ELEKTRYKA 2011
Zeszyt 1 (217) Rok LVII

Marek DŁUGOSZ
Katedra Automatyki, Akademia Górniczo-Hutnicza im. S. Staszica w Krakowie

STEROWANIE MINIMALNOENERGETYCZNE SILNIKIEM PRĄDU STAŁEGO

Streszczenie. W pracy jest rozważane sterowanie minimalno energetyczne silnika prądu stałego. Zadnie poszukiwania takiego sterowania zostało sformułowane w odpowiednio dobranej przestrzeni Hilberta z definicją iloczynu skalarnego. Dzięki takiemu sformułowaniu zdania sterowania, rozwiązanie można wyznaczyć korzystając z twierdzenia o rzucie ortogonalnym. Tak wyznaczone sterowanie minimalizuje zadany wskaźnik jakości, ale jest to sterowanie w pętli otwartej. W pracy zawarto wyniki symulacji komputerowych wyznaczonych sterowań minimalno energetycznych.

Słowa kluczowe: silnik prądu stałego, sterowanie minimalnoenergetyczne, optymalizacja

MINIMAL ENERGY CONTROL OF DC MOTOR

Streszczenie. In this paper the minimum energy control of DC motor is considered. In order to solve the presented problem the Hilbert space and the orthogonal projection theorem are used. Most computation for finding the optimal control can be done with a computer. Numerical experiments confirming accuracy are also included in the paper

Keywords: DC motor, minimum energy control, optymalizaton

1. WSTĘP

Problemy poszukiwań optymalnych sterowań w sensie zadanych wskaźników jakości są jednymi z fundamentalnych problemów teorii sterowania i są tematem wielu prac naukowych. Wskaźniki jakości, w sensie których są poszukiwane sterowania optymalne, mogą być różne i zależą one od celu, jaki chcemy osiągnąć. Jednym ze wskaźników jakości, dla których poszukuje się optymalnych sterowań, jest wskaźnik minimalnoenergetyczny. Sterowanie optymalne w sensie takiego wskaźnika jakości charakteryzuje się użyciem minimalnej energii sterowania do osiągnięcia zadanego celu.

Praca zawiera opis sposobu wyznaczania sterowania minimalnoenergetycznego dla silnika prądu stałego modelowanego za pomocą równań (1) z macierzami układu danymi jako

(5). Zadanie poszukiwania sterowania optymalnego w sensie wskaźnika jakości (3) zostało sformułowane jako poszukiwanie wektora o minimalnej normie w przestrzeni Hilberta (z odpowiednio zdefiniowanym iloczynem skalarnym). Część obliczeń wykonano przy pomocy komputera. Do poszukiwania sterowania minimalnoenergetycznego można także wykorzystać zasadę maksimum, zob. np. [1]. Innym typem zadania, w których poszukuje się sterowania minimalnoenergetycznego, jest zadanie optymalnego przesyłu energii rozważane np. w pracach [5], [6], [7], [8], [9], [10].

Dany jest system dynamiczny opisany następującymi równaniami:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathrm{t}(t) \tag{1}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \tag{2}$$

O systemie zakładamy, że jest sterowalny [4, s. 69]. Rozważmy następujący wskaźnik jakości:

$$J(u) = \int_0^T u^2(t)dt \tag{3}$$

Zadanie sterowania polega na przeprowadzeniu systemu (1) z ustalonego punktu początkowego $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ do końcowego $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_{\mathrm{ZAD}}$ w skończonym i ustalonym czasie T, tak aby u^0 minimalizowało (3):

$$J(u^0) \le J(u) \tag{4}$$

co jest równoważne minimalnemu zużyciu energii sygnału sterującego. Dla prostych systemów dynamicznych sterowanie minimalnoenergetyczne daje się wyznaczyć analitycznie, zob. np. [2], [7]. Okazuje się jednak, że sterowanie takie ma charakter sterowania bez sprzężenia zwrotnego, a funkcja $u(t)$ zależy jedynie od czasu t.

