SPIS TREŚCI

Str.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Leszek S. Czarnecki

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

MIERNIKI MOCY BIERNEJ PRZEBIEGÓW ODKSZTAŁCONYCH Z SZEROKOPASMOWYMI PRZESUWNIKAMI FAZY

Streszczenie. W artykule przedstawiono zasadę działania oraz przykład realizacji miernika mocy biernej (Budeanu) w układach z przebiegami odkształconymi, w którym wykorzystuje się parę szerokopasmowych przesuwników fazy. Analizuje się także wpływ niedoskonałości realizacji tych przesuwników na błąd pomiaru miernika.

Wstęp

Obserwowany współcześnie wzrost obciążenia systemu energetycznego odbiornikami nieliniowymi dużej mocy powoduje istnienie sygnalizowanego ([1] [2]) trendu wzrostu deformacji przebiegów elektrycznych w systemie energetycznym, powodujących obniżanie się współczynnika mocy odbiorników i zwiększanie się tzw. "ukrytych kosztów" deformacji. Te negatywne skutki deformacji wymykają się jednak spod kontroli wskutek trudności z pomiarami mocy, towarzyszącymi w obecności deformacji, przekazywanej do odbiornika mocy czynnej. Trudności te odciskają także swoje piętno na długiej dyskusji, dotyczącej definicji tych mocy ([3] - [6]) oraz na usiłowaniach ich eliminacji.

Jedną z najdawniej wprowadzonych do teorii przebiegów odkształconych i najlepiej znanych mocy jest moc bierna Q, zdefiniowana przez Budeanu [3] toteż wysiłki nad zbudowaniem miernika tej mocy mają już swoją długą historię ([7] - [11]) i znanych jest obecnie szereg koncepcji takiego miernika. -

Niniejszy artykuł przedstawia zasadę działania [12] miernika mocy biernej, wg której wielkością proporcjonalną do mocy biernej Q odbiornika jest średnia wartości iloczynu napięć wyjściowych dwóch szerokopasmowych przesuwników fazy, przekształcających sygnały proporcjonalne do prądu i napięcia odbiornika w ten sposób, że nie zmieniając widma modułowego obu sygnałów, wzajemne przesunięcia fazowe składowych harmonicznych obu sygnałów są zmniejszone o $\pi/2$.

Zasada pomiaru

Przypuśćmy, że niesinusoidalne przebiegi okresowe o pulsacji ω_1 prądu i napięcia odbiornika mogą być aproksymowane N-wyrazowymi wielomianami trygonometrycznymi postaci:

$$u \triangleq U_o + \sqrt{2} \sum_{h=1}^{N} \mathrm{Re}\left\{U_h \, e^{jh\omega_1 t}\right\}, \tag{1}$$

$$i \triangleq I_o + \sqrt{2} \sum_{h=1}^{N} \mathrm{Re}\left\{I_h \, e^{jh\omega_1 t}\right\}, \tag{2}$$

gdzie:

$$U_h \triangleq \left|U_h\right| e^{j\alpha_h} = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T u \, e^{-jh\omega_1 t} dt, \tag{3}$$

$$I_h \triangleq \left|I_h\right| e^{j\beta_h} = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T i \, e^{-jh\omega_1 t} dt \tag{4}$$

są zespolonymi wartościami skutecznymi składowych harmonicznych prądu i napięcia odbiornika. Moc bierna odbiornika Q wg definicji Budeanu [3] jest wtedy równa

$$Q \triangleq \sum_{h=1}^{N} \left|U_h\right|\left|I_h\right| \sin\varphi_h, \tag{5}$$

gdzie

$$\varphi_h \triangleq \alpha_h - \beta_h. \tag{6}$$

Przekształćmy napięcie odbiornika u w napięcie u_a pewnym liniowym czwórnikiem o transmitancji operatorowej K(s)

$$K(s) \triangleq \frac{U_a(s)}{U(s)} \tag{7}$$

oraz prąd i odbiornika w napięcie u_b pewnym czwórnikiem o transmitancji operatorowej T(s)

$$T(s) \triangleq \frac{U_b(s)}{I(s)}. \tag{8}$$

Jeśli oznaczymy:

$$K_h \triangleq K(jh\omega_1), \qquad T_h \triangleq T(jh\omega_1), \tag{9}$$

to przebiegi czasowe napięć u_a i u_b mają postać:

$$u_a = U_oK_o + \sqrt{2}\sum_{h=1}^{N} \mathrm{Re}\left\{U_hK_h\, e^{jh\omega_1 t}\right\}, \tag{10}$$

$$u_b = I_oT_o + \sqrt{2}\sum_{h=1}^{N} \mathrm{Re}\left\{I_hT_h\, e^{jh\omega_1 t}\right\}. \tag{11}$$

Uśrednione, w okresie zmienności przebiegów T, wartość iloczynu u_c obu napięć u_a, u_b jest równa:

$$\bar{u}_c \triangleq \overline{u_au_b} \triangleq \frac{1}{T}\int_0^T u_au_b\, dt = U_oK_oI_oT_o + \sum_{h=1}^{N} |U_hK_h|\,|I_hT_h| \times$$

$$\times \cos\left\{\mathrm{Arg}(U_hK_h) - \mathrm{Arg}(I_hT_h)\right\}. \tag{12}$$

Jeśli oznaczymy

$$\mathrm{Arg}\, K_h \triangleq \varkappa_h; \qquad \mathrm{Arg}\, T_h \triangleq \tau_h \tag{13}$$

to wyrażenie to możemy przedstawić w postaci:

$$\bar{u}_c = U_oI_oK_oT_o + \sum_{h=1}^{N} |U_h|\,|I_h|\,|K_h|\,|T_h| \cos\left\{\alpha_h - \beta_h - (\tau_h - \varkappa_h)\right\} \tag{14}$$

Jeśli zatem czwórniki o transmitancjach $K(s)$ i $T(s)$ posiadają takie właściwości, że dla $h = 0,1,\ldots,N$,

$$K_oT_o = 0, \tag{15}$$

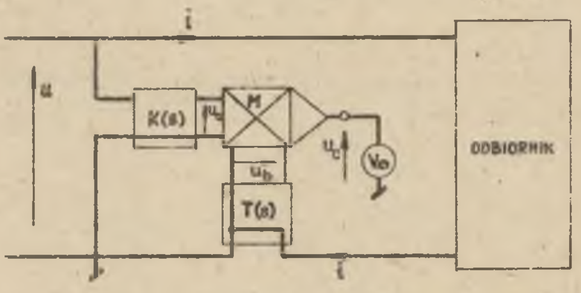
$$|K_h|\,|T_h| = \mathrm{const} = k \tag{16}$$

$$\tau_h - \varkappa_h = \pi/2, \tag{17}$$

wówczas:

$$\bar{u}_c = \overline{u_a u_b} = k \sum_{h=1}^{N} |U_h|\,|I_h| \sin\varphi_h = kQ, \tag{18}$$

a więc średnia wartość iloczynu napięć wyjściowych obu czwórników jest dla dowolnych przebiegów, które mogą być aproksymowane wielomianami trygonometrycznymi postaci (1), (2), proporcjonalna do pobieranej przez odbiornik mocy biernej. Działający według takiej zasady miernik mocy biernej może mieć strukturę przedstawioną na rys. 1.



Rys. 1

Z powyższego rozumowania wynika także, że zagadnienie konstrukcji miernika mocy biernej redukuje się w zasadzie do zagadnienia syntezy dwóch czwórników, których transmitancje K(s) i T(s) spełniają warunki (15), (16), (17).

Warunek (16) mógłby być spełniony, gdyby transmitancje K(s) i T(s) były transmitancjami szerokopasmowych przesuwników fazy (ang.: all - pass networks), których transmitancje F(s) mają ogólnie postać:

$$F(s) \triangleq \frac{M(-s)}{M(s)}, \tag{19}$$

tj. na osi urojonej, $s = j\omega$

$$|F(j\omega)| = 1, \tag{20}$$

jednak nie mógłby być wtedy spełniony warunek (15). Oba warunki, przynajmniej w przybliżeniu, mogą być spełnione, gdy każda z transmitancji K(s) i T(s) jest iloczynem transmitancji szerokopasmowego przesuwnika fazy i transmitancji pewnego czwórnika górnoprzepustowego, np.:

$$K(s) \triangleq k_1 \frac{s}{s+\alpha} F_1(s), \tag{21}$$

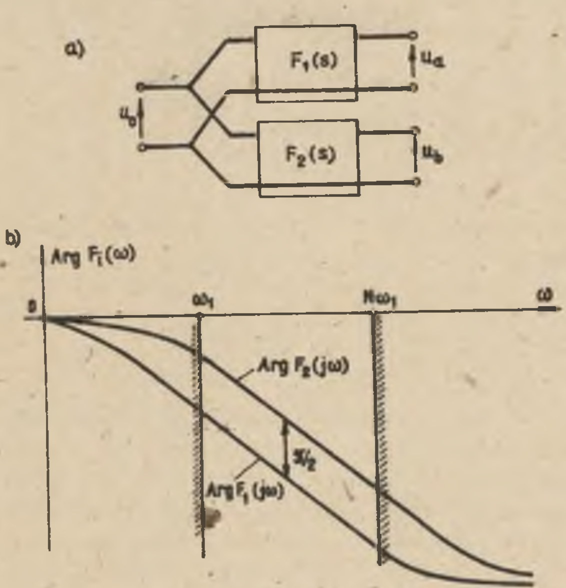
$$T(s) \hat{=} k_2 \frac{s}{s+\alpha} F_1(s), \tag{22}$$

gdzie k_1 i k_2 są współczynnikami wymiarowymi takimi, że

$$k_1 k_2 \hat{=} k. \tag{23}$$

Moduł czynnika $j\omega/(j\omega+\alpha)$ zależy jednak od częstotliwości, zatem warunek (16) nie może być ściśle spełniony, niemniej, wybierając współczynnik α dostatecznie mniejszy od pulsacji ω_1, można ten warunek spełnić z dowolnie wymaganą dokładnością.

Ostatni z warunków (17), uwzględniając to, że czynnik $\frac{s}{(s+\alpha)}$ nie wprowadza do różnicy przesunięć fazowych $\tau_h - \vartheta_h$ żadnego składnika, będzie spełniony, jeśli czwórniki o transmitancjach $F_1(s)$ i $F_2(s)$ będą, w przypadku ich połączenia w sposób przedstawiony na rys. 2a, tworzyć szerokopasmowy przesuwnik fazy o przesunięciu fazy w paśmie pulsacji $(\omega_1, N\omega_1)$ równym $\pi/2$ jak ilustruje to rys. 2b.



Rys. 2

Synteza transmitancji $F_1(s)$ i $F_2(s)$. Przykład realizacji miernika

Synteza szerokopasmowych przesuwników fazy jest oparta na teorii funkcji eliptycznych Jacobiego [13] i jest obecnie szczegółowo opracowana. Obszerną teorię takich układów i algorytmy ich syntezy można znaleźć w wielu pracach, jak np. [14] - [16]. Ponieważ ramy artykułu nie pozwalają

na omówienie procedury syntezy, niezbędnych dla realizacji miernika, szerokopasmowych przesuwników fazy, dla zilustrowania postaci transmitancji F(s) oraz złożoności miernika, zostały przez autora wyznaczone i przedstawione poniżej, w gotowej postaci obie funkcje dla pasma częstotliwości obejmującego 10 kolejnych harmonicznych przebiegu o częstotliwości przemysłowej 50 Hz, przy założeniu, że różnica przesunięć fazowych obu torów nie może się różnić od $\pi/2$ bardziej niż o $\varepsilon = 0^\circ\, 05'$.
Mianowicie:

$$F_1(s) = \prod_{k=1}^{3} \frac{s - p_k}{s + p_k},$$

gdzie:

$$p_1 = 10040, \quad p_2 = 1397{,}1, \quad p_3 = 334{,}06 \tag{24}$$

$$F_2(s) = \prod_{k=4}^{6} \frac{s - p_k}{s + p_k},$$

gdzie:

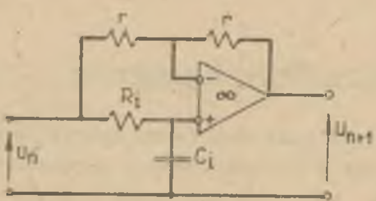
$$p_4 = 2954{,}4, \quad p_5 = 706{,}43 \quad p_6 = 98{,}304 \tag{25}$$

Spełnianie warunku (17) z dokładnością do wartości ε można sprawdzić, obliczając wartość:

$$\tau_h - \varkappa_h = \operatorname{Arg} T(jh\omega_1) - \operatorname{Arg} K(jh\omega_1) = \operatorname{Arg} F_2(jh\omega_1) - \operatorname{Arg} F_1(jh\omega_1) =$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{3} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{h\omega_1}{p_k}\right) - 2 \sum_{k=4}^{6} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{h\omega_1}{p_k}\right) \tag{26}$$

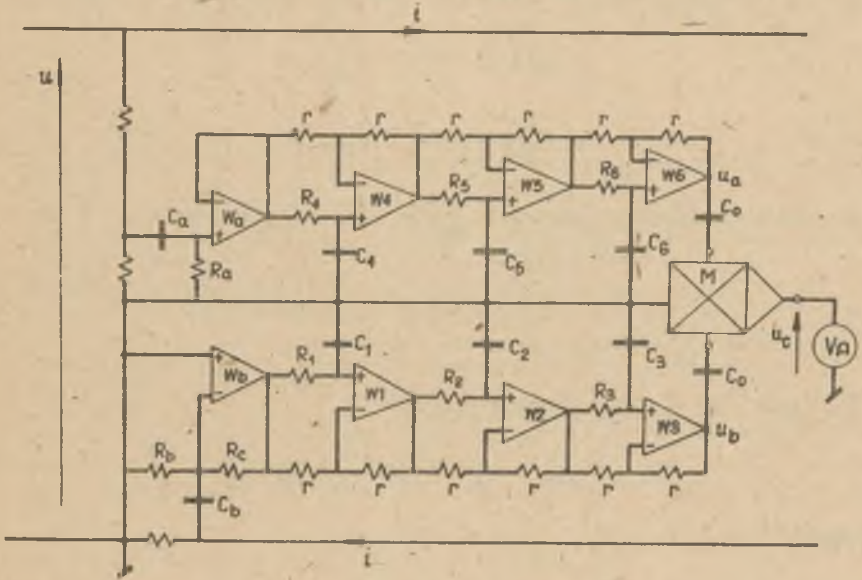
Istnieje szereg pasywnych i aktywnych układów posiadających transmitancję postaci (19), których właściwości badane są w wielu pracach, jak np. [14] - [18]. Zalety układów pasywnych, takie jak niska wrażliwość czy niski koszt, sugerują celowość poszukiwania możliwości realizacji przesuwników w tej właśnie klasie obwodów, jednak wzajemna obciążalność podobwodów, niska dobroć elementów indukcyjnych w obszarze małych częstotliwości czynią możliwość uzyskania dostatecznej dokładności realizacji transmitancji $F_1(s)$ i $F_2(s)$ mało



Rys. 3

prawdopodobną. W zrealizowanym dla ilustracji przedstawionej metody miernika szerokopasmowe przesuwniki fazy o transmitancjach (24) i (25) zbudowano z 3 aktywnych ogniw, przedstawionych na rys. 3, posiadających dla $R_1C_1 = 1/p_1$ transmitancje:

$$K_1(s) = \frac{s - p_1}{s + p_1}. \tag{27}$$



Rys. 4

Nieco uproszczony schemat miernika przedstawiony jest na rys. 4. Elementy z indeksami a,b,c tworzą obwody górnoprzepustowe, zapewniające spełnienie warunku (15) oraz wzmocnienie mocy napięć wejściowych obu przesuwników. Ponieważ wzmocnienie napięciowe obwodu o elementach z indeksami b,c jest ujemne, przesuwniki o transmitancjach $F_1(s)$ i $F_2(s)$ są przestawione miejscami. Ograniczona dokładność elementów, z których zbudowane są czwórniki o transmitancjach K(s) i T(s) oraz różne efekty pasożytnicze powodują, że błędy realizacji warunków (16) i (17) są większe niż to wynika z założeń syntezy. W wykonanym mierniku, zbudowanym z rezystorów o dokładności 0,05%, kondensatorów o dokładności 0,1% oraz wzmacniaczy operacyjnych typu A 741 warunek (16) został spełniony z dokładnością większą niż 0,5%, zaś warunek (17) z błędem fazowym mniejszym niż $0^\circ\ 20'$. Jednak wyniki te mogą być traktowane wyłącznie jako ilustracyjne, gdyż pomierzone dla jednego egzemplarza, mają charakter przypadkowy, a tolerancja realizacji nie była przedmiotem analizy

Błąd realizacji transmitancji K(s), T(s), a błąd pomiaru

Wynik pomiaru wg omawianej metody obarczony jest błędem, na który składa się szereg klasycznych przyczyn takich jak: niedokładność dzielnika czy bocznika wejściowego, błędy układu mnożącego czy woltomierza uśredniającego napięcie wyjściowe i inne oraz błąd wynikający wyłącznie z niedoskonałego spełnienia warunków (16) i (17) i ten ostatni błąd ma dla przedstawianej metody zasadnicze znaczenie. Aby go oszacować przyjmiemy, że:

$$|K_h|\,|T_h| \triangleq k(1+\delta_h), \tag{28}$$

$$\tau_h - \varkappa_h \triangleq \frac{\pi}{2} - \varepsilon_h. \tag{29}$$

Średnia wartość iloczynu napięć u_a, u_b jest wówczas równa:

$$\bar{u}_c = \overline{u_a u_b} = k\sum_{h=1}^{N} |U_h|\,|I_h|(1+\delta_h)\sin(\varphi_h+\varepsilon_h). \tag{30}$$

Dla $|\delta_h| \ll 1$, $|\varepsilon_h| \ll \pi/2$ można przyjąć:

$$\cos\varepsilon_h \approx 1, \quad \sin\varepsilon_h \approx \varepsilon_h, \quad \varepsilon_h\delta_h \approx 0 \tag{31}$$

i wówczas:

$$\bar{u}_c \approx k\sum_{h=1}^{N} |U_h|\,|I_h|(\sin\varphi_h + \varepsilon_h\cos\varphi_h + \delta_h\sin\varphi_h) \tag{32}$$

Jeśli oznaczymy:

$$\delta_M \triangleq \max|\delta_h|, \tag{33}$$

$$\varepsilon_M \triangleq \max|\varepsilon_h|, \quad h = 1,2,\ldots N, \tag{34}$$

to średnia wartość napięcia u_c jest dla dodatnich wartości Q ograniczona nierównością:

$$\bar{u}_c \leq k|Q + \delta_M Q + \varepsilon_M P|. \tag{35}$$

Tak więc, błąd modułowy δ_M wprowadza do wyniku pomiaru błąd proporcjonalny do mierzonej mocy biernej, zaś błąd fazowy ε_M - błąd proporcjonalny do mocy czynnej odbiornika.

Wnioski

Wydaje się, że przedstawiona zasada pomiaru mocy biernej przebiegów odkształconych w świetle istnienia dobrze opracowanej teorii szerokopasmowych przesuwników fazy daje właściwą podstawę do konstrukcji miernika tej mocy. Słabą stroną metody może być wymaganie odnośnie dużej liczby elementów o znacznej dokładności. Może to być szczególnie niekorzystne w przypadku konstrukcji miernika dla pomiaru mocy biernej przebiegów o widmach rzadkich, występujących w symetrycznych układach wielofazowych.

LITERATURA

[1] LINDERS J.R.: Electric Wave Distortion: Their Hidden Cost and Containment, IEEE Trans. on I.A., IA - 15, N° 5 Sep/Oct. 1979, pp. 458--471.

[2] SHIP D.P.: Harmonic Analysis and Suppresion for Electrical Systems Supplying Power Converters and Other Nonlinear Loods, IEEE Trans. on I.A. IA - 15, N° 5, Sep./Oct. 1979, pp. 453-458.

[3] BADEANU C.: Reactive and Fictitious Powers. Publication N° 2 of the Rumanian National Institute, Bucarest 1927.

[4] FRYZE S.: Moc czynna, bierna i pozorna w obwodach o przebiegach odkształconych prądu i napięcia, Przegląd Elektrotechniczny, 1931, nr 7 ss. 193-203; nr 8, ss. 225-234.

[5] EMANUEL A.E.: Suggested Definition of Reactive Power for Nonsinusoidal Systems, Proc. IEE. Vol. 120. N° 6 June, 1973, pp. 704-706.

[6] SHERPED W., ZAKIKHANI P.: Suggested Definition of Reactive Power for Nonsinusoidal Systems, Proc. IEE, Vol. 119, N° 9, Sept. 1972, pp. 1361-2.

[7] ANTONIU S.I., LEON M.: Linear Active Model for the Determination of Active and Reactive Powers in Nonsinusoidal State, Acta Imeko, 1967.

[8] ANTONIU S.I., LEON M., TUDUCE R.: P.Q.D-metre, Appareil pour la mesure des puissances et energies actives reactives et deformantes dans un regime energelique deformant. Congres Mesucora 1973, Paris.

[9] LOPEZ R.A., ASOQUERINO J.C.M., RODRIGEZ-IZGUIERDO G.: Reactive Power Meter for Nonsinusoidal Systems, IEEE Trans. Instr. Meas., Vol. 26 N° 3, 1977, pp. 258-260.

[10] SAWICKI J.: The Measurement of Reactive Power $\sum|U|\,|I|\sin\varphi$, Acta Imeko, 1976, Vol. II, 1977 pp. 23-31.

[11] CZARNECKI L.S.: Konstrukcja miernika mocy biernej w układach z przebiegami odkształconymi. Zesz. Nauk. Pol. Śl. Elektryka Nr 36, Gliwice 1972.

[12] CZARNECKI L.S.: Miernik mocy biernej w układach z przebiegami odkształconymi. Patent PRL nr 85524, 17.1.1974.

[13] WHITTEKER E.T., WATSON G.N.: Kurs Analizy Współczesnej, t. II, PWN, Warszawa 1967.

[14] ORCHARD H.J.: Synthesis of Wideband Two-Phase Networks. Wireless Eng. March 1950, pp. 72-81.

[15] BEDROSIAN S.D.: Normalized Design of 90° Phase-Difference Networks. IRE Trans. on C.T. June, 1960, pp. 128-136.

[16] LLOYD A.G.: 90-Degree Phase-Difference Networks... Electr. Design., 19, Sept. 13, 1976, pp. 90-94.

[17] PONSONBY J.E.B.: Active All-Pass Filter Using a Differential Amplifier. Electron Lett. Vol. 2, pp. 134-135, Apr. 1966.

[18] DAS S.K.: Realization of All-Pass Transfer Function Using a Differential Amplifier. IEEE Trans. on. C.T. Vol. C.T.-20, May 1973, pp. 326-327.

Wpłynęło do Redakcji w maju 1980 r.

Recenzent:

Doc. dr Stanisław Bolkowski

ИЗМЕРИТЕЛИ РЕАКТИВНОЙ МОЩНОСТИ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ПРОБЕГОВ С ШИРОКОПОЛОСНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯМИ ФАЗЫ

Р е з ю м е

В статье представлены принцип действия и пример реализации измерителя реактивной мощности (по Будеану) в системах с деформированными пробегами, в которых использована пара широкополосных преобразователей фазы. Произведен анализ влияния несовершенства реализации этих преобразователей на погрешность измерения измерителя.

THE VARMETERS OF DEFORMED WAVEFORMS WITH WIDE BAND PHASE SHIFTERS

S u m m a r y

The paper presents the principle of operation and an example of the varmeter (Budeanu) in systems with deformed waveforms where a pair of wide band phase shifters is used. The effect of imperfect realization of these phase shifters on the varmeter s measuring error is analysed.

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Anna LASICZ

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

BŁĄD REALIZACJI SZEROKOPASMOWYCH PRZESUWNIKÓW FAZY $\frac{\pi}{2}$

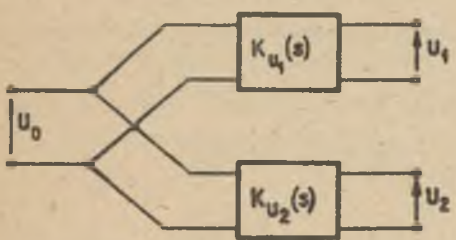
Streszczenie. W artykule rozważa się błąd realizacji szerokopasmowych przesuwników fazy wynikający z niemożliwości dokładnego doboru wartości elementów układu oraz z przyrostowych zmian ich wartości pod wpływem czynników zewnętrznych. Rozważa się również wieloparametrową wrażliwość tego błędu aproksymacji.

Wprowadzenie

Na rys. 1 podano ogólną strukturę szerokopasmowych przesuwników fazy, gdzie:

$$\left.\begin{aligned} u_o(t) &= |U_o| \sin\omega t \\ u_1(t) &= |U_1| \sin[\omega t + \beta_1(\omega)] \\ u_2(t) &= U_2 \sin[\omega t + \beta_2(\omega)] \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$|U_1| = |U_2| \tag{2}$$



Rys. 1

Układ jest szerokopasmowym przesuwnikiem fazy $\frac{\pi}{2}$, gdy w określonym paśmie częstotliwości różnica faz napięć $u_1(t)$ i $u_2(t)$ jest stała i wynosi $\frac{\pi}{2}$ przy zachowaniu stałości wartości skutecznych napięć $|U_1|$ i $|U_2|$. Czyli

$$\phi(\omega) = \beta_1(\omega) - \beta_2(\omega) \approx \frac{\pi}{2}$$

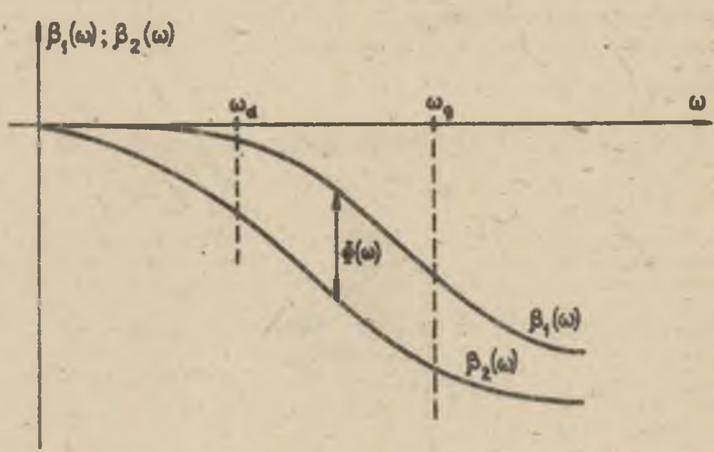
dla

$$\omega \in (\omega_d; \omega_g).$$

Charakterystykę fazy podano na rys. 2. Warunek: $|U_1| = |U_2|$ oznacza, że wzmocnienie obu torów układu musi być jednakowe niezależnie od częstotliwości, a więc transmitancje tych torów muszą spełniać relację:

$$K_{u1}(s) = \pm \frac{P_1(-s)}{P_1(s)}, \tag{3}$$

gdzie: $P_1(s)$ - wielomian Hurwitza.



Rys. 2

Z relacji (3) wynika, że układy takie zapewniają stały moduł transmitancji na osi urojonej, przy zmiennym argumencie. Czwórniki, które spełniają relację (3), noszą nazwę korektorów fazy. Projektowanie szerokopasmowych przesuwników fazy $\frac{\pi}{2}$ polega na tym, że przy zadanej szerokości pasma $\omega \in (\omega_d; \omega_g)$ i żądanym błędzie należy określić transmitancje torów $K_{u1}(s)$ i $K_{u2}(s)$, a następnie w oparciu o nie przy przyjętej strukturze układowej określić wartości elementów. Wśród publikowanych metod syntezy tych układów wyróżnia się zasadniczo dwie [1], [3]:

- metoda komputerowa,
- metoda matematyczna, w której poszukuje się $K_{u1}(s)$ i $K_{u2}(s)$, rozwiązując równanie eliptyczne Jacobiego.

Niezależnie od wybranej metody realizacja stałej różnicy faz jest niemożliwa, gdyż tangens $\Phi(\omega)$ jest ilorazem dwu wielomianów zmiennej ω. Określa się więc tzw. błąd aproksymacji $\mathcal{E}(\omega)$.

$$\mathcal{E}(\omega) = \frac{\pi}{2} - \Phi(\omega), \tag{4}$$

który po przekształceniach da się przedstawić w formie [1]

$$T(\omega) = \operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\mathcal{E}(\omega)\right] = \prod_{i=1}^{n} \frac{\omega - \omega_i}{\omega + \omega_i}. \tag{5}$$

Realizacja (5) określa tangens połowy kąta błędu aproksymacji, czyli funkcję błędu aproksymacji, której zera i bieguny są liczbami rzeczywistymi, co jest konsekwencją aproksymacji funkcji (5) w sensie Czebyszewa.

Realizacja praktyczna wnosi także pewien błąd, który nazwiemy błędem realizacji. Artykuł ten omawia właśnie błąd realizacji szerokopasmowych przesuwników fazy oraz związane z nim aspekty wrażliwościowe.

Błąd realizacji i wieloparametrowa wrażliwość funkcji błędu aproksymacji

Określimy błąd realizacji jako zmianę funkcji błędu aproksymacji $dT(\omega)$ wynikającą ze zmian wartości elementów układu.
Jeżeli

$$T(\omega,a) = tg\left[\frac{1}{2}\mathcal{E}(\omega,a)\right] = \prod_{i=1}^{n}\frac{\omega-\omega_i}{\omega+\omega_i} = \frac{L(\omega)}{L(\omega)}, \tag{6}$$

gdzie:

ω_i – rzeczywiste zera funkcji $T(\omega)$, które określa się przez wartości zer (biegunów) funkcji przejścia korektorów fazy lub bezpośrednio przez parametry układu,

a – zbiór parametrów układu

jest funkcją częstotliwości i parametrów układu, to błąd realizacji $dT(\omega,a) = tg\,\frac{1}{2}\left[\mathcal{E}'(\omega)\right]$ jest także zależny od tych wielkości. Funkcje te ze względu na parametry układu są złożone, dlatego błąd realizacji określimy korzystając z wieloparametrowej wrażliwości funkcji $T(\omega,a)$. Wrażliwość tę określimy w sposób pośredni, wyznaczając wrażliwość tej funkcji na zmiany położenia zer i biegunów k_j funkcji przejścia korektorów fazy. Te zaś zmiany wynikają bezpośrednio ze zmian elementów układu i można je określać także w oparciu o wrażliwość. Zgodnie z powyższym i definicją wieloparametrowej wrażliwości [2] wrażliwość funkcji błędu aproksymacji $T(\omega)$ określona jest następująco:

$$S_K^{T(\omega,k)} = \left[\frac{\partial(\ln T)}{\partial(\ln k_1)};\ \frac{\partial(\ln T)}{\partial(\ln k_2)} \dots \frac{\partial(\ln T)}{\partial(\ln k_n)}\right], \tag{7}$$

natomiast wrażliwość pierwiastków $T(\omega,a)$ na zmiany położeń zer (biegunów) funkcji przejścia korektorów $K_{u1}(j\omega)$ i $K_{u2}(j\omega)$

$$S_K^{\omega_i} = \left[\frac{\partial\omega_i}{\partial(\ln k_1)};\ \frac{\partial\omega_i}{\partial(\ln k_2)};\ \frac{\partial\omega_i}{\partial(\ln k_n)}\right], \tag{8}$$

gdzie

$$= \left[k_1;\ k_2 \dots k_j \dots k_n\right] \tag{9}$$

oznacza wektor zer funkcji $K_1(j\omega)$ i $K_2(j\omega)$.

Wówczas względną zmianę funkcji $T(\omega,a)$ (czyli względny błąd realizacji) wywołaną przyrostową zmianą k

$$\delta T(\omega,a) = \frac{dT(\omega,a)}{T(\omega,a)} = \sum_{j=1}^{m} S_{kj}^{T} \frac{dk_j}{k_j} = S_k^T K^t, \tag{10}$$

gdzie:

$K = \left[d(\ln k_1);\ d(\ln k_2) \ldots d(\ln k_m)\right]$,

K^t - oznacza transpozycję wektora K.

Wrażliwość funkcji błędu aproksymacji (6) na zmiany k przyjmie postać:

$$S_k^T = -\sum_{i=1}^{m} \frac{S_k^{\omega_i}}{\omega-\omega_i} - \sum_{i=1}^{m} \frac{S_k^{\omega_i}}{\omega+\omega_i}. \tag{11}$$

W celu określenia wieloparametrowej wrażliwości pierwiastków wielomianu ω_i a także k_j posłużono się metodą podaną przez Martinelliego [2], polegającą na określeniu tej wrażliwości w oparciu o wrażliwość współczynników tego wielomianu. Dla jasności dalszych rozważań przytoczymy w skrócie tę metodę.

Niech:

$$Q(p) = Q_m p^m + Q_{m-1} p^{m-1} + \ldots + Q_1 p + Q_0 \ \ldots \tag{12}$$

będzie dowolnym wielomianem zmiennej p.

Wówczas

$$S_k^{p_i} = U_i W \tag{13}$$

natomiast

$$dp_i = U_i W K^t, \tag{14}$$

gdzie:

$$U_i = \left[-L^{(i)};\ -L^{(i)} p_i;\ -L^{(i)} p_i^2 \ldots -L^{(i)} p_i^m\right] \tag{15}$$

a

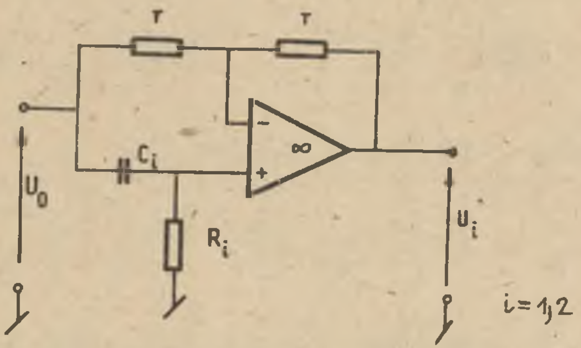
$$L^{(i)} = \left.\frac{1}{\frac{dQ(p)}{dp}}\right|_{p=p_i}$$

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_0}{\partial(\ln k_1)}; & \frac{\partial Q_0}{\partial(\ln k_2)}; & \frac{\partial Q_0}{\partial(\ln k_n)} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial(\ln k_1)}; & \frac{\partial Q_1}{\partial(\ln k_2)}; & \frac{\partial Q_1}{\partial(\ln k_n)} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial Q_m}{\partial(\ln k_1)}; & \frac{\partial Q_m}{\partial(\ln k_2)}; & \frac{\partial Q_m}{\partial(\ln k_n)} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Przykład

Przyjmijmy, że w torach przesuwnika fazowego są korektory fazowe pierwszego rzędu pokazane na rys. 3 o transmitancjach częstotliwościowych postaci

$$K_{u1}(j\omega) = \frac{j\omega - k_1}{j\omega + k_1}; \qquad K_{u2}(j\omega) = \frac{j\omega - k_2}{j\omega + k_2} \tag{17}$$



Rys. 3

Wówczas:

$$T(\omega) = \mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}\varepsilon(\omega)\right] = \frac{\omega^2 - (k_1 - k_2)\omega + k_1 k_2}{\omega^2 + (k_1 - k_2)\omega + k_1 k_2} = \frac{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}{(\omega + \omega_1)(\omega + \omega_2)} \tag{18}$$

gdzie:

$$k_1 = \frac{1}{R_1 C_1}$$

$$k_2 = \frac{1}{R_2 C_2}$$

Wieloparametrowa wrażliwość funkcji tangensa połowy kąta błędu aproksymacji wynosi

$$S_k^T = \frac{S_k^{\omega_1}}{\omega-\omega_1} - \frac{S_k^{\omega_2}}{\omega-\omega_2} - \frac{S_k^{\omega_1}}{\omega+\omega_1} - \frac{S_k^{\omega_2}}{\omega+\omega_2},$$

gdzie $k = [k_1, k_2]$.
Z relacji (18) wynika, że $Q(p) = L(-\omega) = \omega^2 - (k_1-k_2)\omega + k_1k_2$ stąd

$$Q_q = k_1k_2; \quad Q_1 = -(k_1-k_2), \quad Q_2 = 1,$$

wówczas:

$$W = \begin{bmatrix} k_1k_2; & k_1k_2 \\ -k_1 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L^{(1)} = \frac{1}{\frac{dQ(\omega)}{d\omega}}\Bigg|_{\omega=\omega_1} = \frac{1}{\omega_1-\omega_2}; \quad L^{(2)} = \frac{1}{\frac{dQ(\omega)}{d\omega}}\Bigg|_{\omega=\omega_2} = \frac{1}{\omega_2-\omega_1}.$$

Wrażliwości pierwiastków ω_1 i ω_2 przyjmą postać:

$$S_k^{\omega_1} = U_1 W = \left[\frac{-k_1k_2}{\omega_1-\omega_2} + \frac{\omega_1 k_1}{\omega_1-\omega_2}; \quad \frac{-k_1k_2}{\omega_1-\omega_2} - \frac{k_2\omega_1}{\omega_1-\omega_2}\right],$$

$$S_k^{\omega_2} = U_2 W = \left[\frac{k_1k_2}{\omega_2-\omega_1} - \frac{k_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}; \quad \frac{k_1k_2}{\omega_2-\omega_1} + \frac{k_2\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\right],$$

a zmiany położenia pierwiastków ω_1 i ω_2 będą określone następująco:

$$d\omega_1 = \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left[k_1(k_2-\omega_1)\frac{dk_1}{k_1} + k_2(\omega_1+k_1)\frac{dk_2}{k_2}\right],$$

$$d\omega_2 = \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left[k_1(k_2-\omega_2)\frac{dk_1}{k_1} + k_2(\omega_2+k_1)\frac{dk_2}{k_2}\right],$$

gdzie:

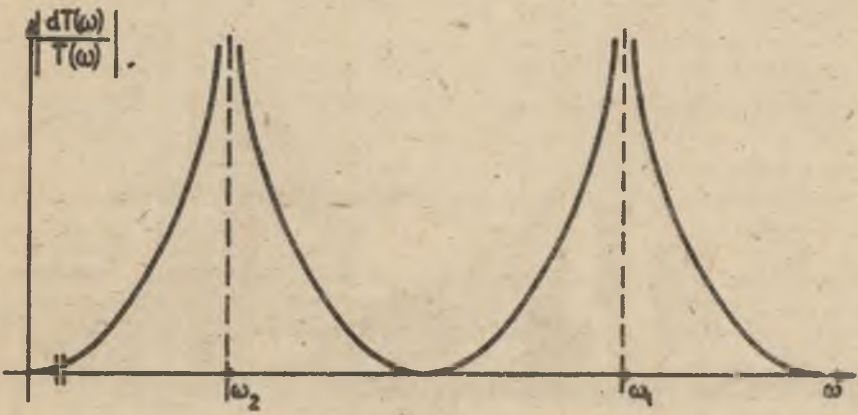
$$\frac{dk_i}{k_i} = \frac{dR_i}{R_i} - \frac{dC_i}{C_i}.$$

$$\frac{dk_2}{k_2} = -\frac{dR_2}{R_2} - \frac{dC_2}{C_2}.$$

Względny błąd realizacji

$$\delta T(\omega,s) = \frac{dT(\omega,s)}{T(\omega,s)} = -2\omega\frac{d\omega_1}{\omega^2-\omega_1^2} - 2\omega\frac{d\omega_2}{\omega^2-\omega_2^2}.$$

Pokazany na rysunku 4 wykres przedstawia bezwzględną wartość tego błędu jako funkcję ω.



Rys. 4

Oszacowanie zmian położenia zer (biegunów) funkcji $T(\omega)$

Zakładając, że:

$$\frac{dR_1}{R_1} = \frac{dC_1}{C_1} = \frac{dR_2}{R_2} = \frac{dC_2}{C_2} = \pm\delta$$

to:

$$\frac{dk_1}{k_1} = \pm 2\delta \quad i \quad \frac{dk_2}{k_2} = \pm 2\delta$$

i

$$0 \le \left|\frac{d\omega_1}{\omega_1}\right| \le \frac{2\delta}{\omega_1-\omega_2}(k_1 + k_2)$$

$$0 \leqslant \left|\frac{d\omega_2}{\omega_2}\right| \leqslant \frac{2\delta}{\omega_1 - \omega_2}(k_1 + k_2)$$

Wartości maksymalne uzyskuje się wtedy, gdy zmiany $\frac{dk_1}{k_1}$ i $\frac{dk_2}{k_2}$ mają przeciwne znaki.

Przykład liczbowy

Dla zakresu częstotliwości $f \in (100-250)$ Hz należy uzyskać przesunięcie fazowe $\frac{\pi}{2}$ z błędem $\varepsilon_m < 3^o$. Załóżmy, że struktura korektorów jest taka, jak pokazana na rys. 3. Obliczone dla tego pasma wartości zer (biegunów) funkcji przejścia $K_{u1}(j\omega)$ i $K_{u2}(j\omega)$ wynoszą odpowiednio:

$$\bar{k}_1 = 2{,}5036,$$

$$\bar{k}_2 = 0{,}3995,$$

gdzie:

$$\bar{k} = \frac{k}{\omega_o}; \quad \omega_o = 2\pi\sqrt{f_d f_g} = 991{,}5489 \ \frac{rad}{s}.$$

Natomiast zera (bieguny) funkcji tangensa połowy kąta błędu aproksymacji mają wartości

$$\bar{\omega}_1 = 1{,}3788, \quad \bar{\omega}_2 = 0{,}7314, \qquad \text{gdzie} \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_o}.$$

Zakładając, że $\delta = \pm 0{,}01$, otrzymujemy wartości maksymalnych względnych zmian zer ω_1 i ω_2

$$\left|\frac{d\omega_1}{\omega_1}\right| = \left|\frac{d\omega_2}{\omega_2}\right| = 0{,}0897$$

stąd

$$d\bar{\omega}_{1max} = 0{,}1236$$

$$d\bar{\omega}_{2max} = 0{,}0656$$

względna zmiana $T(\bar{\omega})$ dla $\bar{\omega} = 1{,}2$ ma wartość

$$\left|\frac{dT(\bar{\omega})}{T(\bar{\omega})}\right|_{\bar{\omega}=1,2} = 0{,}817$$

Uzyskany wynik wskazuje na to, że wartość błędu realizacji dla przyjętej tolerancji wykonania elementów układu $\delta = \pm 1\%$ i dowolnie wybranej pulsacji $\omega = 1{,}2\,\omega_0$ jest porównywalna z wartością błędu aproksymacji. Nie może być on zaniedbany szczególnie tam, gdzie ważna jest wysoka dokładność pracy przesuwników fazy. W celu zmniejszenia wartości tego błędu należy zastosować elementy o odpowiednio wąskiej tolerancji wykonania.

Zakończenie

W artykule zaproponowano metodę obliczania błędu realizacji szerokopasmowych przesuwników fazy $\frac{\pi}{2}$. Omówiono ten błąd dla najprostszej struktury układów (korektory I rzędu). Bardziej złożone struktury wymagać będą użycia maszyn cyfrowych. Pokazano, że błąd ten wynika z wrażliwości zer (biegunów) funkcji tangensa połowy kąta błędu aproksymacji na zmianę położeń zer (biegunów) funkcji przejścia korektorów fazy, która to zmiana pochodzi od zmian parametrów układu. Analizę powyższą przeprowadzono dla korektorów o takiej strukturze, która zapewnia to, że zmiany parametrów układu nie mają wpływu na moduł funkcji przejścia korektorów a oddziaływają jedynie na jej fazę.

LITERATURA

[1] ORCHARD H.J.: Synthesis of Wideband two-phase networks. Wireless Engineer, March 1950.

[2] MITRA S.K.: Analiza i synteza układów aktywnych liniowych. WNT, Warszawa 1974.

[3] LLOYD Allan G.: 90-degree phase-difference networks are simply designed with a program in Basic. Electronic Design 19 september 13 1976.

Wpłynęło do Redakcji w maju 1980 r.

Recenzent:
Doc. dr Zdzisław Klonowicz

ПОГРЕШНОСТЬ РЕАЛИЗАЦИИ ШИРОКОПОЛОСНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ФАЗЫ $\frac{\pi}{2}$

Р е з ю м е

В статье представлен анализ погрешности реализации широкополосных преобразователей фазы $\frac{\pi}{2}$, вытекающей из невозможности точно подобрать значения элементов системы, а также из изменения приращения их значений под влиянием факторов из вне. Обсуждена тоже многопараметрическая чувствительность погрешности аппроксимации.

THE WIDE-BAND $\frac{\pi}{2}$ CONSTANT PHASE NETWORKS REALIZATION ERROR

S u m m a r y

The error of realization of wide-band constant phase networks is discussed in the paper.

The error depending on changes in values of elements is taken into account.

The multisensitivity of approximation error is also discussed.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Marian PASKO

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

REALIZACJA AKTYWNEGO KOREKTORA FAZY DRUGIEGO RZĘDU ZE STRATNĄ INDUKCYJNOŚCIĄ

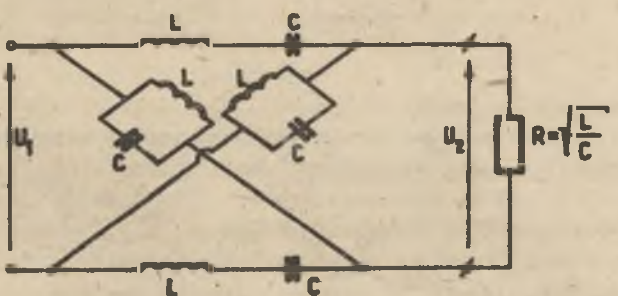
Streszczenie. Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie sposobu realizacji korektora fazy drugiego rzędu z wykorzystaniem wzmacniacza operacyjnego i symulowanej stratnej indukcyjności.
W artykule omówiono również wrażliwość przedstawionego korektora i porównano z wrażliwością korektora RLC.

