) whose signs change alternatively i.e.

$$b_3 \leq 0. b_5 \geq 0. b_7 \leq 0. b_9 \geq 0, \dots$$

- The necessary and sufficient condition Eqn. (6) for thesis of theorem 2 is given.

Grzegorz PAWEŁCZYK
Elektrownia Jaworzno III S.A.

SPRZĘGŁO INDUKCYJNE SAMOWZBUDNE

Streszczenie. Przedstawiono uproszczony opis konstrukcji i zasadę działania sprzęgła indukcyjnego samowzbudnego przeznaczonego do płynnej regulacji prędkości obrotowej pomp i wentylatorów.

Przy pewnych założeniach upraszczających przedstawiono rozptył mocy, straty oraz sprawność sprzęgła.

Opisano sposób przeprowadzenia badań eksperymentalnych prototypowego modelu sprzęgła. Przedstawiono rezultaty tych badań oraz wynikające z nich wnioski.

INDUCTIVE SELF-EXCITED CLUTCH

Summary. This paper presents a simplified description of construction and principle of operation of an inductive self-excited clutch. This device is used for continuous control of pump and fan rotational speed. Power flow, power loss and efficiency of the clutch have been estimated under simplifying assumptions. The way of experimental tests made on a clutch prototype has been presented. Tests results and conclusions drawn from them have been given as well.

1. WPROWADZENIE

W procesach technologicznych wielu zakładów przemysłowych bardzo często występuje konieczność płynnej regulacji wydajności różnych urządzeń, jak np. pompy, wentylatory. Obecnie najbardziej rozpowszechnionym sposobem prowadzącym do tego celu jest regulacja dławieniowa polegająca na zmianie wielkości otwarcia zaworu umieszczonego na króćcu tłocznym w pobliżu pompy [1]. Jest to sposób bardzo prosty, ale zarazem najmniej ekonomiczny. Innym, znacznie bardziej ekonomicznym sposobem, jest stosowanie sprzęgła

hydrokinetycznego. Wadą tych sprzęgieł jest jednak stosunkowo wysoka cena, jak też dość znaczna awaryjność.

Najbardziej ekonomicznym obecnie sposobem regulacji wydajności pomp i wentylatorów jest zastosowanie tyrystorowych przemienników częstotliwości do zasilania silników klatkowych lub tyrystorowych układów kaskadowych współpracujących z silnikami pierścieniowymi.

Przemienniki częstotliwości, zwłaszcza instalowane po stronie zasilania silników dużej mocy na napięcie 6 kV, są urządzeniami bardzo drogimi i zajmującymi wiele miejsca, tak że często stanowi to istotną przeszkodę w ich zastosowaniu. W artykule przedstawiono odmienną od dotychczas stosowanych [2] konstrukcję sprzęgła indukcyjnego. Zaproponowane sprzęgło (rys. 1), które może zastąpić sprzęgło hydrokinetyczne, nie wymaga zewnętrznego zasilania uzwojenia wzbudzenia. Regulacja prędkości obrotowej części biernej sprzęgła zrealizowana jest również w odmienny sposób niż w tradycyjnych sprzęgłach indukcyjnych. Urządzenie to nazwano sprzęgłem indukcyjnym samowzbudnym. Podobnie jak tradycyjne sprzęgła, posiada ono wirnik zewnętrzny, wirnik wewnętrzny oraz uzwojenie wzbudzenia i uzwojenie twornika (robocze). Obydwa rodzaje uzwojeń znajdują się na tym samym (w opisanym tu modelu) wewnętrznym wirniku. Uzwojenie twornika - poprzez układ prostowniczy zasila uzwojenie wzbudzenia. W artykule przedstawiona została zasada działania oraz podstawowe własności sprzęgła samowzbudnego.

2. BUDOWA, ZASADA DZIAŁANIA I PODSTAWOWE WŁASNOŚCI SPRZĘGŁA

Sprzęgło indukcyjne samowzbudne składa się z wirnika zewnętrznego oraz z wirnika wewnętrznego (rys. 1). Wirnik zewnętrzny sprzężony jest z wałem (6) silnika napędzającego, natomiast wirnik wewnętrzny z wałem (7) urządzenia napędzanego. Wirnik zewnętrzny (1) ma kształt cylindra, który od strony wewnętrznej posiada zęby (5) równomiernie rozmieszczone, przy czym szerokość zębów jest równa szerokości żłobków. Wirnik wewnętrzny (2) ma kształt walca, na którego obu końcach znajdują się ciasno osadzone pakiety blach (9) ze żłobkami, w których ułożone są cewki uzwojenia roboczego (4). Między tymi pakietami blach nawinięte jest współosiowo z wirnikiem uzwojenie wzbudzenia (3), które wytwarza strumień magnetyczny unipolarny Φ_w .