2. MODEL SILNIKA PRĄDU STAŁEGO

Działanie silnika elektrycznego prądu stałego może być opisane z wystarczającą dokładnością układem równań różniczkowych (1), a odpowiednie macierze mają postać [12, s. 71-72]:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Wektor stanu $x(t)$ składa się z następujących współrzędnych $x_1(t) = i_{\mathrm{t}}(t)$, $x_2(t) = \omega(t)$, $u(t) = u_{\mathrm{t}}(t)$. Przebiegi składowych wektora stanu $\mathbf{x}(t) = [x_1(t)\ x_2(t)]^{\mathrm{T}}$ dla zerowego warunku początkowego można wyznaczyć z równań:

$$x_1(t) = \int_0^t \Phi_{11}(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{6}$$

$$x_2(t) = \int_0^t \Phi_{21}(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{7}$$

gdzie funkcje $\Phi_{11}(t), \Phi_{21}(t),$ są składowymi macierzy podstawowej [11, s. 298, 303]:

$$e^{AT} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) \end{bmatrix} \tag{8}$$

a ich równania są dane jako [12, s. 93]:

$$\Phi_{11}(t) = \frac{s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}}{s_1 - s_2} \tag{9}$$

$$\Phi_{21}(t) = \frac{c_\mathrm{M}\Phi e^{s_1 t}}{J} \frac{e^{s_1 t} - e^{s_2 t}}{s_1 - s_2} \tag{10}$$

gdzie symbole s_1 i s_2 oznaczają wartości własne macierzy **A** modelu silnika, J – moment bezwładności wirnika, c_M – współczynnik określony dla danego silnika, $\phi = \mathrm{const}$ – strumień magnetyczny.

3. STEROWANIE MINIMALNOENERGETYCZNE

Znalezienie funkcji $u(t)$ minimalizującej (3) można przeformułować do zadania poszukiwania wektora $u(t)$ w przestrzeni Hilberta $L^2\langle 0,T\rangle$ z iloczynem skalarnym określonym jako [3, s.78]:

$$\langle x(t)|y(t)\rangle = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t \tag{11}$$

Podstawiając za funkcje $x(t)$ i $y(t)$ funkcję sterowania $u(t)$ i przyjmując $a = 0$ i $b = T$ otrzymujemy:

$$\langle u(t)|u(t)\rangle = \int_0^T |u^2(t)\mathrm{d}t = \sqrt{\|u(t)\|} = J(u) \tag{12}$$

Przebiegi prądu twornika $x_1(t)$ oraz prędkości kątowej $x_2(t)$ możemy zapisać wtedy jako następujące iloczyny skalarne wektorów:

$$x_1(t) = \langle \Phi_{11}(t-\tau)|u(\tau)\rangle \tag{13}$$

$$= \int_0^t \Phi_{11}(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{14}$$

$$x_2(t) = \langle \Phi_{21}(t-\tau)|u(\tau)\rangle \tag{15}$$

$$= \int_0^t \Phi_{21}(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{16}$$

Szukamy więc wektora $u(t)$ o minimalnej normie $\|u(t)\|$, który spełnia następujący układ równań:

$$\langle y_1(t,T)|u(t)\rangle = x_1(T) \tag{17}$$

$$\langle y_2(t,T)|u(t)\rangle = x_2(T) \tag{18}$$

gdzie funkcje $y_1(t,T)$ i $y_2(t,T)$ są dane jako:

$$y_1(t,T) = \Phi_{11}(T-t) \tag{19}$$

$$y_2(t,T) = \Phi_{21}(T-t) \tag{20}$$

Funkcję $u(t)$ traktowaną jako wektor w przestrzeni $L^2\langle 0;T\rangle$, która spełnia równania (17) i (18) oraz jej norma (12) ma wartość minimalną, można wyznaczyć korzystając z twierdzenia o rzucie ortogonalnym [3, s.101]:

Twierdzenie 1. *Dany jest zbiór liniowo niezależnych wektorów* $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ *należących do przestrzeni Hilberta -- H. Spośród wszystkich wektorów* $x \in H$ *istnieje tylko dokładnie jeden wektor* x_o *o najmniejszej normie, spełniający warunki:*

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}|\mathbf{y}_1\rangle &= c_1 \\ \langle \mathbf{x}|\mathbf{y}_2\rangle &= c_2 \\ &\vdots \\ \langle \mathbf{x}|\mathbf{y}_n\rangle &= c_n \end{aligned} \tag{21}$$

Poszukiwany wektor $\mathbf{x}_\mathrm{o}$ jest liniową kombinacją wektorów $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots \mathbf{y}_n\}$:

$$\mathbf{x}_\mathrm{o} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{y}_i \tag{22}$$

Wstawiając (22) do układu równań (21) oraz korzystając z podstawowych właściwości iloczynów skalarnych i po prostych przekształceniach otrzymujemy układ równań:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{y}_1|\mathbf{y}_1\rangle\alpha_1 + \langle \mathbf{y}_2|\mathbf{y}_1\rangle\alpha_2 + \cdots + \langle \mathbf{y}_n|\mathbf{y}_1\rangle\alpha_n &= c_1 \\ \langle \mathbf{y}_1|\mathbf{y}_2\rangle\alpha_1 + \langle \mathbf{y}_2|\mathbf{y}_2\rangle\alpha_2 + \cdots + \langle \mathbf{y}_n|\mathbf{y}_2\rangle\alpha_n &= c_1 \\ &\vdots \\ \langle \mathbf{y}_1|\mathbf{y}_n\rangle\alpha_1 + \langle \mathbf{y}_2|\mathbf{y}_n\rangle\alpha_2 + \cdots + \langle \mathbf{y}_n|\mathbf{y}_n\rangle\alpha_n &= c_n \end{aligned} \tag{23}$$

z którego można wyznaczyć współczynniki $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, występujące we wzorze (22).

4. SYMULACJE KOMPUTEROWE

Zadanie sterowania polega na rozpędzeniu $\mathbf{x}(0) = [0\ 0]^\mathrm{T}$ nieobciążonego silnika do zadanej prędkości obrotowej w określonym czasie T, $\mathbf{x}(T) = [0\ \omega_{\mathrm{ZAD}}]^\mathrm{T}$, używając do tego celu

jak najmniej energii, tj. sterowanie $u(t)$ musi minimalizować wskaźnik jakości (3). Z twierdzenia 1 wynika, że funkcja $u(t)$ jest równa kombinacji liniowej funkcji (17) i (18).

$$u(t) = \alpha_1 y_1(t,T) + \alpha_2 y_2(t,T) \tag{24}$$

Chcąc na podstawie twierdzenia 1 wyznaczyć stałe α_1 i α_2, funkcje $y_1(t)$ i $y_2(t)$ traktowane jako elementy przestrzeni $L^2\langle 0;t\rangle$ muszą być wektorami liniowo niezależnymi, czyli równanie:

$$\beta_1\left(s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}\right) + \beta_2\left(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}\right) = 0 \tag{25}$$

musi być spełnione tylko dla $\beta_1 = 0$ i $\beta_2 = 0$ [13, s. 26]. Po uporządkowaniu i prostych przekształceniach (25) otrzymujemy układ równań na współczynniki $\beta_1 = 0$ i $\beta_2 = 0$:

$$\begin{bmatrix} s_1 & 1 \\ -s_2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Korzystając ze wzorów Cramera, otrzymujemy ostatecznie, że jedynym rozwiązaniem układu równań (26) jest rozwiązanie zerowe, tj. $\beta_1 = 0$ i $\beta_2 = 0$, jeśli jest spełniony warunek:

$$s_1 \neq s_2 \tag{27}$$

Przyjmując $\mathbf{y}_1 = y_1(t)$, $\mathbf{y}_2 = y_2(t)$, $c_1 = x_1(T)$, $c_2 = x_2(T) = \omega_{\mathrm{ZAD}}$, rozwiązując układ równań (23), który staje się układem 2x2, wyznaczamy jednoznacznie współczynniki α_1 i α_2 występujące we wzorze (24).