Wprowadzenie

Korektorem fazowym nazywamy czwórnik o transmitancji operatorowej mającej postać

$$K(s) = \pm \frac{P(-s)}{P(s)}, \tag{1}$$

tj. funkcji o stałym module na osi urojonej i zmiennym argumencie. W wyrażeniu (1) $P(s)$ jest wielomianem Hurwitza. Transmitancja takiego czwórnika charakteryzuje się kwadraturową symetrią zer i biegunów. Funkcja taka może być realizowana w zbiorze elementów RLC, ale wyłącznie o strukturze mostkowej. Na rys. 1 przedstawiono przykład takiej realizacji dla korektora fazy drugiego rzędu.



Rys. 1

Przejście do stosowanej najczęściej struktury trójnikowej wymaga wzbogacenia klasy elementów RLC o transformatory idealne, w efekcie czego synteza korektorów staje się technologicznie kłopotliwa, szczególnie dla małych częstotliwości, ze względu na obecność indukcyjności. Z tych też względów eliminacja indukcyjności z obwodów elektronicznych stała się obecnie powszechna. Wprowadzono szereg elementów aktywnych, które pozwoliły na eliminację lub symulację indukcyjności w układach [1], [5].

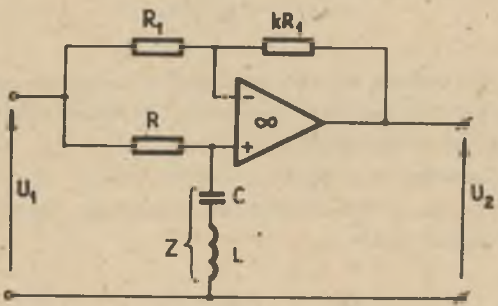
Aktywna realizacja korektora

Układem aktywnym, który jest równoważny układowi z rys. 1 jest układ podany na rys. 2, o transmitancji mającej postać

$$K_u(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Z - kR}{Z + R} = \frac{s^2 LC - ksCR + 1}{s^2 LC + sCR + 1} = \frac{P(-s)}{P(s)}. \quad (2)$$

Z relacji (2) wynika, że poprzez zmianę k możemy wpływać niezależnie na położenie zer transmitancji, przy niezmienionym położeniu biegunów.

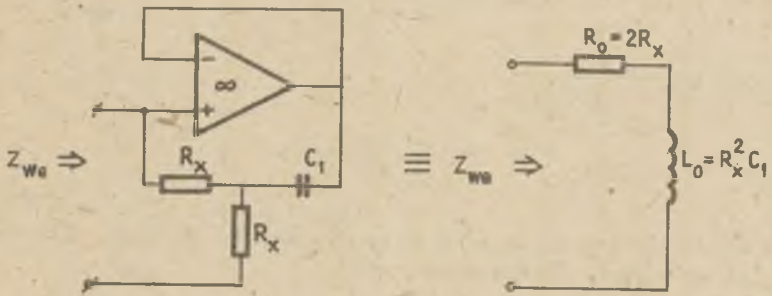
Dla zapewnienia kwadranturowej symetrii zer i biegunów transmitancji (2) należy w tym przypadku przyjęć $k = 1$. Szereg rozwiązań korektorów fazowych bazuje na strukturze z rys. 2, przede wszystkim ze względu na łatwą regulację położeń zer oraz dobre własności wrażliwościowe, porównywalne z obwodami pasywnymi RLC.



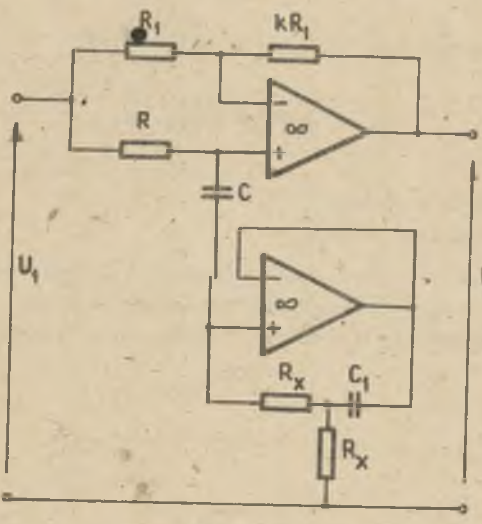
Rys. 2

Używając do symulacji bezstratnej indukcyjności uogólnionych konwertorów impedancji (GIC) lub żyratorów o dużej dobroci [2], [3], [6], należy zaznaczyć, że za pomocą samego żyratora i elementów RC można zrealizować korektory fazy o dobrych własnościach [4].

W niniejszym artykule do realizacji użyto zamiast bezstratnej indukcyjności indukcyjność stratną, zrealizowaną za pomocą tylko jednego wzmacniacza operacyjnego (np. [1] rys. 3). Takie podejście wydaje się być użyteczne, zwłaszcza jeżeli chodzi o realizację korektorów fazowych o małych dobrociach biegunów. Praktyczna realizacja korektora fazy drugiego rzędu przy użyciu stratnej indukcyjności przedstawiona jest na rys. 4.



Rys. 3



Rys. 4

Transmitancja napięciowa ma postać

$$K_u(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{s^2 L_o C + (R_o - kR)sC + 1}{s^2 L_o C + (R_o + R)sC + 1} = \frac{s^2 R_x^2 C_1 C - (2R_x + R)sC + 1}{s^2 R_x^2 C_1 C + (2R_x + R)sC + 1} \qquad (3)$$

dla

$$k = \frac{2R_o}{R} + 1 = \frac{4R_x}{R} + 1. \qquad (4)$$

Dobroć bieguna

$$Q = \frac{\omega_o}{2\sigma} = \frac{R_x}{2R_x + R}\sqrt{\frac{C_1}{C}}. \tag{5}$$

Częstotliwość rezonansowa

$$\omega_o = \frac{1}{R_x\sqrt{C_1 C}}. \tag{6}$$

Z relacji (5), (6) wynika, że można w prosty sposób zmieniać niezależnie Q i ω_o, co ma duże znaczenie praktyczne.

Wrażliwość

Korzystamy z następującej definicji wrażliwości

$$S_x^T = \frac{\partial(\ln T)}{\partial(\ln x)} = \frac{\partial T}{\partial x}\cdot\frac{x}{T}, \tag{7}$$

gdzie:
$T = T(x)$ – funkcja układowa,
x –– wartość elementu układu.

W rozważaniach określimy wrażliwość: dobroci Q, częstotliwości ω_o, bieguna $p = -\sigma + j\omega_c$ oraz transmitancji na zmiany wartości elementów układu i porównamy z wrażliwością korektora z bezstratną indukcyjnością.
Dla układu z rys. 4 mamy:

$$\left.\begin{array}{lll}
S_C^Q = -\frac{1}{2}; & S_C^{\omega_o} = -\frac{1}{2}; & S_C^p = \frac{1}{2}\left(-1 + j\frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}}\right. \\[2ex]
S_{C_1}^Q = \frac{1}{2}; & S_{C_1}^{\omega_o} = -\frac{1}{2}; & S_{C_1}^p = \frac{1}{2}\left(1 + j\frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}}\right. \\[2ex]
S_{R_x}^Q = \frac{R}{2R_x + R}; & S_{R_x} = -1; & S_{R_x}^p = -1 - j\frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}}\cdot\frac{R}{2R_x + R} \\[2ex]
S_R^Q = -\frac{R}{2R_x R}; & S_R = 0; & S_R^p = j\frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}}\cdot\frac{R}{2R_x + R}
\end{array}\right\} \tag{8}$$

$$\sum_{x_i}\left|S^{Q}_{x_i}\right| = 1 + \frac{2R}{2R_x + R};\qquad \sum_{x_i}\left|S^{\omega_o}_{x_i}\right| = 2.$$

Natomiast dla układu z rys. 2

$$\left.\begin{array}{l}
S^{Q}_{C} = -\frac{1}{2};\quad S^{\omega_o}_{C} = -\frac{1}{2};\quad S^{p}_{C} = \frac{1}{2}\left(-1 + j\frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}}\right)\\[2ex]
S^{Q}_{R} = -1;\quad S^{\omega_o}_{R} = 0;\quad S^{p}_{R} = j\frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}}\\[2ex]
S^{Q}_{L} = \frac{1}{2};\quad S^{\omega_o}_{L} = -\frac{1}{2};\quad S^{p}_{L} = \frac{1}{2}\left(1 + j\frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}}\right)\\[2ex]
\sum_{x_i}\left|S^{Q}_{x_i}\right| = 2;\qquad \sum_{x_i}\left|S_{x_i}\right| = 1
\end{array}\right\}\qquad (9)$$

Wrażliwość funkcji przejścia dla $s = j\omega$:

a) układ z rys. 2

$$S_{L}^{K_u(j\omega)} = -j\,\frac{2\omega RC\,\omega^2 LC}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}, \tag{10}$$

$$S_{L}^{K_u(j\omega_o)} = -2jQ, \tag{11}$$

$$S_{C}^{K_u(j\omega)} = -j\,\frac{2\omega RC}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}, \tag{12}$$

$$S_{C}^{K_u(j\omega_o)} = -2jQ, \tag{13}$$

$$S_{R}^{K_u(j\omega)} = -j\,\frac{2\,RC\,(1 - \omega^2 LC)}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}. \tag{14}$$

Funkcja ta przyjmuje wartości ekstremalne dla

$$\omega_1 = \frac{\omega_o}{2Q}\left(1 + \sqrt{1 + 4Q^2}\right);\qquad \omega_2 = \frac{\omega_o}{2Q}\left(-1 + \sqrt{1 + 4Q^2}\right)$$

i wówczas

$$S_R^{K_u(j\omega_{1,2})} = \mp j1. \tag{15}$$

b) układ z rys. 4

$$S_C^{K_u(j\omega)} = -j\,\frac{2\omega Cq}{(1-\omega^2 L_o C)^2 + (\omega Cq)^2},$$

gdzie:

$q = 2R_x + R; \quad L_o = R_x^2 C_1,$

$$S_C^{K_u(j\omega_o)} = -j2Q. \tag{17}$$

$$S_{C_1}^{K_u(j\omega)} = S_{L_o}^{K_u(j\omega)}\, S_{C_1}^{L_o} = -j\,\frac{2\omega q\, C\omega^2 L_o C}{(1-\omega^2 L_o C)^2 + (\omega qC)^2}, \tag{18}$$

$$S_{C_1}^{K_u(j\omega_o)} = -2jQ. \tag{19}$$

$$S_R^{K_u(j\omega)} = S_q^{K_u(j\omega)}\, S_R^q = -j\,\frac{2\omega Cq(1-\omega^2 L_o C)}{(1-\omega^2 L_o C)^2 + (\omega qC)^2} \tag{20}$$

dla pulsacji

$$\omega_1 = \frac{\omega_o}{2Q}\left(1 + \sqrt{1+4Q^2}\right); \quad \omega_2 = \frac{\omega_o}{2Q} - \left(1 + \sqrt{1+4Q^2}\right),$$

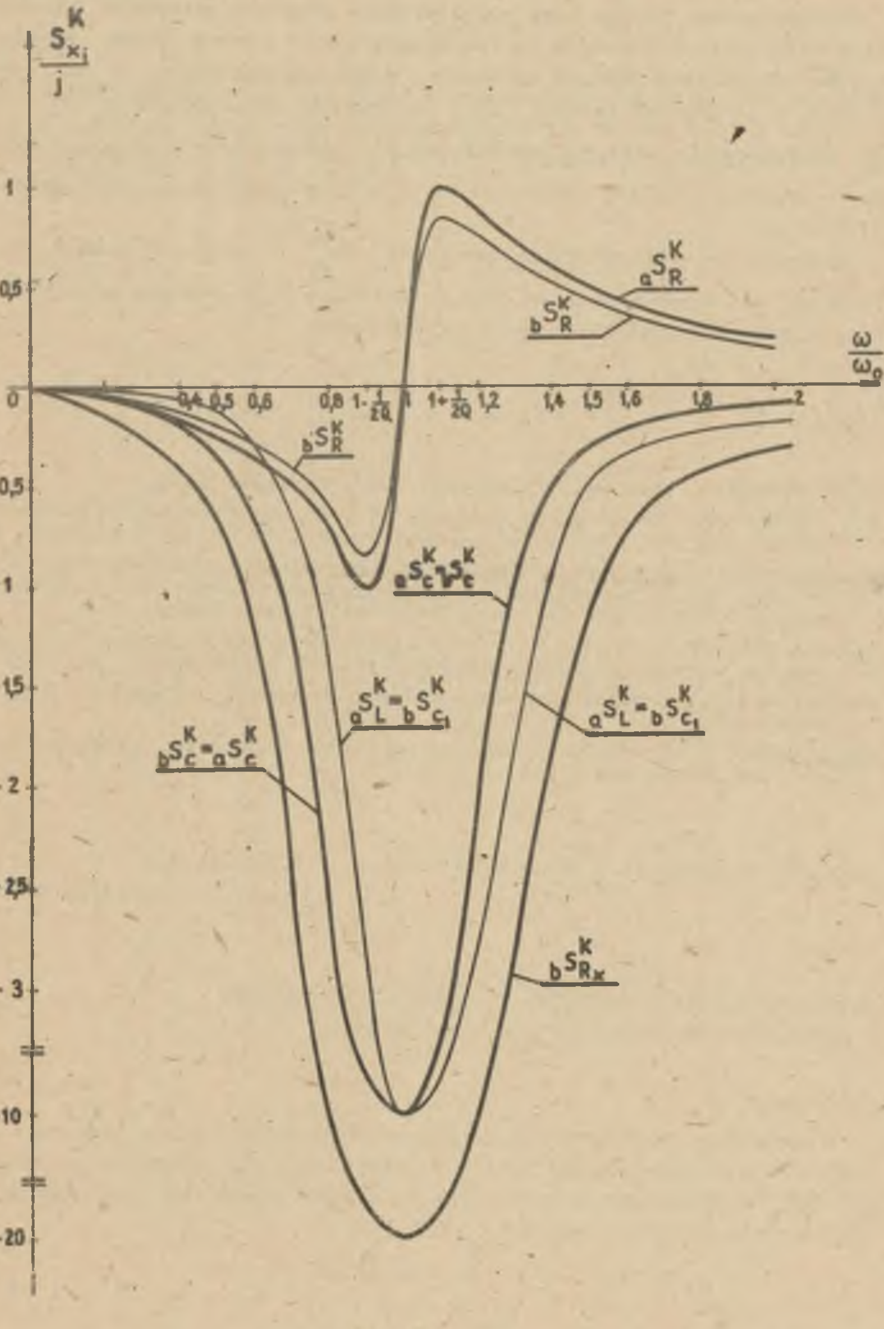
funkcja przyjmuje wartości ekstremalne

$$S_R^{K_u(j\omega_{1,2})} = \mp j\,\frac{R}{q} < \mp 1j. \tag{21}$$

$$S_{R_x}^{K_u(j\omega)} = -j\,\frac{4\omega CR_x\left[1 + \omega^2 R_x C_1 C(R_x + R)\right]}{(1-\omega^2 L_o C)^2 + (\omega Cq)^2}. \tag{22}$$

$$S_{R_x}^{K_u(j\omega_o)} = -j4Q. \tag{23}$$

Wykresy tych wrażliwości przedstawia rys. 5, w obydwu przypadkach dla Q=5 wrażliwości układu z rys. 2 oznaczono symbolem ${}_aS_{x_i}^K$, a wrażliwości układu z rys. 4 oznaczono symbolem ${}_bS_{x_i}^K$.


$\frac{S^K_{x_i}}{j}$
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5
-2
-2,5
-3
-10
-20
$\frac{\omega}{\omega_0}$
0,4 0,5 0,6 0,8 $1-\frac{1}{2Q}$ 1 $1+\frac{1}{2Q}$ 1,2 1,4 1,5 1,6 1,8 2
${}_aS^K_R$
${}_bS^K_R$
${}_bS^K_R$
${}_aS^K_C={}_bS^K_C$
${}_aS^K_L={}_bS^K_{C_1}$
${}_aS^K_L={}_bS^K_{C_1}$
${}_bS^K_C={}_aS^K_C$
${}_bS^K_{R_K}$

Rys. 5

Zakończenie

Przedstawione wyniki mogą być użyteczne przy projektowaniu korektorów fazy bądź filtrów zerowych (środkowozaporowych), które można uzyskać w obydwu przypadkach poprzez odpowiedni dobór współczynnika k relacje((2) i (3)). Z porównania relacji (8) i (9) wynika, że wrażliwości $S_{x_i}^{Q}$, $S_{x_i}^{\omega o}$, $S_{x_i}^{P}$ korektora ze stratną indukcyjnością niewiele różnią się od wrażliwości z użyciem idealnej indukcyjności a więc również od korektorów pasywnych RLC.

Z przebiegu wrażliwości transmitancji $S_{x_i}^{K_u(j\omega)}$ (rys. 5) wynika, że najbardziej wrażliwym elementem jest rezystancja R_x, dlatego należy stawiać duże wymagania co do tolerancji tego elementu.

LITERATURA

[1] BIAŁKO M. i inni: Filtry aktywne. WNT, Warszawa 1979.

[2] BRUTON L.T.: Nonideal performance of two-amplifier positive-impedance converters. IEEE Trans. on Circuit Theory, CT 17, N° 4 November 1970.

[3] CZARNECKI L., LASICZ A.: Wrażliwość aktywnych korektorów fazy II rzędu strukturalnie równoważnych pasywnemu korektorowi RLC. Materiały seminarium KEM - VSSE Pilzno, IPPEiE Pol. Śląska 1978.

[4] GARCZARCZYK Z., PASKO M.: Realizacja korektorów fazowych przy zastosowaniu żyratora. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. Elektryka z. 46, 1975.

[5] MITRA S.K.: Analiza i synteza układów aktywnych liniowych. WNT, Warszawa 1974.

[6] WILSON G.: RC active variable-group-delay equaliser. Electronics Lett vol. 13, N° 14, July 1977.

Wpłynęło do Redakcji w kwietniu 1980 r.

Recenzent:
Doc. dr Stanisław Bolkowski

РЕАЛИЗАЦИЯ АКТИВНОГО КОРРЕКТОРА ФАЗЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНДУКТИВНОСТИ С ПОТЕРЯМИ

Р е з ю м е

В статье произведена реализация корректора фазы второго порядка с использованием операционного усилителя и активной индуктивности с потерями. Произведено сравнение чувствительности данного корректора с чувствительностью пассивного корректора RLC.

THE REALIZATION OF THE ACTIVE SECOND ORDER PHASE CORRECTOR
WITH LOSSY INDUCTANCE

S u m m a r y

The active second order phase-corrector realization utilizing the operational amplifier and simulated lossy inductance is the aim of this paper. The sensitivity of the corrector was discussed and compared with the sensitivity of the RLC corrector.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Zygmunt GARCZARCZYK

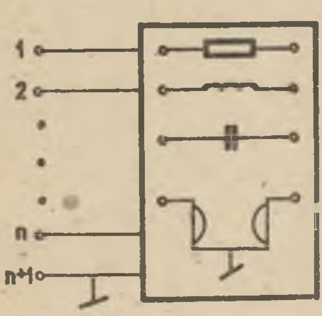
Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

MINIMALIZACJA WRAŻLIWOŚCI I ROZRZUTU WARTOŚCI PARAMETRÓW ELEMENTÓW OBWODU

Streszczenie. W artykule przedstawiono algorytm oparty na koncepcji układów ciągle równoważnych i na programowaniu liniowym, pozwalający minimalizować jednocześnie wskaźnik wrażliwości i wskaźnik rozrzutu parametrów elementów obwodu.

1. Wstęp

Teoria sformułowana przez Cauera [1] i Howitta [2] daje sposób generowania równoważnych obwodów RLC przez transformację macierzy węzłowej. Teorię tę można rozszerzyć na obwody pasywne, nieodwracalne o strukturze podanej na rys. 1 [3].



Rys. 1

Obwód RLC Żyrator o N węzłach niezależnych ma macierz węzłową Y_1, którą można zapisać następująco:

$$Y_1 = pC_1 + G_1 + \frac{1}{p}\Gamma_1 + g_1 \qquad (1)$$

gdzie: p jest częstotliwością zespoloną, C_1, G_1, Γ_1, g_1 są stałymi (NxN) macierzami parametrów elementów – C_1 dla pojemności, G_1 dla konduktancji, Γ_1 dla odwrotności indukcyjności i g_1 dla konduktancji żyracji żyratorów idealnych. Macierze C_1, G_1, Γ_1 są symetryczne, natomiast macierz g_1 jest skośnie symetryczna.

Zgodnie z teorią obwodów równoważnych macierz Y_1 obwodu pierwotnego może być transformowana w inną macierz Y_2 nowego obwodu – równoważnego, który ma tę samą macierz admitancyjną, odniesioną do wrót utworzonych przez węzły 1,2,...,n i węzeł odniesienia n + 1 (n < N).

Transformacja ma postać:

$$Y_2 = A^t\, Y_1\, A, \tag{2}$$

gdzie A jest macierzą kwadratową rzeczywistą, nieosobliwą (NxN) o postaci:

$$A = \begin{bmatrix} U & 0 \\ P & R \end{bmatrix} \tag{3}$$

gdzie

U - macierz jednostkowa (mxm),

0 - macierz zerowa,

P,R - dowolne podmacierze.

Wychodząc z zależności (2) Schoeffler wykazał [4], że rozwiązanie równania różniczkowego

$$\left.\begin{aligned} \frac{dY(x)}{dx} &= B^t\, Y(x) + Y(x)\, B \\ Y(0) &= Y_1 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

także reprezentuje obwód równoważny.
Macierz B (NxN) w równaniu (4) ma postać:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b_1 & b_2 & \dots & b_N \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{\mu-N} & \cdot & \dots & b_\mu \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$|b_i| < 1, \quad i = 1,2,\dots,\mu, \quad \mu = N(N-m)$$

Można wykazać [3], że jeśli

$$\det A > 0, \tag{6}$$

to można znaleźć macierz B taką, że transformacja (2) i rozwiązanie równania (4) reprezentują ten sam zbiór obwodów równoważnych. Jest to warunek konieczny, gdy $m = N-1$ i warunek wystarczający, gdy $m < N-1$.

Z zależności (1) wynika, że równanie (4) słuszne jest dla każdego typu elementu obwodu. Określając wektor $E(x) = [e_1 e_2 \dots e_\gamma]^t$ dla każdego rodzaju elementu obwodu, można uprościć zależności (4). Wektory: $E_G(x)$ dla konduktancji, $E_C(x)$ dla pojemności oraz $E_\Gamma(x)$ dla indukcyjności mają

wymiar $\vartheta = \frac{1}{2} N(N+1)$. Wektor $\hat{E}_g(x)$ dla konduktancji żyracji ma wymiar $\eta = \frac{1}{2} N(N-1)$.
Można wtedy napisać równanie:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dE(x)}{dx} &= ME(x) \\ E(0) &= E_1 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

gdzie E_1 jest odpowiednim wektorem parametrów (G, Γ, C) obwodu pierwotnego. Macierz M jest rzeczywista $(\vartheta \times \vartheta)$, a jej elementy są liniowo zależne od elementów macierzy B, tj.

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^{\mu} \alpha_k b_k. \qquad (8)$$

W przypadku wektora $E_g(x)$ w równaniu (7) występuje inna macierz $K(\eta \times \eta)$ o tej samej własności.
Równanie (7) reprezentuje obwód zwany ciągle równoważnym [4].
Dokładne rozwiązanie równania (7) ma postać

$$E(x) = \exp(Mx)E_1 = \left[U + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (Mx)^k\right] E_1. \qquad (9)$$

W praktyce rozwiązanie uzyskuje się, uwzględniając tylko pewną liczbę wyrazów szeregu (9).

Zaletą tej metody jest także to, że pozwala ona obliczać prosto wrażliwości dowolnej funkcji $H(p)$ (transmitancji, immitancji) generowanego obwodu.

Dla rozważanych obwodów spełnione jest bowiem równanie:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dQ(x)}{dx} &= -M^t\, Q(x) \\ Q(0) &= Q_1 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

gdzie $Q(x) = [q_1, q_2 \dots q_\vartheta]^t$ oznacza wektor wrażliwości półwzględnych funkcji H względem parametrów elementów określonego typu

$$q_i = \frac{1}{H} \cdot \frac{\partial H}{\partial e_i}. \qquad (11)$$

Q_1 jest odpowiednim wektorem wrażliwości obwodu pierwotnego.

Rozwiązanie równania (7) pozwala poprzez odpowiedni dobór macierzy M, na kształtowanie własności obwodów równoważnych według przyjętych kryteriów jakości. Kryteriami tymi mogą być: minimalna wrażliwość funkcji H obwodu na zmiany wielu parametrów oraz minimalny rozrzut wartości parametrów elementów.

2. Wskaźniki jakości

Jako wskaźnik wieloparametrowej wrażliwości funkcji obwodu H(p), przy określonej częstotliwości, przyjmuje się wielkość

$$\phi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\vartheta} k_i |S_i|^2, \tag{12}$$

gdzie k_i oznacza współczynnik wagowy, natomiast

$$S_i = \frac{e_i}{H}\cdot\frac{\partial H}{\partial e_i} = e_i q_i \tag{13}$$

względną wrażliwość funkcji H na zmiany parametru e_i. Tak określony wskaźnik stanowi miarę rozrzutu modułu względnych zmian funkcji H, powodowanych przypadkowymi zmianami wartości nominalnych parametrów elementu obwodu [5], a w przypadku obwodów rezystancyjnych określa także poziom szumów cieplnych [6].

Chcąc minimalizować różnice między wartościami parametrów elementów pewnej grupy elementów obwodu, przyjmujemy jako wskaźnik wielkość

$$\Theta = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\vartheta} (e_i - e_o)^2, \tag{14}$$

gdzie e_o oznacza średnią arytmetyczną wartości parametrów wybranej grupy elementów lub zadaną wartość, wokół której winny się one skupiać.

Z poprzednich uwag wynika, że odpowiedni wybór zmiennej x i współrzędnych wektora

$$b = [b_1 b_2 \ldots b_\vartheta] \tag{15}$$

winien zapewnić, że rozwiązanie równania (7) reprezentuje obwód fizycznie realizowalny o minimalnych wskaźnikach ϕ i Θ. Uwzględniając jedynie część liniową rozwinięcia w szereg Taylora w punkcie x = 0 dla parametrów elementów $e_i(x,b)$ oraz wskaźników $\Phi(x,b)$ i $\Theta(x,b)$ obwodu równoważnego, otrzymamy [3]:

$$
\begin{aligned}
e_i(x,b) &= e_i(0) + \dot{e}_i(b)x, \\
\Phi(x,b) &= \Phi(0) + \dot{\Phi}(b)x, \\
\Theta(x,b) &= \Theta(0) + \dot{\Theta}(b)x,
\end{aligned}
\qquad (16)
$$

gdzie $e_i(0)$, $\Phi(0)$, $\Theta(0)$ odnoszą się do obwodu pierwotnego, natomiast $(\cdot)$ oznacza pochodną względem x. Z równania (7) wynika, że

$$
\dot{e}_i(b) = \sum_{j=1}^{\nu} m_{ij} e_i(0) = \sum_{j=1}^{\mu} f_{ij}(E_1) b_j, \qquad (17)
$$

$i = 1,2,\ldots,\nu(\eta)$,
gdzie $f_{ij}(E_1)$ - kombinacje liniowe parametrów elementów obwodu pierwotnego.
Zauważmy również, iż

$$
\dot{\Theta}(b) = \sum_{j=1}^{\nu} \left[e_j(0) - e_o\right]\left[\dot{e}_j(b) - \dot{e}_o\right] = \sum_{j=1}^{\mu} \vartheta_j(E_1) b_j, \qquad (18)
$$

gdzie $\vartheta_j(E_1)$ - funkcje parametrów elementów obwodu pierwotnego. Na podstawie równań (7) i (10) można wykazać [4], że:

$$
\dot{\Phi}(b) = \sum_{j=1}^{\nu} (e_j \dot{e}_j |q_j|^2 + e_j^2(\dot{q}_j q_j^* + q_j \dot{q}_j^*) = \sum_{j=1}^{\mu} \varphi_j(E_1, Q_1) b_j, \qquad (19)
$$

gdzie $\varphi_j(E_1, Q_1)$ - funkcje parametrów elementów i wrażliwości półwzględnych obwodu pierwotnego.
Jak widać, pochodne rozważanych wskaźników i parametrów wszystkich elementów obwodu są formami liniowymi współrzędnych wektora b. Na przykład, dla czwórnika (m=3, N=3) pokazanego na rys. 2, otrzymujemy:

a) $$\Theta(b) = \vartheta_1 b_1 + \vartheta_2 b_2 + \vartheta_3 b_3,$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
\vartheta_1(E_1) &= (e_3-e_5)(e_1+e_3+e_5-e_o) + e_6(e_3+e_4-e_2-e_5), \\
\vartheta_2(E_1) &= (e_3-e_6)(e_2+e_3+e_6-e_o) + e_5(e_3+e_4-e_1-e_6),
\end{aligned}
$$

$$\vartheta_3(E_1) = (e_3-e_o)(2e_3+e_5+e_6) + e_5(e_5-e_1) + e_6(e_6-e_2),$$

$$e_i = G_i \quad \text{lub} \quad e_i = C_i \quad \text{lub} \quad e_i = \Gamma_i$$

lub dla żyratorów

$$\vartheta_1(E_1) = -(g_1-g_o)g_3,$$

$$\vartheta_2(E_1) = (g_1-g_o)g_2,$$

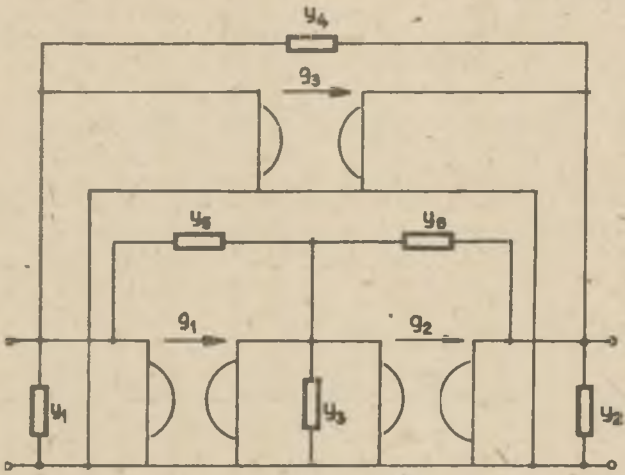
$$\vartheta_3(E_1) = (g_2-g_o)g_2 + (g_3-g_o)g_3.$$

b) $$\dot{\Phi}(b) = \varphi_1 b_1 + \varphi_2 b_2 + \varphi_3 b_3,$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\varphi_1(E_1,Q_1) = {} & e_1|q_1|^2(e_3-e_5) - e_2|q_2|^2 e_6 + e_3|q_3|^2(e_3+e_5+e_6) + \\ & + e_3^2(\mathrm{Re}\{q_5-q_1-q_3\}\mathrm{Re}\{q_3\} + \mathrm{Im}\{q_5-q_1-q_3\}\,\mathrm{Im}\{q_3\}) + \\ & + e_4|q_4|^2 e_6 - e_5|q_5|^2(e_3+e_5+e_6) + e_5^2(\mathrm{Re}\{q_1+q_5-q_3\}\mathrm{Re}\{q_5\} + \\ & + \mathrm{Im}\{q_1+q_5-q_3\}\mathrm{Im}\{q_5\}) + e_6^2(\mathrm{Re}\{q_2+q_5-q_3-q_4\}\mathrm{Re}\{q_6\} + \\ & + \mathrm{Im}\{q_2+q_5-q_3-q_4\}\,\mathrm{Im}\{q_6\}) - g_1g_3|q_{g_1}|^2 + \\ & + g_3^2(\mathrm{Re}\{q_{g_1}\}\mathrm{Re}\{q_{g_3}\} + \mathrm{Im}\{q_{g_1}\}\mathrm{Im}\{q_{g_3}\}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(E_1,Q_1) = {} & -e_1|q_1|^2 e_5 + e_2|q_2|^2(e_3-e_6) + e_3|q_3|^2(e_3+e_5+e_6) + \\ & + e_3^2(\mathrm{Re}\{q_6-q_2-q_3\}\mathrm{Re}\{q_3\} + \mathrm{Im}\{q_6-q_2-q_3\}\mathrm{Im}\{q_3\}) + \\ & + e_4|q_4|^2 e_5 + e_5^2(\mathrm{Re}\{q_1+q_6-q_3-q_4\}\mathrm{Re}\{q_5\} + \\ & + \mathrm{Im}\{q_1+q_6-q_3-q_4\}\mathrm{Im}\{q_5\}) - e_6|q_6|^2(e_3+e_5) + \\ & + e_6^2(\mathrm{Re}\{q_2+q_6-q_3\}\mathrm{Re}\{q_6\} + \mathrm{Im}\{q_2+q_6-q_3\}\,\mathrm{Im}\{q_6\}) + \\ & + g_1g_2|q_{g_1}|^2 - g_2^2(\mathrm{Re}\{q_{g_1}\}\mathrm{Re}\{q_{g_2}\} + \mathrm{Im}\{q_{g_1}\}\,\mathrm{Im}\{q_{g_2}\}),\end{aligned}$$



$$y_i = G_i + pC_i + \frac{1}{p}\Gamma_i$$

Rys. 2

$$\begin{aligned}\varphi_3(E_1,Q_1) = & -e_1|q_1|^2 e_5 - e_2|q_2|^2 e_6 + e_3|q_3|^2(e_5+e_6-e_3) + \\ & + e_5^2|q_5|^2 + e_5^2(\mathrm{Re}\{q_1-q_3-q_5\}\,\mathrm{Re}\{q_5\} + \mathrm{Im}\{q_1-q_3-q_5\}\,\mathrm{Im}\{q_5\}) + \\ & + e_6^2|q_6|^2(\mathrm{Re}\{q_2-q_3-q_6\}\,\mathrm{Re}\{q_6\} + \mathrm{Im}\{q_2-q_3-q_6\}\,\mathrm{Im}\{q_6\}) + \\ & + g_2g_3(|q_{g_2}|^2 + |q_{g_3}|^2) - g_2^2|q_{g_2}|^2 - g_3^2|q_{g_3}|^2,\end{aligned}$$

$$e_i \in \{G_i, C_i, \Gamma_i\} \qquad i = 1,2,\dots,6.$$
$$q_i \in \{q_{G_i}, q_{C_i}, q_{\Gamma_i}\}$$

3. Zadanie programowania liniowego

Z zależności (17), (18), (19) wynika, że minimalizację rozważanych wskaźników jakości można sprowadzić do rozwiązania zadania programowania liniowego (ZPL). Jeśli chcemy, aby zachodziło

$$\Phi(x,b) \le \Phi(0) \quad \text{lub} \quad \Theta(x,b) \le \Theta(0), \tag{20}$$

należy rozwiązać następujące ZPL:

a) przy ograniczeniach:

$$|b_j| \leqslant 1 \qquad j=1,2,\dots,\mu \tag{21a}$$

$$\dot{e}_i(b) \geqslant 0 \quad \text{jeśli} \quad e_i(x,b) \geqslant e_i(0) \qquad i=1,2,\dots,p, \tag{21b}$$

$$\dot{e}_i(b) = 0 \quad \text{jeśli} \quad e_i(x,b) = e_i(0) \qquad i=1,2,\dots,r, \tag{21c}$$

$$\dot{e}_i(b) \leqslant 0 \quad \text{jeśli} \quad e_i(x,b) \leqslant e_i(0) \qquad i=1,2,\dots,s, \tag{21d}$$

b) znaleźć niezerowy wektor b_o taki, że:

$$z_1 = \dot{\Phi}(b_o) = \min\{\dot{\Phi}(b) \leqslant 0\} \tag{21e}$$

lub

$$z_2 = \dot{\Theta}(b_o) = \min\{\dot{\Theta}(b) \leqslant 0\}.$$

Łatwo zauważyć, że jeśli chcemy, eby

$$\Phi(x,b) \leqslant \Phi(0) \quad i \quad \Theta(x,b) \leqslant \Theta(o) \tag{22}$$

wystarczy zbiór ograniczeń (21) rozszerzyć o jeden z warunków

$$\dot{\Phi}(b) \leqslant 0 \tag{23a}$$

$$\Theta(b) \leqslant 0 \tag{23b}$$

w zależności od przyjętej funkcji celu ZPL.
Tak sformułowane ZPL pozwala na jednoczesną minimalizację obydwu wskaźników.
Aby zadanie (21) sprowadzić do postaci kanonicznej ZPL [7], konieczne jest wprowadzenie nowych zmiennych:

$$x_i = b_i + 1 \qquad i=1,2,\dots,\mu. \tag{24}$$

Ograniczenia postaci (21b) i (21d) sprowadza się do równości przez odjęcie i dodanie tzw. zmiennych dopełniających x_s. W ograniczeniach $\geqslant$ i $=$ wprowadza się przez dodanie tzw. zmienne sztuczne x_a po to, by w macierzy współczynników f_{ij} wystąpiła macierz jednostkowa. Pozwala to zastosować metodę sympleksów do rozwiązania ZPL. Zadanie (21) przyjmuje wtedy postać [3]:

a) ograniczenia:

$$x_j + x_{sj} = 2 \qquad j=1,2,\dots,\mu \tag{25a}$$

$$\sum_{j=1}^{\mu} f_{ij}x_j - x_{si} + x_{ai} = d_i \qquad i=1,2,\dots,p, \tag{25b}$$

$$\sum_{j=1}^{\mu} f_{ij}x_j + x_{ai} = d_i \qquad i=1,2,\dots,r, \tag{25c}$$

$$\sum_{j=1}^{\mu} f_{ij}x_j + x_{si} = d_i \qquad i=1,2,\dots,s, \tag{25d}$$

gdzie:

$$d_i = \sum_{j=1}^{\mu} f_{ij} \geqslant 0,$$

$$x_j \geqslant 0,$$

b) funkcja celu:

$$z = \sum_{j=1}^{\mu} h_j x_j + \sum_{j=1}^{p} x_{sj} + \sum_{j=1}^{s} x_{sj} + \sum_{j=1}^{p+r} x_{aj}, \tag{25e}$$

gdzie:

$h_j = \vartheta_j$ jeśli minimalizujemy wskaźnik Θ ,

$h_j = \varphi_j$ dla wskaźnika Φ .

Dogodną metodą rozwiązania tak zmodyfikowanego ZPL jest metoda dwufazowa Dantziga-Ordena. Polega ona na zastosowaniu metody sympleksów w dwóch fazach.

Faza I

Minimalizuje się funkcję celu

$$z' = \sum_{j=1}^{p+r} x_{aj}. \tag{26}$$

Jeżeli min $z' > 0$, to zbiór ograniczeń jest sprzeczny, jeśli natomiast min $z' = 0$, to uzyskane rozwiązanie jest początkowym rozwiązaniem bazowym zadania (25).

Faza II

Jeżeli faza I zostanie zakończona pomyślnym rezultatem, tj. min z' = 0, to poszukuje się minimum funkcji celu

$$z' = \sum_{j=1}^{\mu} h_j x_j + \sum_{j=1}^{p} x_{sj} + \sum_{j=1}^{s} x_{aj}. \tag{27}$$

Jeżeli liczba ograniczeń typu = jest równa

$$r < \mu - 1 = N(N-n) - 1, \tag{28}$$

to zbiór ograniczeń ZPŁ nie jest sprzeczny i istnieje możliwość uzyskania jako rozwiązania niezerowego wektora b_0. Uzyskany w wyniku rozwiązania ZPL obwód równoważny stanowi obwód pierwotny dla drugiego kroku następującej procedury:

a) obliczyć wybrany wskaźnik w(0) obwodu pierwotnego,
b) rozwiązać ZPL,
c) w oparciu o równanie (7) znaleźć obwód równoważny,
d) obliczyć wskaźnik w(x,b) obwodu równoważnego,
e) jeśli uzyskany spadek wartości wskaźnika jest większy od żądanej dokładności poszukiwań powraca się do punktu a), jeśli nie, poszukiwanie obwodu równoważnego zostaje zakończone.

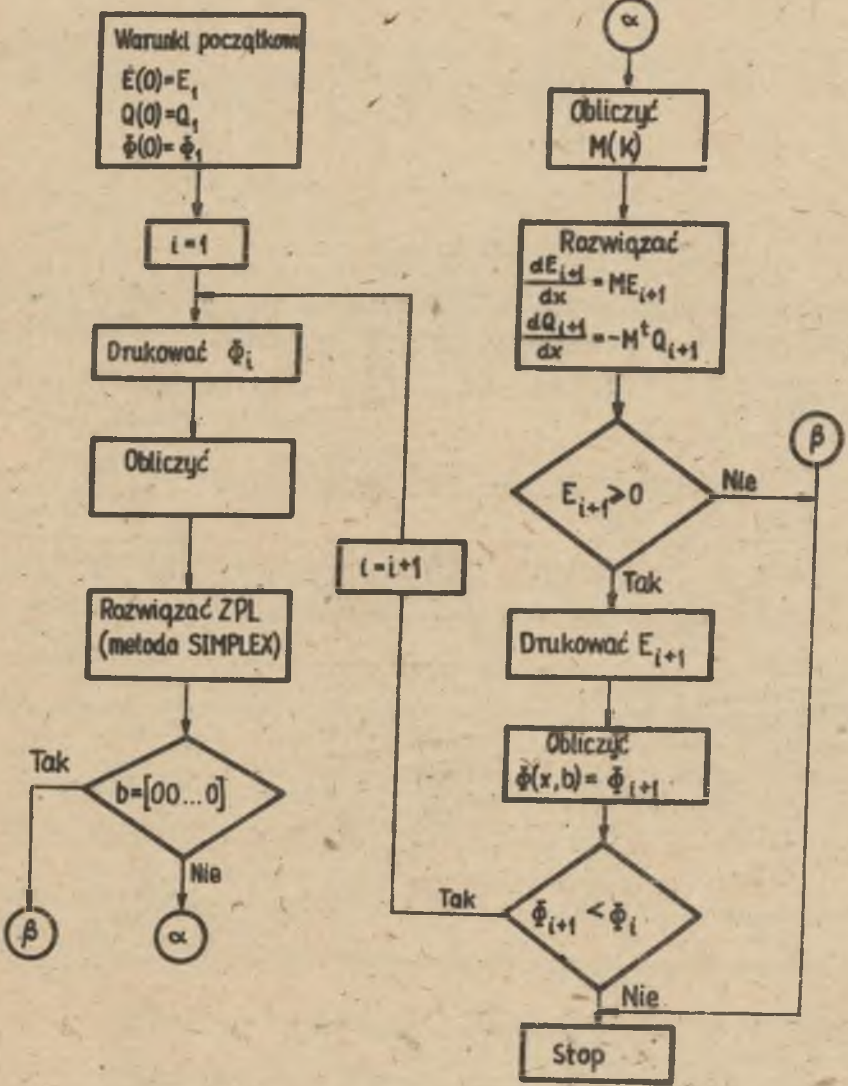
Na rys. 3 przedstawiono uproszczony schemat blokowy maszynowej realizacji tego algorytmu napisanej w języku FORTRAN dla maszyny cyfrowej ODRA 1305 w celu minimalizacji wskaźnika Φ. Zależnie od liczby węzłów obwodu i ograniczeń dotyczących obwodu równoważnego występują różne bloki: formułowania ZPL i obliczania macierzy M(K). Blok rozwiązywania ZPL oparto na metodzie M (Big M Method) [8], w której funkcja celu ma postać

$$z' = \sum_{j=1}^{\mu} h_j x_j + M \sum_{j=1}^{p+r} x_{aj}, \tag{29}$$

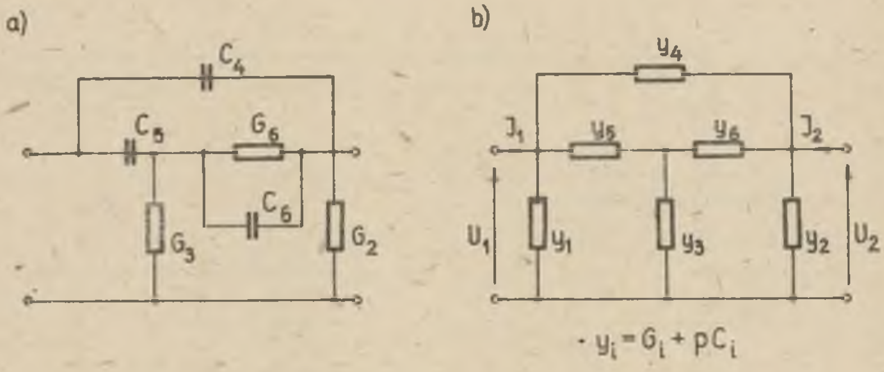
gdzie M jest liczbą rzeczywistą dostatecznie dużą, by zapewnić, że wartości zmiennych x_{aj} są równe zero w punkcie optymalnym. Metoda ta stanowiąca kombinację faz I i II metody dwufazowej zapewnia w wielu przypadkach krótszy czas rozwiązywania ZPL aniżeli metoda dwufazowa [9].

4. Przykład

Należy znaleźć czwórnik (rys. 4b) o transmitancji U_2/U_1, gdy $I_2 = 0$, równej transmitancji danego czwórnika RC (rys. 4a), tak aby wartości kon-


Warunki początkowe
Ė(0)=E1
Q(0)=Q1
Φ(0)=Φ1
i=1
Drukować Φi
Obliczyć
Rozwiązać ZPL
(metoda SIMPLEX)
Tak
b=[00...0]
Nie
β
α
i=i+1
α
Obliczyć
M(K)
Rozwiązać
dEi+1/dx = MEi+1
dQi+1/dx = -M^t Qi+1
Ei+1>0
Nie
β
Tak
Drukować Ei+1
Obliczyć
Φ(x,b)= Φi+1
Tak
Φi+1 < Φi
Nie
Stop

Rys. 3



Rys. 4

duktancji oporników układu równoważnego były równe lub zbliżone. Czwórnik równoważny nie powinien zawierać dodatkowych pojemności, a pojemność kondensatora C_6 należy zmniejszyć.