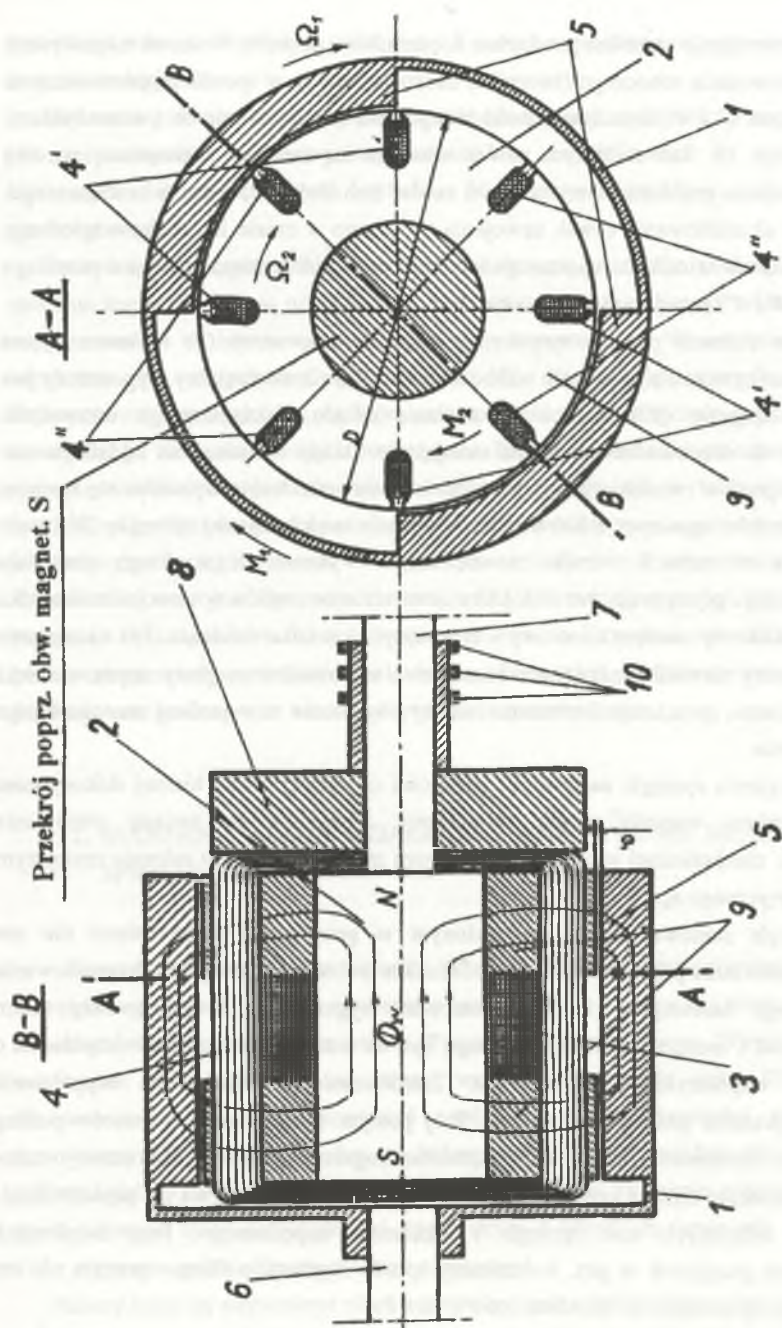
Pakiety blach są elementami rdzenia twornika i jednocześnie pełnią rolę nabiegowników N i S dla strumienia wzbudzenia. Między zębami wirnika zewnętrznego a pakietami blach o

kształcie walca występuje szczelina powietrzna δ , przez którą przenika strumień magnetyczny ϕ_w . Cewki (4) uzwojenia roboczego (twornika) ukształtowane są w sposób przedstawiony na rys. 2, gdzie przez 4' i 4'' oznaczono cewki różnych faz (koresponduje to z oznaczeniami przyjętymi na rys. 1). Szerokość tych cewek mierzona na średnicy zewnętrznej wirnika wewnętrznego równa jest dokładnie szerokości zębów (lub żłobków) wirnika zewnętrznego. Dzięki takiemu ukształtowaniu cewek uzwojenia roboczego w czasie ich ruchu względnego w stosunku do zębów wirnika zewnętrznego indukuje się w nich napięcie rotacji o przebiegu prostokątnym (4' i 4'') przedstawionym na rys. 3.