Symulację przeprowadzono dla przykładowego silnika prądu stałego o macierzach modelu [12, s. 77] równych:

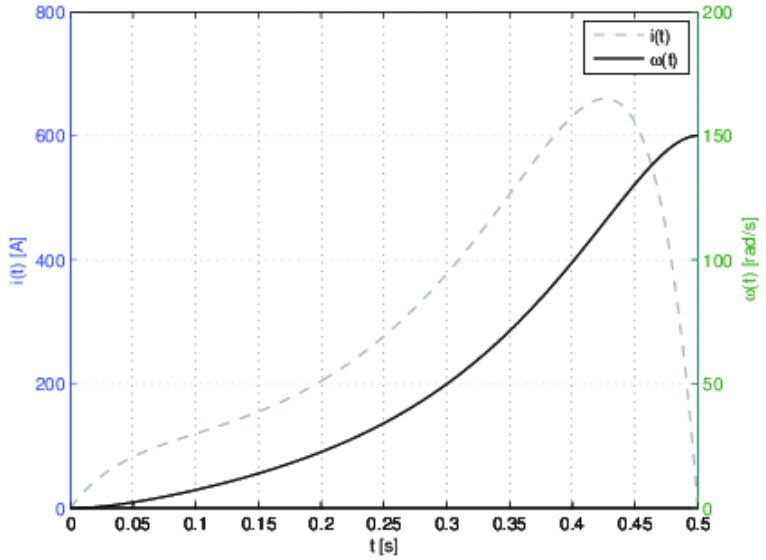
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -30{,}30 & 170{,}73 \\ 0{,}97 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{65{,}16} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Pozostałe dane przyjęte w symulacji to $T = 0{,}5\ s$, $x(t) = [0\ \omega_{\mathrm{ZAD}}]$, $\omega_{\mathrm{ZAD}} = 150$ rad/s. Współczynniki α_1 i α_2 występujące we wzorze (24) dla tak przyjętych danych mają wartość

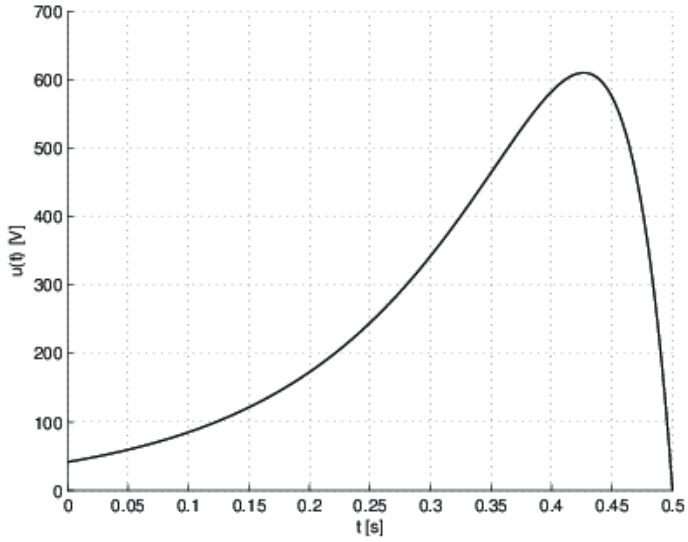
$$\alpha_1 = 2{,}57$$

$$\alpha_2 = 24597{,}98$$

Na wykresach 1(a) i 1(b) przedstawiono wyniki symulacji komputerowych sterowania minimalnoenergetycznego przykładowego silnika prądu stałego. Odpowiednie wartości iloczynów skalarnych wektorów $y_1(t)$ i $y_2(t)$ w przestrzeni $L^2\langle 0;T\rangle$ zostały policzone numerycznie. Silnik osiągnął zadany punkt $\mathbf{x}(T)$ w zadanym czasie sterowania $T = 0{,}5\,s$.