- obwód pierwotny

G_2 = 2,0 S C_4 = 1,0 F

G_3 = 3,0 S C_5 = 2,0 F

G_6 = 5,0 S C_6 = 5,0 F

$$H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{p^2 + 1{,}06\,p}{p^2 + 2{,}76p + 1{,}82}$$

$$\Theta(0) = \sum_{i=1}^{6} (G_i - G_o) = 4{,}666; \qquad G_o = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} G_i, \quad G_i \neq 0$$

- warunki sformułowane dla obwodu równoważnego prowadzą do następującego zadania (21)

$$|b_j| \leqslant 1 \rightarrow \begin{aligned} x_1 + x_{s_1} &= 2 \\ x_2 + x_{s_2} &= 2 \\ x_3 + x_{s_3} &= 2 \end{aligned}$$

$$\dot{C}_1 = \dot{C}_2 = \dot{C}_3 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_{s1} = 3$$

$$\dot{C}_6 \leqslant 0 \rightarrow (C_5+C_6)x_2 - C_6x_3 - x_{s_4} + x_{s_2} = C_5$$

$$\dot{G}_4 > 0 \rightarrow G_6x_1 + G_5x_2 - x_{s_5} + x_{s_3} = G_5 + G_6$$

$$\dot{G}_5 \geqslant 0 \quad (G_3+G_5+G_6)x_1 - G_5x_2 + x_{s6} = G_3 + G_6$$

$$z = \vartheta_1 x_1 + \vartheta_2 x_2 + \vartheta_3 x_3 + \sum_{i=1}^{6} x_{a_i} + \sum_{i=1}^{3} x_{s_i},$$

gdzie:

$$\vartheta_1 = \vartheta_1(E_1); \quad \vartheta_2 = \vartheta_2(E_1); \quad \vartheta_3 = \vartheta_3(E_1)$$

- w wyniku zastosowania przedstawionej procedury minimalizacji, otrzymano dowód równoważny o tej samej strukturze co pierwotny. W tabeli zestawiono wartości parametrów elementów oraz wskaźnik.

Liczba iteracji	C_4	C_5	C_6	G_2	G_3	G_6	Θ_{min}
18	1,329	1,670	3,213	2,494	2,505	3,075	0,221
29	1,503	1,496	2,422	2,755	2,244	2,234	0,177

Obliczenia trwały ok. 3 min (przy poziomie śledzenia programu wynikowego określonym instrukcją TRACE 2).

LITERATURA

[1] CAUER W.: Vierpole, Elek. Nachr. Tech., July 1929.

[2] HOWITT N.: Group theory and the electric circuit, Phys. Rev., vol.37, 1931.

[3] GARCZARCZYK Z.: Optymalizacja statyczna wybranych parametrów równoważnych m-wrotników RLCŻ. Praca doktorska, Politechnika Śląska, 1978.

[4] SCHOEFFLER J.D.: The synthesis of minimum sensitivity networks, IEEE Trans. on Circuit Theory, June 1964.

[5] GARCZARCZYK Z.: Minimalizacja zmian modułu funkcji obwodu. VIII Sympozjum Metody Matematyczne w Elektrotechnice. Pokrzywna, 1979.

[6] HOLT A.G., LEE M.R.: A relationship between sensitivity and noise, Int. J. Electronics, no 6, 1969.

[7] GASS S.I.: Programowanie liniowe, PWN, Warszawa 1976.

[8] KUO S.S.: Computer applications of numerical methods, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1972.

[9] GARVIN W.W.: Introduction to linear programming, Mc. Graw-Hill, New York 1960.

Wpłynęło do Redakcji w maju 1980 r.

Recenzent:
Doc. dr Stanisław Bolkowski

МИНИМИЗАЦИЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ И РАЗБРОСА ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕМЕНТОВ ЦЕПЕЙ

Р е з ю м е

В статье представлен алгоритм, исходя из концепции непрерывной эквивалентной схемы и линейного программирования, позволяющий одновременно минимизирует коэффициент чувствительности и разброса значений параметров элементов цепи.

MINIMIZATION OF SENSITIVITY AND CIRCUIT ELEMENTS SPREADING

S u m m a r y

An algorithm based on the theory of continuously equivalent circuits and linear programming is presented in this paper. The algorithm allows for simultanous minimization of sensitivity and circuit elements spreading indices.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Ewa SOWA

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

ESTYMACJA MOCY W UKŁADACH O PRZEBIEGACH ODKSZTAŁCONYCH

Streszczenie. Przedstawiono strukturę algorytmu obliczeniowego opartego na metodzie szybkiej transformacji Fouriera (FFT) do estymacji mocy w układach o przebiegach odkształconych. Algorytm ten pozwala na określenie różnych mocy w węźle układu poprzez estymację funkcji korelacji wzajemnej przebiegów napięcia i prądu oraz gęstości widmowej wzajemnej tych przebiegów. Pokazano związki do określenia mocy odkształceń i powiązano je z estymowanymi funkcjami korelacji własnej i wzajemnej przebiegów.

1. Wprowadzenie

Rozważane są przebiegi napięcia $u(t)$ i prądu $i(t)$, występujące w węźle układu elektroenergetycznego, bądź też na zaciskach dowolnego dwójnika jako przebiegi o skończonej mocy. Przebiegi te obserwowane są w skończonym przedziale czasowym (tzn. przedział ten jest czasem obserwacji danego przebiegu), mogą również reprezentować stacjonarny, ergodyczny proces losowy. Odkształcenia przebiegów szacowane są w stosunku do sinusoidalnych przebiegów odniesienia. Niech przebiegi te zadane są w postaci skończonego ciągu wartości, tzn.

$$\left\{u_n\right\} \quad \text{dla} \quad n = 0,1,2,\ldots,N-1$$

oraz (1)

$$\left\{i_n\right\} \quad \text{dla} \quad n = 0,1,2,\ldots,N-1$$

gdzie N - liczba próbek w czasie obserwacji T w równych odstępach czasu Δt $(T = N\Delta t)$.
(Odległość próbek określa częstotliwość Nyquista).
Niech również: $N = 2^p$ oraz wartość średnia przebiegów $u(t)$ i $i(t)$ jest równa zeru (jeśli to nie zachodzi, to dla analizy można od przebiegów rzeczywistych odjąć wartości średnie). Tak przygotowane dane o węźle układu mogą posłużyć do estymacji różnego rodzaju mocy, poprzez określenie funkcji korelacyjnych przebiegów prądu i napięcia w węźle, funkcji widmowych gęstości mocy i pozwalają na wykorzystanie maszyny cyfrowej do ich obliczeń.

2. Szybkie przekształcenie Fouriera (FFT)

Przekształcenie Fouriera sygnału dyskretnego jest nazywane dyskretnym przekształceniem Fouriera. I tak, dla dowolnej częstotliwości f dyskretna jego postać dana jest zależnością:

$$X(f,T) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi fn\Delta t}, \tag{2}$$

gdzie:

x_n - wartości, jakie przybiera przebieg (napięcia lub prądu) w chwilach czasu $n\Delta t$,

$n = 0,1,2,\ldots,N-1$.

Zazwyczaj dla wyznaczenia transformaty $X(f,T)$ wybiera się dyskretne wartości częstotliwości f:

$$f_k = kf = \frac{k}{N\Delta t}, \qquad k = 0,1,2,\ldots,N-1.$$

Rzędne transformaty:

$$X_k = \frac{X(f_k,T)}{\Delta t} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}, \tag{3}$$

$k = 0,1,\ldots,N-1$.

Należy zauważyć, że dla $k = 0,1,\ldots,\frac{1}{2}N-1$ pojawiają się wyniki jednoznaczne, gdyż już dla $k = \frac{1}{2}N$ występuje graniczna częstotliwość Nyquista $(f_g = \frac{1}{2\Delta t})$.

Odwrotne przekształcenie dyskretne dane jest wzorem:

$$x_n = \Delta f \sum_{k=0}^{N-1} X(f_k,T)\, e^{j\frac{2\pi nk}{N}}, \tag{4}$$

$n = 0,1,\ldots,N-1$.

Zależności (2) i (4) definiują parę transformat Fouriera dla funkcji dyskretnych w skończonym przedziale czasowym.

n,k - wskaźniki próbkowania odpowiednio w dziedzinie czasu i częstotliwości.

Realizację dyskretnego przekształcenia Fouriera na maszynie cyfrowej, algorytm jego obliczenia daje metoda FFT - szybkiej transformacji Fouriera. Metoda ta polega na tym, że wyjściowa funkcja dyskretna zostaje przekształcona na ciąg współczynników Fouriera w pewnej liczbie kroków, w każdym kroku oblicza się ciąg transformat pośrednich stanowiących dane do kroku następnego. Gdy $N = 2^p$ transformaty pośrednie są obliczone dla dwóch elementów. Różne wersje algorytmu FFR można znaleźć w pracach [1], [2]. Analizowaną zależnością jest:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W^{nk}, \tag{5}$$

$k = 0,1,\dots, N-1$, $W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$.

Jedną z wersji jest tzw. algorytm Cooleya-Tukeya ([1], [2]), który może być podstawą do napisania programu.
Równanie (5) można zapisać

$$X(k_{p-1},k_{p-2},k_{p-3},\dots,k_o) = \sum_{n_o=0}^{1}\sum_{n_1=0}^{1}\cdots$$
$$\cdots\left[\sum_{n_{p-1}=0}^{1} x(n_{p-1},\dots,n_o)\, W^{k_o n_{p-1} 2^{p-1}}\right] W^{k(n_{p-2}2^{p-2}+\dots+n_o)}, \tag{6}$$

k_m, n_m - przybierają wartości 0 lub 1 i są współczynnikami rozwinięcia wskaźników k i n w szeregi binarne (dokładne wyprowadzenie równania (6) - patrz wymienione poz. lit.). Zapisując wyrażenie w nawiasie kwadratowym jako

$$\sum_{n_{p-1}=0}^{1} x(n_{p-1},\dots,n_o)\, W^{k_o n_{p-1} 2^{p-1}} = A_1(k_o,n_{p-2},\dots,n_o), \tag{7}$$

w następnym etapie takiej procedury rekurencyjnej uzyskuje się:

$$A_2(k_o,k_1,n_{p-3},\dots,n_o) = \sum_{n_{p-2}=0}^{1} A_1(k_o,n_{p-2},\dots,n_o)\ \cdot$$
$$\cdot\ W^{(k_1 2+k_o)n_{p-2}2^{p-2}}. \tag{8}$$

Ogólnie l-ty etap ma postać:

$$A_l(k_o,k_1,\dots,k_{l-1}, n_{p-l-1},\dots,n_o) =$$

$$= \sum_{n_{p-l}=0}^{1} A_{l-1}(k_o,k_1,\ldots,k_{l-2},n_{p-l},\ldots,n_o) \cdot \tag{9}$$

$$\cdot W^{(k_{l-1}2^{l-1} + \ldots + k_o)n_{p-l}2^{p-l}}$$

$l = 1,2,3,\ldots,p.$

Ostatecznie otrzymamy

$$X_k = X(k_{p-1},k_{p-2},\ldots,k_o) = A_p(k_o,\ldots,k_{p-2},k_{p-1}). \tag{10}$$

Podstawowe algorytmy FFT są opracowane ogólnie dla danych będących ciągami liczb zespolonych.

3. Algorytm obliczeniowy do oszacowania mocy w węźle układu

Rozważmy interkorelację przebiegów napięcia i prądu danych postacią(1) i spełniających założenia podane we wprowadzeniu. Ze względu na związki funkcji interkorelacji $\vartheta(\tau)$ z mocami (poz. [4]) można estymować moce w węźle wyznaczając funkcję $\vartheta(\tau)$. Estymacja ta polega w pierwszym rzędzie na obliczeniu estymatorów gęstości widmowej wzajemnej, a następnie na obliczeniu transformaty Fouriera odwrotnej otrzymanych estymatorów.

Algorytm będzie zawierał następujące etapy:

1. Wyrazy ciągu $\{u_n'\}$ potraktujemy jako część rzeczywistą, a wyrazy ciągu $\{i_n'\}$ jako część urojoną przebiegu zespolonego danego ciągiem $\{z_n'\}$:

$$z_n' = u_n' + ji_n' \tag{11}$$

dla $n = 0,1,\ldots,N-1$.

2. Zwiększenie części rzeczywistej i urojonej o N zer, tworząc ciąg $\{z_n\}$ składający się z 2N członów, tzn.

$$z_n = u_n + ji_n, \quad n = 0,1,\ldots,2N-1. \tag{12}$$

Krok ten pozwala na rozsunięcie 2 części "cyklicznej" funkcji korelacji wzajemnej ϑ^c:

$$\vartheta^c(r\Delta t) = \frac{N-r}{N}\left[\vartheta(r\Delta t) + \vartheta^*((N-1-r)\Delta t)\right], \tag{13}$$

gdzie

$$\vartheta(r\Delta t) = \frac{1}{N-r}\sum_{n=1}^{N-r} u_n i_{n+r}$$

jest korleacją wzajemną przebiegów $u(t)$ i $i(t)$, $r = 0,1,\ldots,m$ (liczba opóźnień jednostkowych)

a
$$\vartheta^*(r\Delta t) = \frac{1}{N-r}\sum_{n=1}^{N-r} i_n u_{n+r}.$$

3. Wyznaczenie 2N-punktowej transformaty Fouriera dającej ciąg $\{Z_k\}$ dla $k = 0,1,\ldots,2N-1$, przy zastosowaniu procedury (9) dla równania:

$$Z_k = \sum_{n=0}^{2N-1} \left[u_n + j i_n\right] W^{kn}, \tag{14}$$

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{2N}}.$$

4. Obliczenie ciągów transformat napięcie $\{U_k\}$ i prądu $\{I_k\}$ dla $k=0,1,\ldots,2N-1$, przy zastosowaniu zależności ([3])

$$U_k = \frac{Z_k + Z^*_{2N-k}}{2}$$
$$I_k = \frac{Z_k - Z^*_{2N-k}}{2j} \tag{15}$$

$$k = 0,1,\ldots,2N-1$$

Z^*_k – oznacza funkcję zespoloną sprzężoną z funkcją Z_k (u_n, i_n są o wartościach rzeczywistych).

5. Przeprowadzenie wygładzenia ciągów $\{U_k\}$ oraz $\{I_k\}$. Krok ten związany jest z zagadnieniem tzw. przecieku widma, wynikającego ze skończonego czasu trwania obserwacji przebiegów $u(t)$ i $i(t)$. Zmniejszenia efektu przecieku można dokonać w dziedzinie czasu lub wykonując odpowiednie operacje w dziedzinie częstotliwości (operacja splatania). Jednym z okien wygładzających ciągi $\{U_k\}$ i $\{I_k\}$ jest tzw. okno GEO (Goodmana-Enochsona-Otnesa). Równanie opisujące operację wygładzania ma tu postać ([1]):

$$\tilde{U}_k = \bar{U}_k + \sum_{l=1}^{3} a_l (U_{k-1} + U_{k+1}), \tag{16}$$

$k = 0,1,\dots,2N-1$,
a_l - współczynniki rzeczywiste (znane).
Analogicznie dla ciągu $\{I_k\}$.

6. Uzyskanie zgrubnych estymatorów wzajemnej gęstości widmowej $\tilde{\theta}_k$ dla $k = 0,1,\dots,2N-1$

$$\tilde{\theta}_k = \frac{2\Delta t}{N} \left| \tilde{U}_k^* \tilde{I}_k \right| \tag{17}$$

$\tilde{\theta}_k$ - zgrubny estymator widmowej gęstości wzajemnej przebiegów $u(t)$ i $i(t)$,
$\{\tilde{U}_k\}$, $\{\tilde{I}_k\}$ - ciągi transformat wygładzonych,
U_k^* - wielkości sprzęzone z $\tilde{U}_k$.

Z uwagi na zastosowanie okna GEO przeprowadza się skalowanie:

$$0.856\, \tilde{\theta}_k \longrightarrow \tilde{\theta}_k \quad \text{dla} \quad k = 0,1,\dots,2N-1.$$

7. Otrzymanie wygładzonych estymatorów wzajemnej gęstości widmowej przebiegów

$$\theta_k = \frac{1}{l} \sum_{j=0}^{l-1} \tilde{\theta}(k+j)' \tag{18}$$

(poprzez uśrednianie l kolejnych estymatorów).

8. Obliczenie odwrotnej transformaty Fouriera metodą FFT

$$\vartheta_r = \frac{N}{N-r} F^{-1}[\theta_k], \tag{19}$$

dla $r=0,1,\dots,2N-1$.
Uwzględniając wynik tylko dla $r = 0,1,\dots,N-1$ uzyskamy korelację wzajemną przebiegów napięcia i prądu postaci:

$$\vartheta_r = \vartheta(r\Delta t) \qquad r = 0,1,\dots,N-1. \tag{20}$$

Ponieważ zachodzi (4):

$$\vartheta(0) = S = P + jQ. \tag{21}$$

na podstawie estymacji korelacji wzajemnej można określić moc symboliczną, czynną i bierną pobieraną przez obciążenie w węźle układu. Można również wykorzystać zależność

$$P + jQ = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \Theta(\omega)d\omega \tag{22}$$

([4]), gdyż w powyższej procedurze obliczony jest ciąg $\left\{\Theta_k\right\}$. Znalezienie ciągu $\left\{\vartheta_r\right\}$ ma istotne znaczenie, gdyż sprawność wykorzystania energii i moc nie jest zależna oddzielnie od napięcia $u(t)$ i prądu $i(t)$ lecz od korelacji napięciowo-prądowej przebiegów.

Stosując podobną procedurę obliczeń dla każdego z przebiegów z osobna, można oszacować wartości skuteczne napięcia $|U|$ i prądu $|I|$, wykorzystując zależności:

$$|U| = \sqrt{\varphi(0)} \quad \text{oraz} \quad |I| = \sqrt{\vartheta(0)}, \tag{23}$$

gdzie:

$\varphi(0)$, $\vartheta(0)$ - funkcje autokorelacji przebiegów napięcia i prądu dla przesunięcia $r = 0$ ([4]).

Wówczas moc modułowa:

$P_m = |U||I|$ i współczynnik

$$\cos\varphi = \frac{P}{|U||I|} = \frac{Re\left\{\vartheta(0)\right\}}{\sqrt{\varphi(0)\vartheta(0)}} \tag{24}$$

da się łatwo określić.

Potrafimy również wtedy oszacować moc dystorsji D, korzystając z relacji

$$(|U||I|)^2 = P^2 + D^2. \tag{25}$$

Zależności (24) i (25) wskazują, jak istotny wpływ na odkształcenie przebiegów napięcia i prądu od przebiegów sinusoidalnych ma wielkość mocy dystorsji D.

LITERATURA

[1] OTNES R.K., ENOCHSON L.: Analiza numeryczna szeregów czasowych. WNT, Warszawa 1978

[2] BEAUCHAMP K.G.: Przetwarzanie sygnałów metodami analogowymi i cyfrowymi. WNT, Warszawa 1978.

[3] BENDAT J.S., PIERSOL A.G.: Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych. PWN, Warszawa 1976.

[4] NOWOMIEJSKI Z., SOWA E.: Teoria mocy układów elektrycznych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Elektryka 49, 1977.

Wpłynęło do Redakcji w maju 1980

Recenzent:
Prof. dr hab. Zygmunt Nowomiejski

ОЦЕНКА МОЩНОСТИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СХЕМАХ
С НЕСИНУСОИДАЛЬНЫМИ ПРОБЕГАМИ

Р е з ю м е

Представлена структура расчетного алгоритма, основанного на методе быстрой трансформации Фурье (FFT) для оценки мощности в схемах с несинусоидальными пробегами. Этот алгоритм позволяет определить разные мощности на зажимах схемы путем оценки функции взаимной корреляции пробегов напряжения и тока, а также взаимной спектральной плотности этих пробегов. Показаны связи для определения мощности дисторсии и соединены они с оцениваемыми функциями собственной и взаимной корреляции пробегов.

THE POWER ESTIMATION IN ELECTRIC CIRCUITS CHARACTERISTIC
OF NON-SINUSOIDAL FUNCTION SOURSES

S u m m a r y

In the paper the structure of the algorithm for power estimation in electric circuits characteristics of non-simuseidal function courses is presented. The procedure is based on the fast Fourier transformation (FFT) and allows for defining different ranges of power on the terminals of the circuit. The power magnitude is calculated thanks to the estimation of the correlation functions and spectral concentration functions. The relations defining the power deformation were presented and they were attached to the estimated functions and to the inter-correlation of functions courses.

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Zbigniew ŚMIGIEL

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki

CHARAKTERYSTYKI STATYCZNE ŁAŃCUCHOWEGO KONWERTORA PARAMETRYCZNEGO

Streszczenie. Przedstawiono model matematyczny łańcuchowego konwertora parametrycznego, pozwalający przeanalizować wpływ parametrów elektrycznych i geometrycznych konwertora na jego własności eksploatacyjne. Wyprowadzono charakterystyki statyczne magnetycznego konwertora łańcuchowego, pracującego jako ortogonalny transformator parametryczny.

1. Wprowadzenie

Konwertor magnetyczny, można traktować jako zintegrowany zasilacz, czyli urządzenie przekazujące energię ze źródła do odbiornika poprzez przekształcanie parametrów wejściowych z jednoczesnym działaniem wielofunkcyjnym.

W porównaniu z zasilaczami tradycyjmymi, konwertory magnetyczne zbudowane z elementów magnetycznych o specyficznej konfiguracji rdzeni (tzw. wielofunkcyjnych), posiadają dobre wskaźniki elektryczne, składają się z mniejszej liczby elementów, są tańsze w produkcji i eksploatacji [2].

Do wielofunkcyjnych elementów magnetycznych zalicza się [2, 3]:

a) transformator parametryczny (parametron i paraformer),
b) transformator ferrorezonansowy sterowany strumieniem (kontrofluksor),
c) transformator ferrorezonansowy (fluksotran).

Praca dotyczy wstępnej analizy konwertorów magnetycznych budowanych na bazie ortogonalnych transformatorów parametrycznych.

W nieliniowych obwodach magnetycznych mogę powstawać drgania parametryczne przy wymuszaniu w części oscylacyjnej obwodu zmiany reaktancji L lub C. Zmianę indukcyjności można uzyskać wykorzystując interakcję między polami magnetycznymi dwóch nieruchomych obwodów z rdzeniami ferromagnetycznymi. Urządzenie takie, zwane transformatorem parametrycznym, pracuje przy równoległych strumieniach magnetycznych, przecinających się a w szczególności nawet prostopadłych. Opierając się na przeprowadzonych eksperymentach i opisach literaturowych [2, 6, 7, 8] można wykazać, że z wielu konstrukcji transformatorów parametrycznych o prostopadłych strumieniach, najlepsze charakterystyki posiadają konwertory budowane na rdzeniach podanych na rys. 1 i rys. 7.

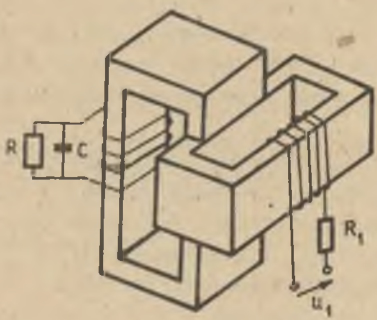
Ortogonalny konwertor magnetyczny (łańcuchowy lub typu paraformer) zapewnia jednocześnie:

a) transformację napięcia,
b) galwaniczne rozłączenie wejścia i wyjścia,
c) stabilizację napięcia wyjściowego,
d) zabezpieczenie przeciążeniowe obciążenia,
e) selektywną filtrację napięcia,
f) przesunięcie fazowe napięcia wyjściowego o 90^{o} względem napięcia wejściowego,
g) zabezpieczenie pod- i nadnapięciowe.

Może być również statycznym powielaczem lub dzielnikiem częstotliwości [1]

2. Charakterystyki statyczne ortogonalnego transformatora parametrycznego

Przedmiotem rozważań jest analiza obwodu ferrorezonansowego przedstawionego na rys. 1 i 2. W analizie przyjęto następujące założenia upraszczające:



Rys. 1. Konwertor łańcuchowy

a) nie uwzględnienie pętli histerezy,
b) aproksymację normalnej krzywej magnesowania rdzenia wielomianem trzeciego stopnia zgodnie z relacją (6),
c) przyjęcie izotropowości rdzeni,
d) nieuwzględnianie strumienia rozproszenia,
e) nieuwzględnianie strat na prądy wirowe.

Biorąc pod uwagę oznaczenia stosowane na rys. 2, można dla rozważanego obwodu napisać następujące równania:

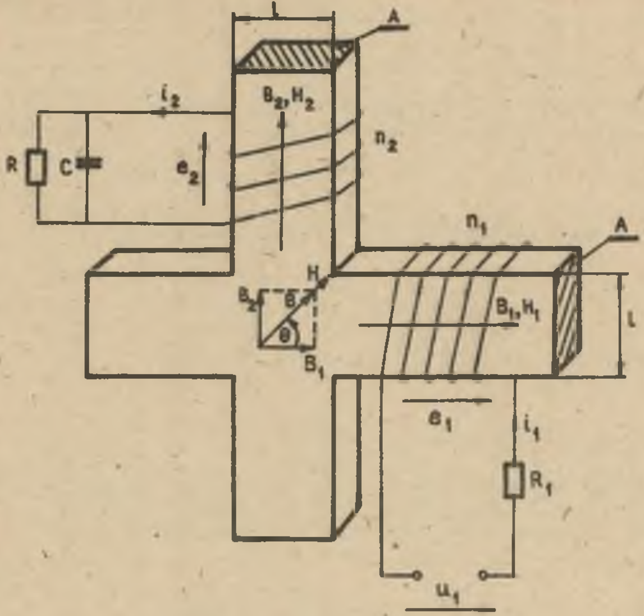
$$u_1 = R_1 i_1 + A n_1 \frac{dB_1}{dt}, \qquad (1)$$

$$e_2 = -A n_2 \frac{dB_2}{dt}, \qquad (2)$$

$$i_2 = C \frac{de_2}{dt} + \frac{e_2}{R}, \qquad (3)$$

$$H_1 l_1 + H l \cos\Theta = n_1 i_1, \qquad (4)$$

$$H_2 l_2 + H l \sin\Theta = n_2 i_2.$$



Rys. 2. Schemat ideowy konwertora z rys. 1

gdzie B_1 i B_2 są odpowiednio wartościami chwilowymi indukcji w rdzeniach, a n_1 i n_2 oznaczają liczby zwojów cewek nawiniętych na rdzenie. Rdzenie o długościach średnich dróg magnetycznych odpowiednio l_1 i l_2 posiadają te same pola przekroju A i szerokości l. Charakterystyki nieliniowe rdzeni z materiału izotropowego założono w postaci zależności

$$H = a_1B + a_3B^3 = f(B), \tag{6}$$

gdzie a_1 i a_3 są stałymi zależnymi od materiału rdzenia. Uwzględniono relacje

$$\sin\Theta = \frac{B_2}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}}, \tag{7}$$

i

$$\cos\Theta = \frac{B_1}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}}, \tag{8}$$

pominięto rezystancję R_1 w równaniu (1), wprowadzono zmienne bezwymiarowe określone następująco:

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= I_n v_1 \\ i_2 &= I_n v_2 \\ B_1 &= B_n b_1 \\ B_2 &= B_n b_2 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

gdzie wielkości podstawowe I_n i B_n łączy zależność

$$B_n n_2 A \omega^2 C = I_n \tag{10}$$

Założono ponadto

$$\omega t = \tau \tag{11}$$

i przyjęto fazę początkową indukcji strony pierwotnej równą zero, więc przesunięcia fazowe pozostałych wielkości są przedstawione w stosunku do fazy b_1.

$$B_1(t) = B_{1m} \sin\omega t = B_n b_1, \tag{12}$$

gdzie

$$b_1 = \frac{B_{1m}}{B_n} \sin\tau = \beta_1 \sin\tau.$$

Po normalizacji i przekształceniach otrzymano

$$\frac{d^2 b_2}{d\tau^2} + \delta \frac{db_2}{d\tau} + (\alpha + \bar{\beta} b_1{}^2) b_2 + \gamma b_2^3 = 0, \tag{13}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{RC\omega}, \\ \alpha &= \frac{a_1(l + l_2)}{CAn_2^2 \omega^2}, \\ \bar{\beta} &= \frac{a_3 \, l B_n^2}{CAn_2^2 \omega^2}, \\ \gamma &= \frac{a_3 (l + l_2) B_n^2}{CAn_2^2 \omega^2}. \end{aligned} \tag{14}$$

Badania eksperymentalne ortogonalnego transformatora parametrycznego wykazują, że indukcja pola magnetycznego b_2 jest przebiegiem harmonicznym (z dokładnością 5-10%) a więc w przybliżeniu rozwiązanie równania (13) można przedstawić w postaci

$$B_2(\tau) = B_{2m}(\tau)\cos\left[\tau + \varphi(\tau)\right]$$

lub

$$b_2 = \frac{B_{2m}}{B_n}\cos(\tau+\varphi) = \beta_2\cos\psi. \qquad (15)$$

Równanie (13) jest nieliniowym równaniem różniczkowym drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach, określającym indukcję wtórnej strony transformatora parametrycznego. Strona wtórna jest układem oscylacyjnym o dużej dobroci, a wartości współczynnika δ (a tym samym udział członu $\delta\frac{db_2}{d\tau}$) są bardzo małe. Można więc do uzyskania rozwiązania RRN (13) posłużyć się metodą wolnozmiennej amplitudy i fazy.

W obliczeniach pomija się człony $\delta\beta_2$, ponieważ δ jest małe, a $\dot{\beta}_2 = \frac{d\beta_2}{d\tau}$ bliskie zeru (amplituda jest wolnozmienna) i otrzymuje się układ równań dla ustalania się amplitudy β_2 i fazy φ

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\beta_2}{d\tau} &= \frac{-\delta\beta_2}{2} - \frac{\beta_2\beta^2}{8}\sin 2\varphi, \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{1-\alpha}{2} - \frac{3\gamma\beta_2^2}{8} - \frac{3\beta^2\sin^2\varphi}{8} - \frac{\beta^2\cos^2\varphi}{8}, \end{aligned}\right. \qquad (16)$$

gdzie

$$\beta^2 = \bar{\beta}\beta_1^2. \qquad (17)$$

Przy rozpatrywaniu stanu ustalonego pracy ortogonalnego transformatora parametrycznego są narzucone następujące warunki

oraz

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\beta_2}{d\tau} &= 0 \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= 0 \end{aligned}\right]. \qquad (18)$$

Eliminując z równań określających stan ustalony pracy fazę φ otrzymuje się wyrażenie pozwalające wyznaczyć charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe

$$\beta_2^2 = \frac{4(1-\alpha) - 2\beta^2 \pm \sqrt{\beta^4 - 16\delta^2}}{3\gamma} \tag{19}$$

Eliminując z równań (18) amplitudę β_2 wyznacza się charakterystyki fazowe

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{1 - \alpha - \frac{3}{4}\gamma\beta_2^2 - \frac{\beta^2}{2}}{\delta} \tag{20}$$

Można przedstawić relację (19) za pomocą wielkości podstawowych występujących w układzie na rys. 2 i otrzymuje się zależność wiążącą parametry geometryczne i elektryczna konwertera z indukcją B_{2m}

$$B_{2m}^2 = \frac{4CAn_2^2\omega^2 - 4a_1(l+l_2) - 2a_3lB_{1m}^2 \pm \sqrt{(a_3lB_{1m}^2)^2 - \left(\frac{4An_2^2}{R}\right)^2}}{3a_3(l+l_2)}$$

Można wykazać [1, 4], że zależność

$$\frac{d\beta_2^2}{d\beta^2} = \infty \tag{22}$$

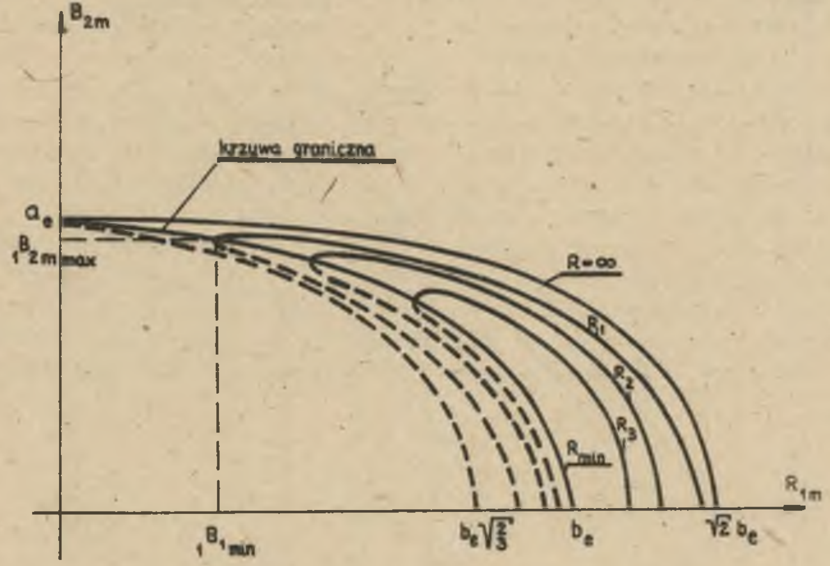
daje równanie krzywej $B_{2m} = f(B_{1m})$ na granicy stabilności. Wyprowadzając w oparciu o relacje (22) i (19) równanie krzywej granicznej, otrzymuje się

$$\beta_2^2 = \frac{4(1-\alpha) - 2\beta^2}{3\gamma}. \tag{23}$$

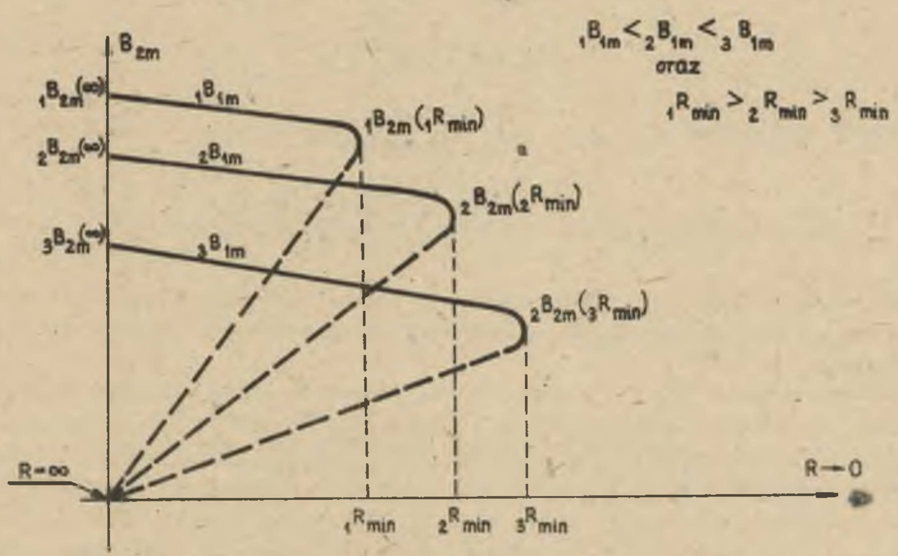
Jest to równanie elipsy (rys. 3) o osiach a_e i b_e, których stosunek określa możliwości stabilizujące konwertora. Transformator parametryczny działa w przedziale obciążeń, dla których straty dysypacyjne strony oscylacyjnej są mniejsze od energii dostarczonej z obwodu pierwotnego. Straty dysypacyjne reprezentuje rezystancja obciążenia R. Przedział obciążeń $R \in (\infty, R_{min}\rangle$, dla których istnieją stabilne drgania oscylacyjne strony wtórnej, określa

$$R_{min} \geqslant \frac{4\omega An_2^2}{a_3lB_{1m}^2}. \tag{24}$$

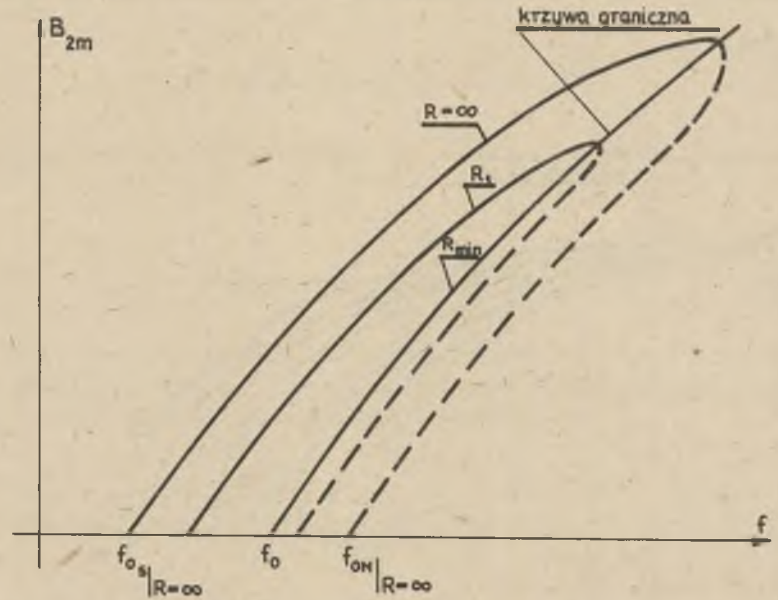
Wychodząc z relacji (19) i (20) wyznaczono statyczne charakterystyki amplitudowe (rys. 3) zewnętrzne (rys. 4) częstotliwościowe (rys. 5) i fazowe, określając dla tych charakterystyk krzywe graniczne oraz obliczono wielkości związane z punktami charakterystycznymi tych krzywych [1]. Można wyznaczyć między innymi wartość indukcji pola magnetycznego $B_{1m\,min}$,



Rys. 3. Charakterystyki amplitudowe
$B_{2m} = f(B_{1m})$ przy $f = const$



Rys. 4. Charakterystyki zewnętrzne $B_{2m} = f(R)$ przy $f = const$



Rys. 5. Charakterystyki częstotliwościowe $B_{2m} = f(f)$ przy B_{1m} = const

dla której B_{2m} osiąga wartość maksymalną i poniżej której następuje zerwanie oscylacji przy danej rezystancji R

$$B^2_{1m,min} = \frac{8An_2^2\omega}{\sqrt{3}la_3\ R}. \tag{25}$$

Wartość maksymalna $B_{2m,max}$ przy $B_{1m,min}$ wynosi

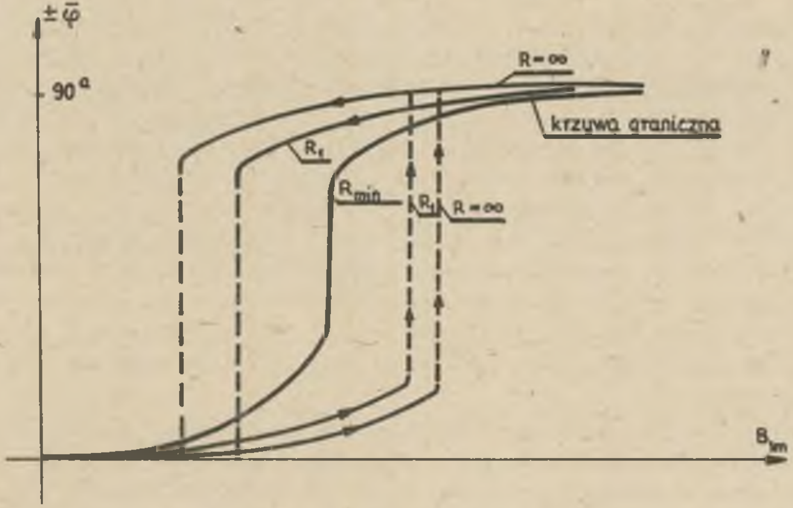
$$B^2_{2m,max} = 4 \cdot \frac{\frac{An_2^2}{R}\left[RC - \sqrt{3}\right] - a_1(l_2+l)}{3\ a_3(l_2 + l)} \ . \tag{26}$$

Dla pewnej wartości R spełniającej nierówność (24) można określić w oparciu o relację (21) wartość pojemności C niezbędnej dla powstania oscylacji

$$C > \frac{\frac{la_3B^2_{1m}}{2} + a_1(l_2+l) - \sqrt{\left(\frac{la_3B^2_{1m}}{4}\right)^2 - \left(\frac{An_2^2\omega}{R}\right)^2}}{An_2^2\ \omega^2} \tag{27}$$

Analiza relacji (21) pozwala na wykreślenie charakterystyk zewnętrznych (rys. 4) dla różnych wartości B_{1m} i określenie wartości granicznych tych charakterystyk, tzn. $B_{2m}(\infty)$ oraz $_iB_{2m}$ $(_iR_{min})$. Charakter krzywych z rys. 4 pozwala na jakościowe określenie własności stabilizacyjnych konwertora dla różnych wartości ${}_iB_{1m}$, a szerokość strefy działania konwertora reprezentuje rezystancja ${}_iR_{min}$, zależna również (zgodnie z relacją (24)) od ${}_iB_{1m}$. Jednocześnie z rys. 4 widać, że oprócz własności stabilizacyjnych konwertor posiada samoistne zabezpieczenie przeciążeniowe. Ogólną postać statycznych charakterystyk częstotliwościowych dla różnych wartości rezystancji obciążenia R przedstawia rys. 5. Krzywa graniczna jest hiperbolą [1], a wartość f_o reprezentuje minimalną częstotliwość, dla której po stronie wtórnej konwertora powstaną oscylacje przy maksymalnym obciążeniu R_{min}, f_{os} i f_{oN} określają częstotliwości odpowiednio dla stabilnych i niestabilnych oscylacji. Dokładniejsze omówienie wszystkich charakterystyk można znaleźć w pracy [1]. Kąt przesunięcia fazowego $\bar{\varphi}$ pomiędzy indukcjami ortogonalnych pól magnetycznych B_2 i B_1 wynosi

$$\bar{\varphi} = \pm(90^o + \varphi). \tag{28}$$

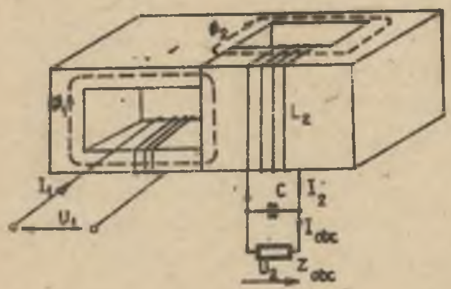


Rys. 6. Charakterystyki fazowe $\bar{\varphi} = f(B_{1m})$ przy f = const

Analiza charakterystyki fazowej (rys. 6) pokazuje, że do momentu wzbudzenia przesunięcie fazowe $\bar{\varphi}$ pozostaje bliskie zeru a po wzbudzeniu i przy dalszym wzroście B_{1m} bliskie $\pm 90^o$. Do momentu zerowania oscylacji (obniżenie B_{1m} lub wzrost obciążenia) kąt $\bar{\varphi}$ pozostaje bliski $\pm 90^o$. Ta własność konwertora parametrycznego pozwala na wykorzystanie go przy zasilaniu jednofazowym w schemacie Scotta jako źródła trójfazowego [1].

3. Uwagi końcowe

Wyprowadzony model matematyczno-fizyczny konwertora łańcuchowego może aproksymować konwertor typu paraformer (rys. 7), dając jakościową zbieżność charakterystyk i własności obu konwertorów. Różnice ilościowe przytoczono i omówiono w pracy [1] zamieszczając badania laboratoryjne paraformera i porównując krzywe doświadczalne z teoretycznymi wynikającymi z przyjętego modelu. Różnice ilościowe wynikają z przyjętych założeń upraszczających oraz stosowanych metod analizy obwodów nieliniowych. Ponadto w konwertorze typu paraformer obserwuje się mieszany mechanizm przepływu energii (za pomocą parametrycznego i częściowo transformatorowego sprzężenia), ponieważ oprócz prostopadłego istnieje pewien udział wzdłużnego sprzężenia strumieni. Możliwość aplikacji modelu konwertora łańcuchowego do analizy pracy paraformera jest istotna, ponieważ znacznie częściej korzysta się z konstrukcji konwertora typu paraformer, który w porównaniu z innymi ortogonalnymi transformatorami parametrycznymi posiada lepsze własności eksploatacyjne, tzn. większą sprawność, wyższy współczynnik mocy, łatwiejszy start itp.

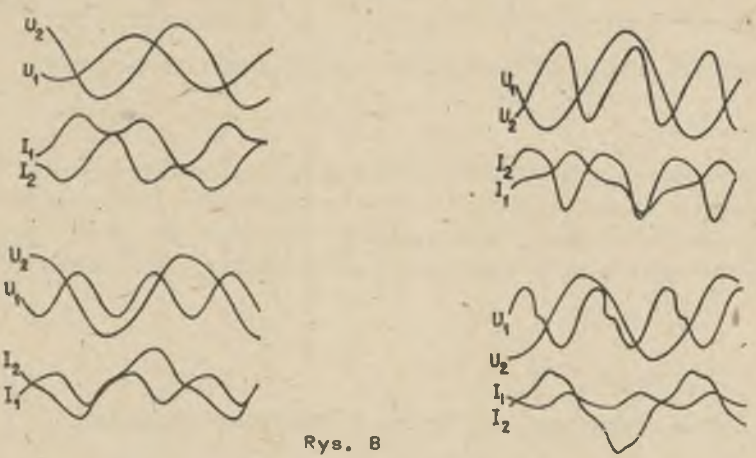


Rys. 7. Transformator parametryczny typu paraformer

W konwertorze łańcuchowym dla zainicjowania oscylacji w obwodzie wtórnym wymagane są duże wartości indukcji magnetycznej po stronie pierwotnej. Dla pewnych parametrów konwertora wzbudzenie się drgań oscylacyjnych poprzez zwiększanie napięcia zasilającego staje się niemożliwe. W konwertorze takim należy wstępnie dostarczyć energię do obwodu wtórnego potrzebną do rozruchu.