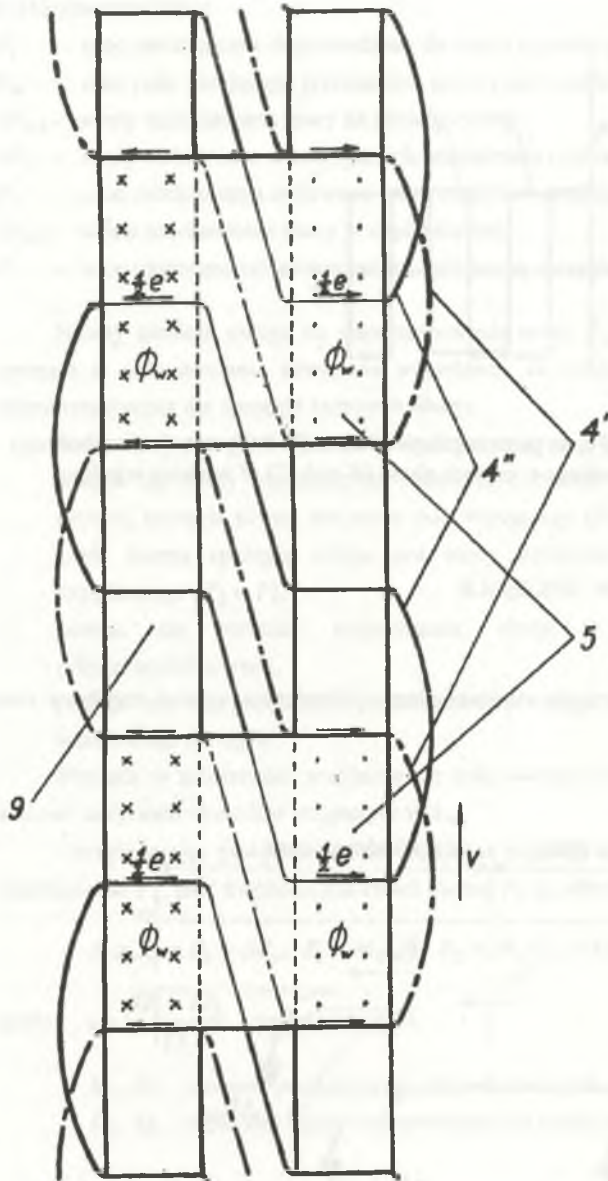
Uzwojenie robocze poprzez tyrystorowy układ prostowniczy (8) umieszczony na wirniku wewnętrznym zasilają uzwojenie wzbudzenia (3). Wirnik wewnętrzny wyposażony jest w pierścienie ślizgowe (10) służące do zasilania układu elektronicznego wyzwalania tyrystorów oraz do doprowadzenia sygnału sterującego. Dzięki wzajemnemu oddziaływaniu dynamicznemu prądów twornika (roboczych) i strumienia wzbudzenia wytwarza się moment obrotowy o kierunku zgodnym z kierunkiem wirowania części czynnej sprzęgła. W czasie pracy sprzęgła w zębach wirnika zewnętrznego wykonanych z litego materiału ferromagnetycznego płyną prądy wirowe, które niezależnie od prądów w uzwojeniu twornika wytwarzają dodatkowy moment obrotowy o tym samym kierunku działania. Dla zadziałania sprzęgła wystarczy niewielki magnetyzm szczątkowy w obwodzie magnetycznym, a dzięki silnemu dodatniemu sprzężeniu zwrotnemu między obydwoma uzwojeniami następuje jego szybkie nasycenie.

W tradycyjnym sprzęgle nastawianie prędkości obrotowej części biernej dokonywane jest przez zmianę wartości prądu wzbudzenia. Powoduje to zmianę pochylenia charakterystyki mechanicznej sprzęgła, a tym samym zmianę poślizgu w zakresie mniejszym od poślizgu krytycznego s_k .