(a) prąd *i(t)* linia „- -„ i prędkość ω linia „—„

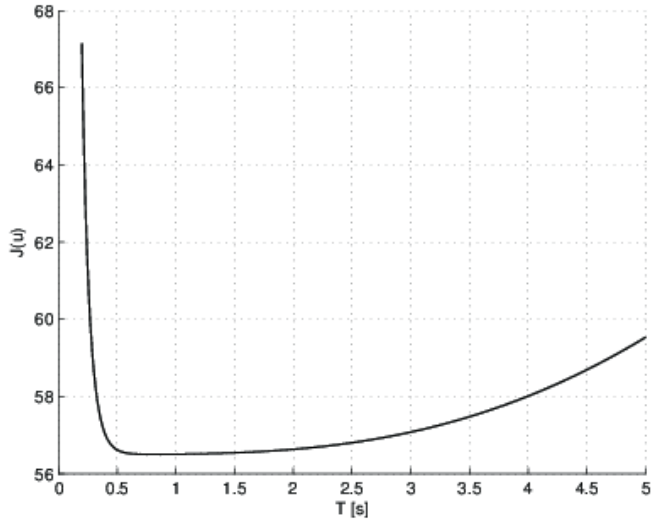


(b) sterowanie *u(t)*

Rys. 1. Przebieg prądu twornika *i(t)*, prędkości obrotowej $\omega(t)$ - wykres 1 (a) i napięcia twornika *u(t)* - wykres 1(b)

Fig. 1. Change of armature current *i(t)*, angular velocity $\omega(t)$ – plot 1(a) and armature voltage *u(t)* – plot 1(b)

Na wykresie 2 pokazano, jak zmienia się wartość wskaźnika jakości (3) w funkcji czasu sterowania *T*. Jak można zaobserwować, dla początkowych wartości *T* wartość wskaźnika szybko maleje. Po przekroczeniu pewnej wartości *T* dalsze zwiększanie nie przynosi już poprawy wartości wskaźnika jakości (3). Dalsze zwiększanie czasu sterowania *T* zaczyna zwiększać wartość wskaźnika jakości (3).



Rys. 2. Wartość wskaźnika jakości (3) w funkcji czasu sterowania T
Fig. 2. Change in quality index (3) as function of time control T

5. WNIOSKI

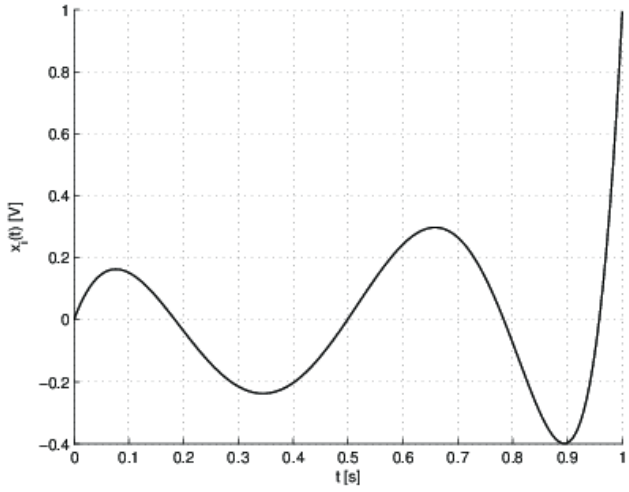
Zadanie poszukiwania sterowania minimalnoenergetycznego $u(t)$ zostało przeformułowane do zadania poszukiwania rzutu wektora $u(t)$ na podprzestrzeń generowaną przez wektory y_1 i y_2 w przestrzeni Hilberta $L^2\langle 0,T\rangle$. Dodatkowo, rzut wektora $u(t)$ na podprzestrzeń generowaną przez wektory y_1 i y_2 musi posiadać minimalną normę. Tak przeformułowane zadanie można efektywnie rozwiązać przy wykorzystaniu komputerów, otrzymując w efekcie sterowanie (24) minimalizujące wskaźnik jakości (3).