Zależności, które implikuje analiza przyjętego modelu matematycznego konwertora, określają między innymi; maksymalne obciążenie, minimalną wartość pojemności w obwodzie oscylacyjnym, krzywe graniczne obszaru stabilności itp. Mogą one służyć jako wielkości progowe, określające przedziały parametrów geometrycznych i elektrycznych przy syntezie konwertorów łańcuchowych, czysto ortogonalnych czy typu paraformer.

W pracy [4] podano prosty sposób określania stabilności drgań oscylacyjnych w obwodzie wtórnym konwertora łańcuchowego. Na charakterystykach statycznych (rys. 3, 4, 5) liniami przerywanymi oznaczono drgania niestabilne, ciągłymi - stabilne. Poprzez wprowadzenie stałego przepływu podmagnesowującego po stronie pierwotnej konwertora uzyskuje się w obwodzie wtórnym oscylacje podharmoniczne rzędu 1/2 (rys. 8c, d). Wprowadzenie przepływu podmagnesowującego po stronie wtórnej konwertora powoduje uzyskiwanie w tym obwodzie oscylacji o podwójnej częstotliwości (rys. 8b).



Rys. 8

a - transformator parametryczny, b - powielacz częstotliwości, c - dzielnik częstotliwości, d - dzielnik częstotliwości z prostownikiem

Dzięki własności selektywnej filtracji napięcia ortogonalne konwertory parametryczne, pracujące jako dzielniki lub powielacze częstotliwości, mogą zamiast tradycyjnego podmagnesowania (ze źródła napięcia lub prądu stałego) działać przy podmagnesowaniu realizowanym za pomocą odpowiednio włączonego elementu prostowniczego. Rys. 8d przedstawia oscylogramy dzielnika częstotliwości zrealizowanego poprzez szeregowe włączenie diody w obwodzie pierwotnym transformatora parametrycznego. Analizę pracy powielaczy i dzielników częstotliwości na bazie ortogonalnych konwertorów parametrycznych przedstawiono w pracy [1].

LITERATURA

[1] ŚMIGIEL Z.: Analiza magnetycznego konwertora parametrycznego. Praca doktorska. Politechnika Śląska 1979.

[2] ŚMIGIEL Z.: Magnetyczne konwertory parametryczne. Zeszyty Naukowe Pol. Śląskiej, Elektryka z. 68, 1980.

[3] ZADIERIEJ G.P.: Mnogofunkcjonalnyje magnitnyje radiokomponienty w sowriemiennych ustrojstwach pitania radioeliektronnoj aparatury. Zarubieżnaja radioelektronika No 7, 1978.

[4] POWER H.N.: Analysis of a Passive Power Converter. IEEE Trans on Magn. No 5 sept/oct 1975 p. 556-559.

[5] HAYASHI Ch.: Drgania nieliniowe w układach fizycznych. WNT, 1968.

[6] FAM W.Z., BAHL G.K.: Two related types of parametric transformers. IEEE Trans. on Mag. 1974 Mag-10 Nr 3 p. 690-693.

[7] BURIAN K.: Theory and analysis of a parametrically excited passive power converter. IEEE Trans. Ind. Apl. vol. IA-8 1978, p. 278-282.

[8] ŚMIGIEL Z.: Własności transformatora parametrycznego o prostopadłym sprzężeniu strumieni. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., Elektryka z. 64, 1979.

Wpłynęło do Redkacji w maju 1980 r.

Recenzent:
doc. dr Karol Lubelski

СТАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КОНВЕРТОРА

Р е з ю м е

Представлена математическая модель цепного параметрического конвертера, позволяющая проанализировать влияние электрических и геометрических параметров конвертера на его эксплуатационные свойства. Выведены характеристики магнетического цепного конвертера, работающего в режиме паратранса.

THE STATIC CHARACTERISTICS OF CHAIN PARAMETRIC CONVERTER

S u m m a r y

A mathematical model of a chain parametric converter has been presented.

The model is useful in analysing the influence of the electrical and geometrical parameters of the converter.

The static characteristic of magnetic chain convertor working as the orthogonal parametric transformer were derivated.

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Maciej SIWCZYŃSKI
Lesław TOPÓR-KAMIŃSKI

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

MODELOWANIE AKTYWNYCH OBWODÓW PARAMETRYCZNYCH

Streszczenie. Przedstawiono sposób modelowania liniowych dwójników parametrycznych poprzez rozkład na szeregowo-równoległe połączenie dwójników prostszych, opisanych operatorami różniczkowymi jednomianowymi wyższych rzędów, podano własności tak otrzymanych sieci zastępczych oraz przedstawiono przykład możliwej realizacji układu rzędu drugiego.

1. Wstęp

Dowolny liniowy dwójnik parametryczny można opisać równaniem:

$$\hat{i}u = \hat{u}i, \tag{1}$$

gdzie u, i oznaczają przebiegi napięcia i prądu, a $\hat{i}$, $\hat{u}$ są liniowymi operatorami różniczkowymi o następującej postaci:

$$\hat{i}x = \sum_{n=0}^{N_{\hat{i}}} f_n x^{(n)}, \tag{2}$$

$$\hat{u}x = \sum_{n=0}^{N_{\hat{u}}} g_n x^{(n)}, \tag{3}$$

przy czym współczynniki f_n i g_n (bądź tylko niektóre z nich) są funkcjami czasu.

Każdy dwójnik jest więc scharakteryzowany parą operatorów $\{\hat{u}: \hat{i}\}$. W zbiorze operatorów można określić działania dodawania i mnożenia. Sumą operatorów $\hat{u}_1$ i $\hat{u}_2$ nazywa się operator $\hat{u}_1 + \hat{u}_2$ taki

$$\hat{i}(\hat{u}_1 + \hat{u}_2)i = \hat{u}_1 i + \hat{u}_2 i.$$

Iloczynem operatorów $\hat{u}_1$ i $\hat{u}_2$ nazywa się operator $\hat{u}_1\hat{u}_2$ taki, że

$$\bigwedge_{i} \hat{u}_1\hat{u}_2 i = \hat{u}_1(\hat{u}_2 i).$$

Z powyższych określeń wynikają następujące własności zbioru operatorów:

Własność 1

Zbiór operatorów tworzy grupę abelową (przemienną) ze względu na działanie dodawania oraz półgrupę ze względu na działanie mnożenia, zatem zbiór operatorów tworzy pierścień.

Własność 2

Dodawanie operatorów wiąże się z łączeniem dwójników. Dwójnik $\{\hat{u}_1 + \hat{u}_2;\ \hat{i}\}$ jest równoważny szeregowemu połączeniu dwójników $\{\hat{u}_1;\ \hat{i}\}\{\hat{u}_2;\ \hat{i}\}$ a dwójnik $\{\hat{u};\ \hat{i}_1 + \hat{i}_2\}$ jest równoważny równoległemu połączeniu dwójników $\{\hat{u};\ \hat{i}_1\}$, $\{\hat{u};\ \hat{i}_2\}$.

W przypadku gdy przynajmniej jeden z operatorów $\hat{u}$, $\hat{i}$ posiada operator odwrotny, wówczas istnieje operator impedancji

$$\hat{z} = \hat{i}^{-1}\,\hat{u}$$

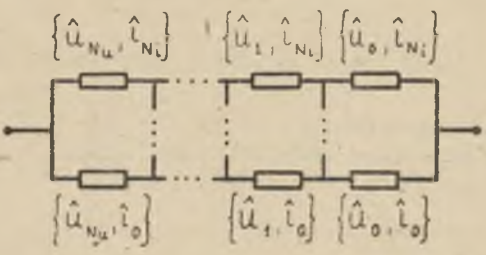
bądź też admitancji

$$\hat{y} = \hat{u}^{-1}\,\hat{i}.$$

Należy podkreślić, że operatory dwójników parametrycznych na ogół nie komutują ze sobą. Metoda modelowania przedstawiona w tej pracy nie wymaga stosowania operatorów immitancji.

2. Modelowanie metodą rozkładu operatorów

Z własności 2 wynika metoda modelowania dwójnika poprzez rozkład na szeregowo-równoległe połączenie dwójników prostszych. Rozkład taki przeprowadza się w celu otrzymania sieci (zwanej dalej podstawową) w kształcie kratownicy (rys. 1), zawierającej $N_i \times N_u$ dwójników elementarnych.



Rys. 1

Elementarnym nazywamy dwójnik opisany operatorami jednomianowymi to znaczy

$$f_n u^{(n)} = g_m i^{(m)}.$$

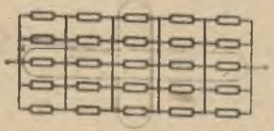
Każde przekształcenie sieci podstawowej, nie zmieniające pary $\{\hat{u}, \hat{i}\}$ operatorów dwójnika, nazywamy dopuszczalnym. Z własności 1 i 2 wynikają następujące przekształcenia dopuszczalne:

a) zmiana miejscami dwóch dowolnych wierszy sieci podstawowej,
b) zmiana miejscami dwóch dowolnych kolumn sieci podstawowej,
c) usunięcie dowolnego wewnętrznego połączenia między dwoma wierszami sieci podstawowej.

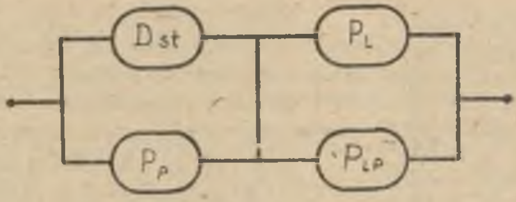
Określony w ten sposób zbiór przekształceń sieci podstawowej pozwala tworzyć sieci pochodne, wygodniejsze do praktycznej realizacji modelowania.

3. Sieci pochodne jako modele dwójników parametrycznych

Często w praktyce tylko niektóre współczynniki operatorów (2) i (3) zależą od czasu. Umożliwia to rozdzielenie dwójnika na części niestacjonarną i stacjonarną. Rozpatrzymy dwójnik opisany równaniem typu (1), w którym tylko dwa współczynniki $f_k(t)$ i $g_l(t)$ są zależne od czasu. Zatem w sieci podstawowej współczynniki zależne od czasu zawierać będą dwójniki w k-tej kolumnie i l-tym wierszu (rys. 2). Stosując powyżej podane przekształcenia dopuszczalne można dokonać podziału sieci podstawowej na cztery dwójniki rys. 3). Jeden spośród nich jest stacjonarny (D_{st}), dwa jednostronnie parametryczne (P_l, P_p) oraz jeden dwustronnie parametryczny (P_{lp}). W dwójniku jednostronnie parametrycznym współczynniki tylko jednego z operatorów $\hat{u}$ lub $\hat{i}$ zależą od czasu. Ostateczne realizacje dwójników jednostronnie i dwustronnie parametrycznych przedstawiono na rysunkach 4 i 5.

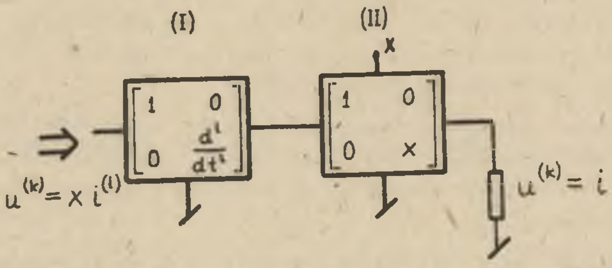


Rys. 2

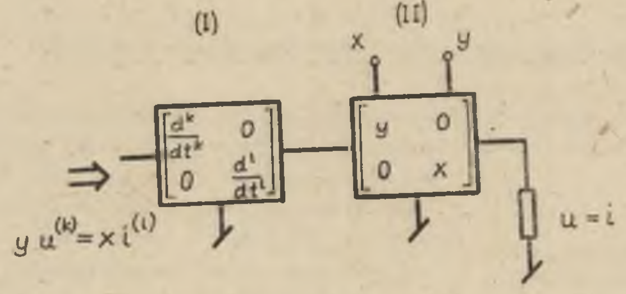


Rys. 3

Blok (I) może być mutatorem [1] lub uogólnionym konwertorem impedancyjnym [2] [3], natomiast blok (II) można zrealizować w postaci konwertora impedancyjnego sterowanego [4] lub inwertora impedancyjnego sterowanego [5].



Rys. 4

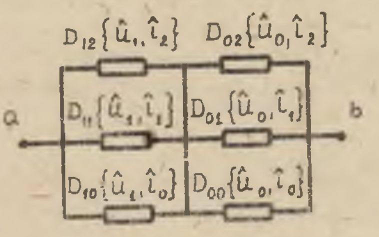


Rys. 5

4. Przykład modelowania

Należy zamodelować dwójnik parametryczny opisany równaniem

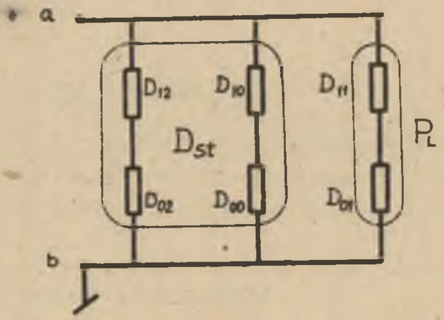
$$f_2 u'' + f_1(t) u' + f_0 u = g_1 i' + g_0 i. \tag{4}$$



Rys. 6

Odpowiadająca mu sieć podstawowa przedstawiona jest na rys. 6. Dwójniki niestacjonarne zawiera tylko wiersz drugi, zatem korzystniejsza jest realizacja modelu dwójnika (4) w postaci sieci pochodnej takiej jak przedstawiona na rys. 7.

Realizacja praktyczna tej sieci z zastosowaniem uogólnionego konwertora impedancyjnego (GIC) i konwertora impedancyjnego sterowanego (KIS), przedstawiona jest na rys. 8, przy czym GIC opisują równania:

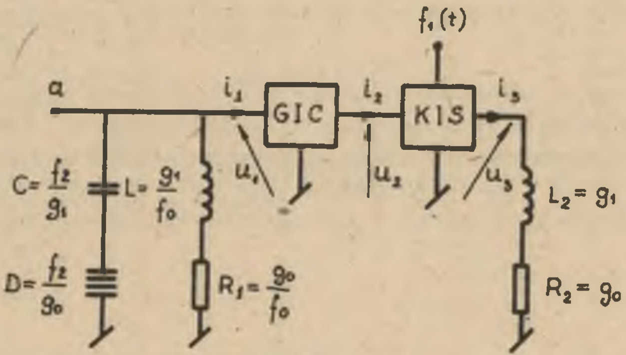


Rys. 7

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{d}{dt} u_2 \\ i_1 &= i_2 \end{aligned}\right\} ,$$

a KIS równania:

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= f_1(t) u_3 \\ i_2 &= i_3 \end{aligned}\right\} .$$



Rys. 8

LITERATURA

[1] CHUA L.O.: Synthesis of New Nonlinear Network Elements. Procc. IEEE. August 1968.

[2] BRUTON L.T.: Non - ideal performance of a class of two- amplifier positive impedance converters. IEEE Trans. Circuit Theory, Nov. 1969.

[3] BRUTON L.T.: Biquadratic Sections using Generalized Impedance Converters. The Radio and Electronic Engineer. November 1971.

[4] TOPÓR-KAMIŃSKI L.: Konwertor impedancyjny sterowany. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 60, Gliwice 1978.

[5] TOPÓR-KAMIŃSKI L.: Inwertor impedancyjny sterowany. Zeszyty Naukowe Pol. Śląskiej, Automatyka (w druku).

[6] BOGUCKI M.: Analiza i synteza pewnej klasy liniowych obwodów zmiennych okresowo. Instytut Podstaw Elektrotechniki i Elektrotechnologii. Politechnika Wrocławska. Komunikat K-141, 1978.

Wpłynęło do Redakcji w maju 1980 r.

Recenzent:
Doc. dr hab. Marian Bogucki

МОДЕЛИРОВАНИЕ АКТИВНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Р е з ю м е

В статье представлен метод моделирования линейных параметрических двухполюсников путем разложения на последовательно-параллельное соединение более простых двухполюсников, описанных простыми дифференциальными операторами высших порядков. Представлены некоторые свойства, полученных таким образом замещающих цепей и пример возможной реализации двухполюсника второго порядка.

MODELING OF ACTIVE TIME-VARYING CIRCUITS

S u m m a r y

The method of modelling of linear time varying two-poles by means of their decomposition into series-parallel connection of simple two-poles described by single differential operators of higher orders was presented The properties of the obtained substitute circuits were given.The example of the possible realization of the second order network was shown.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Maciej SIWCZYŃSKI

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

O STABILNOSCI PEWNYCH SILNIE NIELINIOWYCH DRGAN SAMOWZBUDNYCH

Streszczenie. W artykule zbadano stabilność okresowych i prawie okresowych rozwiązań układu równań:

$$\dot{x} = y^{2n-1} + \mu X(x,y), \quad \text{gdzie} \quad |\mu| \ll 1.$$
$$\dot{y} = -x^{2n-1} + \mu Y(x,y),$$

Użyto do tego celu tzw. uogólnionych funkcji okresowych, których definicja podana jest w tekście. W zakończeniu rozpatrzono przypadek synchronizacji tego typu drgań.

1. Wstęp

Będziemy zajmować się układem równań:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y^{2n-1} + \mu X(x,y), \\ \dot{y} &= -x^{2n-1} + \mu Y(x,y), \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie: n - liczba całkowita dodatnia; $|\mu| \ll 1$; funkcje $X(x,y)$, $Y(x,y)$ są ciągłe po x, y.

Dla $n = 1$ układ (1) opisuje oscylator quasi-harmoniczny. Zajmiemy się tutaj analizą drgań tego układu dla $n \gg 1$. Kładąc $\mu = 0$, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y^{2n-1}, \\ \frac{dy}{dt} &= -x^{2n-1}, \end{aligned} \tag{2}$$

a stąd:

$$x^{2n-1}\,dx + y^{2n-1}\,dy = 0.$$

Całkując powyższe równania otrzymuje się

$$x^{2n} + y^{2n} = 2n\,C \tag{3}$$

Równanie to przedstawia krzywą zamkniętą we współrzędnych x, y. Amplituda drgania zależy od stałej C i dla skończonego n wynosi

$$x_{max} = y_{max} = (2n\,C)^{\frac{1}{2n}}. \tag{4}$$

Łatwo można pokazać, że przy $n \to \infty$, $x_{max} \to 1$, $y_{max} \to 1$ przy dowolnym, skończonym C. Na podstawie równań (2) i związku (3) można określić okres drgania

$$\Theta = \oint_F y^{1-2n}\,dx = 4\int_0^{x_{max}} (2nC - x^{2n})^{\frac{1-2n}{2n}}\,dx. \tag{5}$$

Dla skończonego n okres Θ zależy od wyboru stałej C. Dla $n \to \infty$ $\Theta \to 4$. Tak więc rozwiązanie układu (3) przy skończonym n przedstawia drgania z nieokreśloną amplitudą i nieokreśloną częstotliwością. Dodatkowe warunki dla określenia amplitudy i okresu drgań otrzymamy analizując układ (1). Dla $n \to \infty$ amplituda drgania $x_{max} \to 1$, a okres $\Theta \to 4$, niezależnie od postaci funkcji $X(x,y)$; $Y(x,y)$.

2. Uogólnione funkcje okresowe

Uogólnione funkcje okresowe wprowadzone przez Jatajewa [1] są rozwiązaniem układu (2). Stałą C występującą w równaniu (3) dobiera się tak, aby $2nC = 1$.
Definiujemy:

$$x(t) = Snt$$
$$y(t) = Cst$$

Wtedy na mocy (2) i (3) słuszne są następujące związki:

$$\frac{dSnt}{dt} = Cs^{2n-1}t$$

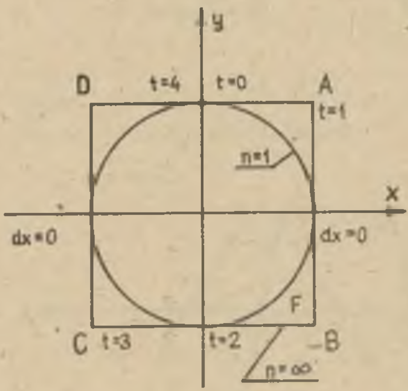
$$\frac{dCst}{dt} = -Sn^{2n-1}t \tag{6}$$

$$(Snt)^{2n} + (Cst)^{2n} = 1$$

Amplituda uogólnionych funkcji okresowych wynosi 1, a okres na podstawie relacji (5)

$$\Theta = 4\int_0^1 (1 - x^{2n})^{\frac{1-2n}{2n}}\, dx. \tag{6a}$$

Portret fazowy odpowiadający funkcjom Snt i Cst pokazano na rys. 1.



Rys. 1

Dobierając chwilę początkową t tak, aby:

$$Sn(0) = 0, \qquad Cs(0) = 1,$$

otrzymujemy:

$$Sn(-t) = -Sn(t),$$
$$Cs(-t) = Cst.$$

W skrajnych przypadkach dla n=1 i $n \to \infty$ portret fazowy jest odpowiednio okręgiem i prostokątem. Okres drgań wynosi w tych przypadkach odpowiednio $\Theta = 2\pi$ $\Theta = 4$. Na podstawie rys. 1 oraz relacji (5), można łatwo wykreślić przebiegi funkcji Snt, Cst. Dla n=1 są to sinusoidy. Przebiegi Snt i Cst podano na rys. 2a,b. Przy $n \gg 1$ okres drgań jest bliski 4. Podczas zmniejszania n okres ulega wydłużeniu przy zachowaniu stałej amplitudy.

3. Kryterium stabilności układu autonomicznego

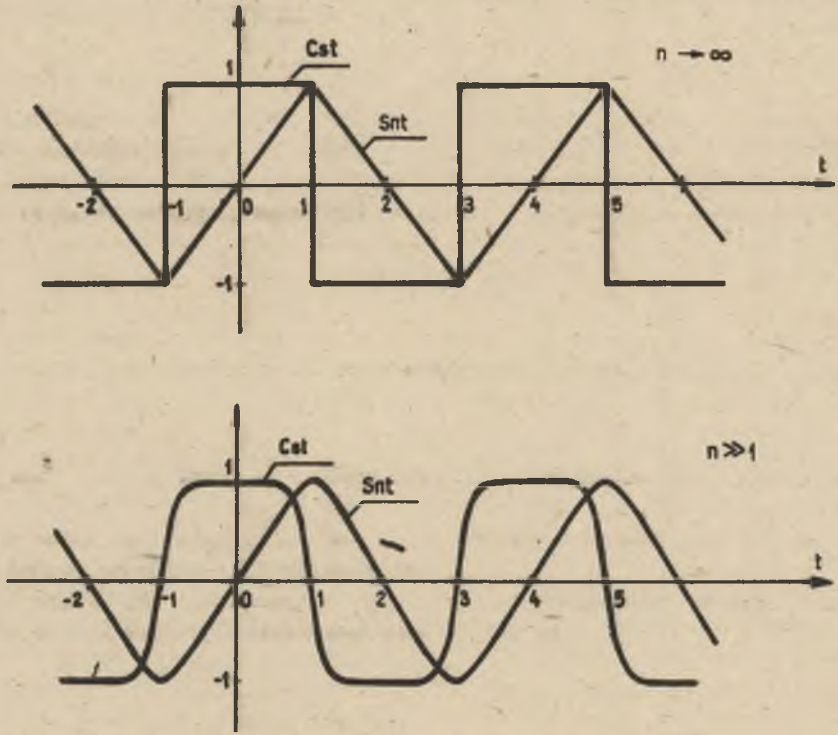
W układzie (1) dokonujemy zmiany zmiennych w następujący sposób:

$$\begin{aligned} x &= rCs\varphi, \\ y &= rSn\varphi, \end{aligned} \tag{7}$$

gdzie: r, φ są funkcjami t.

Wstawiając związki (7) do układu (1) na mocy związków (6), otrzymuje się po prostych przekształceniach:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \mu A_1(r,\varphi), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -r^{2(n-1)} + \mu A_2(r,\varphi), \end{aligned} \tag{8}$$



Rys. 2

gdzie:

$$A_1(r,\varphi) = X(x,y)Cs^{2n-1}\varphi + Y(x,y)Sn^{2n-1}\varphi,$$

$$A_2(r,\varphi) = \frac{1}{r}\left[Y(x,y)Cs\varphi - X(x,y)Sn\varphi\right]$$

Układ (8) jest układem z szybko zmienną fazą. Można go łatwo doprowadzić do postaci standardowej w sensie Bogolubowa [2] przez proste przekształcenia. Otrzymujemy

$$\frac{dr}{d\varphi} = \mu \frac{A_1(r,\varphi)}{A_2(r,\varphi) - r^{2(n-1)}} \tag{9}$$

Funkcja stojąca po prawej stronie równania (9) jest okresowa po φ o okresie Θ (relacja (6a)).

Układ uśredniony odpowiadający równaniu (9) ma postać

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\mu \frac{\bar{A}_1(r)}{r^{2(n-1)}}, \tag{10}$$

gdzie

$$\bar{A}_1(r) = \frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta}\Big[X(rCs\varphi, rSn\varphi)Cs^{2n-1}\varphi +$$

$$+ Y(rCs\varphi, rSn\varphi)Sn^{2n-1}\varphi\Big]d\varphi. \tag{11}$$

Układ (9) posiada stabilne rozwiązanie, okresowe po φ okresie Θ dążące do r_o przy $\mu \to 0$, jeżeli

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\bar{A}_1(r)}{r^{2(n-1)}}\right)_{r=r_o} > 0, \tag{12}$$

gdzie r_o jest pierwiastkiem równania

$$\bar{A}_1(r) = 0. \tag{13}$$

Relacja (13) określa jednocześnie amplitudę drgania opisanego równaniem (7). Rozkładając prawą stronę równanie (9) w szereg potęgowy względem μ, otrzymuje się

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\mu \frac{A_1(r,\varphi)}{r^{2(n-1)}}\mu^2 \frac{A_1(r,\varphi)\,A_2(r,\varphi)}{r^{4(n-1)}}.$$

Będziemy poszukiwać rozwiązania powyższego równania w postaci szeregu

$$r(\varphi) = r_o + \mu r_1(\varphi) + \mu^2 r_2(\varphi) + \ldots$$

Otrzymujemy stąd przy zachowaniu dostatecznie dużej dokładności

$$r_1(\varphi) = -\int_0^{\varphi}\frac{A_1(r_o,\varphi)}{r_o^{2(n-1)}}\,d\varphi.$$

Wtedy drugie równanie układu (8) można napisać z dostatecznie dużą dokładnością

$$\frac{d\varphi}{dt} = -r_o^{2(n-1)} + \mu A_2(r_o,\varphi) - 2(n-1)r_o^{2n-3}\,r_1(\varphi). \tag{14}$$

Będziemy poszukiwać rozwiązań równania (14) w postaci szeregu

$$\varphi(t) = \varphi_o(t) + \mu\varphi_1(t) + \mu^2\varphi_2(t) + \dots$$

skąd otrzymuje się:

$$\varphi_0(t) = - r_o^{2(n-1)}t,$$

$$\varphi_1(t) = \int_0^t A_2(r_o,\varphi_o(\tau)) - 2(n-1)r_o^{2n-3}r_1\varphi_0(\tau)d\tau, \tag{15}$$

$$\varphi_2(t) = \int_0^t \varphi_1(\tau)\left\{\frac{\delta}{\delta\varphi} A_2(r_o,\varphi) - 2(n-1)r_o^{2n-3}\, r_1(\varphi)\right\}_{\varphi=\varphi_o(\tau)} d\tau.$$

W wyniku otrzymujemy drganie:

$$x(t) = r_o Cs(r_o^{2(n-1)}t - \mu\varphi_1(t) - \mu^2\varphi_2(t-\dots),$$
$$y(t) = -r_o Sn(r_o^{2(n-1)}t - \mu\varphi_1(t) - \mu^2\varphi_2(t-\dots). \tag{16}$$

Funkcje podcałkowe prawych stron równań (15) są okresowe. O ile nie zawierają one składowej stałej, to rozważane drganie dane za pomocą równań (16) będzie okresowe, w przeciwnym wypadku drganie będzie prawie okresowe. Okres drgania jest równy, lub prawie równy

$$\vartheta = \Theta r_o^{2(1-n)},$$

gdzie Θ jest określone relacją (6a).

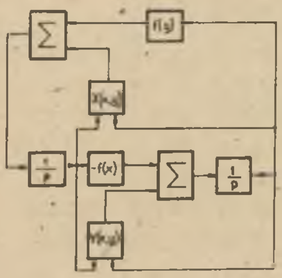
Wynika stąd, że okres silnie zależy od amplitudy drgań. Należy zwrócić uwagę na fakt, że dla n=1, czyli w przypadku drgań quasi-harmonicznych zależność taka nie występuje. Zjawisko to jest cechą charakterystyczną drgań silnie nieliniowych. Schemat strukturalny odpowiadający układowi (1) pokazany jest na rys. 3. Na schemacie tym $p = \frac{d}{dt}$; $f(x) = x^{2n-1}$.

Każdy układ równań w postaci:

$$\dot{x} = a_y^{2n-1} + \mu X(x,y),$$

$$\dot{y} = -bx^{2n-1} + \mu Y(x,y)$$

można doprowadzić do postaci (1) przez prostą zamianę zmiennych w następujący sposób:



Rys. 3

$$x = \xi x_1,$$
$$y = \eta y_1.$$

Łatwo można pokazać, że:

$$\xi = a^{\frac{1}{4n(1-n)}}\, b^{\frac{2n-1}{4n(1-n)}},$$

$$\eta = a^{\frac{2n-1}{4n(1-n)}}\, b^{\frac{1}{4n(1-n)}}$$

przy $n \neq 1$.

4. Oddziaływanie drgań. Synchronizacja

Weźmy pod uwagę dwa słabo sprzęgnięte układy:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1^{2n-1} + \mu\left[X_1(x_1,y_1) + \varepsilon F_1(x_2y_2,at)\right], \\ \dot{y}_1 &= -x_1^{2n-1} + \mu\left[Y_1(x_1y_1) + \varepsilon G_1(x_2,y_2,at)\right], \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= y_2^{2n-1} + \mu\left[X_2(x_2,y_2) + \varepsilon F_2(x_1,y_1,at)\right], \\ \dot{y}_2 &= -x_2^{2n-1} + \mu\left[Y_2(x_2,y_2) + \varepsilon G_2(x_1,y_1,at)\right], \end{aligned} \tag{18}$$

gdzie: F_1, G_1, F_2, G_2, funkcje ciągłe okresowe po $\tau = at$ o okresie Θ ; $a = r_o^{2(n-1)}$; $|\mu| \ll 1$.

Synchronizacja może nastąpić, jeżeli amplitudy rozwiązań okresowych układów (17) i (18) przy $\varepsilon = 0$ będą równe r_o. W dalszym ciągu badać będziemy rozwiązania układów (17) i (18) w postaci:

$$\begin{aligned} x_1 &= r_o Cs(at + \gamma_1(t)), \\ y_1 &= r_o Sn(at + \gamma_1(t)), \\ x_2 &= r_o Cs(at + \gamma_2(t)), \\ y_2 &= r_o Sn(at + \gamma_2(t)). \end{aligned} \tag{19}$$

Wstawiając (19) do (17) i (18) po prostych przekształceniach otrzymujemy równania różniczkowe dla faz obu drgań w postaci następującej:

$$\frac{d\gamma_1}{d\tau} = \frac{\mu}{s}\left[(Y_1+\varepsilon G_1)\,\mathrm{Cs}(\tau+\gamma_1) - (X_1+\varepsilon F_1)\,\mathrm{Sn}(\tau+\gamma_1)\right],$$
$$\frac{d\gamma_2}{d\tau} = \frac{\mu}{s}\left[(Y_2+\varepsilon G_2)\,\mathrm{Cs}(\tau+\gamma_2) - (X_2+\varepsilon F_2)\,\mathrm{Sn}(\tau+\gamma_2)\right]. \tag{20}$$

Funkcje stojące po prawej stronie układu (20) są okresowe po τ o okresie Θ. Warunek synchronizacji jest równoważny warunkowi stabilności okresowych (o okresie Θ) rozwiązań układu (20).
Układ uśredniony ma postać:

$$\frac{d\gamma_1}{d\tau} = \frac{\mu}{s}\Gamma_1(\gamma_1,\gamma_2),$$
$$\frac{d\gamma_2}{d\tau} = \frac{\mu}{s}\Gamma_2(\gamma_1,\gamma_2), \tag{21}$$

gdzie:

$$\Gamma_1 = \frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta}\left[(Y_1+\varepsilon G_1)\,\mathrm{Cs}(\tau+\gamma_1) - (X_1+\varepsilon F_1)\,\mathrm{Sn}(\tau+\gamma_1)\right]d\tau,$$
$$\Gamma_2 = \frac{1}{\Theta}\int_0^{\Theta}\left[(Y_2+\varepsilon G_2)\,\mathrm{Cs}(\tau+\gamma_2) - (X_2+\varepsilon F_2)\,\mathrm{Sn}(\tau+\gamma_2)\right]d\tau. \tag{22}$$

Warunkiem stabilności rozwiązania okresowego układu (20) jest, aby pierwiastki równania

$$\det\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial\Gamma_1}{\partial\gamma_1} & \frac{\partial\Gamma_1}{\partial\gamma_2} \\ \frac{\partial\Gamma_2}{\partial\gamma_1} & \frac{\partial\Gamma_2}{\partial\gamma_2} \end{pmatrix} - \lambda I\right]_{\substack{\gamma_1=\gamma_{10}\\ \gamma_2=\gamma_{20}}} = 0$$

spełniały warunek

$$\mathrm{re}\{\lambda\} < 0,$$

gdzie:

$$\Gamma_1(\gamma_{10},\gamma_{20}) = 0,$$

$$\Gamma_2(\gamma_{10},\gamma_{20}) = 0.$$

W przypadku, gdy układ (21) posiada cykl graniczny, jak pokazano w pracy [3], układ (20) posiada stabilne, wolnozmienne rozwiązanie. Równania (19) przedstawiają wtedy drgania prawie okresowe.

Praktyczne obliczenie całek występujących w relacjach (11) i (21) nie jest zbyt trudne, jeżeli wziąć pod uwagę, że przy odpowiednio dużych n funkcje $Cs\tau$, $Sn\,\tau$ można z wystarczająco dużą dokładnością przybliżyć odpowiednio przebiegiem prostokątnym i piłowym (rys. 2a,b).

LITERATURA

[1] JATAJEW M.: K issliedowaniju odnogo kriticzeskogo słuczaja ustojcziwosti dwiżenija. Wiestnik A.N. Kazachskoj SSR, 1968, Nr 1.

[2] BOGOLUBOW N.M., MITROPOLSKIJ J.A.: Asimptoticzeskije metody w tieorii nieliniejnych kolebanij. Gostiechizdat 1955.

[3] SIWCZYŃSKI M.: O istnieniu drgań prawie okresowych w układach synchronizacji. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 35, 1972.

Wpłynęło do Redakcji w maju 1980

Recenzent:
Prof. dr hab. Adam Macura

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ

Р е з ю м е

В работе проверяется устойчивость периодических и почти периодических колебаний автономной системы вида

$$x = y^{2n-1} + \quad X(x,y)$$

$$y = -x^{2n-1} + \quad Y(x,y)$$

где 1. С этой целью использованы так называемые обобщенные периодические функции, которых определение дано в тексте. В заключении статьи рассмотрен случай синхронизации колебаний этого типа.

ON THE STABILITY OF SOME STRONGLY NON-LINEAR SELF-EXCITING OSCILLATIONS

S u m m a r y

In this paper the stability of the periodic and almost periodic solutions of the differential system

$$\dot{x} = y^{2n-1} + \mu X(x,y)$$

$$\dot{y} = -x^{2n-1} + \mu Y(x,y)$$

where $|\mu| \ll 1$ were proved. In this proces, the generalized periodic functions are used. The sinchronization of the strongly non-linear oscillators was proved.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Bernard BARON

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

ANALIZA POLA ELEKTRYCZNEGO POD SKRZYŻOWANIEM DWÓCH TORÓW TRÓJFAZOWYCH

Streszczenie. W artykule skonstruowano model matematyczny pola elektrycznego quasi-statycznego w otoczeniu krzyżowania się dwóch torów trójfazowych. Wyprowadzono podstawowe wzory na parametry elipsy zakreślonej w ciągu okresu przez wektor natężenia pola elektrycznego, zaczepiony w dowolnym punkcie rozpatrywanego obszaru.

1. Wstęp

Linie przesyłowe usytuowane względem siebie pod kątem prostym występują przede wszystkim jako fragmenty stacji transformatorowo rozdzielczych. Z punktu widzenia ochrony środowiska jest to przypadek bardzo ważny, gdyż na obszarze pod skrzyżowaniem należy spodziewać się znacznych wartości natężenia pola elektrycznego. Badania tego pola na modelach fizycznych prowadzone są w Instytucie Energetyki oraz "Energopomiarze" Gliwice (patrz np. [5]). W niniejszej pracy postawiono sobie za cel opracowanie modelu matematycznego pola elektrycznego w obszarze skrzyżowania dwóch torów trójfazowych.

2. Model matematyczny

Punktem wyjścia przy konstrukcji modelu matematycznego pola elektrycznego w obszarze skrzyżowania dwóch torów trójfazowych będzie założenie stałej gęstości liniowej ładunków $q_k(t)$ wzdłuż poszczególnych przewodów, wynikających z oddziaływania quasi-statycznego przewodów prowadzonych równolegle. Przy takim założeniu pominięto wpływ oddziaływania przewodów usytuowanych względem siebie pod kątem prostym. Należy się spodziewać, że założenie to będzie prawdziwe przy dostatecznie dużej odległości między przewodami prowadzonymi względem siebie pod kątem prostym. Ponadto zakłada się, że potencjały poszczególnych przewodów linii są sinusoidalnie zmienne

$$v_k(t) = V_{mk}\sin(\omega t+\varphi_k) \quad (k = 1,\ldots,n), \tag{1a}$$

natomiast potencjał ziemi przyjmuje się jako zerowy, tj.

$$v(0,y,z,t) = 0. \tag{1b}$$

Przy oddalaniu się do nieskończoności musi być spełniony warunek regularności potencjału. Jeżeli warunki brzegowe są sinusoidalnie zmienne, to należy poszukiwać rozwiązania równania Laplace'a

$$\Delta v(x,y,z,t) = 0$$

w postaci

$$v(x,y,z,t) = V_m(x,y,z)\sin\left[\omega t + \varphi(x,y,z)\right]. \tag{2}$$

Łatwo wykazać, że jeżeli spełnione jest równanie Laplace'a dla funkcji (2) z warunkami brzegowymi (1), to zachodzi również równanie Laplace'a

$$\Delta \underline{V}(x,y,z) = 0 \tag{3}$$

dla funkcji zespolonej

$$\underline{V}(x,y,z) = \frac{V_m(x,y,z)}{\sqrt{2}}\, e^{j\varphi(x,y,z)} \tag{4}$$

z warunkami brzegowymi w postaci potencjałów zespolonych poszczególnych przewodów linii

$$\underline{V}_k = \frac{V_{mk}}{\sqrt{2}}\, e^{j\varphi_k} \tag{5a}$$

oraz na powierzchni ziemi

$$\underline{V}(0,y,z) = 0. \tag{5b}$$

Na mocy zasady superpozycji oraz przyjętych założeń upraszczających, możemy potencjał zespolony $\underline{V}(x,y,z)$, stanowiący rozwiązanie równania (3) z warunkami brzegowymi (5), przyjąć [2] w postaci

$$\underline{V}(x,y,z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n_1}\sum_{l=1}^{n_2} c_{kl}^{(g)}\, \underline{V}_l^{(g)} \ln \frac{\sqrt{(x+x_{(g)k})^2+(y-y_{(g)k})^2}}{\sqrt{(x-x_{(g)k})^2+(y-y_{(g)k})^2}} +$$

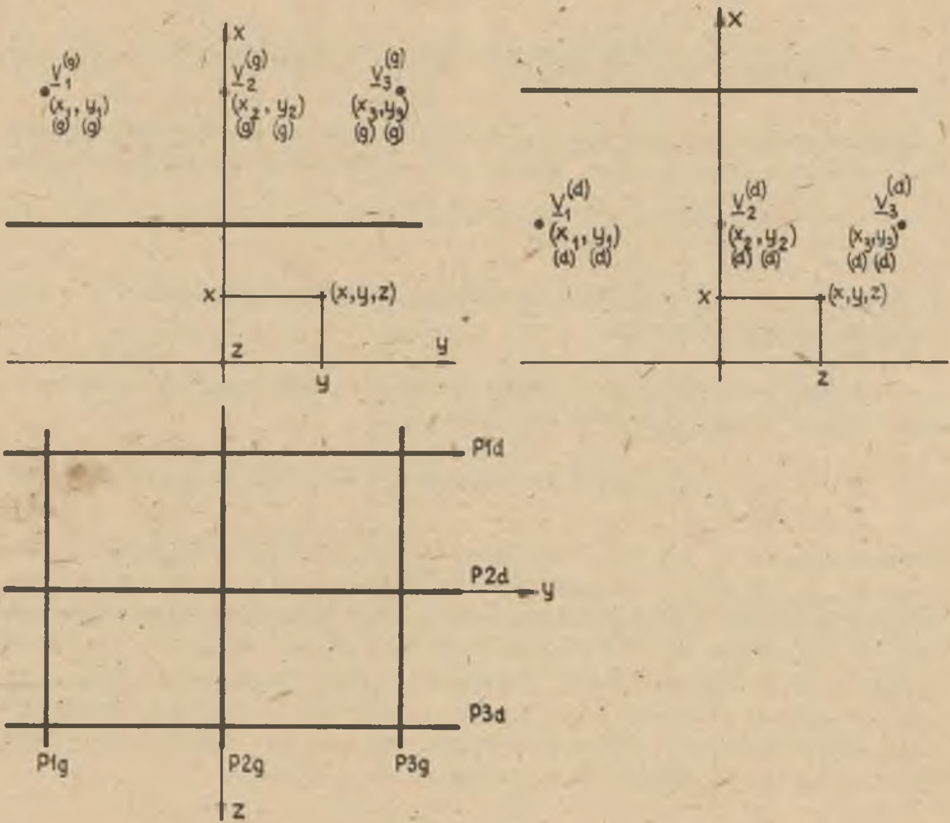
$$+ \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{n_2} \sum_{l=1}^{n_2} C_{kl}^{(d)} \underline{V}_l^{(d)} \ln \frac{\sqrt{(x+x_{(d)k})^2 + (z-z_{(d)k})^2}}{\sqrt{(x-x_{(d)k})^2 + (z-z_{(d)k})^2}} ,$$

gdzie:

n_1, n_2 - liczba przewodów w torze dolnym i górnym

$C_{kl}^{(d)}, C_{kl}^{(g)}$ - pojemności wzajemne ($k \neq l$) i własne ($k=l$) toru dolnego (d) i górnego (g); (patrz wzory w pracy [2]),

$\underline{V}_l^{(d)}, \underline{V}_l^{(g)}$ - potencjały zespolone przewodów toru dolnego i górnego.



Rys. 1. Linie przesyłowe usytuowane względem siebie pod kątem prostym

Składowe wektora zespolonego natężania pola elektrycznego wynoszą wówczas

$$\underline{E}_x(x,y,z) = - \frac{\partial \underline{V}(x,y,z)}{\partial x} = E_x(x,y,z)\, e^{j\varphi_x(x,y,z)} , \tag{7}$$

$$\underline{E}_y(x,y,z) = -\frac{\partial \underline{V}(x,y,z)}{\partial y} = E_y(x,y,z)\, e^{j\varphi_y(x,y,z)} \tag{8}$$

$$\underline{E}_z(x,y,z) = -\frac{\partial \underline{V}(x,y,z)}{\partial z} = E_z(x,y,z)\, e^{j\varphi_z(x,y,z)}, \tag{9}$$

natomiast odpowiadające im wartości chwilowe są równe:

$$E_x(x,y,z,t) = -\frac{\partial v(x,y,z,t)}{\partial x} = \sqrt{2}\, E_x(x,y,z)\sin\left[\omega t + \varphi_x(x,y,z)\right], \tag{10}$$

$$E_y(x,y,z,t) = -\frac{\partial v(x,y,z,t)}{\partial y} = \sqrt{2}\, E_y(x,y,z)\sin\left[\omega t+\varphi_y(x,y,z)\right], \tag{11}$$

$$E_z(x,y,z,t) = -\frac{\partial v(x,y,z,t)}{\partial z} = \sqrt{2}\, E_z(x,y,z)\sin\left[\omega t+\varphi_z(x,y,z)\right]. \tag{12}$$

W dalszej kolejności przebadane będą pewne własności geometryczne wektora natężenia pola elektrycznego $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ o składowych określonych wzorami (10), (11) i (12).