W sprzęgle samowzbudnym wyposażonym w prostowniki niesterowane nie ma możliwości nastawiania prędkości obrotowej. Jednakże jest to możliwe, jeżeli do prostowania prądu roboczego zastosujemy tyrystory sterowane sygnałem z zewnątrz. Przy takim rozwiązaniu moc i moment przenoszone mogą być na urządzenie napędzane impulsami o regulowanym współczynniku wypełnienia. Zmniejszanie współczynnika wypełnienia powoduje zwiększanie poślizgu i odwrotnie. Przy pełnym wysterowaniu tyrystorów poślizg osiąga wartość minimalną. Przy takim sposobie regulacji prędkości obrotowej mimo nieciągłości momentu zmiana prędkości obrotowej części biernej odbywa się płynnie dzięki bezwładności wirujących mas sprzęgła i urządzenia napędzanego. Przy założeniach upraszczających przyjętych w pkt. 3 odmienny sposób regulacji poślizgu sprzęgła nie ma wpływu na jego sprawność, co przedstawiono w pkt. 3.

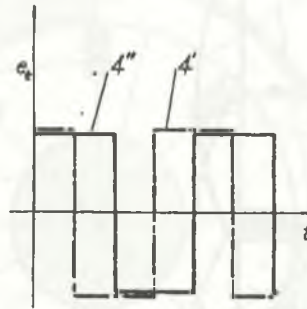


Rys. 1. Schematyczny przekrój wzdłużny (B-B) i poprzeczny (A-A) sprzęgła indukcyjnego samowzbudnego
 Fig. 1. Diagrammatic longitudinal- (B-B) and cross- (A-A) section of inductive self-excited clutch



Uwaga:
 części cewek przykryte
 zębami narysowane są
 liniami cienkimi.

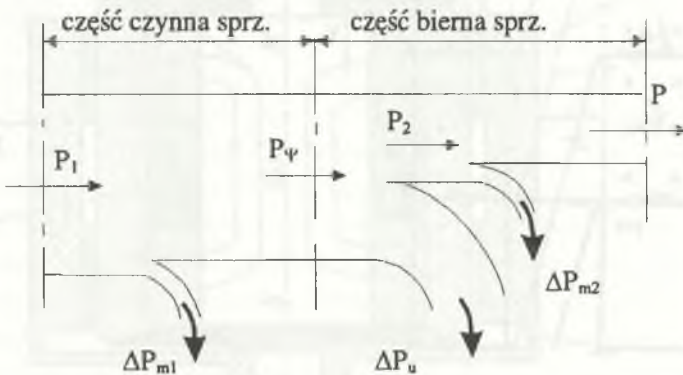
Rys. 2. Kształt i rozmieszczenie cewek poszczególnych faz 4' i 4'' uzwojenia roboczego
 Fig. 2. Shape and location of each phase 4' and 4'' coils of working winding



Rys. 3. Przebieg napięcia rotacji e_t na poszczególnych fazach ($4'$ i $4''$) uzwojenia roboczego
 Fig. 3. Time curve of rotation voltage e_t on each phase ($4'$ and $4''$) of working winding

3. ROZPŁYW MOCY W SPRZĘGLE

Dla przedstawionego sprzęgła samowzbudnego obowiązuje wykres rozplywu mocy Sankeya z rys. 4



Rys. 4. Wykres Sankeya rozplywu mocy w sprzęgle samowzbudnym przy poślizgu $s = 0,5$
 Fig. 4. Sankey's diagram of power flow of self-excited clutch for slip $s = 0,5$

w którym oznaczono:

- P_1 - moc mechaniczna doprowadzona do części czynnej sprzęgła,
- P_w - moc pola wirującego przenoszona przez pole z części czynnej na bierną,
- ΔP_{m1} - straty mechaniczne mocy na części czynnej,
- ΔP_u - straty elektryczne w uzwojeniach wzbudzenia i roboczym na części biernej sprzęgła,
- P_2 - moc mechaniczna oddawana przez część bierną sprzęgła,
- ΔP_{m2} - straty mechaniczne mocy w części biernej,
- P - moc użyteczna oddawana przez część bierną sprzęgła do mechanizmu napędzanego.