Tak otrzymane sterowanie $u(t)$ jest sterowaniem zależnym jedynie od czasu t. Brak ujemnego sprzężenia zwrotnego od zmiennych stanu $\mathbf{x}(t)$ powoduje, że sygnał sterowania $u(t)$ nie uwzględnia informacji o aktualnym stanie systemu dynamicznego. Rzeczywisty stan silnika, w którym się on znajduje, może być inny od stanu wynikającego z rozwiązania równań (1), (2) z powodu występujących zakłóceń lub błędów pomiarowych. Z tego powodu użycie regulatora minimalnoenergetycznego w tej postaci w rozwiązaniach praktycznych nie jest stosowane.

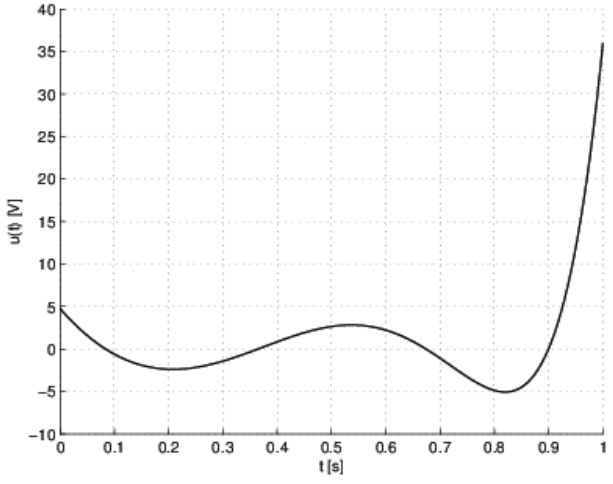
Do sterowania minimalnoenergetycznego można wykorzystać komputer, przy pomocy którego można zamknąć pętle sprzężenia zwrotnego. Komputer, oprócz wyznaczania sygnału sterującego $u(t)$, może śledzić aktualne wartości zmiennych stanu $\mathbf{x}(t)$. Sterowanie minimalnoenergetyczne jest wyznaczane jako kombinacja liniowa funkcji $y_1(t)$ i $y_2(t)$, które są składowymi macierzy podstawowej. Na ich podstawie można także wyznaczyć, jakie powinny być przebiegi zmiennych stanu $\mathbf{x}(t)$. Komputer może na bieżąco porównywać

rzeczywiste (mierzone) wartości zmiennych stanu z wartościami wyliczonymi. Jeśli różnica pomiędzy nim przekroczy pewną zadaną wartość, można uruchomić jeszcze raz algorytm wyznaczania sterowania minimalnoenergetycznego, wyznaczając sterowanie dla nowych warunków, w jakich znajduje się sterowany system.

Sformułowanie zadania poszukiwania sterowania minimalnoenergetycznego $u(t)$ w przestrzeni Hilberta z odpowiednio zdefiniowanym iloczynem skalarnym umożliwia łatwą modyfikację zadania, np. zadawanie innych warunków końcowych. Sam algorytm postępowania może być stosowany do wyznaczenia sterowania minimalnoenergetycznego innych systemów dynamicznych. Na wykresach 3 i 4 przedstawiono przebieg zmiennej stanu $x_5(t)$ i sygnału sterowania $u(t)$ drabinki RC, składającej się z 5 „segmentów", zob. np [10, s. 194].



Rys. 3. Przebieg zmiennej stanu $x_5(t)$ drabinki RC
Fig. 3. Change of state space variable $x_5(t)$ RC ladder



Rys. 4. Przebieg sterowania $u(t)$ drabinki RC
Rys. 4. Change of control signal $u(t)$ RC ladder

Zadanie sterowania polegało na takim sterowaniu, aby w chwili czasu $T = 1\,s$, na ostatnim rezystorze rozpatrywanej drabinki RC napięcie wynosiło 1 V ($x_5(t) = 1$), a sterowanie $u(t)$ minimalizowało wskaźnik jakości (3).

Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki N N514 644440.

BIBLIOGRAFIA

1. Athans M.: Sterowanie optymalne: wstęp do teorii i jej zastosowanie. WNT, Warszawa 1969.
2. Długosz M., Mitkowski W.: Komputerowe sterowanie minimalno-energetyczne. Proceedings of the 29th International Conference on Fundamentals of Electrotechnics and Circuit Theory, IC-SPETO 2006, Gliwice-Ustroń 2006, p. 365-368.
3. Luenberger Dawid G.: Teoria optymalizacji. PWN, Warszawa 1974.
4. Mitkowski W.: Energy - Optimal Control. Proceedings of the 25th International Conference on Fundamentals of Electrotechnics and Circuit Theory IC-SPETO 2002, Gliwice-Ustroń, 2002, p. 325-328.
5. Mitkowski W.: Minimalizacja kosztów dostarczania energii elektrycznej do oporowego urządzenia grzewczego. In: ed. J. Gutenbaum: Automatyka, sterowanie, zarządzanie. Książka Jubileuszowa z okazji 70-lecia urodzin Prof. K. Mańczaka, IBS-PAN, Warszawa 2002, p. 269-282.
6. Mitkowski W.: Optimal energy transfer. Proceedings of the 24th International Conference on Fundamentals of Electrotechnics and Circuit Theory, IC-SPETO 2001, Gliwice-Ustroń 2001, p. 207-210.
7. Mitkowski W.: Optimal energy transfer in RC-network. II Seminarium Wybrane Zagadnienia Elektrotechniki i Elektroniki - WZEE'01. Zeszyty Naukowe Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej 2001, Nr 16, p. 83-88.
8. Mitkowski W.: Remarks about energy transfer in an RC ladder network. International. „Journal of Applied Mathematics and Computer Science" 2003, Vol. 13, No. 2, p. 193-198.
9. Mitkowski W.: Stabilizacja systemów dynamicznych. WNT, Warszawa 1991.
10. Mitkowski W.: Sterowanie minimalno-energetyczne. PAN Oddział w Krakowie, Sprawozdanie z posiedzeń Komisji Naukowych. Wydawnictwo i drukarnia "Secesja", 2002, p. 142-146.
11. Ogata K.: Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania. WNT, Warszawa 1974.
12. Pełczewski W., Krynke M.: Metoda zmiennych stanu w analize dynamiki układów napędowych. WNT, Warszawa 1984.
13. Turowicz A.: Teoria macierzy. Wydawnictwo AGH, Kraków 1996.

Recenzent: Prof. dr hab. inż. Bernard Baron
Wpłynęło do Redakcji dnia 18 września 2011 r.

Abstract

Problems of searching for optimal control for dynamical systems are still actual problems. The minimum energy control problem is one of them. The optimal control problems are often very difficult and complex problems. Proper formulation of the problem allows to find solutions. The orthogonal projection theorem is the most basic and popular therem which is used for searching optiamal solutions.

In this paper the minimum energy control of DC motor is consider. Mathematical model of DC motor is given as two differential linear equations. The quality index is reformulated as scalar product of function in Hilbert vector space $L^2 < 0, T >$. Solutions of DC motor model are also expressed as scalar products in the same vector space. Using a modified orthogonal projection theorem can be obtained solution of problem, in our case this is a control function u(t). Analitical solutions can by calculated only for simple dynamical systems. For more complex systems is easer to obtain numerical solutions and this method is used. The proposed method is used to find optimal control signal for DC motor which should be speeding to the desired value at the specified time. Numerical experiments confirm the correctness of the calculations. Also in the case more complex dynamical systems, such as RC ladder, the result is valid. Disadvantage of this method is that control system is open loop system without negative feedback.