3. Własności geometryczne pola elektrycznego quasi-statycznego, sinusoidalnie zmiennego

Dowolnemu punktowi rozpatrywanego obszaru o współrzędnych prostokątnych x,y,z przyporządkowany jest wektor

$$\mathbf{E}(x,y,z,t) = \mathbf{k}_x E_x(x,y,z,t) + \mathbf{k}_y E_y(x,y,z,t) + \mathbf{k}_z E_z(x,y,z,t), \tag{13}$$

gdzie składowe: E_x, E_y, E_z określone są wzorami (10), (11) i (12), natomiast: $\mathbf{k}_x$, $\mathbf{k}_y$, $\mathbf{k}_z$ - wektory jednostkowe na osiach prostokątnego układu współrzędnych. Przy tym założeniu przebadane będzie miejsce geometryczne, jakie zakreśla wektor $\mathbf{E}$ zaczepiony w ustalonym punkcie (x,y,z) w czasie t w przedziale jednego okresu T. W celu zbadania własności krzywej zakreślonej przez wektor $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ w czasie t należy wyznaczyć położenie trójścianów Freneta [7] wzdłuż tej krzywej. Wektor jednostkowy styczny do rozpatrywanej krzywej wynosi

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{E}}(x,y,z,t)}{\left|\dot{\mathbf{E}}(x,y,z,t)\right|}, \tag{14}$$

$$\dot{E}(x,y,z,t) = \frac{\partial E(x,y,z,t)}{\partial t} = k_x E_{mx}(x,y,z)\omega\cos\left[\omega t + \varphi_x(x,y,z)\right] + \tag{15}$$

$$+ k_y E_{my}(x,y,z)\omega\cos\left[\omega t + \varphi_y(x,y,z)\right] + k_z E_{mz}(x,y,z)\omega\cos\left[\omega t + \varphi_z(x,y,z)\right].$$

Wektor binormalny jako wektor jednostkowy normalny do płaszczyzny ściśle stycznej wyraża się [7] wzorem

$$b = \frac{\dot{E}(x,y,z,t) \times \ddot{E}(x,y,z,t)}{\left|\dot{E}(x,y,z,t) \times \ddot{E}(x,y,z,t)\right|} \tag{16}$$

gdzie

$$\ddot{E}(x,y,z,t) = \frac{\partial^2 E(x,y,z,t)}{\partial t^2} = k_x E_{mx}(x,y,z)\omega^2\sin\left[\omega t + \varphi_x(x,y,z)\right] - \tag{17}$$

$$- k_y E_{my}(x,y,z)\omega^2\sin\left[\omega t + \varphi_y(x,y,z)\right] - k_z E_{mz}(x,y,z)\omega^2\sin\left[\omega t + \varphi_z(x,y,z)\right].$$

Tworząc iloczyn wektorowy wektorów (15) i (17), otrzymuje się

$$\dot{E}\times\ddot{E} = \begin{vmatrix} k_x & k_y & k_z \\ E_{mx}\omega\cos(\omega t + \varphi_x) & E_{my}\omega\cos(\omega t + \varphi_y) & E_{mz}\omega\cos(\omega t + \varphi_z) \\ -E_{mx}\omega^2\sin(\omega t + \varphi_x) & E_{my}\omega^2\sin(\omega t + \varphi_y) & E_{mz}\omega^2\sin(\omega t + \varphi_z) \end{vmatrix} =$$

$$= k_x\omega^3 E_{my}E_{mz}\sin(\varphi_y - \varphi_z) + k_y\omega^3 E_{mz}E_{mx}\sin(\varphi_z - \varphi_x) +$$

$$+ k_z\omega^3 E_{mx}E_{my}\sin(\varphi_x - \varphi_x). \tag{18}$$

Oznacza to, że wktor binormalny wzdłuż krzywej zakreślonej przez wektor $E(x,y,z,t)$ w czasie t jest wektorem stałym w czasie. Dla pełniejszego zbadania rozpatrywanej krzywej należy wyznaczyć wzdłuż niej tzw. skręcenie [7] wyrażające się wzorem

$$\tau = \frac{\left[\dot{E}(x,y,z,t) \times \ddot{E}(x,y,z,t)\right] \dddot{E}(x,y,z,t)}{\left|\dot{E}(x,y,z,t) \times \ddot{E}(x,y,z,t)\right|} \tag{19}$$

Uwzględniając wyniki iloczynu wektorowego (18) oraz pochodną $\dddot{E}$

$$\dddot{E}(x,y,z,t) = \frac{\partial^3 E(x,y,z,t)}{\partial t^3} = -k_x E_{mx}\omega^3\cos(\omega t + \varphi_x) - \tag{20}$$

$$-k_y E_{my}\omega^3\cos(\omega t + \varphi_y) - k_z E_{mz}\omega^3\cos(\omega t + \varphi_z),$$

otrzymuje się

$$(\mathbf{E}\times\dot{\mathbf{E}})\ddot{\mathbf{E}} = \begin{vmatrix} E_{mx}\omega\cos(\omega t+\varphi_x) & E_{my}\omega\cos(\omega t+\varphi_y) & E_{mz}\omega\cos(\omega t+\varphi_z) \\ -E_{mx}\omega^2\sin(\omega t+\varphi_x) & E_{my}\omega^2\sin(\omega t+\varphi_y) & E_{mz}\omega^2\sin(\omega t+\varphi_z) \\ -E_{mx}\omega^3\cos(\omega t+\varphi_x) & E_{my}\omega^3\cos(\omega t+\varphi_y) & E_{mz}\omega^3\cos(\omega t+\varphi_z) \end{vmatrix} = 0 \quad (21)$$

Oznacza to, że w każdym punkcie rozpatrywanej krzywej jej skręcenie jest równe zeru ($\tau = 0$). Wiadomo natomiast [7], że warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by krzywa była płaska jest zerowanie się jej skręcenia. Dla krzywej płaskiej wektor binormalny jest stały (wzory (16) i (18) i prostopadły do jej płaszczyzny. Z przeprowadzonych rozważań wynika, że wektor natężenia pola elektrycznego quasi-statycznego $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ określony wzorem (13), zaczepiony w punkcie o współrzędnych (x,y,z), zakreśla w czasie t krzywą płaską, której płaszczyzna wyznaczona jest przez stały w czasie wektor binormalny (16).

Wprowadzając w ustalonym punkcie $O(x,y,z)$ nowy lokalny układ współrzędnych prostokątnych x', y', z', powstały przez obrót pierwotnego układu w ten sposób, że oś z' jest równoległa do wektora binormalnego b otrzymuje się składową E_z wektora $\mathbf{E}$ równą zeru ($E_{z'} = 0$).

W nowym układzie współrzędnych x', y', z' krzywa zakreślona przez wektor $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ w czasie t leży w płaszczyźnie $x'Oy'$, a składowe tego wektora $E_{x'}$, $E_{y'}$ są również sinusoidalnie zmienne. Jak wykazano w pracy [2], w przypadku dwuwymiarowym wektor natężenia pola elektrycznego o dwóch składowych sinusoidalnie zmiennych zakreśla w czasie T elipsę. W świetle przeprowadzonych rozważań wynika, że ogólnie rzecz biorąc, wektor natężenia pola elektrycznego o trzech składowych sinusoidalnie zmiennych (wzory (11), (11) i (12)) zakreśla w czasie okresu T elipsę leżącą w płaszczyźnie wyznaczonej przez wektor binormalny $\mathbf{b}$, określony wzorem (16)

4. <u>Własności modułu wektora $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ jako funkcji czasu t</u>

W celu określenia natężenia pola elektrycznego quasi-statycznego sinusoidalnie zmiennego w punkcie o współrzędnych x,y,z należy oprócz wyznaczenia płaszczyzny wirowania wektora $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ w czasie t, obliczyć składowe wektora natężenia pola elektrycznego $\mathbf{E}_a(x,y,z)$ i $\mathbf{E}_b(x,y,z)$ odpowiednio w kierunku półosi dużej i małej elipsy pola wirującego. Składowe $\mathbf{E}_a$ i $\mathbf{E}_b$ wektora wirującego $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ można obliczyć poprzez wyznaczenie parametru t, przy którym jego moduł $|\mathbf{E}(x,y,z,t)|$ jako funkcja czasu osiągnie odpowiednio maksimum i minimum.

Pochodna cząstkowa modułu wektora **E** względem czasu t wynosi

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\omega}{4j\,|\mathbf{E}|}\left(\underline{A}\; e^{j2\omega t} - \underline{A}^{*} e^{-j2\omega t}\right), \tag{22}$$

gdzie

$$\underline{A} = (\underline{E}_x)^2 + (\underline{E}_y)^2 + (\underline{E}_z)^2 = A\; e^{j\varphi_A},$$

przy czym składowe zespolone $\underline{E}_x$, $\underline{E}_y$, $\underline{E}_z$ wyrażają się odpowiednio wzorami (7), (8) i (9).

Z warunku zerowania się pochodnej (22) wynika

$$4\omega t + 2\varphi_A = 2k\pi \quad (k = 0,1) \tag{23}$$

Dla $k = 0$ z równania (23) mamy $\omega t_1 = -\frac{\varphi_A}{2}$ oraz

$$\left.\frac{\partial^2 |\mathbf{E}|}{\partial t^2}\right|_{\omega t_1 = -\frac{\varphi_A}{2}} = \frac{\omega^2 A}{|\mathbf{E}|} > 0. \tag{24}$$

Oznacza to, że dla $\omega t_1 = -\frac{\varphi_A}{2}$ moduł wektora $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ osiąga minimum odpowiadające składowej wektora w kierunku półosi małej elipsy pola wirującego

$$E_b(x,y,z) = \min_{t\in(0,T)} \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathbf{E}(x,y,z,t)| = \Big\{E_x^2(x,y,z)\sin^2\Big[\varphi_x(x,y,z) - \frac{\varphi_A(x,y,z)}{2}\Big] + E_y^2(x,y,z)\sin\Big[\varphi_y(x,y,z) - \frac{\varphi_A(x,y,z)}{2}\Big] + E_z^2(x,y,z)\sin^2\Big[\varphi_z(x,y,z) - \frac{\varphi_A(x,y,z)}{2}\Big]\Big\}^{\frac{1}{2}} \tag{25}$$

natomiast odpowiadający mu wektor wydzielony przez $\sqrt{2}$ wynosi

$$\mathbf{E}_b(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{E}(x,y,z,t_1) = \mathbf{k}_x E_x(x,y,z)\sin\Big[\varphi_x(x,y,z) - \frac{\varphi_A(x,y,z)}{2}\Big] + \mathbf{k}_y E_y(x,y,z)\sin\Big[\varphi_y(x,y,z) - \frac{\varphi_A(x,y,z)}{2}\Big] + \mathbf{k}_z E_z(x,y,z)\sin\Big[\varphi_z(x,y,z) - \frac{\varphi_A(x,y,z)}{2}\Big], \tag{26}$$

gdzie $E_x(x,y,z)$, $E_y(x,y,z)$, $E_z(x,y,z)$ przedstawiają wartości skuteczne sinusoidalnie zmiennych składowych wektora $\mathbf{E}(x,y,z,t)$ w kierunku osi x,y,z.

Dla $k = 1$ z równania (23) otrzymuje się

$$\omega t_2 = -\frac{\varphi_A}{2} + \frac{\pi}{2}$$

oraz

$$\frac{\partial^2 |E|}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2 A}{|E|} < 0. \tag{27}$$

Oznacza to, że dla $\omega t_2 = -\frac{\varphi_A}{2} + \frac{\pi}{2}$ moduł wektora E osiąga maksimum odpowiadające składowej tego wektora w kierunku półosi dużej elipsy pola wirującego

$$E_a(x,y,z) = \max_{t \in (0,T]} \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \mathbf{E}(x,y,z,t) \right| = \left\{ E_x^2(x,y,z)\cos^2\left[\varphi_x(x,y,z) - \frac{\varphi_A(x,y,z)}{2}\right] + E_y^2(x,y,z)\cos^2\left[\varphi_y(x,y,z) - \frac{\varphi_A(x,y,z)}{2}\right] + E_z^2(x,y,z)\cos^2\left[\varphi_z(x,y,z) - \frac{\varphi_A(x,y,z)}{2}\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{28}$$

natomiast odpowiadający mu wektor wydzielony przez $\sqrt{2}$ wynosi

$$\mathbf{E}_a(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{E}(x,y,z,t_2) = \mathbf{k}_x E_x(x,y,z) \cos\left[\varphi_x(x,y,z) - \frac{\varphi_A(x,y,z)}{2}\right] + \mathbf{k}_y E_y(x,y,z) \cos\left[\varphi_y(x,y,z) - \frac{\varphi_A(x,y,z)}{2}\right] + \mathbf{k}_z E_z(x,y,z)\cos\left[\varphi_z(x,y,z) - \frac{\varphi_A(x,y,z)}{2}\right]. \tag{29}$$

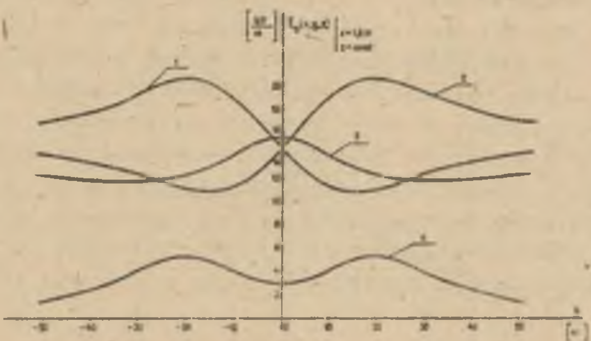
Można wykazać, że iloczyn skalarny wektora $\mathbf{E}_a$ i $\mathbf{E}_b$ jest równy zeru. Ponadto, ze względu na to, że wektory $\mathbf{E}_a$ i $\mathbf{E}_b$ leżą w jednej płaszczyźnie, pozwalają one na wyznaczenie płaszczyzny wirowania wektora E(x,y,z,t). E(x,y,z,t). Zachodz

$$\frac{\mathbf{E}_b \times \mathbf{E}_a}{|\mathbf{E}_b \times \mathbf{E}_a|} = \mathbf{b}, \tag{30}$$

gdzie $\mathbf{b}$ jest wektorem binormalnym, określonym wzorem (16). Opracowany w punkcie 3 i 4 algorytm obliczeniowy, dotyczący natężenia pola elektrycznego quasi-statycznego sinusoidalnie zmiennego, jest ogólny i może być dołączony do dowolnego zadania, w którym punktem wyjścia jest potencjał sinusoidalnie zmienny określony wzorem (2), spełniający równanie Laplace'a $\Delta v(x,y,z,t) = 0$ z warunkami brzegowymi danymi w postaci sinusoidalnie zmiennych potencjałów przewodów $(v_i = V_{mi} \sin(\omega t + \varphi_i))$ o małej pulsacji ω. W dalszej kolejności zastosowany on będzie do badania rozkładów natężenia pola elektrycznego pod skrzyżowaniem dwóch torów trójfazowych.

5. Wyniki obliczeń rozkładów natężenia pola elektrycznego pod skrzyżowaniem dwóch torów linii 750 kV na wysokości 1,8 m nad ziemią

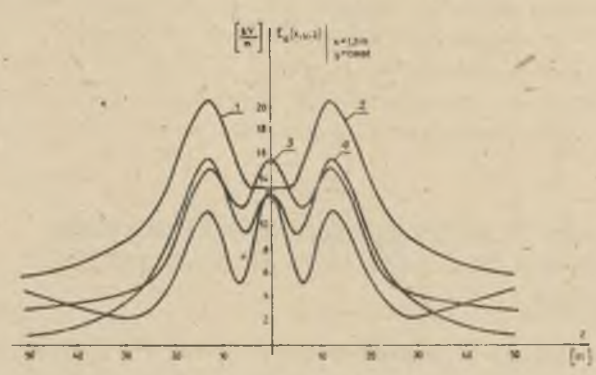
Do obliczeń wybrano skrzyżowanie dwóch torów z projektu stacji 750 kV [5]. Stanowi ono skrzyżowanie dwóch torów trójfazowych prostopadłych do siebie i równoległych do powierzchni ziemi, a usytuowanych na wysokości 10 m i 21 m nad ziemią. Przewody fazowe są wiązkami 4 x AFL-525 o odstępie przewodów w wiązce 400 mm. Odległość przewodów fazowych w torze dolnym wynosi 12 m, a w torze górnym 16 m (rys. 1).



Rys. 2. Rozkład natężenia pola elektrycznego pod skrzyżowaniem dwóch torów trójfazowych 750 kV wzdłuż przekrojów (rys. 1)

1 - P1d, 2 - P3d, 3 - P2d, 4 - poza skrzyżowaniem pod torem górnym

Dla powyższych danych obliczono rozkłady natężenia pola elektrycznego $E_a(x,y,z)\Big|_{x=1,8\ m}$ zgodnie ze wzorami (6), (7), (8), (9) i (28) w przekrojach P1g, P2g, P3g, P1d, P2d, P3d zaznaczonych na rys. 1. Wyniki obliczeń podano na rys. 1 i 2. Z obliczeń tych wynika, że w miejscu krzyżowania się faz jednoimiennych występuje wzrost natężenia pola elektrycznego szczególnie widoczny dla faz skrajnych, a wynoszący dwadzieścia kilka procent w odniesieniu do rozkładu natężenia pola elektrycznego w przekroju poprzecznym toru dolnego poza skrzyżowaniem. W miejscu skrzyżowań faz różnoimiennych występuje natomiast zmniejszenie natężenia pola elektrycznego, które np. dla faz skrajnych wynosi dwadzieścia kilka procent.



Rys. 3. Rozkład natężenia pola elektrycznego pod skrzyżowaniem dwóch torów trójfazowych 750 kV wzdłuż przekrojów

1 - P1g, 2 - P3g, 3 - P2g, 4 - poza skrzyżowaniem pod torem dolnym

Przeprowadzona analiza teoretyczna pod skrzyżowaniem dwóch torów trójfazowych dla danych zaczerpniętych z pracy [5] pozwala również na porównanie otrzymanych wyników (rys. 2 i 3) z wynikami badań modelowych (patrz praca [5], rys. 22 i 23) dokonanych na urządzeniu AMPE 76 [3]. Z porównania tego wynika, że w obszarze maksymalnych natężeń pola elektrycznego występuje różnica między obliczeniami teoretycznymi a badaniami modelowymi, nie przekraczająca jednego procentu wartości obliczeniowej. Oznacza to, że przyjęty model matematyczny pola elektrycznego pod skrzyżowaniem dwóch linii trójfazowych, dostatecznie odległych względem siebie, wystarczająco dokładnie opisuje rzeczywistość. Można go więc zastosować przy ustaleniu usytuowania przewodów krzyżujących się torów trójfazowych ze względu na dopuszczalne natężenie pola elektrycznego przy powierzchni ziemi.

LITERATURA

[1] ALLAN R.N., SULMAN S.K.: Electrostatic fields underneath power lines operated at very high voltages. Proc. IEEE Vol. 121, N^{o} 11, November 1979.

[2] BARON B.: Pole elektryczne przesyłowej linii trójfazowej 400 kV. Zeszyt Naukowy Pol. Śl., Elektryka z. 64, 1979.

[3] BARON B., DUSZA R., MACHNIK F.: Urządzenie typu AMPE 76 do modelowania fizycznego pola elektrycznego linii i stacji wysokiego napięcia. Przegląd Elektrotechniczny nr 7, 1978.

[4] DENO D.W.: Transmission line fields. IEEE Transactions of Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-95, no 5, 1976.

[5] GROSZKO M.: Analiza modelowa pola elektrycznego pod liniami napowietrznymi bardzo wysokich napięć w aspekcie zagrożenia środowiska. Praca doktorska, Politechnika Śl., Gliwice 1978.

[6] KONORSKI B.: Pole elektryczne przesyłowej linii trójfazowej. PWN, Warszawa 1970.

[7] LEJA F.: Geometria analityczna. PWN, Warszawa 1963.
[8] SZULKIN P., POGORZELSKI S.: Podstawy teorii pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1964.

Wpłynęło do Redakcji w maju 1980

Recenzent:
Prof. dr Maciej Krakowski

АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ПОД ПЕРЕКРЕЩИВАНИЕМ ДВУХ ТРЕХФАЗНЫХ ЛИНИЙ

Р е з ю м е

В статье представлена конструкция математической модели электрического quasi-статического поля в обведении перекрещивания двух трехфазных линий. Выведены основные формулы параметров эллипса, очерченного в течение периода вектором напряженности электрического поля, зацепленного в произвольной точке рассматриваемого пространства.

THE ANALYSIS OF THE ELECTRIC FIELD UNDER THE CROSSING OF THE TWO TRIPI -PHASE CIRCUITS

S u m m a r y

The paper presents a mathematical model for electric quazi-static field within the crossing of the two triple-phase circuits. Basic equations for the parameters of the elipses drawn during the period by a field tension vector being caught at any electrical point of the analysed zone were derived.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981
Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Stanisław HANDZLIK
Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki

FUNKCJA PRZETWARZANIA KIERUNKOWEGO CZUJNIKA GRADIENTU POTENCJAŁU WOLNOZMIENNEGO POLA ELEKTRYCZNEGO

Streszczenie. W artykule wyprowadzono przybliżoną funkcję przetwarzania kierunkowego czujnika gradientu potencjału pola elektrycznego niejednorodnego, sinusoidalnie zmiennego o częstotliwości 50 Hz Udowodniono, że pręd czujnika umieszczonego w tym polu jest proporcjonalny do gradientu potencjału w kierunku zorientowania czujnika.

1. Wstęp

Znane są metody pomiaru potencjału i natężenia pola elektrycznego, wolnozmiennego, występującego przy powierzchni ziemi w otoczeniu różnych urządzeń energetycznych najwyższych napięć [1], [2], [3]. Prace w tym kierunku doprowadziły do opracowania metody kierunkowego pomiaru gradientu potencjału pola elektrycznego, niejednorodnego, sinusoidalnie zmiennego o częstotliwości 50 Hz, występującego przy powierzchni ziemi. Metoda ta polega na umieszczeniu w określonym punkcie pola kierunkowego czujnika gradientu potencjału i pomiarze prądu tego czujnika. Czujnik składa się z dwóch półkulistych czasz o powierzchniach przewodzęcych, izolowanych względem siebie i podpartych drążkiem izolacyjnym. Jeżeli czasze zostaną połączone przewodem o rezystancji $R = 0$ i umieszczone w rozważanym polu elektrycznym, to pod wpływem przemieszczania się ładunków indukowanych przez pole w przewodzie łączącym popłynie pręd elektryczny.

W opracowaniu tym założono, że podpora izolacyjna czujnika wykonana jest z materiału o przenikalności dielektrycznej $\mathcal{E} = 1$ i wyprowadzono pierwsze przybliżenie funkcji przetwarzania czujnika. Udowodniono, że dla dowolnej orientacji czujnika w polu elektrycznym (rys. 1) pręd w przewodzie łączęcym czasze jest proporcjonalny do gradientu potencjału tego pola w kierunku zorientowania czujnika.

2. Funkcja przetwarzania czujnika

Rozpatruje się niejednorodne pole elektryczne, sinusoidalnie zmienne o częstotliwości 50 Hz. Założono, że w każdym punkcie pola dany jest rozkład potencjału w postaci funkcji analitycznej (1), spełniającej równanie Laplace'a

$$v_0(\alpha,t) = \sqrt{2}\,V_0(\alpha)\sin\left[\omega t + \varphi(\alpha)\right] \tag{1}$$

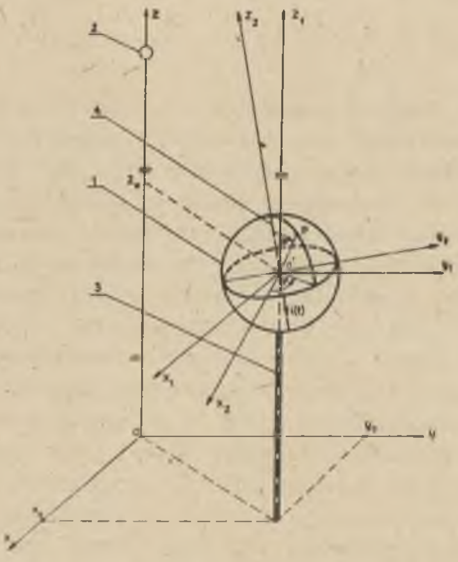
oraz że kąt przesunięcia fazowego $\varphi(\alpha)$ we wzorze (1) nie zależy od współrzędnych, tzn.

$$\varphi(\alpha) = \mathrm{const.}$$

gdzie:

α – współrzędne (x,y,z) punktu w prostokątnym układzie współrzędnych,

$V_0(\alpha)$ – wartość skuteczna potencjału w punkcie o współrzędnych (x,y,z)= $= \alpha$.



Rys. 1. Kierunkowy czujnik gradientu potencjału w polu elektrycznym linii jednoprzewodowej

1 – czujnik, 2 – linia jednoprzewodowa, 3 – podpora izolacyjna czujnika, 4 – przewód łączący czasze czujnika

W polu tym umieszczono kierunkowy czujnik gradientu potencjału. Aby wyznaczyć prąd płynący w przewodzie czujnika należy znaleźć funkcję potencjału pola elektrycznego w otoczeniu czujnika i na tej podstawie określić ładunek indukowany na jego powierzchni, po umieszczeniu go w rozważanym polu elektrycznym. Zgodnie z założeniem, funkcja rozkładu potencjału określona wzorem (1) jest analityczna, posiada pochodne dowolnego rzędu i jest rozwijalna w szereg Taylora wokół dowolnego punktu pola [4]. Wobec tego można napisać

$$v_o(\alpha,t) = v_o(\alpha_o,t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial v_o(\alpha,t)}{\partial x}(x - x_o) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial v_o(\alpha,t)}{\partial y}(y - y_o) + \frac{\partial v_o(\alpha,t)}{\partial z}(z - z_o)\right]^{(k)}_{\alpha=\alpha_o}, \tag{2}$$

gdzie $\alpha_o = (x_o,y_o,z_o)$ oznacza współrzędne punktu, w którym odbywa się pomiar gradientu potencjału w danym kierunku

$$\left[\frac{\partial v_o(\alpha,t)}{\partial x}(x - x_o) + \frac{\partial v_o(\alpha,t)}{\partial y}(y - y_o) + \frac{\partial v_o(\alpha,t)}{\partial z}(z - z_o)\right]^{(k)}$$

- jest różniczką zupełną k-tego rzędu funkcji danej wzorem (1).

Dla dalszych rozważań wprowadzono przesunięcie i obrót układu współrzędnych (x,y,z) tak, aby oś Oz pokryła się z osią symetrii czujnika. Stosując oznaczenia z rys. 1, otrzymano [4]

$$\begin{aligned} x - x_o &= x_1 = x_2\alpha_1 + y_2\alpha_2 + z_2\alpha_3,\\ y - y_o &= y_1 = x_2\beta_1 + y_2\beta_2 + z_2\beta_3, \\ z - z_o &= z_1 = x_2\gamma_1 + y_2\gamma_2 + z_2\gamma_3, \end{aligned} \tag{3}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos \sphericalangle (x_1,x_2) & \beta_1 &= \cos \sphericalangle (y_1,x_2) & \gamma_1 &= \cos \sphericalangle (z_1,x_2),\\ \alpha_2 &= \cos \sphericalangle (x_1,y_2) & \beta_2 &= \cos \sphericalangle (y_1,y_2) & \gamma_2 &= \cos \sphericalangle (z_1,y_2),\\ \alpha_3 &= \cos \sphericalangle (x_1,z_2) & \beta_3 &= \cos \sphericalangle (y_1,z_2) & \gamma_3 &= \cos \sphericalangle (z_1,z_2). \end{aligned}$$

Na podstawie wzorów (2) i (3) funkcja potencjału rozpatrywanego pola elektrycznego, przed umieszczeniem w tym polu czujnika gradientu potencjału, ma postać

$$v_o(\alpha,t) = v_o(\alpha_o,t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(Ax_2 + By_2 + Cz_2)^{(k)}, \tag{5}$$

gdzie:

$$A = \left[\frac{\partial v_o(\alpha,t)}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial v_o(\alpha,t)}{\partial y}\beta_1 + \frac{\partial v_o(\alpha,t)}{\partial z}\gamma_1 \right] \alpha = \alpha_o$$

$$B = \left[\frac{\partial v_o(\alpha,t)}{\partial x}\alpha_2 + \frac{\partial v_o(\alpha,t)}{\partial y}\beta_2 + \frac{\partial v_o(\alpha,t)}{\partial z}\gamma_2 \right] \alpha = \alpha_o,$$

$$C = \left[\frac{\partial v_o(\alpha,t)}{\partial x}\alpha_3 + \frac{\partial v_o(\alpha,t)}{\partial y}\beta_3 + \frac{\partial v_o(\alpha,t)}{\partial z}\gamma_3 \right] \alpha = \alpha_o.$$

Wprowadzając następnie kulisty układ współrzędnych, otrzymano [5]

$$v_o(r,\vartheta,\varphi,t) = v_o(\alpha_o,t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k!}\left[A\sin\vartheta\cos\varphi + B\sin\vartheta\sin\varphi + C\cos\vartheta\right]^{(k)},$$

bo:

$x_2 = r\sin\vartheta\cos\varphi,$

$y_2 = r\sin\vartheta\sin\varphi,$

$z_2 = r\cos\vartheta,$

Chcąc znaleźć wyrażenie na wypadkowy potencjał $v(r,\vartheta,\varphi,t)$ w otoczeniu czujnika umieszczonego w rozpatrywanym polu elektrycznym, w punkcie o współrzędnych $\alpha_o = (x_o,y_o,z_o)$, należy uwzględnić superpozycję potencjału pola $v_o(r,\vartheta,\varphi,t)$ danego wzorem (7) oraz potencjałów $v_1(r,\vartheta,\varphi,t)$ i $v_2(r,\vartheta,\varphi,t)$ wynikających z istnienia na powierzchni czujnika ładunków indukowanych przez to pole.
W wyniku tej superpozycji otrzymano [5]

$$v(r,\vartheta,\varphi,t) = v_o(r,\vartheta,\varphi,t) + v_1(r,\vartheta,\varphi,t) \quad \text{dla} \quad r \leqslant r_o \tag{8}$$

$$v(r,\vartheta,\varphi,t) = v_o(r,\vartheta,\varphi,t) + v_2(r,\vartheta,\varphi,t) \quad \text{dla} \quad r \geqslant r_o \tag{9}$$

gdzie:

r_o – promień półkulistych czasz czujnika (rys. 1),

$v_1(t,\vartheta,\varphi,t)$ – składowa potencjału wewnątrz czujnika,

$v_2(r,\vartheta,\varphi,t)$ – składowa potencjału na zewnątrz czujnika.

Rozpatrywane, wypadkowe pole elektryczne jest wolnozmienne. Pozwala to zaniedbać efekt wynikający ze skończonej prędkości rozchodzenia się oddziaływań. Ponieważ potencjał $v_o(r,\vartheta,\varphi,t)$ spełnia równanie Laplace'a, więc wypadkowy potencjał $v(r,\vartheta,\varphi,t)$ wewnątrz i na zewnątrz powierzchni czujnika spełnia również to równanie.

W związku z tym zachodzi

$$\nabla^2 v(r,\vartheta,\varphi,t) = 0 \quad \text{dla} \quad r \leqslant r_o, \tag{10}$$

$$\nabla^2 v(r,\vartheta,\varphi,t) = 0 \quad \text{dla} \quad r \geqslant r_o. \tag{11}$$

Rozwiązując te równania, otrzymuje się wyrażenia:

$$v(r,\vartheta,\varphi,t) \quad \text{dla} \quad r \leqslant r_o \quad \text{i} \quad r \geqslant r_o.$$

Ponieważ na powierzchni czujnika składowa styczna wektora natężenia pola elektrycznego jest równa zeru, a przy przejściu przez powierzchnię naładowaną zachowuje ciągłość, należy więc rozwiązać równanie (10) i (11) przy następujących warunkach brzegowych:

$$v_1(r,\vartheta,\varphi,t) = v_2(r,\vartheta,\varphi,t), \tag{12a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[v_o(r,\vartheta,\varphi,t) + v_1(r,\vartheta,\varphi,t)\right] = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left[v_o(r,\vartheta,\varphi,t) + v_2(r,\vartheta,\varphi,t)\right] = 0, \tag{12b}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[v_o(r,\vartheta,\varphi,t) + v_1(r,\vartheta,\varphi,t)\right] = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[v_o(r,\vartheta,\varphi,t) + v_2(r,\vartheta,\varphi,t)\right] = 0, \tag{12c}$$

dla $r = r_o$.

Aby równania (10) i (11) były spełnione, muszą być spełnione na podstawie (8) i (9) następujące równania

$$\nabla^2 v_1(r,\vartheta,\varphi,t) = 0, \tag{13}$$

$$\nabla^2 v_2(r_1\vartheta,\varphi,t) = 0. \tag{14}$$

Stosując metodę rozdzielenia zmiennych, otrzymano [6] następujące rozwiązania równań (13) i (14):

$$v_1(r,\vartheta,\varphi,t) = \sum_{m,n} (a_{m,n}\cos m\varphi + b_{m,n}\sin m\varphi) r^n P_n^m(\cos\vartheta), \tag{15}$$

$$v_2(r,\vartheta,\varphi,t) = \sum_{m,n} (c_{m,n}\cos m\varphi + d_{m,n}\sin m\varphi) \frac{1}{r^{n+1}} P_n^m(\cos\vartheta) \tag{16}$$

Funkcje $P_n^m(\cos\vartheta)$ dla m,n należących do zbioru liczb naturalnych są stowarzyszonymi funkcjami Legendre'a I rodzaju [5]. Korzystając z tablic [7] tych funkcji wyrażenia (15) i (16) otrzymuje się

$$v_1(r,\vartheta,\varphi,t) = a_{00} + a_{01}\,r\cos\vartheta + \frac{1}{4}\,a_{02}r^2(3\cos2\vartheta + 1) +$$

$$+ \frac{1}{8}\,a_{03}r^3(5\cos3\vartheta + 3\cos\vartheta) - (a_{11}\cos\varphi + b_{11}\sin\varphi)r\sin\vartheta -$$

$$- \frac{3}{2}\,(a_{12}\cos\varphi + b_{12}\sin\varphi)r^2\sin2\vartheta - \frac{3}{8}\,(a_{13}\cos\varphi +$$

$$+ b_{13}\sin\varphi)r^3(\sin\vartheta + 5\sin3\vartheta) + \ldots +$$

$$+ (a_{m,n}\cos m\varphi + b_{m,n}\sin m\varphi)r^n P_n^m(\cos\vartheta) + \ldots \tag{17}$$

$$v_2(r,\vartheta,\varphi,t) = \frac{c_{00}}{r} + \frac{c_{01}}{r^2}\cos\vartheta + \frac{1}{4}\,\frac{c_{02}}{r^3}\,(3\cos2\vartheta + 1) +$$

$$+ \frac{1}{8}\,\frac{c_{03}}{r^4}\,(5\cos3\vartheta + 3\cos\vartheta) - (c_{11}\cos\varphi + d_{11}\sin\varphi)\,\frac{1}{r^2}\ \cdot$$

$$\cdot\ \sin\vartheta - \frac{3}{2}\,(c_{12}\cos\varphi + d_{12}\sin\varphi)\,\frac{1}{r^3}\,\sin2\vartheta -$$

$$- \frac{3}{8}\,(c_{13}\cos\varphi + d_{13}\sin\varphi)\,\frac{1}{r^4}\,(\sin\vartheta + 5\sin3\vartheta) + \ldots$$

$$+ (c_{m,n}\cos m\varphi + d_{m,n}\sin m\varphi)\,\frac{1}{r^{n+1}}\,(\cos\vartheta) + \ldots \tag{18}$$

Dla wyznaczenia współczynników $a_{m,n}, b_{m,n}, c_{m,n}, d_{m,n}$ należy uwzględnić warunki brzegowe (12). W tym celu dla uproszczenia obliczeń, założono, że potencjał $v_0(r,\vartheta,\varphi,t)$ dany wzorem (7) ma postać

$$v_0(r,\vartheta,\varphi,t) = v_0(\alpha_0,t) + r(A\sin\vartheta\cos\varphi + B\sin\vartheta\sin\varphi + C\cos\vartheta). \tag{19}$$

Uwzględniając (19) oraz (17), (18) i (12), wyznaczono

$a_{00} = 0,\ a_{01} = -C,\ a_{02} = 0,\ a_{03} = 0,\ a_{11} = A,\ a_{12} = 0,\ a_{13} = 0,$
$b_{11} = B,\ b_{12} = 0,\ b_{13} = 0,\ c_{00} = 0,\ c_{01} = -Cr_0^3,\ c_{02} = 0,\ c_{03} = 0$
$c_{11} = Ar_0^3,\ c_{12} = 0,\ c_{13} = 0,\ d_{11} = Br_0^3,\ d_{12} = 0,\ d_{13} = 0.$

Podstawiając wyznaczone stałe do wzorów (17) i (18), otrzymano następujące rozwiązania równań (13) i (14):

$$v_1(r,\vartheta,\varphi,t) = -Ar\sin\vartheta\cos\varphi - Br\sin\vartheta\sin\varphi - Cr\cos\vartheta. \tag{20}$$

$$v_2(r,\vartheta,\varphi,t) = -A\frac{r_o^3}{r^2}\sin\vartheta\cos\varphi - B\frac{r_o^3}{r^2}\sin\vartheta\sin\varphi - C\frac{r_o^3}{r^2}\cos\vartheta \qquad (21)$$

Uwzględniając wzory (8) i (20) oraz (9) i (21), otrzymano wyrażenia na wypadkowy potencjał elektryczny w otoczeniu kierunkowego czujnika gradientu potencjału, po umieszczeniu go w polu elektrycznym o potencjale określonym wzorem (19). Wyrażenia te posiadają następującą postać:

$$v(r,\vartheta,\varphi,t) = v_o(x_o,y_o,z_o t) \quad \text{dla} \quad r \leqslant r_o$$

$$v(r,\vartheta,\varphi,t) = v_o(x_o,y_o,z_o,t) + \left(r - \frac{r_o^3}{r^2}\right)(A\sin\vartheta\cos\varphi + B\sin\vartheta\sin\varphi + C\cos\vartheta) \quad \text{dla} \quad r \geqslant r_o. \qquad (22)$$

Ze wzorów (22) wynika, że wypadkowy potencjał wewnątrz czujnika ma wartość stałą, niezależną od współrzędnych (x,y,z), natomiast na zewnątrz zależy od odległości r względem jego środka oraz od współczynników A,B,C określonych wzorami (5). Znając wypadkowy potencjał w otoczeniu czujnika umieszczonego w rozważanym polu elektrycznym, można określić gęstość powierzchniową ładunków indukowanych na powierzchni czujnika przez to pole. Gęstość powierzchniową ładunków można określić stosując wzór [5]

$$\sigma(r_o,\vartheta,\varphi,t) = \varepsilon_o \left.\frac{\partial v(r,\vartheta,\varphi,t)}{\partial r}\right|_{r=r_o} \qquad (23)$$

Na podstawie wyrażenia (22) otrzymuje się

$$\sigma(r_o,\vartheta,\varphi,t) = 3\varepsilon_o(A\sin\vartheta\cos\varphi + B\sin\vartheta\sin\varphi + C\cos\vartheta). \qquad (24)$$

Całkowity ładunek indukowany na jednej z czasz czujnika można obliczyć w następujący sposób

$$q(t) = \iint_S \sigma(r_o,\vartheta,\varphi,t)\, ds. \qquad (25)$$

gdzie:

ds - element powierzchni czaszy,

s - powierzchnia jednej czaszy.

Przy obliczaniu tej całki należy uwzględnić [6], że

$$ds = r_o^2 \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta$$

a granice całkowania wynoszą:

$$\vartheta = \left(0 - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\varphi = (0 - 2\pi).$$

W wyniku tego oraz uwzględniając zależność (5), otrzymano ostateczne wyrażenia na całkowity ładunek wyindukowany przez zmienne pole elektryczne na jednej z czasz czujnika

$$q(t) = 3\pi\varepsilon_0 r_0^2 \left[\frac{\partial v_0(\alpha,t)}{\partial x}\alpha_3 + \frac{\partial v_0(\alpha,t)}{\partial y}\beta_3 + \frac{\partial v_0(\alpha,t)}{\partial z}\gamma_3\right]_{\alpha=\alpha_0}. \quad (26)$$

Przewód łączący czasze umożliwia przemieszczanie się ładunków między czaszami, czyli umożliwia przepływ prądu. Prąd ten można określić na podstawie równania ciągłości prądu

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}. \quad (27)$$

Ponieważ założono, że $\varphi(\alpha) = \text{const.}$ (wzór 1), więc ostatecznie uwzględniając zależność (1), otrzymano

$$i(t) = -3\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 r_0^2\omega\left[\frac{\partial v_0(\alpha)}{\partial x}\alpha_3 + \frac{\partial v_0(\alpha)}{\partial y}\beta_3 + \frac{\partial v_0(\alpha)}{\partial z}\gamma_3\right]_{\alpha=\alpha_0}\cos\left[\omega t + \varphi(\alpha)\right] \quad (28)$$

Wartość skuteczna tego prądu wynosi

$$I = 3\pi\varepsilon_0 r_0^2\omega\left[\frac{\partial v_0(\alpha)}{\partial x}\alpha_3 + \frac{\partial v_0(\alpha)}{\partial y}\beta_3 + \frac{\partial v_0(\alpha)}{\partial z}\gamma_3\right]_{\alpha=\alpha_0}. \quad (29)$$

Analizując wzór (29) można zaobserwować, że wartość skuteczna prądu czujnika jest proporcjonalna do pochodnej kierunkowej potencjału, a więc jest proporcjonalna do gradientu potencjału rozpatrywanego pola elektrycznego w kierunku zorientowania czujnika w tym polu. Równanie (29) jest funkcją przetwarzania kierunkowego czujnika gradientu potencjału pola elektrycznego niejednorodnego, sinusoidalnie zmiennego o częstotliwości 50 Hz. Jest to pierwsze przybliżenie tej funkcji ze względu na założenie wyrażone wzorem (19) i (1).

3. Wnioski

Przeprowadzona analiza pozwoliła określić przybliżoną funkcję przetwarzania kierunkowego czujnika gradientu potencjału pola elektrycznego, niejednorodnego, sinusoidalnie zmiennego o częstotliwości 50 Hz (wzór 29). Wynika z niej, że wartość skuteczna prądu płynącego w przewodzie czujnika jest proporcjonalna do gradientu potencjału pola w kierunku zorientowania czujnika, występującego w danym punkcie pola, przed umieszczeniem w nim kierunkowego czujnika gradientu potencjału. Rozumowanie przeprowadzono przy założeniu, że pole elektryczne jest niejednorodne, sinusoidalnie zmienne a potencjał tego pola jest dany w postaci przybliżonej (19) oraz że faza tego potencjału $\varphi(\alpha)$ (wzór 1) jest funkcją niezależną od współrzędnych, tzn. $\varphi(\alpha)$ = const. Wyniki przeprowadzonej analizy mogą być podstawę do projektowania układu pomiarowego, umożliwiającego kierunkowy pomiar gradientu potencjału sinusoidalnie zmiennego pola elektrycznego.

LITERATURA

[1] Raport on results of electric field measurements made by members and quests of CIGRE Working Group 36-01. Arnhem, april 1976.

[2] BARON B.: Analiza błędu systematycznego sondy kulowej do pomiaru natężenia pola elektrycznego pod liniami przesyłowymi, trójfazowymi. Zeszyty Naukowe Polit. Śl., Elektryka z. 64, Gliwice 1979.

[3] GROSZKO M.: Eksperymentalne metody badań parametrów pola elektrycznego. Energopomiar - Gliwice 1971.

[4] LEJA F.: Geometria analityczna. PWN, Warszawa 1966.

[5] SZULKIN P., POGORZELSKI S.: Podstawy teorii pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1964.

[6] KRZYŻAŃSKI M.: Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego. PWN, Warszawa 1957.

[7] RYŻYK M., GRADSZTEJN S.: Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów. PWN, Warszawa 1964.

Wpłynęło do Redakcji w maju 1980

Recenzent:
Prof. dr Maciej Krakowski

ФУНКЦИЯ ПРЕВРАЩЕНИЯ ФУНКЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НАПРАВЛЕНИЯ ДАТЧИКА ГРАДИЕНТА ПОТЕНЦИАЛА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО, НЕОДНОРОДНОГО, СИНУСОИДАЛЬНО ПЕРЕМЕННОГО ПОЛЯ ЧАСТОТОЙ 50 ГЦ

Р е з ю м е

В статье выведена приближенная функция преобразования направления датчика градиента потенциала электрического, неоднородного, синусоидально пере-

менного поля частотой 50 гц. Доказано, что ток датчика, расположено в этом поле пропорционалне градиенты потенциала в направлении ориентирования датчика.

CONVERSION FUNCTION OF THE DIRECTIONAL GAUGE OF THE SLOW ALTERNATING ELECTRIC FIELD POTENTIAL GRADIENT

S u m m a r y

The paper presents the approximate conversion function of the directional gauge of the nonuniform sinusoidal 50 Hz electric field potencial gradient. The current of the gauge placed in that field was proved to be proportional to the potential gradient in the direction of the gauge orientation.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Edward WILCZYŃSKI

Instytut Maszyn i Urządzeń
Przemysłu Hutniczego i Ceramicznego
Politechniki Śląskiej

PROBLEM BRZEGOWY ANALIZY POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO SINUSOIDALNIE ZMIENNEGO W PRZESTRZENI POWIETRZNEJ I OBJĘTOŚCI METALU

Streszczenie. Artykuł jest próbą sformułowania problemu brzegowego w zagadnieniu obliczania pola elektromagnetycznego w przestrzeni o różnych środowiskach. Rozpatruje się przypadek przestrzeni powietrznej i obszaru metalu o symetrii osiowo-obrotowej, dla pól sinusoidalnie zmiennych.