Należy zwrócić uwagę na niewystępowanie mocy P_w doprowadzanej z zewnątrz do sprzęgła w celu zasilania uzwojenia wzbudzenia ze źródła prądu stałego. Jest to cechą charakterystyczną dla sprzęgła samowzbudnego.

Rozważania przeprowadzone zostały przy następujących założeniach upraszczających:

- pomija się straty mechaniczne, zatem moc mechaniczna doprowadzona do części czynnej sprzęgła równa jest mocy pola wirującego ($P_1 = P_w$), a moc oddawana przez część bierną sprzęgła równa jest mocy użytecznej oddawanej do mechanizmu napędzanego ($P_2 = P$),
- pomija się strumień rozproszenia, straty w żelazie i w przyrządach półprzewodnikowych,
- pomija się wpływ indukcyjności uzwojeń roboczych i wzbudzenia na pracę i właściwości sprzęgła.

Ponadto w założeniach przyjmuje się stałą wartość strumienia $\Phi = \Phi_w$ odpowiadającą stanowi nasycenia obwodów magnetycznych.

Uwzględniając powyższe założenia można napisać, że moc pola wirującego P_w , moc mechaniczna P_1 , moc mechaniczna części biernej P_2 są odpowiednio równe

$$P = P_1 = P_2 + \Delta P_u, \quad P_1 = M_1 \Omega_1, \quad P_2 = M_2 \Omega_2 = M_2 \Omega_1 (1 - s), \quad (1)$$

gdzie: $s = \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{\Omega_1}$ - poślizg sprzęgła,

M_1, M_2 - moment przekazywany odpowiednio przez część czynną, bierną sprzęgła,
 Ω_1, Ω_2 - prędkości kątowe odpowiednio dla części czynnej, biernej sprzęgła.

Przy przyjętych założeniach można wykazać, że moment przenoszony przez część bierną sprzęgła (M_2) na urządzenie napędzane jest równy momentowi przekazywanemu przez część czynną (M_1), straty w uzwojeniach $\Delta P_u = P_1 s$, moc mechaniczna oddawana przez część bierną sprzęgła $P_2 = P_1 (1 - s)$, sprawność $\eta = 1 - s$, jak w tradycyjnym sprzęgle.

4. WYNIKI BADAŃ EKSPERYMENTALNYCH

Na stanowisku laboratoryjnym przeprowadzone zostały badania sprzęgła o następujących parametrach:

$D = 0,227 \text{ m}$	- średnica zewnętrzna wirnika wewnętrznego,
$l = 0,1 \text{ m}$	- długość czynna boku cewki uzwojenia twornika,
$m = 2$	- ilość faz uzwojenia twornika,
$z_1 = 36$	- ilość zwojów w jednej fazie uzwojenia twornika,
$R_1 = 1,40 \ \Omega$	- rezystancja jednej fazy uzwojenia twornika,
$z_w = 86$	- ilość zwojów uzwojenia wzbudzenia,
$R_w = 0,14 \ \Omega$	- rezystancja uzwojenia wzbudzenia
$S = 0,008 \text{ m}^2$	- przekrój obwodu magnetycznego strumienia wzbudzenia
$\delta = 0,4 \text{ mm}$	- szczelina powietrzna,
$Z_z = 9$	- ilość zębów (żłobków) wirnika zewnętrznego,
$c_1 = 9$	- ilość cewek w jednej fazie uzwojenia twornika,
$Z_w = 36$	- ilość żłobków wirnika wewnętrznego.

Badania przeprowadzono przy zatrzymanym wirniku wewnętrznym i nastawianej parametrycznie prędkości obrotowej wirnika zewnętrznego napędzanego silnikiem prądu stałego. Zatrzymany wirnik umożliwił bezpośrednie badanie parametrów obwodów wirnika wewnętrznego dzięki wyprowadzeniu ich przez centralnie wywiercony w wale otwór na zewnątrz wirnika. Ponadto mierzona była prędkość obrotowa wirnika zewnętrznego oraz prąd i napięcie silnika napędzającego. Zdejmowano oscylogramy napięć i prądów w obwodach wirnika wewnętrznego. Prąd twornika prostowany był jedno- i dwupołkowo prostownikami niesterowanymi, jak również tyrystorami sterowanymi fazowo. W przypadku prostowników sterowanych układ wyzwalania tyrystorów wyposażony był w zabezpieczenie od przeciążeń, którego działanie polegało na blokowaniu impulsów wyzwalających tyrystory w przypadku przekroczenia nastawionej wartości skutecznej prądu twornika. Warunki przeprowadzania pomiarów przy zatrzymanym wirniku wewnętrznym nie dawały możliwości badania sprawności sprzęgła. Przy wzbudzeniu obcym i zatrzymanym wirniku wewnętrznym dla różnych wartości prędkości obrotowej wirnika zewnętrznego n_{1m} zdjęto charakterystyki napięcia twornika w funkcji prądu wzbudzenia $U_1 = f(I_w)$. Charakterystyki $U_1 = f(I_w)$ przedstawiono na rys. 5. Z charakterystyk tych wynika stan nasycenia sprzęgła, który występuje już przy prądzie $I_w \approx 8 \text{ A}$, czyli około 20% prądu długotrwałego obciążenia uzwojenia wzbudzenia.