1. Równania pola elektromagnetycznego wewnątrz metalu

Rozpatrujemy układ o symetrii osiowo-obrotowej (rys. 1), składający się z cewki o wysokości h_c i bryły metalu o wysokości h_D. Cewka jest opisana powierzchnię S_c z określoną gęstością powierzchniową prądu I, będącą polem wektorowym wyłącznie o składowej kątowej φ. W przypadku punktu powierzchni cewki o współrzędnych $(r = r_0,\ z = z_0,\ \varphi \in R)$, w układzie współrzędnych cylindrycznych (r, φ, z) zakładamy, że moduł wektora I należy do klasy funkcji stałych: $|I| \in$ const. Bryła metalu (rys. 1) opisana jest obszarem wraz z brzegiem dyfeomorficznym z kulą domkniętą (klasy C_1).

Rozpatrujemy rozkład pola elektromagnetycznego w metalu w stanie ustalonym sinusoidalnie zmiennym. Pole spełnia następujący układ równań ([1], s. 85):

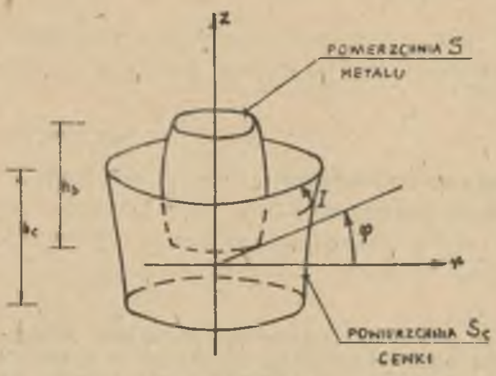
$$\nabla \times H = j\omega\varepsilon E, \tag{1}$$

$$\nabla \times E = -j\omega\mu H, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot D = \varrho, \tag{3}$$

$$\nabla \cdot B = 0. \tag{4}$$

W metalu gęstość objętościowa ładunku $\varrho = 0$ [1] s. 28. Wielkości H, E, B i D są wektorowymi funkcjami punktu w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Przedstawiają zespolone amplitudy natężeń pól; magnetycznego, elektrycznego oraz indukcji magnetycznej i elektrycznej.



Rys. 1

Zakładamy, że ośrodek (metal) jest liniowy, izotropowy i jednorodny (ze względu na stałe μ, ε, γ - konduktywność metalu) (por. [1] s. 12, 13). Zachodzą następujące zależności:

$$D = \varepsilon_m E, \tag{5}$$

$$B = \mu H, \tag{6}$$

$$J = \gamma E. \tag{7}$$

Przenikalność elektryczną we wzorze (1) określa wzór

$$\varepsilon = \varepsilon_m - j\frac{\gamma}{\omega}. \tag{8}$$

Wprowadzamy potencjał wektorowy A wg wzoru

$$B = \nabla \times A. \tag{9}$$

Po uwzględnieniu wzorów (2), (6) i (9) możemy obliczyć pole elektryczne z następującej zależności

$$E = -j\omega A - \nabla \varphi. \tag{10}$$

Poszukujemy potencjału wektorowego, spełniającego w obszarze metalu zależność

$$\nabla . A = 0. \tag{11}$$

Przypuszczamy, że pole potencjału A o własności (11) istnieje ze względu na symetrię osiowo-obrotową układu (rys. 1) i związanych z nim funkcji pola elektromagnetycznego. Pole elektryczne (10) jest sumą wektorów E_{ind} i E_{stat}:

$E_{ind} = -j\omega A$ (pole wolnozmiennych prądów), (12a)

$E_{stat} = -\nabla\varphi$ (pole wolnozmiennych ładunków). (12b)

Na przykładzie cewki, składającej się z kilku zwojów przewodu, oszacowano wartość stosunku E_{ind}/E_{stat} w dwu strefach:

a) w odległości od przewodu cewki porównywalnej z jego średnicą,

b) w odległości wielokrotnie przewyższającej wymiary cewki, ale mniejszej od długości fali elektromagnetycznej.

Dla cylindrycznej cewki o danych: $\omega = 2\pi 10^3$ rad/s, I = 500 A, U = 185 V L = 10^{-3} m, d = 5.10^{-3} m, $\mu = 4\pi 10^{-4}$ H/m, n = 10, a = 0,3 m, $\gamma = 5,6.10^7$ $1/\Omega$m uzyskano następujące wyniki:

- strefa a) $\dfrac{|E_{ind}|}{|E_{stat}|} \cong 0,5$,

- strefa b) $\dfrac{|E_{ind}|}{|E_{stat}|} \cong 2,5$,

gdzie: $\omega = 2\pi f$, f - częstotliwość, I - prąd cewki, U - napięcie zasilania, L - minimalna odległość sąsiednich przewodów, d - średnica przewodu, n - ilość zwojów, a - średnica cewki, γ - konduktywność przewodu.

W dalszych rozważaniach pomijamy składnik (12b) wzoru (10) oraz zakładamy, że potencjał skalarny

$$\varphi = 0 \tag{13}$$

w całej przestrzeni rys. 1. Problem dokładnego obliczenia pola (12b) w układzie rys. 1, jako dość skomplikowany i obszerny, sam w sobie mógłby być tematem odrębnych publikacji. Interesuje nas wyłącznie pole elektromagnetyczne, którego źródłem jest gęstość prądu cewki I.

Podstawiając równania (6), (9) i (12a) do (1), otrzymujemy równanie różniczkowe, jakie spełnia potencjał wektorowy w obszarze zajmowanym przez metal

$$\nabla \times \nabla \times A - k^2 A = 0, \tag{14}$$

gdzie $k^2 = -j\omega\mu\gamma$.

Dla objętości metali w zakresie stosowanych częstotliwości (do kilkudziesięciu tys. Hz) zachodzi we wzorze (8): $\gamma/\omega \gg \varepsilon$. W związku z powyższym można przyjąć z dużą dokładnością, że parametr k^2 we wzorze (14) jest liczbą czysto urojoną. Szukamy rozwiązania układu równań (11), (14), jakie spełnia potencjał wektorowy A w metalu. Wykorzystamy wektorowy symetryczny wzór Greena

$$\iiint_V (F \cdot \nabla \times \nabla \times A - A \cdot \nabla \times \nabla \times F)dV = \iint_S (A \times \nabla \times F - F \times \nabla \times A) \cdot n\,dS, \tag{15}$$

gdzie:

V - obszar zajmowany przez metal,

S - brzeg obszaru,

A - potencjał wektorowy wg wzoru (9) (funkcja klasy C_2),

F - dowolna funkcja wektorowa klasy C_2,

n - ciągłe pole wektorów jednostkowych określonych na S, normalnych do S, skierowanych na zewnątrz obszaru V.

Zakładamy, że funkcje A i F określone są w obszarze V wraz z brzegiem S. Tożsamość (15) wykorzystujemy dla obszaru dyfeomorficznego z kulą domkniętą, z przyjętym ortogonalnym układem współrzędnych. Zakładamy, że funkcja A we wzorze (15) spełnia wzory (11), (14) oraz $A.n = 0$, a funkcja

$$F(X,Y) = a\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)_{(X,Y)}, \tag{16}$$

gdzie:

a - stałe pole wektorowe,

X - ustalony punkt obszaru V,

Y - punkt całkowania,

r - odległość punktów X i Y,

k - stała występująca we wzorze (14).

Funkcja F nie spełnia założeń regularnościowych dla X = Y, dlatego punkt X otaczamy kulą V_1 o promieniu δ, powierzchni K, o środku w punkcie X. Tożsamość (15) wykorzystujemy dla obszaru $V - V_1$ i powierzchni S + K. W granicy dla $\delta \to 0$ otrzymujemy następujący wzór ([1] s. 107)

$$A(X) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left[\left(A(Y) \times n(Y)\right)\left(\times \nabla_Y \frac{e^{-jkr}}{r}\right)_{(X,Y)} + \right.$$

$$\left. + \left((\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y)\right)\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)_{(X,Y)}\right] dS(Y). \tag{17}$$

Wprowadzamy pojęcie pola wektorowego gęstości warstwy pętli prądu M oraz pola gęstości warstwy pojedynczej prądu N, określonych na powierzchni S metalu:

$$M = A \times n, \tag{18}$$

$$N = (\nabla \times A) \times n. \tag{19}$$

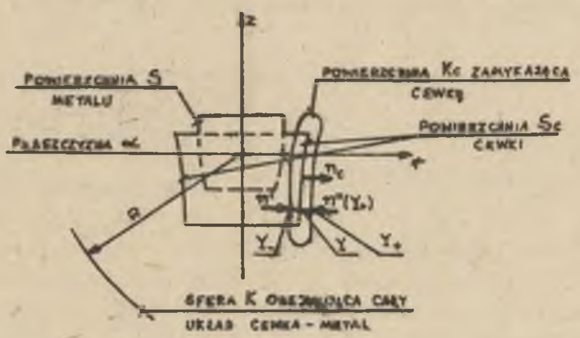
Zakładamy, że wyrażenia (18), (19) są polami wektorowymi zespolonymi klasy C_0. Przyjęte nazwy funkcji M, N łączą się z interpretacją fizyczną tych wielkości.

2. Równania pola elektromagnetycznego w środowisku powietrznym

Równania różniczkowe pól elektromagnetycznych wyprowadzone dla metalu, obowiązują również w środowisku powietrznym, po uwzględnieniu, że w przestrzeni brak ładunków swobodnych ($\varrho = 0$ we wzorze (3)) oraz konduktywność $\gamma = 0$ we wzorze (8). Potencjał wektorowy spełnia równanie różniczkowe Helmholza (14) z parametrem $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu_0$, będącym liczbą rzeczywistą. Stosowane w praktyce częstotliwości grzania metali są tego rzędu, że prawie zawsze długość fali elektromagnetycznej jest dużo większa w porównaniu z wymiarami układu z rys. 1. Przykładowo, dla częstotliwości 100 000 Hz długość fali w powietrzu wynosi 3 km. W tym przypadku rotacje pola magnetycznego H praktycznie równa się zeru, poza objętością przewodnika (w skali wymiarów układu z rys. 1 pole H traktujemy jako wolnozmienne). Uwzględniając wzory (6), (9), otrzymujemy

$$\nabla \times \nabla \times A = 0. \tag{20}$$

Poszukujemy wyrażenia całkowego na potencjał wektorowy A, spełniającego w obszarze opisującym przestrzeń powietrzną równania różniczkowe (11),(20). Nie ulegają zmianie założenia regularnościowe, dotyczące funkcji i obszarów. Wykorzystujemy tak jak w punkcie poprzednim, wektorowy symetryczny wzór Greena (15) z funkcją F (16), zakładając, w myśl przeprowadzonych powyżej rozważań, że parametr k = 0 (20). W tym przypadku obszar całkowania znajduje się między powierzchnią S bryły metalu a powierzchnią K sfery o promieniu R, o środku w początku układu współrzędnych. Sfera K obejmuje całą cewkę i metal. W niewielkiej odległości od powierzchni cewki S_c (klasy C_2) rozpinamy powierzchnię "toroidalną" K_c (klasy C_2), która zamyka w swym wnętrzu cewkę, nie obejmując jednak bryły metalu - rys. 2.



Rys. 2

W ten sposób powierzchnia S_c cewki została wyłączona z obszaru całkowania, który, jak widać z rys. 2, jest ograniczony. Płaszczyzna α (rys. 2), o równaniu $z = 0$, dzieli obszar V na dwa podobszary dyfeomorficzne z kulą domkniętą (z wyjątkiem pewnych krzywych leżących na brzegu obszaru).

Ograniczę się tutaj do stwierdzenia, że symetryczny wektorowy wzór Greena (15) zastosowany dla podobszaru (z całką powierzchniową po płaszczyźnie α) można rozszerzyć na cały obszar V z wyeliminowaniem całki po α. Wzór całkowy na potencjał wektorowy wyprowadzony w oparciu o wzór (15), spełniający wewnątrz obszaru V równania (11) i (20) ma postać([1] s. 47)

$$A(X) = \frac{1}{4\pi}\iint_{S+K+K_c} \Big[(A(Y) \times n(Y)) \times \nabla_Y\Big(\frac{1}{r}\Big)_{(X,Y)} + (\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y)\Big(\frac{1}{r}\Big)_{(X,Y)}\Big] dS(Y). \tag{21}$$

W tym przypadku uwzględniono $A.n = 0$. Pole wektorów jednostkowych n we wzorze (21) normalnych do powierzchni $S+K+K_c$, jest skierowane na zewnątrz obszaru V. Rozpatrując potencjał wektorowy A dla obszaru nieskończonego, nakładamy na niego tzw. warunek regularności w nieskończoności. Zakładamy, że jedynym źródłem pola A są powierzchnie S i K_c z prądami (18), (19). Potencjał od tych prądów będzie sumą (21) dwu całek:

$$A_1(X) = \frac{1}{4\pi}\iint_{S+K_c} M(Y) \times \nabla_Y\Big(\frac{1}{r}\Big)_{(X,Y)} dS(Y),$$

$$A_2(X) = \frac{1}{4\pi}\iint_{S+K_c} N(Y)\Big(\frac{1}{r}\Big)_{(X,Y)} dS(Y).$$

Potencjały A_1 i A_2 spełniają w nieskończoności warunek

$$A \in O\Big(\frac{1}{R^2}\Big) \quad \text{dla} \quad R \to \infty, \tag{22}$$

gdzie R - promień sfery K (rys. 2). W przypadku pola A_1 powyższe wynika z własności funkcji podcałkowej ([1] s. 51)

$$\nabla_Y\Big(\frac{1}{r}\Big) \in O\Big(\frac{1}{R^2}\Big) \quad \text{dla} \quad X \to \infty,$$

natomiast warunek (22) dla pola A_2 można wyprowadzić, rozwijając funkcję podcałkową $1/r$ na szereg Maclaurina ([1] s. 53) oraz korzystając z symetrii osiowo-obrotowej pola prądów N (19). Rozwinięcie multipolowe natężenia pola magnetostatycznego

$$H = \frac{1}{\mu} \nabla \times A$$

daje następujące oszacowanie ([1] s. 70)

$$H \in O\left(\frac{1}{R^3}\right) \quad \text{dla} \quad R \to \infty ,$$

czyli

$$(\nabla \times A) \times n \in O\left(\frac{1}{R^3}\right) \quad \text{dla} \quad R \to \infty . \tag{23}$$

Warunki (22), (23) oznaczają, że dla $\hat{R} > R'$ istnieją dwie stałe $const_1$ i $const_2$ oraz:

$$|A| \leqslant \frac{const_1}{R^2}, \qquad |(\nabla \times A) \times n| \leqslant \frac{const_2}{R^3}.$$

Powyższe nierówności wykorzystujemy do oszacowania wielkości całki powierzchniowej po sferze K we wzorze (21). Jeżeli $R \to \infty$, to całka ta maleje do zera. Uwzględniając wzór (21) oraz wyprowadzone nierówności, otrzymujemy:

a) $$\left|(\nabla \times A) \times n\right| \frac{1}{R} \leqslant \frac{const_2}{R^4},$$

b) $$\left|(A \times n) \times \nabla_Y \left(\frac{1}{R}\right)\right| \leqslant \frac{const_1}{R^4} \quad \text{dla} \quad \left|\nabla_Y \left(\frac{1}{R}\right)\right| = \frac{1}{R^2}.$$

c) $$\left|\frac{1}{4\pi} \iint_K \left[(A \times n) \times \nabla_Y \left(\frac{1}{R}\right) + (\nabla \times A) \times n \frac{1}{R}\right] dS\right| \leqslant \frac{1}{4\pi}\left[\frac{const_1}{R^4} + \frac{const_2}{R^4}\right] 4\pi R^2 =$$

$$= \left[\frac{const_1}{R^2} + \frac{const_2}{R^2}\right] \in o(1) \quad \text{dla} \quad R \to \infty . \tag{24}$$

W wyrażeniu (21) odrzucamy więc całkę po sferze K. Rozpatrzmy zachowanie się całki (21) po powierzchni K_c, zamykającej cewkę (rys. 2). Najogólniej w najbliższym otoczeniu powierzchni S_c klasy C_2 można zbudować układ współrzędnych przestrzennych, np. (u^1, u^2, u^3). Para liczb $(\overset{\circ}{u}{}^1, \overset{\circ}{u}{}^2)$ jest dowolnym punktem powierzchni S_c w układzie współrzędnych krzywoliniowych (u^1, u^2), natomiast wersor współrzędnej u^3 ma w punktach powierzchni S_c kierunek wektora n_c jednostkowego, normalnego do S_c. Równania $u^3 = C$ dla $C \in const$, przy różnych wartościach parametru C, wyznaczają rodzinę powierzchni K_c. Przyjmujemy w punktach powierzchni S_c wartość współrzędnej $u^3 = 0$. Całka

(21) liczona po powierzchni K_c (określonej np. wartościami parametrów $C_1 < 0$ i $C_2 > 0$) zdąża przy $C_1, C_2 \to 0$ do całki liczonej po powierzchni S_c. W funkcjach podcałkowych wzoru (21) możemy wtedy określić następujące granice jednostronne:

$(A(Y) \times n(Y))'$, $((\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y))'$ – graniczna wartość składowej stycznej potencjału wektorowego oraz składowej stycznej indukcji elektromagnetycznej na S_c przy zbliżaniu się punktu obliczeń X do $Y \in S_c$ dla $u^3 < 0$

$(A(Y) \times n(Y))''$, $((\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y))''$ – jak wyżej, lecz punkt X zdąża na S_c przy $u^3 > 0$.

Otrzymujemy:

$$(A(Y) \times n(Y))' + (A(Y) \times n(Y))'' = 0, \tag{25}$$

$$((\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y))' + ((\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y))'' = \mu_0 \, I(Y), \tag{26}$$

gdzie μ_0 – przenikalność magnetyczna próżni.
Ściągając powierzchnię K_c we wzorze (21) w sposób opisany powyżej oraz uwzględniając wzory (25), (26) możemy napisać ([4] s. 65)

$$\begin{aligned}
\lim_{u^3 \to 0} \frac{1}{4\pi} \iint_{K_c} \Big[(A(Y) \times n(Y)) \times \nabla_Y \left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} + \\
+ ((\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y)) \left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} \Big] dS(Y) = \\
= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_c} \Big\{ \Big[((\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y))' + ((\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y))'' \Big] \left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} + \\
+ \Big[(A(Y) \times n(Y))' + (A(Y) \times n(Y))'' \Big] \times \nabla_Y \left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} \Big\} dS(Y) = \\
= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_c} \mu_0 I(Y) \left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} dS(Y).
\end{aligned} \tag{27}$$

Wzór (27) określa funkcję ciągłą również dla $X \in S_c$ ([3] s. 214). Po uwzględnieniu wzorów (21), (24), (27) potencjał wektorowy A w obszarze opisującym środowisko powietrzne wyraża się w postaci całki po powierzchni metalu S i cewki S_c

$$H = \frac{1}{\mu} \nabla \times A \quad ,$$

daje następujące oszacowanie ([1] s. 70)

$$H \in O\left(\frac{1}{R^3}\right) \quad \text{dla} \quad R \to \infty \ ,$$

czyli

$$(\nabla \times A) \times n \in O\left(\frac{1}{R^3}\right) \quad \text{dla} \quad R \to \infty \ . \tag{23}$$

Warunki (22), (23) oznaczają, że dla $R > R'$ istnieją dwie stałe $const_1$ i $const_2$ oraz:

$$|A| \leqslant \frac{const_1}{R^2}, \qquad |(\nabla \times A) \times n| \leqslant \frac{const_2}{R^3}.$$

Powyższe nierówności wykorzystujemy do oszacowania wielkości całki powierzchniowej po sferze K we wzorze (21). Jeżeli $R \to \infty$, to całka ta maleje do zera. Uwzględniając wzór (21) oraz wyprowadzone nierówności, otrzymujemy:

a) $\left|(\nabla \times A) \times n\right| \frac{1}{R} \leqslant \dfrac{const_2}{R^4}$,

b) $\left|(A \times n) \times \nabla_Y \left(\frac{1}{R}\right)\right| \leqslant \dfrac{const_1}{R^4}$ dla $\left|\nabla_Y \left(\frac{1}{R}\right)\right| = \dfrac{1}{R^2}$.

c)
$$\left|\frac{1}{4\pi}\iint_K \left[(A \times n) \times \nabla_Y \left(\frac{1}{R}\right) + (\nabla \times A) \times n \frac{1}{R}\right] dS\right| \leqslant \frac{1}{4\pi}\left[\frac{const_1}{R^4} + \frac{const_2}{R^4}\right] 4\pi R^2 =$$

$$= \left[\frac{const_1}{R^2} + \frac{const_2}{R^2}\right] \in o(1) \quad \text{dla} \quad R \to \infty \ . \tag{24}$$

W wyrażeniu (21) odrzucamy więc całkę po sferze K. Rozpatrzmy zachowanie się całki (21) po powierzchni K_c, zamykającej cewkę (rys. 2). Najogólniej w najbliższym otoczeniu powierzchni S_c klasy C_2 można zbudować układ współrzędnych przestrzennych, np. (u^1, u^2, u^3). Para liczb $(\mathring{u}^1, \mathring{u}^2)$ jest dowolnym punktem powierzchni S_c w układzie współrzędnych krzywoliniowych (u^1, u^2), natomiast wersor współrzędnej u^3 ma w punktach powierzchni S_c kierunek wektora n_c jednostkowego, normalnego do S_c. Równania $u^3 = C$ dla $C \in const$, przy różnych wartościach parametru C, wyznaczają rodzinę powierzchni K_c. Przyjmujemy w punktach powierzchni S_c wartość współrzędnej $u^3 = 0$. Całka

(21) liczona po powierzchni K_c (określonej np. wartościami parametrów $C_1 < 0$ i $C_2 > 0$) zdąża przy $C_1, C_2 \to 0$ do całki liczonej po powierzchni S_c. W funkcjach podcałkowych wzoru (21) możemy wtedy określić następujące granice jednostronne:

$$\left.\begin{array}{l}(A(Y) \times n(Y))' \\ ((\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y))'\end{array}\right\}$$ – graniczna wartość składowej stycznej potencjału wektorowego oraz składowej stycznej indukcji elektromagnetycznej na S_c przy zbliżaniu się punktu obliczeń X do $Y \in S_c$ dla $u^3 < 0$

$$\left.\begin{array}{l}(A(Y) \times n(Y))'' \\ ((\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y))''\end{array}\right\}$$ – jak wyżej, lecz punkt X zdąża na S_c przy $u^3 > 0$.

Otrzymujemy:

$$(A(Y) \times n(Y))' + (A(Y) \times n(Y))'' = 0, \tag{25}$$

$$((\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y))' + ((\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y))'' = \mu_0 \, I(Y), \tag{26}$$

gdzie μ_0 – przenikalność magnetyczna próżni.

Ściągając powierzchnię K_c we wzorze (21) w sposób opisany powyżej oraz uwzględniając wzory (25), (26) możemy napisać ([4] s. 65)

$$\lim_{u^3 \to 0} \frac{1}{4\pi} \iint_{K_c} \Big[(A(Y) \times n(Y)) \times \nabla_Y \left(\tfrac{1}{r}\right)_{(X,Y)} +$$

$$+ ((\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y)) \left(\tfrac{1}{r}\right)_{(X,Y)} \Big] dS(Y) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_c} \Big\{ \Big[((\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y))' + ((\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y))'' \Big] \left(\tfrac{1}{r}\right)_{(X,Y)} +$$

$$+ \Big[(A(Y) \times n(Y))' + (A(Y) \times n(Y))'' \Big] \times \nabla_Y \left(\tfrac{1}{r}\right)_{(X,Y)} \Big\} dS(Y) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_c} \mu_0 I(Y) \left(\tfrac{1}{r}\right)_{(X,Y)} dS(Y). \tag{27}$$

Wzór (27) określa funkcję ciągłą również dla $X \in S_c$ ([3] s. 214). Po uwzględnieniu wzorów (21), (24), (27) potencjał wektorowy A w obszarze opisującym środowisko powietrzne wyraża się w postaci całki po powierzchni metalu S i cewki S_c

$$A(X) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \Big[(A(Y) \times n(Y)) \times \nabla_Y \left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} +$$

$$+ ((\nabla \times A)_{(Y)} \times n(Y)) \left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)}\Big] dS(Y) + \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_{S_c} I(Y_c) \frac{dS(Y_c)}{r(X,Y)} \tag{28}$$

Wartości $A \times n$, $(\nabla \times A) \times n$ możemy interpretować jako pola gęstości prądów (18), (19) określone na S.

3. Sformułowanie problemu brzegowego

Określamy granice jednostronne wartości pól elektrycznego, magnetycznego i potencjału wektorowego na S, przy zbliżaniu się punktu obliczeń do punktu powierzchni S metalu:

E_m, H_m, A_m – odpowiednie granice jednostronne w metalu dla $Y \in S$,

E_p, H_p, A_p – jak wyżej, lecz w powietrzu.

Mamy następujące zależności zachodzące dla punktów $Y \in S$:

$$n \times (E_p - E_m) = 0, \tag{29}$$

$$n \times (H_p - H_m) = 0, \tag{30}$$

$$n \cdot (\varepsilon_0 E_p - \varepsilon_m E_m) = 0, \tag{31}$$

gdzie n – pole wektorów jednostkowych normalnych do S, skierowanych na zewnątrz objętości metalu.

Zakładamy, że powierzchniowa gęstość ładunku elektrycznego jest równa zeru (nie interesuję nas zjawiska elektrostatyczne). Uwzględniając (12a), (29) oraz (6), (9), (30), (31), otrzymujemy:

$$n \times A_p - n \times A_m = 0, \tag{32}$$

$$\frac{1}{\mu_0} (\nabla \times A)_p \times n - \frac{1}{\mu_m} (\nabla \times A_m) \times n = 0, \tag{33}$$

$$\varepsilon_0 \, n \cdot A_p - \varepsilon_m \, n \cdot A_m = 0. \tag{34}$$

Obecnie możemy sformułować właściwy tutaj problem brzegowy. Poszukujemy rozwiązania potencjału wektorowego A w przestrzeni na rys. 1, który spełnia:

- w nieskończoności warunki (22), (23),
- wzory (32), (33), (34) dla powierzchni rozgraniczającej metal - powietrze,
- wzory (26), (25) dla punktów powierzchni cewki,
- równania (14), (11) w obszarze zajmowanym przez metal oraz (20) (11) w obszarze opisującym przestrzeń powietrzną (rys. 1).

W celu rozwiązania postawionego problemu zrobiono pierwszy krok, tj. wyprowadzono wzory całkowe (17), (28). W następnej kolejności należałoby:

a) sprawdzić, czy rozwiązania potencjału (17), (28) spełniają poszczególne postulaty problemu brzegowego oraz warunek symetrii osiowo-obrotowej (przypuszczamy, że potencjał wektorowy jest w całej przestrzeni wektorem o wartości modułu stałej względem współrzędnej φ i kierunku współrzędnej φ),

b) udowodnić jednoznaczność i istnienie rozwiązania problemu brzegowego, wykorzystując otrzymane wzory (17), (28).

Zagadnienia te będą tematem następnych publikacji.

LITERATURA

[1] BOCHENEK K.: Metody analizy pól elektromagnetycznych. PWN, Warszawa - Wrocław 1961.

[2] GOŁĄB S.: Rachunek tensorowy. PWN, Warszawa 1966.

[3] MARCINKOWSKA H.: Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych. PWN Warszawa 1972.

[4] SUFFCZYŃSKI M.: Elektrodynamika. PWN, Warszawa 1969.

Wpłynęło do Redakcji w maju 1980 r.

Recenzent:
Doc. dr hab. Marek Brodzki

ПРОБЛЕМА КРАЕВОГО АНАЛИЗА СИНУСОИДАЛЬНО-ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВОЗДУШНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ОБЛАСТИ МЕТАЛЛА

Р е з ю м е

В статье предпринята попытка формулировки краевой задачи в проблеме расчета электромагнетического поля в пространстве с различными средами. Рассмотрен случай воздушного пространства и области металла с вращательной осесимметрией для синусоидально-переменных полей.

BOUNDARY PROBLEM OF THE ANALYSIS OF THE SINUSOIDALLY VARIABLE ELECTROMAGNETIC FIELD IN THE ATMOSPHERE AND METAL VOLUME

S u m m a r y

The paper is an attempt to formulate the boundary problem in the question of electromagnetic field computation in the space of various media. The cases of the atmosphere and area of metals with a an axial-rotating symmetry for sinusoidally variable fields are studied.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981
Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Edward WILCZYŃSKI

Instytut Maszyn i Urządzeń
Przemysłu Hutniczego i Ceramicznego
Politechniki Śląskiej

POTENCJAŁ WEKTOROWY NA GRANICY ŚRODOWISK POWIETRZA I PRZEWODNIKA METALOWEGO; DYSKUSJA POPRAWNOŚCI POSTAWIONEGO PROBLEMU BRZEGOWEGO

Streszczenie. Artykuł jest kontynuacją zagadnienia podjętego w pracy [5]. Przeprowadzono dowód jednoznaczności rozwiązania problemu brzegowego sformułowanego w pracy [5]. Artykuł podaje również interpretację fizyczną pewnego rodzaju gęstości prądów, jakie mogą płynąć na brzegu obszaru.

1. Jednoznaczność rozwiązania potencjału wektorowego w przestrzeni

Problem brzegowy został postawiony w pracy [5] (punkt 3). Sprowadza się on do obliczenia pola potencjału wektorowego w przestrzeni ([5] rys. 1), w układzie cewka - bryła metalu zasilanym prądem o częstotliwości do kilkudziesięciu tys. Hz. Rozpatrujemy stan ustalony sinusoidalnie zmienny. Potencjał wektorowy jest więc wektorową funkcją punktu w przestrzeni trójwymiarowej (zespoloną amplitudą).

Należy udowodnić jednoznaczność rozwiązania problemu brzegowego. Załóżmy, że wbrew naszym przypuszczeniom, istnieją dwa różne rozwiązania potencjału wektorowego A_1 i A_2 w całej przestrzeni ([5] rys. 1). Obie funkcje A_1 i A_2 spełniają identyczne postulaty sformułowanego problemu. Ich różnica

$$A_0 = A_1 - A_2$$

spełnia w obszarze zajmowanym przez metal równania [5] (11), (14) i w obszarze odpowiadającym przestrzeni powietrznej (11), (20). Jeżeli udowodnimy, że funkcja A_0 znika tożsamościowo w całej przestrzeni, to dowód jednoznaczności będzie zakończony. Wykorzystamy wektorowy niesymetryczny wzór Greena dla potencjału wektorowego A i sprzężonej wartości A^*, w przypadku obszaru V_m metalu i V_p powietrza (uwzględniając odpowiednio wzory [5] (14), (20) oraz znikanie całki po sferze K dla $R \to \infty$, ([5] rys. 2)). W przypadku powierzchni cewki zastosujemy powierzchnię K_c (identycznie, jak przy wyprowadzaniu wzoru [5] (27)). Całka powierzchniowa po K_c sprowadzi się do dwukrotnego całkowania po obu stronach powierzchni cewki S_c. Otrzymujemy dla obszaru Vm zajmowanego przez metal

$$\iiint_{V_m} (|\nabla \times A|^2 - k^2|A|^2)dV = \iint_S (A^* \times (\nabla \times A)_m) \cdot n_m dS \tag{1}$$

oraz obszaru Vp opisującego przestrzeń powietrzną

$$\iiint_{V_p} |\nabla \times A|^2 \, dV = \iint_S (A^* \times (\nabla \times A)_p) \cdot n_p dS +$$

$$+ \iint_{S_c} \left[(A^* \times (\nabla \times A)') \cdot n' + (A^* \times (\nabla \times A)'') \cdot n''\right] dS_c . \tag{2}$$

W związku z nieciągłością wektora rotacji potencjału na S i S_c, odpowiednie granice jednostronne wartości w obszarach V_m i V_p oznaczono indeksem "m" i "p", a po obu stronach cewki i'' (identycznie, jak w pracy [5] (25), (26)).

Prawe strony równań (1), (2) przekształcamy wg wzoru

$$(A \times B) . C = A . (B \times C) = B . (C \times A). \tag{3}$$

Dodatkowo, w przypadku całki powierzchniowej, we wzorze (1) wykorzystujemy zależność [5] (33)

$$\iint_S (A^* \times (\nabla \times A)_m) \cdot n_m dS = \iint_S A^* . ((\nabla \times A)_m \times n_m) dS =$$

$$= \iint_S A^* . \left(-\frac{\mu_m}{\mu_o} (\nabla \times A)_p \times n_p\right) dS = -\frac{\mu_m}{\mu_o} \iint_S (A^* \times (\nabla \times A)_p) \cdot n_p dS.$$

Uwzględniając powyższe możemy do równania (2), zamiast całki powierzchniowej po S, wprowadzić całkę objętościową z równania (1). Dodatkowo wykorzystujemy w przypadku całki po S_c wzory (3) i [5] (26). Otrzymujemy

$$\iiint_{V_p} |\nabla \times A|^2 \, dV - \iint_{S_c} A^* . \mu_o I dS = -\frac{\mu_o}{\mu_m} \iiint_{V_m} (|\nabla \times A|^2 - k^2|A|^2) dV. \tag{4}$$

Gdyby rozwiązanie potencjału było wewnątrz obszarów V_m i V_p niejednoznaczne, to różnice dwu rozwiązań A_o też spełniałaby równość (4), z uwzględnieniem, że w całce po lewej stronie we wzorze (4) należałoby przyjąć $I = 0$ (funkcja A_o spełnia równość [5] (26) a równocześnie $I = 0$).

Ze wzoru (4) wynika również, że funkcja A_o spełnia:

- w obszarze V_m równanie

$$A_o = 0 \tag{5}$$

a więc i

$$\nabla \times A_o = 0, \tag{6}$$

- w obszarze V_p

$$\nabla \times A_o = 0. \tag{7}$$

W przeciwnym wypadku nie zachodziłaby równość części rzeczywistej i urojonej obu stron zależności (4). Powyższe oznacza, że wektor A_o można w obszarze V_p przedstawić jako

$$A_o = -\nabla \varphi_o. \tag{8}$$

Ze wzorów (5), [5] (22), (34) wynikają dla $\nabla \varphi$ następujące wartości graniczne:

$$\frac{\partial \varphi_o}{\partial n} = 0 \quad \text{(dla punktów powierzchni S)} \tag{9}$$

oraz w nieskończoności

$$\nabla \varphi_o \in O\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad R \to \infty \ . \tag{10}$$

Jak wynika ze wzorów (8) i [5] (11) funkcja φ_o jest harmoniczna. Z powyższego oraz z warunków (9) i (10) wynika dla zewnętrznego problemu Neumanna zerowanie się funkcji φ_o, a więc i A_o (8), [1] s. 52. Uwzględniając (8), (9), (10) oraz (5) możemy stwierdzić, że jeżli rozwiązanie przedstawionego w pracy [5] problemu brzegowego istnieje, to jest jednoznaczne.

2. Sprawdzenie rozwiązań potencjału wektorowego [5] pod kątem spełniania postulatów problemu brzegowego [5]

Obecnie będziemy się starali wykazać, że uzyskane w pracy [5]wzory całkowe (17), (28) spełniają w przestrzeni żądane równania różniczkowe [5] (11), (14), (20). Pola gęstości M i N [5], (18), (19) (klasy C_o) są styczne do powierzchni S metalu (iloczyny wektorowe, w których jednym z czynników jest wektor n). Wartość modułu pól wektorowych M i N należy do klasy funkcji stałych przy zmianie współrzędnej φ (pole N ma kierunek współrzędnej φ a M prostopadły do φ).

Z twierdzeń podanych w pracach [3] s. 212, 214, [4] s. 319, 462 wynika, że przy obliczaniu pochodnych potencjałów [5] (17), (28) dla $X \neq Y$ można przenieść różniczkowanie pod znak całki. Przykładowo, uwzględniając zależność

$$\nabla_Y\left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} = -\nabla_X\left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)}$$

potencjał od gęstości M [5] (18) w całce [5] (28) jest sumą wektorową pochodnych potencjału warstwy pojedynczej, będącego funkcją klasy C_∞ dla $X \neq Y$ ([3] s. 214). Obliczamy dywergencję potencjału [5] (17) (uwzględniając wzory (13), (14), (15))

$$\nabla_X \cdot A = \frac{1}{4\pi}\iint_S \nabla_X \cdot (M \times \nabla_Y v)dS + \frac{1}{4\pi}\iint_S \nabla_X \cdot (Nv)dS = 0, \qquad (11)$$

gdzie:

a) $v_{(X,Y)} = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)_{(X,Y)}$,

b) $\nabla_X \cdot (M \times \nabla_Y v) = M \cdot (\nabla_X \times (\nabla_X v)) - \nabla_X v \cdot (\nabla_X \times M) = 0 \qquad (11a)$

c) $\frac{1}{4\pi}\iint_S \nabla_X \cdot (Nv)dS = -\frac{1}{4\pi}\iint_S N \cdot (\nabla_Y v)dS =$

$$= -\frac{1}{4\pi}\iint_S |N|(\nabla_Y v) \cdot t\, dS = \frac{-1}{4\pi}\int_L (|N|\int_0^{2\pi} (\nabla_Y v) \cdot tR d\varphi)dl = 0 \qquad (11b)$$

d) $N = |N|t$, $t(Y)$ – wektor jednostkowy o kierunku współrzędnej φ, L – krzywa powstała z przecięcia się półpłaszczyzny $\varphi = 0$ z powierzchnią S.

Przy obliczaniu całki iterowanej względem współrzędnej φ w wyrażeniu 11b) funkcja $|N|$ jako stała (wg przyjętych założeń) może być wyprowadzona przed znak całki. Korzystamy następnie z własności całki krzywoliniowej

$$\oint_C \nabla v . t dt = 0,$$

gdzie:

C – krzywa zamknięta,

t – wektor jednostkowy styczny do C.

Na podstawie powyższego stwierdzamy, że całka [5] (17) spełnia równanie [5] (11) w obszarze Vm opisującym bryłę metalu, a [5] (28) spełnia [5] (11) w obszarze Vp odpowiadającym przestrzeni powietrznej. Przy obliczaniu dywergencji potencjału [5] (28) mamy, w porównaniu z [5] (17), dodatkową całkę po powierzchni cewki o identycznych własnościach, jak wyrażenie (11b). W zależności (11), jak i dalej, rozszerzamy funkcje M i N do określonych jako stałe względem punktu X. Od rozszerzenia tego nie zależy określenie funkcji A wzorami [5] (17), (28).

Przystępujemy do sprawdzenia czy wzór [5] (17) spełnia równanie [5] (14). Obliczamy rotację z potencjału [5] (17)

$$\nabla_X \times A = \frac{1}{4\pi} \iint_S \nabla_X \times (M \times \nabla_Y v) dS + \frac{1}{4\pi} \iint_S \nabla_X \times (Nv) dS \tag{12}$$

gdzie punkt X należy do obszaru metalu (zbiór spójny i otwarty), a $Y \in S$ Korzystając ze wzorów:

$$\nabla \times (A \times B) = A \nabla . B - B \nabla . A + (B . \nabla) A - (A . \nabla) B, \tag{13}$$

$$\nabla (A . B) = (A . \nabla) B + (B . \nabla) A + A \times (\nabla \times B) + B \times (\nabla \times A), \tag{14}$$

$$\nabla \times (\varphi A) = \nabla \varphi \times A + \varphi \nabla \times A, \tag{15}$$

otrzymujemy

$$\nabla_X \times (M \times \nabla_Y v) = k^2 Mv - \nabla_X (M . (\nabla_Y v)), \tag{16}$$

$$\nabla_X \times (Nv) = \nabla_X v \times N. \tag{17}$$

Ponieważ interesuje nas $\nabla \times \nabla \times A$ wyrażenia [5] (17), należy obliczyć rotację funkcji podcałkowych (16), (17). Zachodzi (uwzględniając wzory (13), (14), (15)):

$$\nabla_X \times (\nabla_X \times (M \times \nabla_Y v)) = k^2 \nabla_X v \times M = k^2 M \times \nabla_Y v, \tag{18}$$

$$\nabla_X \times (\nabla_X \times (Nv)) = k^2 Nv + \nabla_X (N . (\nabla_X v)). \tag{19}$$

Zależności (16), (19) uzyskano, wykorzystując tożsamość (13) (w przypadku wzoru (19) skorzystano pośrednio ze wzoru (17)). Drugie człony sum (16), (19) są wynikiem dodatkowego przekształcenia wg wzoru (14)

$$-(M . \nabla_X) \nabla_X v = - \nabla_X (M . \nabla_X v).$$

Przy obliczaniu wyrażenia $\nabla \times \nabla \times A$ z potencjału [5] (17) wykorzystujemy wzory (18), (19)

$$\nabla_X \times \nabla_X \times A = k^2\left(\frac{1}{4\pi}\iint_S M \times \nabla_Y v dS + \frac{1}{4\pi}\iint_S N v dS\right) +$$

$$+ \nabla_X\left(\frac{1}{4\pi}\iint_S N \cdot (\nabla_X v) dS\right). \tag{20}$$

Uwzględniając wzory (11b) i [5] (17), równość (20) przyjmuje postać

$$\nabla_X \times \nabla_X \times A = k^2 A + \nabla_X\left[\nabla_X \cdot \left(\frac{1}{4\pi}\iint_S N v dS\right)\right] = k^2 A. \tag{21}$$

Wzór (21) jest identyczny z [5] (14), co wskazuje, że funkcja [5] (17) spełnia go tożsamościowo.

W wyrażeniu [5] (28) w porównaniu z [5] (17) współczynnik k^2 równy jest zeru. Operacja ∇x ∇x A z potencjału [5] (28) (uwzględniając wzory (13), (14), (15)) przyjmuje następującą postać

$$\nabla_X \times \nabla_X \times A = \nabla_X\left[\frac{1}{4\pi}\iint_S N \cdot \nabla_X\left(\frac{1}{r}\right) dS + \frac{1}{4\pi}\iint_{S_c} \mu_0 I \cdot \nabla_X\left(\frac{1}{r_c}\right) dS_c\right] = 0.$$

Funkcja w nawiasie kwadratowym posiada identyczne własności jak (11b), a więc równa się zeru. Wyrażenie [5] (28) spełnia w przestrzeni powietrznej równanie różniczkowe [5] (20).

3. Interpretacja fizyczna pól gęstości prądów M i N

Poszczególne całki występujące w równaniach [5] (17), (28) mają ciekawą interpretację fizyczną. Rozważmy powierzchnię Σ z pętlami prądów z określoną na niej powierzchniową gęstością momentu magnetycznego M_s [2]. Potencjał wektorowy od takiej powierzchni wyraża się wzorem ([2] s. 222)

$$A(X) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_\Sigma \nabla_X\left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} \times M_s \, dS(Y). \tag{22}$$

Porównując wyrażenia [5] (17), (28) z (22) dochodzimy do wniosku, że pole gęstości warstwy pętli prądu M [5] (18) jest pojęciem analogicznym, jeżeli chodzi o wywoływane skutki, z powierzchniową gęstością momentu magnetycznego M_s

$$M = \mu_0 M_s. \tag{23}$$

Różnica polega jedynie na tym, że wektor M jest styczny do powierzchni S a wektor M_s we wzorze (22) prostopadły do Σ. Zależność (23) tłumaczy przyjętą wcześniej nazwę wektora gęstości warstwy pętli prądu M [5] (18). Gęstość warstwy pojedynczej prądu [5] (19), określona na powierzchni S metalu, jest równa

$$N = \mu I, \tag{24}$$

gdzie: μ - przenikalność magnetyczna środowiska, I - gęstość powierzchniowa prądu.

Nazwę gęstości warstwy pojedynczej prądu N przyjęto specjalnie w odróżnieniu od gęstości warstwy podwójnej prądu L, którą zdefiniujemy obecnie. Przekształćmy w tym celu całki w wyrażeniach [5] (17), (28) związane z wektorem M, wykorzystując tożsamość wektorową

$$A \times (B \times C) = (A.C)B - (A.B)C. \tag{25}$$

Otrzymujemy

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S (A \times n)\times(\nabla_Y v)dS = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \frac{\partial v}{\partial t} L_{\perp}dS + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \frac{\partial v}{\partial n} L_{||}dS \tag{26}$$

gdzie:

$$v = \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)_{(X,Y)} \quad \text{w przypadku wzoru [5] (17),} \tag{27}$$

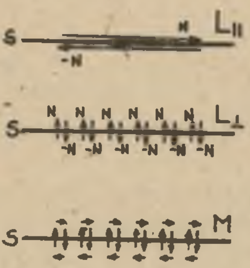
$$v = \left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} \quad \text{w przypadku wzoru [5] (28),} \tag{28}$$

$$L_{\perp} = |A|n, \tag{29}$$

$$L_{||} = -A, \tag{30}$$

t - pole wektorów jednostkowych o kierunku potencjału A (w tym przypadku pole wersorów współrzędnej φ).

W prawej stronie wzoru (26) rozpoznajemy całki podobne do wyrażeń związanych z warstwą podwójną ładunku elektrycznego. W związku z powyższym funkcje wektorowe $L_{\perp}$ (29) i $L_{||}$(30), określone na S, otrzymują nazwę gęstości warstwy podwójnej prądu elektrycznego. Przypuszczamy, że całka (26) z funkcją $L_{||}$(30) przedstawia potencjał od warstwy podwójnej prądu, na której gęstości powierzchniowe prądów I (24) są wektorami równoległymi do powierzchni S - rys. 1, (stąd indeks "||" we wzorze (30)). W związku z powyższym rozumowaniem, całka (26) z funkcją $L_{\perp}$ (29) przedstawia potencjał od szeregu warstw podwójnych prądu prostopadłych do powierzchni S, określonych na S - rys. 1 (stąd indeks "$\perp$" we wzorze (29)). Logicznym wnioskiem wynikającym ze wzoru (26) i rys. 1 jest fakt, że suma potencjałów warstwy prądów o gęstościach L_T (29) i $L_{||}$ (30) daje potencjał od gęstości warstwy pętli prądów M (23) (rys. 1).



Rys. 1

Aby powyższe nie było tylko przypuszczeniem, wyprowadzimy pewien związek łączący gęstość warstwy podwójnej prądu $L_{||}$ z rzeczywistymi gęstościami warstwy pojedynczej prądu N (24). Załóżmy, że mamy dwa elementarne, identyczne płaty powierzchni $dS_1(Y_1)$ i $dS_2(Y_2)$, równoległe i odległe od siebie o Δn. Odległość Δn oraz wymiary liniowe płata dS są dużo mniejsze od minimalnych promieni krzywizny powierzchni S_1 i S_2 w punktach obliczeń Y_1 i Y_2 (powierzchnie S_1 i S_2 są klasy C_2). W punkcie Y_1 na S_1 określam wektor gęstości warstwy pojedynczej prądu N (24), naprzeciwko zaś w Y_2 na S_2 gęstość z przeciwnym znakiem, tj. $-N$. Potencjał liczony w dość dużej odległości w porównaniu z Δn, oddzielnie od płatów dS_1 i dS_2, w przestrzeni powietrznej wynosi:

$$dA(X) = \frac{1}{4\pi} N \frac{dS_1(Y_1)}{r_1(X,Y_1)} - \frac{1}{4\pi} N \frac{dS_2(Y_2)}{r_2(X,Y_2)} =$$

$$= \frac{1}{4\pi} N(\Delta n) \frac{\Delta n}{\Delta n} \left(\frac{1}{r_1(X,Y_1)} - \frac{1}{r_2(X,Y_2)}\right) dS(Y) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} N(\Delta n)\, \Delta n \, \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} dS(Y), \qquad (31)$$

gdzie:

- n – wektor jednostkowy prostopadły do S_1, S_2 skierowany od dS_2 do dS_1,
- $r(X,Y_1)$ – odległość punktów X i Y_1,
- Y – punkt leżący na odcinku $Y_1 - Y_2$.

Zastosowano tutaj twierdzenie o wartości średniej pochodnej $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)$ w punkcie Y odcinka $Y_1 - Y_2$. Wyrażenie (31) jest analogiczne z drugą całką prawej strony równości (26), przy czym zakładamy istnienie następującej granicy

$$L_{||} = \lim_{\Delta n \to 0} N(\Delta n)\, \Delta n. \qquad (32)$$

(gęstość warstwy pojedynczej prądu $N(\Delta n)$ jest funkcją odległości Δn).

Tak więc gęstość warstwy podwójnej prądu $L_{||}$ ma związek z dwiema warstwami rzeczywistych gęstości powierzchniowych prądu I (24) równoodległych od S, o przeciwnych kierunkach prądu - rys. 1.

LITERATURA

[1] BOCHENEK K.: Metody analizy pól elektromagnetycznych. PWN Warszawa - Wrocław 1961.

[2] LITWIN R.: Teoria pola elektromagnetycznego. WNT Warszawa 1973.

[3] MARCINKOWSKA H.: Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych.PWN Warszawa 1972.

[4] TICHONOW A.N., SAMARSKI A.A.: Równania fizyki matematycznej. PWN Warszawa 1963.

[5] WILCZYŃSKI E.: Problem brzegowy analizy pola elektromagnetycznego sinusoidalnie zmiennego w przestrzeni powietrznej i objętości metalu. Zeszyty Nauk. Polit. Śl. Elektryka z. 75, 1981.

Recenzent: Doc. dr hab. Marek Brodzki

Wpłynęło do Redakcji w maju 1980

ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ НА ГРАНИЦЕ ВОЗДУШНОЙ СРЕДЫ И МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ПРОВОДНИКА, ДИСКУССИЯ О ПРАВИЛЬНОСТИ ПОСТАВЛЕННОЙ КРАЕВОЙ ПРОБЛЕММЫ

Р е з ю м е

Статья является продолжением исследования проблемы, предпринятого в работе [5]. Произведено доказательство однозначности решения сформулированной в работе [5] краевой задачи. Статья содержит тоже физическую интерпретацию некоторого рода плотности токов, которые могут протекать на краю области.

THE ATMOSPHERE AND THE COND
CORRECTNESS OF THE ACCEPTED

THE VECTOR POTENTIAL ON THE BOUNDARY OF THE TWO MEDIA THE ATMOSPHERE AND THE CONDUCTOR; DISCUSSION OVER THE CORRECTNESS OF THE ACCEPTED BOUNDARY PROBLEM

S u m m a r y

The paper is a follow-up problem taken up in the reference [5]. It has been proved that there is an explicit solution of the boundary problem formulated in the reference [5]. The paper also present the physical interpretation of a certain type of current density which can flow on the boundary of the area.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Edward WILCZYŃSKI

Instytut Maszyn i Urządzeń
Przemysłu Hutniczego i Ceramicznego
Politechniki Śląskiej

ZAGADNIENIE ISTNIENIA ROZWIĄZANIA PROBLEMU BRZEGOWEGO ANALIZY POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO W PRZESTRZENI POWIETRZNEJ I OBJĘTOŚCI METALU

Streszczenie. Artykuł wiąże się z tematyką prac [4], [5]. W dalszym ciągu przeprowadza się dyskusję poprawności problemu brzegowego postawionego w pracy [4]. Zaistniała konieczność dokładnego sprecyzowania wszystkich nieregularności wzorów całkowych przedstawionych w pracy [4]. Uzyskany układ równań całkowych jest punktem wyjścia w zagadnieniu istnienia rozwiązania problemu brzegowego.

1. Równania potencjału wektorowego w przestrzeni

Potencjał wektorowy A obliczamy w przestrzeni [4] (rys. 1). Przypuszczamy, że uzyskane wzory całkowe [4] (17) (28) potencjału A pozwolą na rozwiązanie sformułowanego w pracy [4] problemu brzegowego. Ze wzorami tymi związane są powierzchniowe pola gęstości warstwy pojedynczej i podwójnej prądów M i N [4] (18), (19):

$$M = A \times n, \tag{1}$$

$$N = (\nabla \times A) \times n. \tag{2}$$

Ich interpretację fizyczną oraz związek z rzeczywistymi gęstościami prądów powierzchniowych opisano w pracy [5], punkt 3. Z warunku symetrii osiowo-obrotowej potencjału wektorowego A ([4], punkt 3), wynikają warunki symetrii dla pól gęstości M (1) i N (2), ([5], punkt 2).

W pracy [5] zdefiniowano również powierzchniowe pola gęstości warstwy podwójnej prądów $L_{\perp}$ i $L_{\parallel}$ ([5] (29), (30)):

$$L_{\perp} = |A|\, n, \tag{3}$$

$$L_{\parallel} = -A. \tag{4}$$

Wielkości (3), (4) związane są z gęstością prądu M (1), [5]. Zakładamy, że pola (3), (4) klasy C_0 należą do klasy funkcji stałych przy zmianie współrzędnej φ (pole $L_{\parallel}$ ma kierunek współrzędnej φ a $L_{\perp}$ kierunek pola wektorów normalnych do S). Przepiszemy wzory całkowe [4] (17), (28), wykorzystując zależność [5] (26) oraz zdefiniowane wielkości (2), (3), (4):

$$A(X) = \frac{1}{4\pi}\iint_S L_{\perp}(Y)\,\frac{\partial}{\partial t_{(Y)}}\left(\frac{e^{-jrk}}{r}\right)_{(X,Y)} dS(Y) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\iint_S L_{\parallel}(Y)\,\frac{\partial}{\partial n_{(Y)}}\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)_{(X,Y)} dS(Y) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\iint_S N_m(Y)\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)_{(X,Y)} dS(Y), \tag{5}$$

$$A(X) = \frac{1}{4\pi}\iint_S L_{\perp}(Y)\,\frac{\partial}{\partial t_{(Y)}}\left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} dS(Y) + \frac{1}{4\pi}\iint_S N_p(Y)\,\frac{dS(Y)}{r(X,Y)} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\iint_S L_{\parallel}(Y)\,\frac{\partial}{\partial n_{(Y)}}\left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} dS(Y) + \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_{S_c} I(Y_c)\left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y_c)} dS(Y_c). \tag{6}$$

Pole gęstości warstwy pojedynczej prądu N_m we wzorze (5) jest wartością graniczną rotacji potencjału (2) w punkcie $Y \in S$, przy zbliżaniu się punktu obliczeń Y do S z wnętrza obszaru metalu, natomiast N_p we wzorze (6) wartością graniczną przy zbliżaniu się punktu Y do S z przestrzeni powietrznej. Wzór (5) podaje rozkład potencjału wewnątrz metalu a (6) w przestrzeni powietrznej.

2. Regularność wzorów całkowych (5), (6) w przestrzeni

Funkcja [5] (28) jest tzw. rozwiązaniem podstawowym równania skalarnego Laplace'a [5] (27) rozwiązaniem podstawowym równania jednorodnego Helmholza. Dla punktów $X \neq Y$ rozwiązania podstawowe [5] (27), (28) są funkcjami analitycznymi. Zakładamy, że gęstości $L_{\perp}$, $L_{\parallel}$, N_m, N_p są klasy C_0. Tak więc funkcje podcałkowe we wzorach (5) i (6) są również funkcjami analitycznymi względem punktu $X \neq Y \in S$. Na podstawie powyższego oraz twierdzeń odnośnie klasy ciągłości potencjału warstwy pojedynczej i podwójnej ([1] s. 212, 214) twierdzimy, że funkcje (5), (6) są klasy C_{∞} w zbiorze $R^3 - S + S_c$. Jeżeli chodzi o kwestię regularności rozwiązań (5), (6), przy zbliżaniu się punktu obliczeń X do powierzchni S, istnieją twierdzenia dotyczące zastosowań teorii potencjału przy rozwiązywaniu równań różniczkowych cząstkowych eliptycznych drugiego stopnia [3]. Całki we wzorach (5), (6) o gęstościach $1/4\pi N_m$, $1/4\pi N_p$, $1/4\pi\mu_o I$ mają charakter tzw. potencjału warstwy pojedynczej. Posiadają następujące własności [3], s. 319, 462:

- poza punktami powierzchni S potencjał warstwy pojedynczej spełnia w przestrzeni odpowiednie równanie jednorodne [4] (14) lub (20) (funkcja klasy C_∞),
- potencjał jest określony w punktach powierzchni S jako całka niewłaściwa bezwzględnie zbieżna i jest funkcją ciągłą w całej przestrzeni.

Całki we wzorach (5), (6) o gęstościach $1/4\pi L_{\parallel}$ mają charakter potencjałów warstwy podwójnej W(X) o następujących własnościach ([3], s. 316,461):

- poza punktami powierzchni S potencjał W(X) spełnia w przestrzeni odpowiednie równanie jednorodne [4] (14) lub (20) (funkcja klasy C_∞),
- całka jest zbieżna w punktach brzegu, jeżeli powierzchnia S jest klasy C_2,
- funkcja W(X) ma skok w punktach powierzchni S i zachodzą związki:

$$\left.\begin{aligned} W_w(X_o) &= W(X_o) + 2\pi\frac{L_{\parallel}(X_o)}{4\pi} \\ W_z(X_o) &= W(X_o) - 2\pi\frac{L_{\parallel}(X_o)}{4\pi} \end{aligned}\right\}, \tag{7}$$

gdzie:

$\frac{L_{\parallel}(X_o)}{4\pi}$ - gęstość warstwy podwójnej,

$W_w(X_o)$ - wartość graniczna potencjału przy dążeniu punktu X do X_o z wnętrza obszaru,

$W_z(X_o)$ - jak wyżej tylko z zewnątrz,

$$W(X_o) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S L_{\parallel}(Y)\,\frac{\partial v(X,Y)}{\partial n}\,dS(Y), \tag{8}$$

v(X,Y) - funkcje [5] (27) lub (28),

n - pole wektorów jednostkowych, normalnych, skierowanych do wnętrza obszaru,

S - brzeg obszaru ograniczonego, spełniającego dla pewnej naturalnej liczby k warunek (W_k) [1], s. 212,

$W_w, W_z, W, L_{\parallel}$ - funkcje wektorowe o współrzędnych skalarnych.

Pozostał problem regularności potencjałów z gęstością $L_{\perp}$ we wzorach (5), (6). Jak wspomniano powyżej są to funkcje ciągłe w przestrzeni poza brzegiem S obszaru. Należy określić potencjał (5), (6) od gęstości $L_{\perp}$ w punktach $X \in S$. Wektor $L_{\perp}$ określony na powierzchni S w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, posiada najogólniej trzy skalarne składowe. Potencjał $V(X)$ od jednej takiej składowej, np. λ, w przypadku wzoru (6) przyjmie postać (dla $X \neq Y$)

$$V(X) = \iint_S \lambda(Y) \frac{\partial}{\partial t_{(Y)}}\left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} dS(Y). \tag{9}$$

Potencjał wektorowy od gęstości $L_{\perp}$ we wzorze (6) jest więc wektorem o współrzędnych typu (9), określonych względem trzech osi przyjętego układu współrzędnych. Nieregularności potencjału (9) od gęstości λ dotyczą w takim samym stopniu potencjału od gęstości $L_{\perp}$. Oprzemy się tutaj na wynikach pracy [2] odnośnie potencjału

$$U(X) = \iint_S \lambda(Y)\left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} dS(Y). \tag{10}$$

Określając w pobliżu powierzchni S pole (10) oraz jego pochodne przestrzenne, zakładano, że S składa się ze skończonej ilości płatów analitycznych oraz $\lambda(Y)$ również jest funkcją analityczną [2]. Przy tych założeniach Prof. E. Martensen [2] udowodnił istnienie na S lokalnych współrzędnych (φ,σ), nazwanych w pracy [2] M-współrzędnymi. Postaramy się zdefiniować te współrzędne w dostatecznie małym otoczeniu punktu P_0, leżącego wewnątrz płata S. Jeżeli z punktu P_0 zatoczymy sferę S_σ o promieniu σ dostatecznie małym, to wspólna część $S \cap S_\sigma$ utworzy dla $0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0$ jednoparametrową rodzinę krzywych zamkniętych. Przyjmujemy na płaszczyźnie stycznej π_0 do S w P_0 pewien ustalony kierunek oraz wektor jednostkowy $\bar{e}$, tworzący z tym kierunkiem kąt φ. Wektor $\bar{e}$ wyznacza ortogonalną trajektorię rodziny krzywych $S \cap S_\sigma$. M-współrzędne (φ,σ) opisują jednoznacznie każdy punkt $P \in S$ otoczenia punktu P_0 dla $0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0$.

Tak jak w pracy [2] musimy założyć, że gęstość λ we wzorze (9) jest funkcją analityczną, a powierzchnia S metalu - powierzchnią analityczną. W punkcie $P_0 \in S$ (w granicach sfery S_σ) wprowadzamy M-współrzędne (φ,σ). Sfera S_σ wycina wokół punktu P_0 płatek S^σ powierzchni S. Uwzględniając powyższe można udowodnić, że:

- potencjał (9) od gęstości λ jest funkcją ciągłą dla $X \neq Y \in S$,
- przy zdążaniu punktu X do $P_0 \in S$ po prostej nachylonej pod pewnym kątem do wektora $n(P_0)$ normalnego do S, potencjał (9) w P_0 jest również funkcją ciągłą, niezależnie od kąta nachylenia tej prostej,
- wartość potencjału (9) w P_0 jest określona w sensie wartości głównej Cauchy'ego (pierwsza część wzoru (11) dla $\sigma \to 0$, $S^\sigma \to 0$).

Potencjał (9) dla punktu $P_0 \in S$ liczymy oddzielnie dla powierzchni $S-S^\sigma$ i S^σ. Otrzymujemy

$$V(P_o) = \iint\limits_{S-S^G} \lambda(Y) \frac{\partial}{\partial t_{(Y)}}\left(\frac{1}{r}\right)_{(P_o,Y)} dS(Y) -$$

$$-\pi t \cdot (\lambda g^{si} \Gamma^j_{ij} \bar{r}_{|s} + \nabla\lambda)G + O(G^2) \qquad (11)$$

Dla promienia $G \to 0$ płatek S^G oraz druga część wzoru (11) dążą do zera. Wielkości $g^{si}, \Gamma^j_{ij}, \bar{r}_{|s}$ oznaczają odpowiednio tensor odwrotny podstawowego tensora płata S, symbol Christoffela oraz pochodną cząstkową wektora wodzącego powierzchni S względem współrzędnych parametrycznych płata S. Szczegółowy dowód powyższego twierdzenia zostanie przedstawiony w innej publikacji. Biorąc pod uwagę wynik (11) możemy stwierdzić, że potencjał wektorowy (5), (6) od gęstości wektorowej $L_\perp(Y)$, będącej superpozycję skalarnych gęstości typu $\lambda(Y)$, należy uznać ciągłym dla punktów $X \in S$

3. Sprawdzenie rozwiązań potencjału wektorowego (5), (5) pod kątem spełniania postulatów problemu brzegowego

Obecnie wykażemy, że rozwiązania (5), (6) spełniają założone w problemie brzegowym ([4] punkt 3) warunki brzegowe ([4] (25), (26)) na powierzchni S_c cewki. Wektor jednostkowy n, normalny do S_c, we wzorach [4] (25) (26) posiada zwrot w kierunku do powierzchni cewki (w wielkościach oznaczonych znaczkiem ' jak i ''). Jak wynika z rozważań punktu 2, potencjały (5), (6) są funkcjami ciągłymi w całej przestrzeni, z wyjątkiem punktów powierzchni S metalu, a więc spełniają w punktach $P_o \in S_c$ warunek [4] (25). Nieciągłość pola indukcji elektromagnetycznej określona warunkiem [4] (26) ma związek z potencjałem A we wzorze (6)

$$A_c(X) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iint\limits_{S_c} I(Y)\left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} dS(Y). \qquad (12)$$

Pozostałe całki wzoru (6) należą do klasy C_∞ dla $X \in S_c$ - punkt 2. Jak wynika z uwag w pracy [5], punkt 2, przy obliczaniu pochodnej z potencjału (12) możemy przenieść różniczkowanie pod znak całki (dla $X \neq Y \in S_c$). Obliczamy wyrażenie $(\nabla_X \times A_c) \times n(P_o)$ potencjału (12), korzystając ze wzorów [5] (15), (25):

$$\nabla_X \times A_c(X) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iint\limits_{S_c} \left[\nabla_X\left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)}\right] \times I(Y)\, dS(Y);$$

$$(\nabla_X \times A_c(X)) \times n(P_o) = \frac{\mu_o}{4\pi}\iint_{S_c}\left[\nabla_X\left(\frac{1}{r}\right) \times I(Y)\right] \times n(P_o)\, dS(Y) =$$

$$= \frac{\mu_o}{4\pi}\iint_{S_c} I(Y)\,\frac{\partial}{\partial n(P_o)}\left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)} dS(Y) = \frac{\partial A_c(X)}{\partial n(P_o)}. \tag{13}$$

Pochodną (13) obliczamy w punkcie X nie leżącym na S_c, w dostatecznie małym otoczeniu punktu $P_o \in S_c$, w którym określono stałe pole wektorów normalnych, jednostkowych $n(P_o)$. Własności pochodnej w kierunku normalnym do S_c (13) potencjału (12), określa twierdzenie podane w pracy [1] s. 220. Dotyczy ono potencjału warstwy pojedynczej $V(X)$

$$V(X) = \iint_{S_c} \mu(Y)\, E(X-Y)\, dS_c(Y) =$$

$$= \iint_{S_c}\left[-\mu_o I(Y)\right]\left[-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r}\right)_{(X,Y)}\right] dS_c(Y) = A_c(X) \tag{12a}$$

z gęstością powierzchniową $\mu = -\mu_o I(Y)$, która w naszym przypadku jest funkcją wektorową. Jeszcze raz podkreślamy, że pole $n(P_o)$ we wzorze (13) definiujemy identycznie, jak w warunkach [4] (25), (26), tj. po obu stronach cewki wektor $n(P_o)$ zwrócony jest w kierunku powierzchni S_c (inaczej niż w twierdzeniu podanym w pracy [1], s. 220, gdzie wektor $n(y)$ ma taki sam zwrot po obu stronach powierzchni). Zależność [4] (26) przyjmie postać (uwzględniając wzór (13) oraz twierdzenie [1], s. 220)

$$\left(\frac{\partial A_c}{\partial n(P)}\right)' + \left(\frac{\partial A_c}{\partial n(P)}\right)'' = \left(\frac{\partial V}{\partial n^{(w)}}\right) - \left(\frac{\partial V}{\partial n^{(z)}}\right) = -\mu = \mu_o I(Y) \tag{14}$$

Przewidywane rozwiązania (5), (6) potencjału wektorowego w przestrzeni spełniają założone w problemie brzegowym ([4] punkt 3) warunki [4] (25), (26) na powierzchni cewki.

4. Układ równań całkowych na powierzchni rozdziału środowisk metalu i powietrza

W celu uzyskania pełnego rozwiązania problemu przedstawionego w pracy [4] punkt 3, należy znaleźć sposób obliczenia gęstości (1), (2) we wzorach [4] (17), (28). Logiczne wydaje się zapisanie równań (5), (6) dla punktów $X \in S$, wykorzystując rozważania punktu 2, traktujące o nieciągłościach całek (5), (6) na S. Uzyskujemy w ten sposób układ dwu równań całkowych o dwu niewiadomych funkcjach A i $(\nabla \times A) \times n$, określonych na powierzchni S metalu. Potencjał wektorowy A jest funkcją ciągłą w całej przestrzeni łącznie z powierzchnią cewki (brak rzeczywistych gęstości warstwy podwójnej prądu $L_{\parallel}$ [5] (32)). Z kolei we wzorach (5), (6) całki z gęstością $L_{\parallel}$ (4) mają nieciągłość postaci (7) przy zbliżaniu się punktu X do powierzchni S z wnętrza danego obszaru. Potencjał wektorowy (5), (6) zapisany dla punktów $P \in S$, będzie różnił się w porównaniu ze wzorami (5), (6) jedynie wartością $1/2\ L_{\parallel}(Y)$, dodaną po prawej stronie równań ze znakiem minus (7). Wykorzystując wzory (2), (3), (4), (5), (6), (7) otrzymujemy

$$A(P) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S |A(Y)|\, n_{(Y)} \frac{\partial}{\partial\tau_{(Y)}}\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)_{(P,Y)} dS(Y) -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S A(Y) \frac{\partial}{\partial n_{(Y)}}\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)_{(P,Y)} dS(Y) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \Big((\nabla \times A) \times n\Big)_{(Y)m} \left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right)_{(P,Y)} dS(Y), \tag{15}$$

$$A(P) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S |A(Y)|\, n_{(Y)} \frac{\partial}{\partial\tau_{(Y)}}\left(\frac{1}{r}\right)_{(P,Y)} dS(Y) -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S |A(Y)| \frac{\partial}{\partial n_{(Y)}}\left(\frac{1}{r}\right)_{(P,Y)} dS(Y) + \frac{\mu_0}{2\pi}\iint\limits_{S_c} I(Y_c)\left(\frac{1}{r}\right)_{(P,Y_c)} dS(Y_c) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \Big((\nabla \times A) \times n\Big)_{(Y)p} \left(\frac{1}{r}\right)_{(P,Y)} dS(Y), \tag{16}$$

gdzie punkt $P \in S$.

Pole wektorów n we wzorze (15) skierowane jest na zewnątrz obszaru metalu, a we wzorze (16) ma zwrot przeciwny. Ze względu na różne wartości przenikalności magnetycznej metalu μ_m i powietrza μ_0 uzyskujemy dla każdego punktu $P \in S$ dodatkowe równanie

$$\frac{1}{\mu_0}\Big((\nabla \times A) \times n\Big)_{(Y)p} - \frac{1}{\mu_m}\Big((\nabla \times A) \times n\Big)_{(Y)m} = 0. \tag{17}$$

Obecnie zagadnienie istnienia rozwiązania problemu brzegowego przedstawionego w pracy [4], punkt 3, zostało sprowadzone do rozwiązania układu równań (15), (16), (17). Zagadnienie to będzie rozpatrywane w kolejnej publikacji.

[1] MARCINKOWSKA H.: Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych. PWN Warszawa 1972.

[2] Metody geometryczne w fizyce i technice. Praca zbiorowa. WNT, Warszawa 1967.

[3] TICHONOW A.N., SAMARSKI A.A.: Równania fizyki matematycznej. PWN, Warszawa 1963.

[4] WILCZYŃSKI E.: Problem brzegowy analizy pola elektromagnetycznego sinusoidalnie zmiennego w przestrzeni powietrznej i objętości metalu." ZN Pol. Śl., Elektryka z. 75, (w druku).

[5] E. WILCZYŃSKI: Potencjał wektorowy na granicy środowisk powietrza i przewodnika metalowego, dyskusja poprawności postawionego problemu brzegowego. ZN Pol. Sl. Elektryka z. 75, (w druku).

Wpłynęło do Redakcji w maju 1980

Recenzent
Doc. dr hab. Marek Brodzki

ВОПРОС РЕАЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ПРОБЛЕМЫ АНАЛИЗА ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ВОЗДУШНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ОБЛАСТИ МЕТАЛЛА

Р е з ю м е

Статья связана с тематикой работ [4], [5]. Продолжается дискуссия относительно правильности краевой задачи, поставленной в работе [4]. Возникла необходимость точного определения всех нерегулярностей интегральных формул, представленных в работе [4]. Полученная система интегральных уравнений является исходной точкой в вопросе реальности решения краевой задачи.

THE PROBLEM OF SOLVING THE BOUNDARY ANALYSIS OF THE ELECTRO-MAGNETIC FIELD IN THE ATMOSPHERE AND METAL VOLUME

S u m m a r y

The paper is linked with the subject of papers [4], [5]. Discussion is centered on the correctness of the boundary problem in reference [4]. A necessity of making all the irregularities of integral formulas in the reference [4] more pricise came about. The system obtained for integral equations is the starting point in the question of the existance of possibility to solve the boundary problem.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Zygmunt PIĄTEK

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

METODA OBLICZANIA PRĄDÓW WIROWYCH INDUKOWANYCH W PRZEWODZIE WALCOWYM PRZEZ PRĄD SINUSOIDALNY PŁYNĄCY W PRZEWODZIE RÓWNOLEGŁYM

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę obliczania prądów wirowych wywołanych w przewodzie walcowym przez prąd sinusoidalny płynący w przewodzie równoległym.

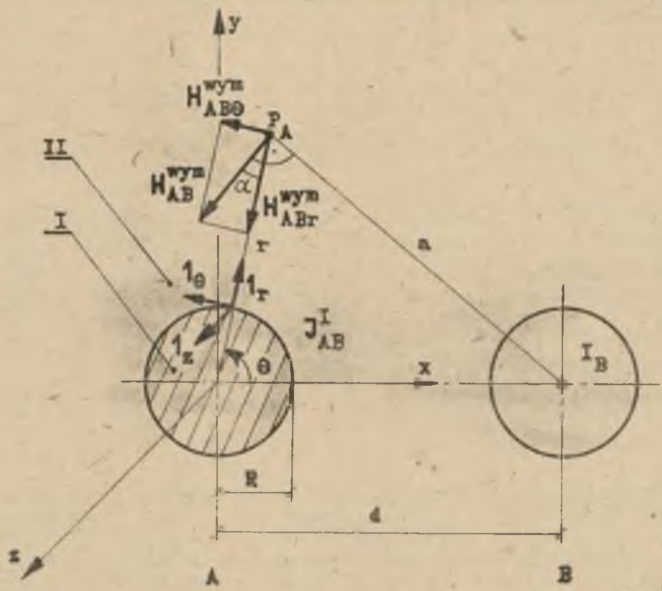
W rozwiązaniu podano wzór na gęstość prądu indukowanego, z uwzględnieniem wymiarów poprzecznych przewodu oraz odległości jego osi od przewodu równoległego.

1. Wstęp

W przypadku dwóch lub więcej przewodów z prądami przemiennymi, rozmieszczonymi w ten sposób, że ich pola magnetyczne w sposób istotny wpływają na siebie, w przewodach zachodzi zmiana rozkładu wektora gęstości prądu w przekroju poprzecznym - warunkowana działaniem tych pól. Zwiększenie nierównomierności rozkładu wektorów gęstości prądu w przekroju przewodów powoduje w nich zmianę strat mocy Joule'a. To zjawisko nazywa się zjawiskiem zbliżenia [10], którego wpływ zależny jest od kierunku i zwrotu prądu w przewodach, częstotliwości, kształtu geometrycznego przewodów oraz odległości między nimi.

Zmiana rozkładu wektora gęstości prądu w danym przewodzie spowodowana jest tym, że do wektora gęstości prądu własnego dodaje się wektor gęstości prądu indukowanego w nim przez przemienne pole magnetyczne prądów przewodów sąsiednich.

W pracy tej przedstawiono metodę obliczania wektora gęstości prądu indukowanego w przewodzie walcowym przez prąd sinusoidalny płynący w przewodzie równoległym. Rozpatrywany układ, przedstawiony na rys. 1, składa się z dwóch nieskończenie długich, walcowych przewodów (faza A i faza B). Przez przewód fazy B płynie w kierunku osi z walcowego układu współrzędnych prąd sinusoidalny $i_B(t)$. Przemienne pole magnetyczne tego prądu indukuje w przewodzie fazy A prąd wirowy o gęstości J_{AB}^{I}. Zakłada się przy tym [16], że walcowy przewód fazy B jest przewodem linearnym.



Rys. 1. Walcowy przewód fazy A w polu magnetycznym prądu fazy B

2. Natężenie pola magnetycznego prądu sinusoidalnego fazy B

Z prawa przepływu wartość zespolona natężenia pola magnetycznego w punkcie P_A (rys. 1) od prądu linearnego I_B płynącego w przewodzie fazy B jest równa

$$H^{wym}_{AB} = \frac{I_B}{2\pi a}, \tag{1}$$

gdzie:

a – odległość punktu P_A od osi przewodu fazy B,

I_B – wartość zespolona prądu płynącego w przewodzie fazy B w kierunku osi z i odpowiadająca przebiegowi chwilowemu tego prądu

$$i_B(t) = |I_{mB}| \sin(\omega t + \varphi_B). \tag{2}$$

We współrzędnych walcowych, usytuowanych w ten sposób, że oś z pokrywa się z osią przewodu fazy A, wektor natężenia pola magnetycznego w postaci zespolonej można przedstawić jako sumę odpowiednich składowych rys. 1)

$$H^{wym}_{AB} = -1_r H^{wym}_{ABr} + 1_\theta H^{wym}_{AB\theta}. \tag{3}$$

Z zależności geometrycznych (rys. 1) oraz ze wzoru (1) otrzymuje się

$$H_{ABr}^{wym} = \frac{I_B}{2\pi} \cdot \frac{d\sin\Theta}{r^2 + d^2 - 2rd\cos\Theta} \tag{4}$$

oraz

$$H_{AB\Theta}^{wym} = \frac{I_B}{2\pi} \cdot \frac{r - d\cos\Theta}{r^2 + d^2 - 2rd\cos\Theta}. \tag{5}$$

W dalszych rozważaniach natężenie pola magnetycznego $\mathbf{H}_{AB}^{wym}$ w postaci (3) będzie uważane jako wymuszające prądy wirowe w przewodzie fazy A.

3. Natężenie pola magnetycznego w obszarze zewnętrznym przewodu fazy A

W obszarze zewnętrznym przewodu - II ($r \geq R$) wektor natężenia pola magnetycznego $\mathbf{H}_{AB}^{II}$ w postaci zespolonej jest sumą wektorową wektorów pola $\mathbf{H}_{AB}^{wym}$, wytworzonego przez prąd I_B oraz pola magnetycznego oddziaływania zwrotnego prądów wirowych $\mathbf{H}_{AB}^{oz}$ indukowanych w przewodzie

$$\mathbf{H}_{AB}^{II} = \mathbf{H}_{AB}^{wym} + \mathbf{H}_{AB}^{oz}. \tag{6}$$

W obszarze tym konduktywność $\gamma = 0$ i przy pominięciu prądów przesunięcia pierwsze równanie Maxwella ma postać

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}_{AB}^{II} = 0. \tag{7}$$

Z drugiego natomiast równania Maxwella, drogą wykonania na tym równaniu operacji rotacji [11] przy spełnieniu równania (7), otrzymuje się wektorowe równanie Laplace'a

$$\nabla^2 \mathbf{E}_{AB}^{oz} = 0. \tag{8}$$

Ponieważ wektor natężenia pola elektrycznego w rozpatrywanym zagadnieniu posiada tylko jedną składową E_{ABz}^{oz} (zależną od zmiennych r oraz Θ), można więc równanie (8) sprowadzić do skalarnego równania Laplace'a.

Stosując metodę rozdzielenia zmiennych [8] poszukuje się rozwiązania równania (8) w postaci

$$E_{ABz}^{oz}(r,\Theta) = f_1(r) f_2(\Theta). \tag{9}$$

W rozwiązaniu uzyskuje się

$$f_1 = C_1 r^{\beta} + \frac{C_2}{r^{\beta}} \tag{10}$$

oraz

$$f_2 = C_3 \cos\beta\Theta + C_3 \sin\beta\Theta, \tag{11}$$

gdzie:

β - stała rozdzielenia zmiennych,

C_1, C_2, C_3, C_4 - dowolne stałe.

Ze względu na to, że natężenie pola elektrycznego przy $r \to \infty$ jest ograniczone, należy przyjąć $C_1 = 0$.

Z warunków brzegowych zagadnienia (rys. 1) wynika ponadto, że przy zmianie kąta z $+\Theta$ na $-\Theta$ natężenie pola elektrycznego nie może zmieniać znaku - więc stała $C_4 = 0$.

Jak wiadomo [8], stałe β musi być liczbą całkowitą, gdyż spośród rozwiązań (11) należy wybrać takie, które spełniają warunek: $f_2(\Theta) = f_2(\Theta + 2\pi)$

Ogólne rozwiązanie równania (8), spełniające powyższe zależności, można uzyskać tworząc superpozycję rozwiązań elementarnych typu (9)

$$E^{oz}_{ABz}(r,\Theta) = \sum_{n=1}^{\infty} E^{oz}_{ABzn}(r,\Theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{1}{r^n} \cos n\Theta. \tag{12}$$

Stałe B_n występujące w rozwiązaniu (12) należy wyznaczyć z warunków brzegowych, co wykonana będzie w dalszej kolejności.

Stosując drugie równanie Maxwella do rozwiązania (12) uzyskuje się wzór na wektor natężenia pola magnetycznego oddziaływania zwrotnego w postaci zespolonej

$$H^{oz}_{AB}(r,\Theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, B_n}{j\omega \mu_r{}^{n+1}} \left[1_r \sin n\Theta - 1_\Theta \cos n\Theta\right]. \tag{13}$$

Wektor natężenia pola magnetycznego w obszarze zewnętrznym przewodu fazy A jest więc równy

$$H^{II}_{AB}(r,\Theta) = -1_r \frac{I_B}{2\pi} \cdot \frac{d \sin\Theta}{r^2 + d^2 - 2rd\cos\Theta} + 1_\Theta \frac{I_B}{2\pi} \cdot \frac{r - d\cos\Theta}{r^2 + d^2 - 2rd\cos\Theta} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, B_n}{j\omega \mu r^{n+1}} \left[1_r \sin n\Theta - 1_\Theta \cos n\Theta\right]. \tag{14}$$

Składowe wektora natężenia pola magnetycznego prądu I_B, określone wzorami (4) i (5), można rozwinąć w szereg Fouriera ze względu na zmienną Θ i wtedy wzór (14) przyjmuje postać

$$H_{AB}^{II} = -1_r \frac{I_B}{2\pi}\left[\frac{a_{ro}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{rn}\cos n\Theta + b_{rn}\sin n\Theta)\right] +$$

$$+ 1_\Theta \frac{I_B}{2\pi}\left[\frac{a_{\Theta o}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{\Theta n}\cos n\Theta + b_{\Theta n}\sin n\Theta)\right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,B_n}{j\omega\mu r^{n+1}}\left[1_r \sin n\Theta - 1_\Theta \cos n\Theta\right]. \tag{15}$$

Współczynniki szeregu Fouriera we wzorze (15) określa się [2] następująco:

$$a_{rn} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\sin\Theta\cos n\Theta}{r^2 + d^2 - 2rd\cos\Theta}d\Theta, \tag{16}$$

$$b_{rn} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\sin\Theta\sin n\Theta}{r^2 + d^2 - 2rd\cos\Theta}d\Theta, \tag{17}$$

$$a_{\Theta n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(r - d\cos\Theta)\cos n\Theta}{r^2 + d^2 - 2rd\cos\Theta}d\Theta, \tag{18}$$

$$b_{\Theta n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(r - d\cos\Theta)\sin n\Theta}{r^2 + d^2 - 2rd\cos\Theta}d\Theta. \tag{19}$$

$H_{ABr}^{wym}(r,\Theta)$ jest funkcją nieparzystą zmiennej Θ, więc [2] współczynnik $a_{rn} = 0$, $H_{AB\Theta}^{wym}(r,\Theta)$ jest funkcją parzystą zmiennej Θ, więc $b_{\Theta n} = 0$.

Po żmudnych obliczeniach, wykorzystując metody obliczeń z prac [2, 12] oraz wzory z pracy [3], można wykazać, że pozostałe współczynniki szeregu Fouriera są odpowiednio równe:

$$b_{rn} = \frac{r^{n-1}}{d^n}. \tag{20}$$

$$
{}^{a}\Theta_n = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad n = 0 \\ -\dfrac{r^{n-1}}{d^n} & \text{dla} \quad n \neq 0. \end{cases} \tag{21}
$$

Wobec powyższego wzór (15), na natężenie pola magnetycznego w obszarze zewnętrznym przewodu fazy A, przyjmuje postać

$$
H_{AB}^{II}(r,\Theta) = -1_r \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{I_B}{2\pi r} \left(\frac{r}{d}\right)^n - \frac{n\,B_n}{j\omega\mu r^{n+1}} \right] \sin n\Theta -
$$

$$
-1_\Theta \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{I_B}{2\pi r} \left(\frac{r}{d}\right)^n + \frac{n\,B_n}{j\omega\mu r^{n+1}} \right] \cos n\Theta. \tag{22}
$$

4. Natężenie pola magnetycznego w przewodzie fazy A

W obszarze I (rys. 1), tj. wewnątrz przewodu ($0 \leqslant r \leqslant R$), obowiązuje [14] dla wektora natężenia pola elektrycznego (w postaci zespolonej następujące równanie falowe Helmholtza

$$
\nabla^2 \mathbf{E}_{AB}^{I} = j\, m^2 \mathbf{E}_{AB}^{I}, \tag{23}
$$

gdzie:

$$
m = \sqrt{\omega \mu \gamma}. \tag{24}
$$

Natężenie pola elektrycznego ma w tym obszarze tylko jedną składową E_{ABz}^{I} zależną od zmiennych r oraz Θ, czyli

$$
\mathbf{E}_{AB}^{I} = \mathbf{1}_z\, E_{ABz}^{I}(r,\Theta). \tag{25}
$$

Wobec tego równanie (23) można przedstawić (we współrzędnych walcowych) w postaci skalarnego równania falowego Helmholtza [8].

Stosując metodę rozdzielenia zmiennych [8] poszukuje się rozwiązania równania (23) w postaci

$$
E_{ABz}^{I}(r,\Theta) = f_3(r)\, f_4(\Theta). \tag{26}
$$

W rozwiązaniu uzyskuje się

$$
f_3(r) = C_5 J_\beta\left(\sqrt{-j}\, m r\right) + C_6 K_\beta\left(\sqrt{j}\, m r\right), \tag{27}
$$

gdzie:

$\mathcal{J}_\beta(\sqrt{-j}mr)$ - funkcja Bessela-Kelvina pierwszego rodzaju rzędu β,

$K_\beta(\sqrt{j}mr)$ - funkcja Bessela-Kelvina drugiego rodzaju rzędu β,

β - stała rozdzielenia zmiennych, która jak już podkreślano w poprzednim punkcie jest liczbą naturalną,

C_5, C_6 - dowolne stałe,

oraz

$$f_4(\Theta) = C_7 \sin\beta\Theta + C_8 \cos\beta\Theta. \tag{28}$$

gdzie: C_7, C_8 - dowolne stałe.

Z tego samego powodu co w wyrażeniu (11) stała $C_7 = 0$. Ze względu na to, że natężenie pola elektrycznego przy $r \to 0$ jest ograniczone i po uwzględnieniu właściwości funkcji $K\beta(\sqrt{j}mr)$ [7] - stała $C_6 = 0$.

Ogólne rozwiązanie równania (23) przyjmuje więc postać

$$E^I_{AB}(r,\Theta) = 1_z \sum_{n=1}^{\infty} E^I_{ABzn}(r,\Theta) = 1_z \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathcal{J}_n(\sqrt{-j}mr)\cos n\Theta. \tag{29}$$

Stosując drugie równanie Maxwella do wzoru (29) oraz wykorzystując [7] relację na pochodną funkcji Bessela-Kelvina pierwszego rodzaju rzędu n

$$\mathcal{J}'_n(kz) = \frac{n}{kz}\mathcal{J}_n(kz) - \mathcal{J}_{n+1}(kz) \tag{30}$$

otrzymuje się wzór (w postaci zespolonej) na wektor natężenia pola magnetycznego w przewodzie fazy A

$$H^I_{AB}(r,\Theta) = 1_r \frac{1}{j\omega\mu r} \sum_{n=1}^{\infty} nC_n \mathcal{J}_n(\sqrt{-j}mr)\sin n\Theta +$$

$$+ 1_\Theta \frac{1}{j\omega\mu r} \sum_{n=1}^{\infty} C_n\left[-n\mathcal{J}_n(\sqrt{-j}mr) + \sqrt{-j}mr\mathcal{J}_{n-1}(\sqrt{-j}mr)\right]\cos n\Theta. \tag{31}$$

5. Warunki brzegowe dla natężenia pola magnetycznego przewodu fazy A

Przy założeniu równości współczynników przenikalności magnetycznej bezwzględnej obszaru - I i obszaru zewnętrznego - II

$$\mu^I = \mu^{II} = \mu = \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \left[\frac{H}{m}\right] \tag{32}$$

można [1] uzyskać następujący warunek brzegowy dla natężenia pola magnetycznego

- dla $r = R$

$$H_{AB}^{II}(R,\Theta) = H_{AB}^{I}(R,\Theta). \tag{33}$$

Rozpatrując wektorowe równanie (33) oddzielnie dla poszczególnych jego składowych - warunek brzegowy sprowadza się do układu dwóch równań skalarnych, z którego wyznacza się stałę C_n

$$C_n = \frac{I_B\sqrt{-j}\,\omega\mu}{\pi\, mR}\left(\frac{R}{d}\right)^n \frac{1}{\mathcal{J}_{n-1}(\sqrt{-j}\,mR)} \tag{34}$$

6. Natężenie pola elektrycznego i gęstość prądu wirowego indukowanego w przewodzie fazy A

Podstawiając stałą C_n ze wzoru (34) do równania (29) wyznacza się wektor natężenia pola elektrycznego (w postaci zespolonej) w przewodzie fazy A

$$E_{AB}^{I} = 1_z \frac{I_B\sqrt{-j}\,\omega\mu}{\pi\, mR}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{d}\right)^n \frac{\mathcal{J}_n(\sqrt{-j}\,mr)}{\mathcal{J}_{n-1}(\sqrt{-j}\,mR)}\cos n\Theta. \tag{35}$$

Wektor gęstości prędu w postaci zespolonej indukowany w przewodzie fazy A wyznaczy się wykorzystując uogólnione prawo Ohma oraz wzory (35) i (24). Otrzymuje się

$$J_{AB}^{I} = 1_z J_{ABz}^{I} = 1_z \frac{I_B\sqrt{-j}\,m}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{d}\right)^n \frac{\mathcal{J}_n(\sqrt{-j}\,mr)}{\mathcal{J}_{n-1}(\sqrt{-j}\,mR)}\cos n\Theta =$$

$$= 1_z \frac{|I_B|\, m}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{d}\right)^n \frac{M_n(mr)}{M_{n-1}(mR)}\cdot$$

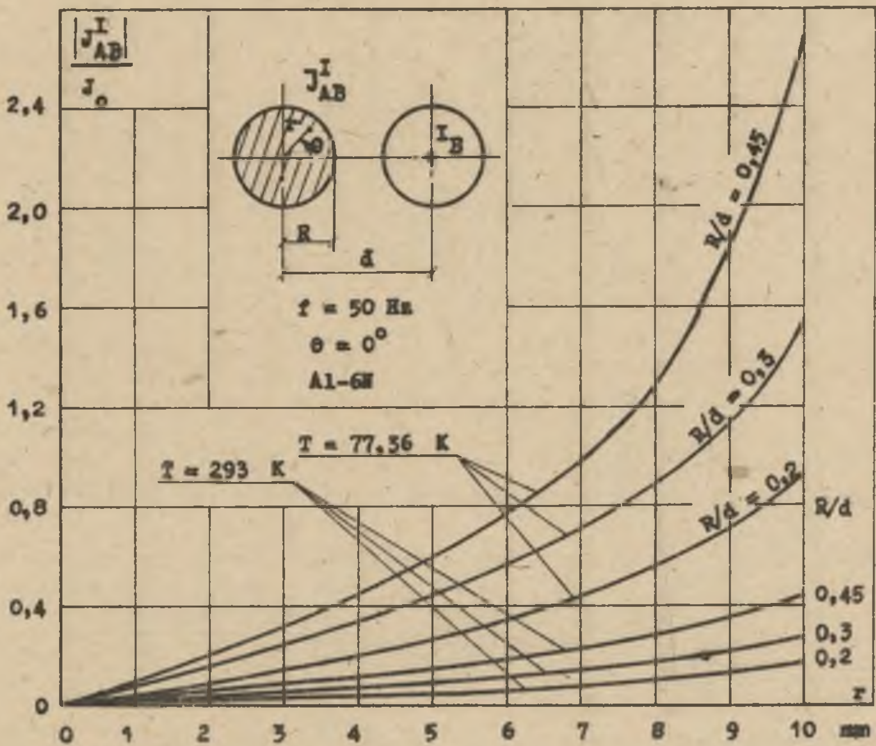
$$\cdot \exp\left\{j\left[\beta_n(mr) - \beta_{n-1}(mR) + 135^\circ + \alpha_B\right]\right\}\cos n\Theta, \tag{36}$$

gdzie:

M_n - moduł funkcji Bessela-Kelvina pierwszego rodzaju n-tego rzędu,

β_n - argument tej funkcji.