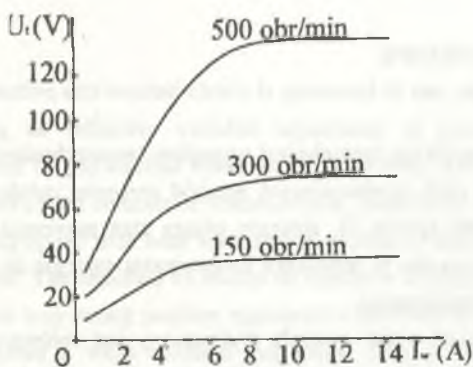
Mimo braku przepływu prądów w uzwojeniach twornika przy wzbudzeniu obcym badany model sprzęgła przenosił moment pochodzący od prądów wirowych przepływających

w zębach wirnika zewnętrznego. Moment ten równy jest około 25% momentu przenoszonego przez sprzęgło podczas pracy samowzbudnej przy prądzie wzbudzenia o tej samej wartości (około 15 A).

Przy wzbudzeniu własnym zdjęto charakterystyki momentu w funkcji prędkości obrotowej wirnika zewnętrznego n_{1m} $M = f(n_{1m})$ oraz prądu wzbudzenia w funkcji prędkości obrotowej wirnika zewnętrznego $I_w = f(n_{1m})$ przy jedno- i dwupołówkowym prostowaniu prądów twornika prostownikami niesterowanymi (rys. 6). Z rys. 6 zauważa się, że przy prostowaniu jednopółkowym charakterystyka $M = f(n_{1m})$ jest bardziej stroma i że dla wartości prędkości obrotowej wirnika zewnętrznego około 220 obr/min charakterystyki „jednopółkowa” (krzywa 1) i „dwupołówkowa” (krzywa 2) przecinają się.

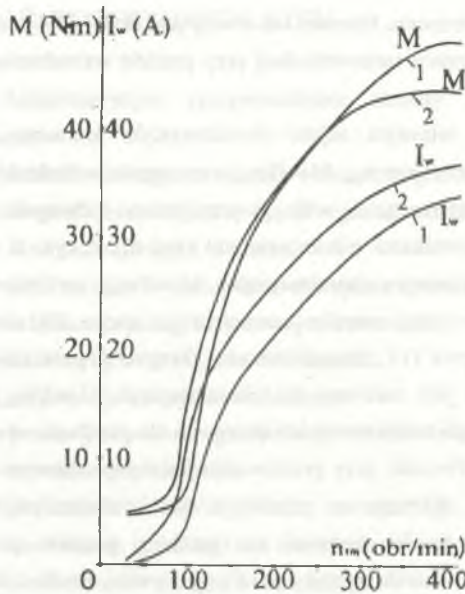
Charakterystyczne jest zarówno dla charakterystyk $M = f(n_{1m})$, jak też $I_w = f(n_{1m})$ wyraźne przegięcie i nagłe zwiększenie ich stromości dla prędkości obrotowej części czynnej około 90÷100 obr/min. Ponadto przy prostowaniu jednopółkowym moment maksymalny sprzęgła jest większy. Różnica w przebiegu tych charakterystyk spowodowana jest oddziaływaniem indukcyjności uzwojeń na przebieg prądów przy różnym sposobie prostowania. Z przebiegu charakterystyk $I_w = f(n_{1m})$ wynika, że dla całego zakresu mierzonej prędkości obrotowej części czynnej przy prostowaniu jednopółkowym (krzywa 1) prąd wzbudzenia jest mniejszy niż przy prostowaniu dwupołówkowym (krzywa 2).

Próby przeprowadzone przy zastosowaniu prostowników sterowanych wykazały możliwości płynnej i stabilnej regulacji poślizgu sprzęgła przez fazowe sterowanie tyrystorów, zwłaszcza przy prostowaniu jednopółkowym. Regulacja taka powoduje zmianę wartości poślizgu krytycznego s_k zwiększając ją przy zmniejszaniu kąta otwarcia tyrystorów.



Rys. 5. Charakterystyki $U_t = f(I_w)$ przy wzbudzeniu obcym dla różnych poślizgów (obrotów wirnika zewnętrznego)

Fig. 5. Characteristics of $U_t = f(I_w)$ for separate excitation for different slips (rotational speeds of external rotor)



Rys. 6. Charakterystyki $M = f(n_{1m})$ i $I_w = f(n_{1m})$ przy wzbudzeniu własnym dla prostowania jednopółkowego (krzywa ozn. 1) i dwupółkowego (krzywa ozn. 2)

Fig. 6. Characteristics of $M = f(n_{1m})$ and $I_w = f(n_{1m})$ for self-excited working clutch for single-wave (curve 1) and full-wave (curve 2) rectification

5. WNIOSKI KOŃCOWE

Przedstawione w artykule sprzęgło jest sprzęgłem samowzbudnym, co jest jego zaletą i jedną z podstawowych cech wyróżniających spośród sprzęgieł indukcyjnych. Jak wynika z przeprowadzonych badań (punkt 4), sprzęgło osiąga stan nasycenia już przy niewielkich obciążeniach. Jest to korzystne w przypadku zastosowania sprzęgła do nastawiania prędkości obrotowej urządzenia napędzanego.

Moment przenoszony przez sprzęgło wytwarzany jest zarówno przez prądy robocze w uzwojeniach twornika, jak też przez prądy wirowe w zębach wirnika zewnętrznego w przypadku wykonania ich z litego ferromagnetyku. Prądy wirowe wytwarzają jednak około 25% całkowitego momentu.

Należy jednak zwrócić uwagę na celowość prostowania dwupołkowego prądów roboczych, co przedstawiono w pkt. 4 z uwagi na większe nachylenie charakterystyki $M = f(n_{1m})$ i mniejszy moment maksymalny mimo większego prądu wzbudzenia.

Dalsze badania prototypów sprzęgieł, szczególnie na stanowiskach eksploatacyjnych, powinny koncentrować się między innymi na określeniu ich rzeczywistej sprawności w zależności od poślizgu przy zastosowaniu zabezpieczeń od przeciążeń.

LITERATURA

1. Stępniewski M.: Pompy. WNT, Wyd. II, Warszawa 1985.
2. Pełczewski W.: Sprzęgła elektromagnetyczne. WNT, Wyd. I, Warszawa 1965.
3. Plamitzer A.: Maszyny elektryczne. WNT, Wyd. VI, Warszawa 1976.

Recenzent: Dr hab. inż. Ernest Mendrela, prof. WSI w Opolu

Wpłynęło do Redakcji dnia 10 grudnia 1995 r.

Abstract

The inductive self-excited clutch is presented in the paper. This clutch can replace the fluid coupling as infinitely variable adjustment of pump and fan rotational speed. The construction of self-excited clutch is different from traditional, separate-excited clutch. The self-excited clutch consists of: external rotor, made from ferromagnetic material only and internal rotor equipped with both working and excitation winding and rectifier which rectifies working current. The rectified by diodes or thyristors working current supplies the excitation winding. In this way strong positive regenerative feedback is made which saturates the clutch rapidly. Therefore a weak residual magnetism only is sufficient to operate the clutch. The adjustment of rotational speed is possible by the clutch equipped with phase controllable thyristor rectifier.

Some motion parameters of the clutch are estimated. The efficiency and other parameters calculated under some simplifications show the similarity to separate-excited clutch parameters.

The experiment carried out on prototype unit confirmed rapid magnetic saturation during the work and possibility of infinitely variable adjustment of rotational speed. The interesting feature of the clutch is obtaining better motion characteristics for single-wave than for full-wave rectification of working current. The conditions of experiment (the internal rotor was stopped) made the real efficiency measurement impossible. Such measurements can be made at work station only.