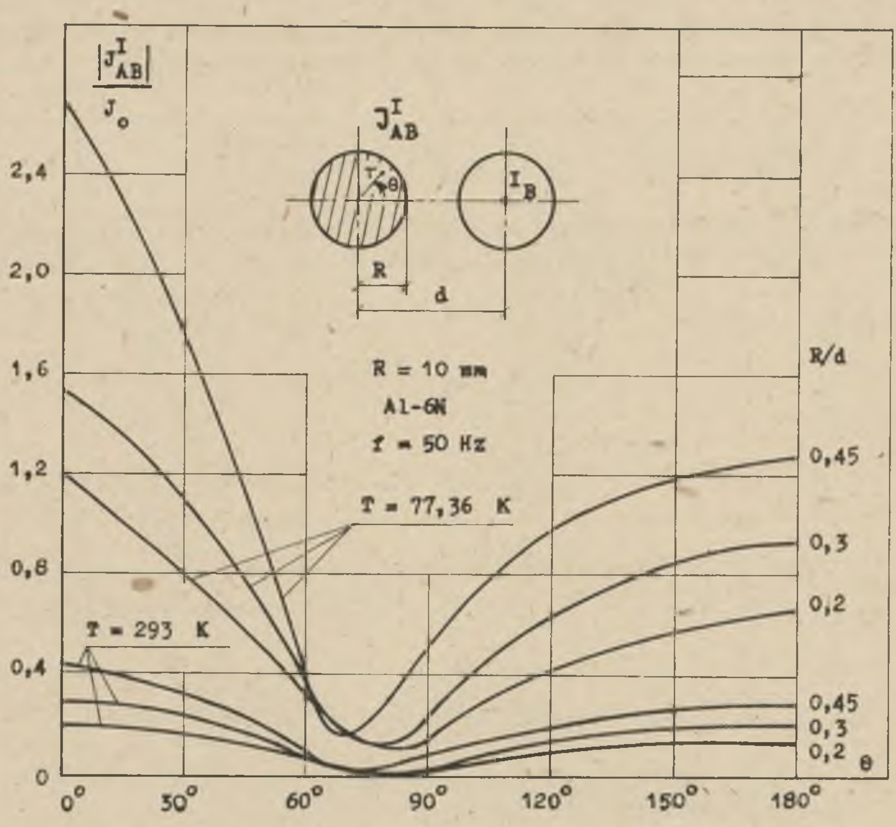
Dla ilustracji wzoru (35) na rys. 2 przedstawiono rozkład modułu wektora gęstości prądu indukowanego w przekroju poprzecznym przewodu aluminiowego 6N o $R = 10$ mm, dla $\Theta = 0^\circ$ i $f = 50$ Hz, w temperaturze pokojowej i w temperaturze ciekłego azotu, przy różnych wartościach stosunku R/d promienia do odległości od osi przewodu równoległego.



Rys. 2. Rozkład modułu wektora gęstości prądu indukowanego w walcowym przewodzie aluminiowym 6N, dla $\Theta = 0^o$ i f = 50 Hz, w temperaturze pokojowej i w temperaturze ciekłego azotu, przy różnych wyrtościach stosunku $\frac{R}{d}$

Na rys. 3. przedstawiono rozkład modułu wektora gęstości prądu na powierzchni tego przewodu, w zależności od kąta Θ walcowego układu współrzędnych. Na obu powyższych wykresach moduł gęstości prądu wyrażono w jednostkach względnych w stosunku do bazy określonej wzorem

$$J_o = \frac{|I_B|}{\pi R^2}. \quad (37)$$



Rys. 3. Rozkład modułu wektora gęstości prądu na powierzchni walcowego przewodu aluminiowego 6N w zależności od kąta Θ, dla R = 10 mm i f=50 Hz w temperaturze pokojowej i w temperaturze ciekłego azotu, przy różnych wartościach stosunku $\frac{R}{d}$

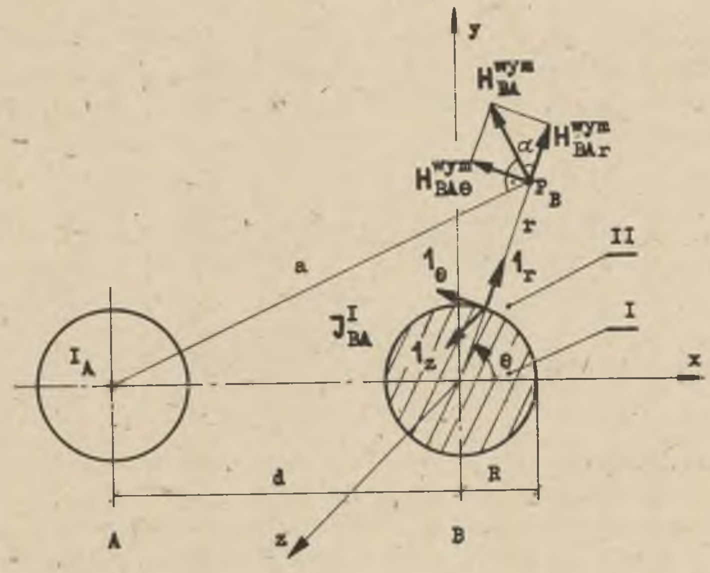
7. Wektor gęstości prądu wirowego indukowanego w przewodzie walcowym fazy B przez prąd linearny fazy A

W układzie przedstawionym na rys. 4 prąd płynący w fazie A indukuje w przewodzie fazy B prąd wirowy o gęstości J^I_{BA}.

Takie usytuowanie wzajemne przewodów spowoduje zmianę wzorów określających natężenie pola magnetycznego prądu sinusoidalnego fazy A w stosunku do wzorów (3), (4) i (5).

We współrzędnych walcowych (rys. 4) wektor natężenia pola magnetycznego w postaci zespolonej jest równy

$$H^{wym}_{BA} = 1_r\, H^{wym}_{BAr} + 1_\Theta\, H^{wym}_{BA\Theta}. \tag{38}$$



Rys. 4. Walcowy przewód fazy B w polu magnetycznym prądu fazy A

Z zależności geometrycznych (rys. 4), po określeniu natężenia pola magnetycznego w punkcie P_B jako

$$H^{wym}_{BA} = \frac{I_A}{2\pi a}. \tag{39}$$

wyznacza się

$$H^{wym}_{BAr} = \frac{I_A}{2\pi} \cdot \frac{d \sin}{r^2 + d^2 + 2rd\cos\Theta} \tag{40}$$

oraz

$$H^{wym}_{BA\Theta} = \frac{I_A}{2\pi} \cdot \frac{r + d\cos}{r^2 + d^2 + 2rd\cos\Theta} \tag{41}$$

gdzie I_a - wartość zespolona prądu płynącego w przewodzie fazy A w kierunku osi z odpowiadającą przebiegowi chwilowemu tego prądu

$$i_A(t) = |I_{mA}| \sin(\omega t + \alpha_A). \tag{42}$$

Postępując dalej jak w punkcie 3 oblicza się natężenie pola magnetycznego w obszarze zewnętrznym przewodu fazy B $-H^{II}_{BA}$. W utworzonej relacji typu (15) zachodzi konieczność policzenia współczynników szeregu Fouriera z funkcji (40) i (41). Są one, przy tak określonych funkcjach H^{wym}_{BAr} i

$H^{wym}_{BA\Theta}$, równe: $a_{rn} = b_{\Theta n} = 0$ - ze względu na parzystość i nieparzystość, b_{rn} jest określony wzorem (20), zaś współczynnik $a_{\Theta n}$ określony jest wzorem (21) ze zmienionym znakiem.

Otrzymuje się wtedy

$$H^{II}_{BA} = \mathbf{1}_r \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{I_A}{2\pi r} \left(\frac{r}{d}\right)^n + \frac{n B_n}{j\omega\mu r^{n+1}} \right] \sin n\Theta +$$

$$+ \mathbf{1}_\Theta \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{I_A}{2\pi r} \left(\frac{r}{d}\right)^n - \frac{n B_n}{j\omega\mu r^{n+1}} \right] \cos n\Theta \tag{43}$$

Wewnątrz przewodu fazy B natężenie pola magnetycznego (w postaci zespolonej) określone jest równaniem (31).

Tworząc następnie równanie dla warunków brzegowych przewodu tej fazy typu (33) uzyskuje się układ dwóch równań skalarnych w postaci zespolonej, z którego wyznacza się stałą C_n

$$C_n = - \frac{I_A \sqrt{-j\omega\mu}}{\pi m R} \left(\frac{R}{d}\right)^n \frac{1}{\mathcal{J}_{n-1}(\sqrt{-j}\, mR)} \tag{44}$$

Postępując dalej jak w punkcie 6 wyznacza się wektor gęstości prądu (w postaci zespolonej), indukowany w przewodzie fazy B przez prąd linearny fazy A

$$J^{I}_{BA} = -\mathbf{1}_z J^{I}_{BAz} = -\mathbf{1}_z \frac{I_A \sqrt{-j}\, m}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{d}\right)^n \frac{\mathcal{J}_n(\sqrt{-j}\, mr)}{\mathcal{J}_{n-1}(\sqrt{-j}\, mR)} \cos n\Theta =$$

$$= -\mathbf{1}_z \frac{|I_A| m}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{d}\right)^n \frac{M_n(mr)}{M_{n-1}(mR)} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{ j\left[\beta_n(mr) - \beta_{n-1}(mR) + 135^\circ + \alpha_A\right]\right\} \cos n\Theta. \tag{45}$$

Jeżeli przyjąć równość modułów $|I_A| = |I_B|$ i argumentów $\alpha_A = \alpha_B$ prądów, to otrzymany wzór (45) różnić się będzie od wzoru (36) tylko znakiem.

Rozkład wektora gęstości prądu indukowanego (45) będzie odpowiednio symetryczny do rozkładów przedstawionych na rys. 2 i rys. 3.

8. Zakończenie

Otrzymany przedstawioną wyżej metodą wzór (36) na gęstość prądu indukowanego w przewodzie walcowym przez prąd płynący w linearnym przewodzie równoległym, pokrywa się z odpowiednim wzorem uzyskanym przez Mjejerowicza w pracy [9] poprzez wprowadzenie skalarnego potencjału magnetycznego w postaci zespolonej i równania Helmholtza w metodzie kolejnych przybliżeń. Wzór ten uzyskał również Manneback w pracy [6] na drodze wprowadzenia i rozwiązania równania całkowego. Za Mannebackiem cytuje go wzór) Rolicz w pracy [13].

Dla n = 1 wzór (36) przyjmuje postać

$$J^{I}_{AB} = 1_{z}\,\frac{I_{B}\;-jm}{d}\cdot\frac{{}_{1}(-jmr)}{{}_{0}(-jmR)}\,\cos\,. \tag{46}$$

Wzór (46) pokrywa się z odpowiednim wzorem uzyskanym przez Kadena w pracy [4] dla przewodu prętowego, umieszczonego w równomiernym polu magnetycznym określonym z prawa przepływu wzorem

$$H^{wym}_{AB} = \frac{I_{B}}{2\,d}. \tag{47}$$

Otrzymane rozwiązanie na wektor gęstości prądu indukowanego w przewodzie walcowym w postaci wzoru (36) jest zatem rozwiązaniem ogólnym, gdyż nie wymaga stosowania założenia upraszczającego, dotyczącego zewnętrznego pola magnetycznego oddziaływającego na przewód.

LITERATURA

[1] FALKOWSKIJ O.I.: Tiechniczeskaja elektrodinamika. Swjaz, Moskwa 1978.

[2] FICHTENHOLZ G.M.: Rachunek różniczkowy i całkowy. PWN, Warszawa 1972.

[3] GRADSZTEJN I.S., RYŻYK I.M.: Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów. PWN, Warszawa 1972.

[4] KADEN G.: Elektromagnitnyje ekrany w wysokoczastotnoj tiechnikie i miechanikie eliektroswjazi. Gosenergoizdat, Moskwa 1957.

[5] KUPALAN S.D.: Teoria pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1967.

[6] MANNEBACK C.: An integral equation for skin-effect in parallel conductors. J. of Math. and Phyd., v. 1, 1921.

[7] Mc LACHLAN N.W.: Funkcje Bessela dla inżynierów. PWN, Warszawa 1964.

[8] MOON P., SPENCER D.E.: Teoria pola. PWN, Warszawa 1966.

[9] MJEJEROWICZ Z.A., CZALJAN K.M.: Rasczet miatodom posledowatielnych pribliżenij raspriedielenija toka w tokoprowodach s uczotom effiekta blizosti. Iz. AN ZSRR, Eniergietika i Transport, nr 3, 1963.

[10] MUKOSJEJEW Ju.Ł.: Raspriedielenije pieriemiennogo toka w tokoprowodach. Eniergoizdat, Moskwa 1959.

[11] PCZELIN B.K.: Analiza wektorowa dla inżynierów. PWN, Warszawa 1971.

[12] PISKUNOW N.S.: Diffieriencjialnyje i intiegralnyje isczislenija. Nauka, Moskwa 1970.

[13] ROLICZ P.: Force Acting on the Conductors of a Bifilar Lead with an Alternating Courrent. Archiv fur Elektrotechnik, nr 61, 1979.

[14] SZULKIN P., POGORZELSKI S.: Podstawy teorii pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1964.

[15] TUROWSKI J.: Elektrodynamika techniczna. WNT, Warszawa 1968.

[16] ZOŁOTARIEW N.A., PISMIENSKIJ A.W.: Rasczot magnitnych polej w sistiemie dlinnych tokoprowodow. Elektromiechanika, nr 9, 1969.

Wpłynęło do Redakcji w maju 1980

Recenzent
Doc. dr Aleksander Szendzielorz

МЕТОД РАСЧЕТА ВИХРЕВЫХ НАВЕДЕННЫХ ТОКОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ПРОВОДЕ ЧЕРЕЗ СИНУСОИДАЛЬНЫЙ ТОК ПРОТЕКАЮЩИЙ В ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПРОВОДЕ

Р е з ю м е

В статье представлен метод расчета вихревых наведенных токов в цилиндрическом проводе через синусоидальный ток, протекающий в параллельном проводе. В решении дана формула на плотность наведенного тока с учетом поперечных размеров провода, а также расстояний его оси от параллельного провода.

THE METHOD OF CALCULATION OF EDDY CURRENTS INDUCED BY THE SINUSOIDAL CURRENT OF THE PARALLEL CONDUCTOR IN THE CYLINDER CONDUCTOR

S u m m a r y

The method of calculation of eddy current produced by sinusoidal current of the parallel conductor was presented in this paper.

The formula for computation of density of the induced current was given. The transverse dimensions and the distance between the axis of the conductor and the axis of the parallel conductor were taken into account.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Zygmunt PIATEK

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

STRATY MOCY JOULE'A W PRZEWODZIE WALCOWYM POCHODZĄCE OD PRĄDÓW WIROWYCH INDUKOWANYCH PRZEZ PRĄD PŁYNĄCY W PRZEWODZIE RÓWNOLEGŁYM

Streszczenie. Wychodząc z określonej wielkości wektora gęstości prądu indukowanego w przewodzie walcowym przez prąd sinusoidalny płynący w przewodzie równoległym oraz z prawa Joule'a-Lenza w postaci różniczkowej, określa się wartość strat cieplnych w rozpatrywanym przewodzie.

W rozwiązaniu podano wzór na wartość strat mocy Joul'a w przewodzie walcowym, z uwzględnieniem wymiarów poprzecznych oraz odległości jego osi od przewodu równoległego. Odnosząc wartość tych strat do pewnej stałej bazy wprowadzono pojęcie współczynnika zbliżenia i podano jego podstawowe zależności.

1. Wstęp

Rozpatrywany układ, przedstawiony na rys. 1, składa się z dwóch nieskończenie długich, walcowych przewodów (faza A i faza B). Przez przewód fazy B płynie w kierunku osi z walcowego układu współrzędnych prąd sinusoidalny $i_B(t)$. Zakłada się przy tym, że walcowy przewód fazy B jest przewodem linearnym. Przemienne pole magnetyczne tego prądu indukuje w przewodzie fazy A prąd wirowy o gęstości J^I_{AB}, określony [5] wzorem

$$J^I_{AB} = 1_z J^I_{ABz} = 1_z \frac{I_B\sqrt{-j}\,m}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{d}\right)^n \frac{J_n(\sqrt{-j}\,mr)}{J_{n-1}(\sqrt{-j}\,mR)} \cos n\Theta =$$

$$= 1_z \frac{|I_B|\,m}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{d}\right)^n \frac{M_n(mr)}{M_{n-1}(mR)} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{ j\left[\beta_n(mr) - \beta_{n-1}(mR) + 135^\circ + \varphi_B\right]\right\} \cos n\Theta, \qquad (1)$$

gdzie:

n - liczba naturalna,

$I_B = |I_B| \exp(j\alpha_B)$ - zespolona wartość skuteczna prądu $i_B(t)$,

$\mathfrak{J}_n(\sqrt{-j}mr) = M_n(mR)\exp\left[j\beta_n(mr)\right]$ - funkcja Bessela-Kelvina pierwszego rodzaju rzędu n,

$\mathfrak{J}_{n-1}(\sqrt{-j}mR) = M_{n-1}(mR)\exp\left[j\beta_{n-1}(mR)\right]$ - funkcja Bessela-Kelvina pierwszego rodzaju rzędu n-1,

R - promień przewodu walcowego,

d - odległość osi rozpatrywanego przewodu walcowego fazy A od osi przewodu linearnego fazy B,

Θ, r - współrzędne walcowego układu współrzędnych,

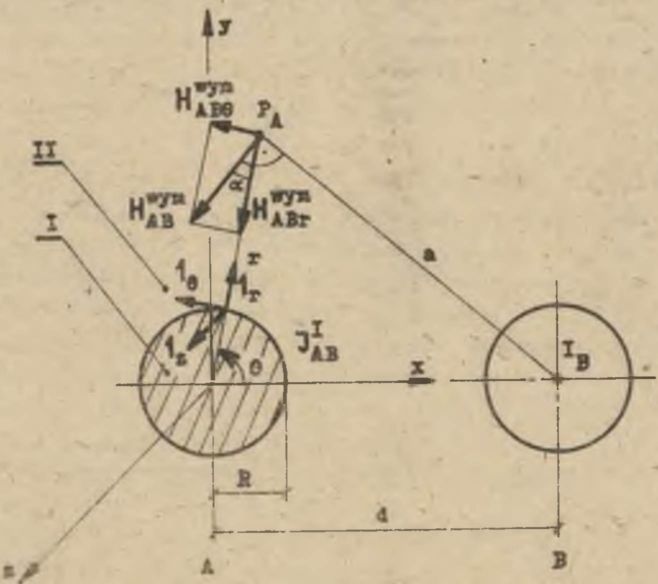
$m = \sqrt{\omega\mu^I\gamma}$,

$\omega = 2\pi f$ - pulsacja prądu $i_B(t)$,

μ^I - przenikalność magnetyczna bezwzględna rozpatrywanego przewodu,

γ - konduktywność przewodu.

Prąd indukowany w przewodzie fazy A, określony wzorem (1), spowoduje w przewodzie wydzielanie się ciepła. Określenie wartości tych strat cieplnych jest celem niniejszej pracy.



Rys. 1. Walcowy przewód fazy A w polu magnetycznym prądu fazy B

2. Moc Joule'a w przewodzie walcowym pochodząca od prądu indukowanego przez pole magnetyczne prądu płynącego w przewodzie równoległym

Moc strat cieplnych w objętości V przewodu określa się z prawa Joule'a-Lenza w postaci różniczkowej

$$P = \frac{1}{\gamma} \int_V \left| J^I_{ABz} \right|^2 dV. \tag{2}$$

Po przedstawieniu wzoru (2) we współrzędnych walcowych [1], otrzymuje się relację

$$P = \frac{1}{\gamma} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^R \left| J^I_{ABz} \right|^2 r\,dl\,dr\,d\Theta, \tag{3}$$

gdzie l - długość rozpatrywanego przewodu.

W celu uniezależnienia strat mocy od długości przewodu walcowego wprowadza się pojęcie strat określonych na jednostkę długości wg wzoru

$$P_l = \frac{P}{l} = \frac{1}{\gamma} \int_S \left| J^I_{ABz} \right|^2 dS = \frac{1}{\gamma} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left| J^I_{ABz} \right|^2 r\,dr\,d\Theta. \tag{4}$$

Kwadrat modułu gęstości prądu określa się przez przemnożenie wartości skutecznej zespolonej gęstości prądu przez wartość zespoloną do niej sprzężoną

$$\left| J^I_{ABz} \right|^2 = J^I_{ABz}\, J^{I*}_{ABz} = \left[\frac{|I_B|\, m}{\pi R} \right]^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{d} \right)^n \frac{M_n(mr)}{M_{n-1}(mR)} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{ j\left[\beta_n(mr) - \beta_{n-1}(mR) + 135^\circ + \alpha_B \right] \right\} \cos n\Theta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{d} \right)^n \cdot$$

$$\cdot \frac{M_n(mr)}{M_{n-1}(mR)} \exp\left\{ -j\left[\beta_n(mr) - \beta_{n-1}(mR) + 135^\circ + \alpha_B \right] \right\} \cos n\Theta . \tag{5}$$

Iloczyn (5) dwóch szeregów zbieżnych jest [1] szeregiem, którego wyrazy są iloczynami $A_l A_k^*$, gdzie l oraz k są niezależnymi ciągami liczb naturalnych. Iloczyny te (wyrazy szeregu) można przedstawić w postaci składników zależnych od zmiennej r oraz od zmiennej Θ

$$A_l A_k^* = a_l(r)\, a_k^*(r) \cos l\Theta \cos k\Theta . \tag{6}$$

Wykonując na wzorze (6) całkowanie, po zmiennej Θ od o do 2π, wyrazu po wyrazie tak utworzonego szeregu otrzymuje się zerową wartość tej całki dla $l \neq k$, gdyż [1]

$$\int_0^{2\pi} \cos l\Theta \cos k\Theta d\Theta = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad l \neq k \\ \pi & \text{dla} \quad l = k = n, \end{cases} \tag{7}$$

zaś dla $l = k$ z całkowania wyrażenia (6) otrzymuje się

$$a_n(r) a_n^*(r) \pi = |a_n(r)|^2 \pi. \tag{8}$$

Wobec powyższego wzór (4) przyjmuje postać

$$P_{AB} = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{|I_B| m}{\pi R} \right]^2 \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{d} \right)^{2n} \frac{1}{M_{n-1}^2(mR)} \int_0^R M_n^2(mr) r dr. \tag{9}$$

Kwadrat modułu funkcji Bessela-Kelvina pierwszego rodzaju rzędu n-tego można przedstawić [4] w postaci

$$M_n^2(mr) = \left[ber_n(mr) + j bei_n(mr) \right] \left[ber_n(mr) - j bei_n(mr) \right] =$$

$$= \mathcal{J}_n(j^{\frac{3}{2}} mr) \mathcal{J}_n(j^{-\frac{3}{2}} mr). \tag{10}$$

Kładąc następnie za

$$mr = z \tag{11}$$

całkę ze wzoru (9) przedstawia się w postaci

$$\int_0^R M_n^2(mr) r dr = \int_0^{mR} \frac{z}{m^2} \mathcal{J}_n(j^{\frac{3}{2}} z) \mathcal{J}_n(j^{-\frac{3}{2}} z) dz. \tag{12}$$

Wykorzystując [4] wzory:

$$\int_0^z \mathcal{J}_n(kz) \mathcal{J}_n(lz) z dz = \frac{z}{k^2 - l^2} \left[l \mathcal{J}_n(kz) \mathcal{J}_n'(lz) - k \mathcal{J}_n(lz) \mathcal{J}_n'(kz) \right], \tag{13}$$

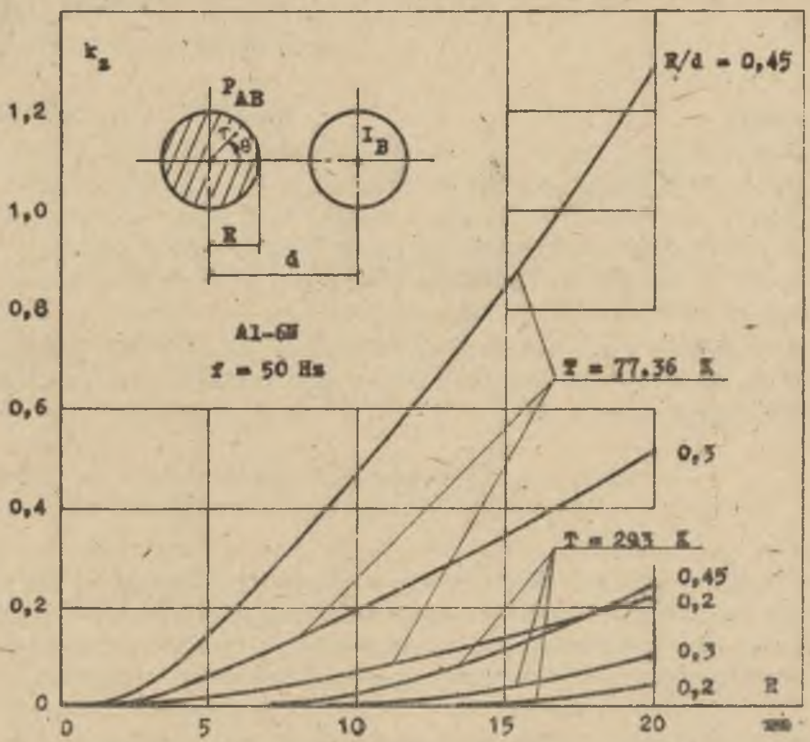
$$\mathcal{J}_n'(kz) = -\frac{n}{kz}\,\mathcal{J}_n(kz) + \mathcal{J}_{n-1}(kz) \tag{14}$$

wylicza się całkę (12)

$$\int_0^R M_n^2(mr)\,r\,dr = -\frac{R}{m}\,M_n(mR)M_{n-1}(mR)\cos\left[\beta_n(mR) - \beta_{n-1}(mR) + 135^\circ\right]. \tag{15}$$

Wstawiając wzór (15) do (9) otrzymuje się relację określającą straty mocy Joule'a w przewodzie walcowym (na jednostkę długości) wywołane prądem indukowanym w nim przez pole magnetyczne prądu płynącego w przewodzie równoległym

$$P_{AB} = -\frac{|I_B|^2\,m}{\pi R \gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{d}\right)^{2n}\frac{M_n(mR)}{M_{n-1}(mR)}\cos\left[\beta_n(mR) - \beta_{n-1}(mR) + 135^\circ\right]. \tag{16}$$



Rys. 2. Zależność strat mocy Joule'a, wywołanych prądem indukowanym w walcowym przewodzie aluminiowym przez pole magnetyczne prądu (o f = 50 Hz) płynącego w przewodzie równoległym, od promienia przekroju poprzecznego przewodu, w temperaturze pokojowej i w temperaturze ciekłego azotu

Na rys. 2. przedstawiono zależność strat cieplnych określonych wzorem (16) od promienia przekroju poprzecznego przewodów aluminiowych 6N w temperaturze pokojowej oraz w temperaturze ciekłego azotu. Straty te przedstawiono w jednostkach względnych w stosunku do bazy wyrażonej wzorem

$$P_o = \frac{|I_B|^2}{\pi R^2 \gamma}. \tag{17}$$

Wtedy zależność tę - nazywaną współczynnikiem zbliżenia - określa następujący wzór

$$k_z = \frac{P_{AB}}{P_o} = -\, mR \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{d}\right)^{2n} \frac{M_n(mR)}{M_{n-1}(mR)} \cos\left[\beta_n(mR) - \beta_{n-1}(mR) + 135^\circ\right] \tag{18}$$

Współczynnik ten zależny jest od: wartości stosunku $\frac{R}{d}$, promienia R przekroju poprzecznego przewodu, konduktywności γ oraz częstotliwości prądu $i_B(t)$.

3. Zakończenie

Dla $n = 1$ wzór (16) przyjmuje postać

$$P_{AB} = -\frac{|I_B|^2\, mR}{\pi d^2 \gamma} \cdot \frac{M_1(mR)}{M_o(mR)} \cos\left[\beta_1(mR) - \beta_o(mR) + 135^\circ\right]. \tag{19}$$

Wzór (19) pokrywa się z odpowiednim wzorem uzyskanym przez Kadena w pracy [2] dla przewodu prętowego umieszczonego w równomiernym polu magnetycznym określonym relacją

$$H_{AB}^{wym} = \frac{I_B}{2\pi d}. \tag{20}$$

Otrzymane rozwiązanie, w postaci wzoru (16), na wielkość mocy strat cieplnych w przewodzie walcowym wywołanych prądem indukowanym przez pole magnetyczna prądu płynącego w przewodzie równoległym jest zatem rozwiązaniem ogólnym, gdyż nie wymaga stosowania założenia upraszczającego dotyczącego zewnętrznego pola magnetycznego oddziaływającego na przewód.

Wzór (16) stanowić może podstawę w ocenie wpływu zjawiska zbliżania na wartość strat cieplnych w przewodach walcowych umieszczonych w polu magnetycznym prądów płynących w linearnych przewodach równoległych.

LITERATURA

[1] FICHTENHOLZ G.M.: Rachunek różniczkowy i całkowy. PWN, Warszawa 1972.

[2] KADEN G.: Elektromagnitnyje ekrany w wysokoczastotnoj tiechnikie i miechanikie elektroswjazi. Goseniergoizdat, Moskwa 1957.

[3] KUPALAN S.D.: Teoria pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1967.

[4] Mc LACHLAN N.W.: Funkcje Bessela dla inżynierów. PWN, Warszawa 1964.

[5] PIĄTEK Z.: Straty mocy Joule a w trójfazowych, płaskich torach prądowych chłodzonych ciekłym azotem przy symetrii i asymetrii prądowej. Praca doktorska. Pol. Śl. 1980.

Wpłynęło do Redakcji w maju 1980

Recenzent
Doc. dr Aleksander Szendzielorz

ПОТЕРИ МОЩНОСТИ ДЖОУЛЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ПРОВОДЕ, ВЫЗВАННЫЕ ВИХРЕВЫМИ НАВЕДЕННЫМИ ТОКАМИ ЧЕРЕЗ ТОК, ПРОТЕКАЮЩИЙ В ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПРОВОДЕ

Р е з ю м е

Исходя из определенной величины вектора плотности наведенного тока в цилиндрическом проводе через синусоидальный ток, протекающий в параллельном проводе, а также закона Джоуля-Ленца в дифференциальном виде, определяется значение теплопотерь в рассматриваемом проводе. В решении представлена формула значения Джоулевых потерь в цилиндрическом проводе с учетом поперечных размеров провода, а также расстояния его оси от параллельного провода. Относя значение этих потерь к надежной постоянной базе, введено понятие коэффициента эффекта близости и даны его основные зависимости.

THE LOSSES OF JOULE S POWER IN A CYLINDER CONDUCTOR CAUSED BY EDDY CURRENTS INDUCED BY THE CURRENT OF THE PARALLEL CONDUCTOR

S u m m a r y

The value of heat loses in the conductor was determined on the basis of a given quantity of vector of density of the current induced by the sinusoidal current of the paralell conductor, in the cylinder conductor and on the basis of Joule-Lenz law, in the differential form.

The formula for computation of losses of Joule s power in the cylinder conductor was given. The transverse dimensions and the distances between the conductor axis and the axis of parallel conductor were taken into account. The netion of coefficient of nearness was introduced and its fundamental dependencies were given.

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Krzysztof KLUSZCZYŃSKI

Zakład Maszyn Elektrycznych
Politechniki Śląskiej

ANALIZA OBWODÓW ELEKTROMAGNETYCZNYCH Z SYMETRYCZNIE POŁOŻONYMI UZWOJENIAMI

Streszczenie. Wykazano, że każdej parze symetrycznie położonych uzwojeń obwodu elektromagnetycznego o nienasyconym rdzeniu magnetycznym odpowiada wektor własny macierzy indukcyjności głównych, niezależny od wartości jej elementów.

Wprowadzono układ współrzędnych o osiach zgodnych z tak wyznaczonymi wektorami własnymi, w którym część równań różniczkowych stanu nieustalonego obwodu, równa liczbie par uzwojeń symetrycznych, staje się autonomiczna.

1. Symetryczna para uzwojeń obwodu elektromagnetycznego

Rozważmy liniowy obwód elektromagnetyczny o n uzwojeniach, któreg***o*** stan magnetyczny, związany ze strumieniem głównym, można analizować w oparciu o I i II prawo Kirchoffa dla obwodów magnetycznych. Uzwojenia obwodu elektromagnetycznego: k-te i l-te nazywać będziemy uzwojeniami położonymi symetrycznie lub - krótko-symetryczną parą uzwojeń, jeżeli ich współczynniki indukcyjności głównych spełniają następujące równości:

$$M_{kk} = M_{ll} \tag{1}$$

oraz

$$M_{ik} = M_{il} \tag{2}$$

dla $i = 1,2,\ldots k-1,k+1,\ldots l-1,l+1,\ldots n$.

Zgodnie z zasadą wzajemności zachodzi

$$M_{ki} = M_{li} \tag{3}$$

dla $i = 1,2,\ldots k-1,k+1,\ldots l-1,l+1,\ldots n$.

W interpretacji fizykalnej równości (2) oznaczają, że prąd $i(t)$ płynący w k-tym uzwojeniu wywołuje takie same strumienie skojarzone z wszystkimi uzwojeniami, nie należącymi do symetrycznej pary uzwojeń, jak prąd $i(t)$, płynący w uzwojeniu l-tym. Z równości (3) wynika zaś, że strumienie skojarzone z uzwojeniami: k-tym i l-tym, a wywołane prądami, płynącymi w uzwojeniach: 1,2,...,k-1,k+1,...l-1,l+1,... n-tym - są sobie równe. Reasumując, symetryczną parę uzwojeń tworzą każde dwa uzwojenia, znajdujące się w identycznej sytuacji elektromagnetycznej względem wszystkich pozostałych uzwojeń obwodu elektromagnetycznego.

2. Analiza obwodu elektromagnetycznego z jedną symetryczną parą uzwojeń

Macierz indukcyjności głównych obwodu elektromagnetycznego, którego k-te i l-te uzwojenie stanowi symetryczną parę uzwojeń, ma postać:

$$[M] = \begin{array}{cl}
\left[\begin{array}{cccccccc}
M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1k} & \cdots & M_{1k} & \cdots & M_{1n}\\
M_{21} & M_{22} & \cdots & M_{2k} & \cdots & M_{2k} & \cdots & M_{2n}\\
\multicolumn{8}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
\multicolumn{8}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
M_{k1} & M_{k2} & \cdots & M_{kk} & \cdots & M_{kl} & \cdots & M_{kn}\\
\multicolumn{8}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
\multicolumn{8}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
M_{k1} & M_{k2} & \cdots & M_{kl} & \cdots & M_{kk} & \cdots & M_{kn}\\
\multicolumn{8}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
\multicolumn{8}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\
M_{n1} & M_{n2} & \cdots & M_{nk} & \cdots & M_{nk} & \cdots & M_{nn}
\end{array}\right]
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ \text{- k-ty wiersz}\\ \\ \\ \text{- l-ty wiersz}\\ \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{cc}
\text{k-ta} & \text{l-ta}\\
\text{kolumna} & \text{kolumna}
\end{array} &
\end{array}
\qquad (4)$$

Pomiędzy elementami k-tego i l-tego wiersza oraz k-tej i l-tej kolumny macierzy zachodzą równości (1) (2) (3). Łatwo wykazać, że każdej symetrycznej parze uzwojeń odpowiada wektor własny macierzy indukcyjności głównych $[M]$, niezależny od wartości jej elementów. Jeżeli symetryczną parę tworzą uzwojenia: k-te i l-te, wówczas unormowany wektor własny $[P_{kl}]$ ma postać:

$$\left[0 \;\ldots\; 0 \;\underset{\text{k-ty element}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\; 0 \;\ldots\; 0 \; -\underset{\text{l-ty element}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\; 0 \;\ldots\; 0\right]^T,$$

zaś jego wartość własna równa się $(M_{kk} - M_{kl})$

$$[M]\,[P_{kl}] = (M_{kk} - M_{kl})\,[P_{kl}]. \qquad (5)$$

Wektor własny $[P_{kl}]$ jest obrócony o kąt $\frac{\pi}{4}$ w lewo w stosunku do osi k w płaszczyźnie, wyznaczonej przez osie: k i l naturalnego układu współrzędnych. Wektorem ortogonalnym do niego i leżącym w tej samej płaszczyźnie jest wektor

$$\begin{array}{cccccccccc} \Big[0 & \ldots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \ldots \; 0\Big]^T \\ & & & \text{k-ty} & & & & \text{l-ty} & & \\ & & & \text{element} & & & & \text{element} & & \end{array}$$

Wprowadzając układ współrzędnych o osiach k-tej i l-tej, wyznaczonych przez wersory: $\left[0 \ldots 0 \frac{1}{\sqrt{2}} 0 \ldots 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} 0 \ldots 0\right]^T$ i $\left[0 \ldots 0 \frac{1}{\sqrt{2}} 0 \ldots \ldots 0 \frac{1}{\sqrt{2}} 0 \ldots 0\right]^T$ oraz - pozostałych, pokrywających się z osiami naturalnego układu współrzędnych, otrzymujemy nowy ortogonalny układ współrzędnych, którego oś k ma kierunek zgodny z kierunkiem własnym przekształcenia, opisanego macierzą $[M]$. Macierz transformacji, prowadzącej z naturalnego - do nowego układu współrzędnych oznaczać będziemy przez $[N_k]$ przy czym indeks dolny wskazuje na oś, której wersor jest wektorem własnym macierzy $[M]$. Ortogonalne macierze transformacji $[N_k]$ i transformacji odwrotnej $[N_k]^{-1}$ mają postać:

$$[N_k] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & & -\frac{1}{\sqrt{2}} & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & & \frac{1}{\sqrt{2}} & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{- k-ty wiersz} \\ \\ \\ \\ \text{- l-ty wiersz} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} \text{k-ta kolumna} & \text{l-ta kolumna} \end{array} \end{array} \tag{6}$$

$$[N_k]^{-1} = [N_k]^T \tag{7}$$

Macierz indukcyjności głównych, określona w nowym układzie współrzędnych iloczynem $[N_k][M][N_k]^{-1}$ upraszcza się, a mianowicie elementy k-tego wiersza i k-tej kolumny zerują się z wyjątkiem elementu, leżącego na przekątnej głównej macierzy, który przyjmuje wartość własną $(M_{kk} - M_{kl})$. Taka postać macierzy indukcyjności głównych jest rezultatem diagonalizującego działania wektora własnego, wyznaczającego oś k nowego układu współrzędnych.

Stosowanie przedstawionej transformacji przy analizie obwodów elektromagnetycznych o symetrycznie położonych uzwojeniach jest szczególnie korzystne wówczas, gdy prócz warunków (1) (2) (3) spełnione są dodatkowo równości:

$$R_k = R_l,$$
$$L_{sk} = L_{sl}, \tag{8}$$

gdzie:

R_k, R_l – rezystancja k-tego i l-tego uzwojenia,

L_{sk}, L_{sl} – indukcyjności rozproszenia k-tego i l-tego uzwojenia.

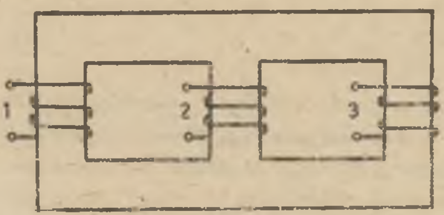
W takim przypadku układ równań różniczkowych stanu nieustalonego obwodu elektromagnetycznego ulega częściowemu rozsprzężeniu, a mianowicie równanie k-te staje się autonomiczne. Formalne wprowadzenie nowego układu współrzędnych za pomocą macierzy transformacji $[N_k]$ sprowadza się w rzeczywistości do prostych działań algebraicznych: zsumowania i odjęcia stronami równań różniczkowych k-tego i l-tego, a następnie - podzielenia ich przez $\sqrt{2}$. Innymi słowy - wynikiem transformacji jest wprowadzenie w miejsce naturalnych współrzędnych: $w_1, w_2 \ldots w_n$ (gdzie $w_i = u_i, i_i, \Psi_i$) nowych współrzędnych:

$$w_1, w_2 \ldots w_{k-1}, \ \frac{1}{\sqrt{2}}(w_k - w_l), \ w_{k+1}, \ldots w_{l-1}, \ \frac{1}{\sqrt{2}}(w_k + w_l), \ w_{l+1}, \ldots w_n.$$

W dalszym ciągu będziemy oznaczać nową k-tą współrzędną: $\frac{1}{\sqrt{2}}(w_k - w_l)$ przez $\bar{w}_k$, zaś nową l-tą współrzędną: $\frac{1}{\sqrt{2}}(w_k + w_l)$ - przez $\bar{w}_l$.

Istotne znaczenie fizykalne ma fakt, że nowy układ współrzędnych - podobnie jak naturalny - jest ortonormalny. Na skutek tego, moc chwilowa obwodu elektromagnetycznego, wyrażająca się iloczynem skalarnym wektorów prądu i napięcia, jest niezmiennikiem transformacji

$$p(t) = u_1 i_1 + \ldots + u_k i_k + \ldots + u_l i_l + \ldots + u_n i_n =$$
$$= u_1 i_1 + \ldots + \bar{u}_k \bar{i}_k + \ldots + \bar{u}_l \bar{i}_l + \ldots + u_n i_n. \tag{9}$$



Rys. 1. 3-fazowy obwód elektromagnetyczny z jedną symetryczną parą uzwojeń

Zastosowanie omówionej transformacji do analizy obwodów prześledźmy na przykładzie 3-fazowego obwodu elektromagnetycznego o niesymetrycznym rdzeniu, przedstawionym na rys. 1. Uzwojenia 1 i 3 stanowią parę symetryczną i spełniają warunki (8). Stan nieustalony obwodu elektromagnetycznego opisany jest układem równań różniczkowych:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & & \\ & R & \\ & & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_s & & \\ & L_s & \\ & & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & M_{22} & M_{12} \\ M_{13} & M_{12} & M_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Wektor własny macierzy indukcyjności głównych $[M]$ ma postać:

$$[P_{13}] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \; 0 \; - \frac{1}{\sqrt{2}} \right]^T.$$

Transformując układ równań (10) za pomocą macierzy:

$$[N_1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

otrzymujemy

$$\bar{u}_1 = R\bar{i}_1 + \frac{d}{dt} L_s\bar{i}_1 + \frac{d}{dt} (M_{11} - M_{13})\bar{i}_1, \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ \bar{i}_3 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_s & 0 \\ 0 & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ \bar{i}_3 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} M_{22} & M_{12} \\ 2M_{12} & M_{11}+M_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ \bar{i}_3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie równań różniczkowych (12), stransformowanych wg Laplace'a przy założeniu zerowych warunków początkowych, ma postać:

$$\bar{I}_1(p) = \frac{\bar{U}_1(p)}{R + p(L_s + M_{11} - M_{13})},$$

$$I_2(p) = \frac{\bar{U}_3(p)\, z_{23}(p) - \bar{U}_2(p)\, z_{33}(p)}{z_{23}(p) z_{32}(p) - z_{22}(p) z_{33}(p)},$$

$$\bar{I}_3(p) = \frac{U_2(p)\, z_{32}(p) - \bar{U}_3(p)\, z_{22}(p)}{z_{23}(p) z_{32}(p) - z_{22}(p) z_{33}(p)},$$

gdzie:

$z_{22}(p) = R + p(L_s + M_{22}),$ $\qquad$ $z_{32}(p) = R + p(L_s + 2M_{12}),$

$z_{23}(p) = pM_{12},$ $\qquad$ $z_{33}(p) = p(M_{11} + M_{13}).$

Rzeczywiste wartości prądów $I_1(p)$ i $I_3(p)$ znajdujemy na drodze transformacji odwrotnej za pomocą macierzy $\left[N_1\right]^T$:

$$I_1(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\bar{I}_1(p) + \bar{I}_3(p)\right],$$

$$I_3(p) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\bar{I}_1(p) - \bar{I}_3(p)\right].$$

3. Analiza obwodu elektromagnetycznego o większej liczbie symetrycznych par uzwojeń

Jeżeli obwód magnetyczny zawiera więcej niż jedną parę uzwojeń położonych symetrycznie, to w analogiczny sposób można wyznaczyć wektory własne odpowiadające pozostałym parom. Niechaj przykładowo parę symetryczną - prócz uzwojeń k-tego i l-tego - tworzą uzwojenia i-te i j-te. Załóżmy, że $i < j < k < l$. Wprowadzając w miejsce naturalnych współrzędnych: $w_1 \ldots w_i \ldots w_j \ldots w_k \ldots w_l \ldots w_n$ nowe współrzędne: $w_1 \ldots \bar{w}_i \ldots \bar{w}_j \ldots \bar{w}_k \ldots \bar{w}_l \ldots w_n$, gdzie:

$$\bar{w}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_i - w_j),$$

$$\bar{w}_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_i + w_j),$$

$$\bar{w}_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_k - w_l),$$

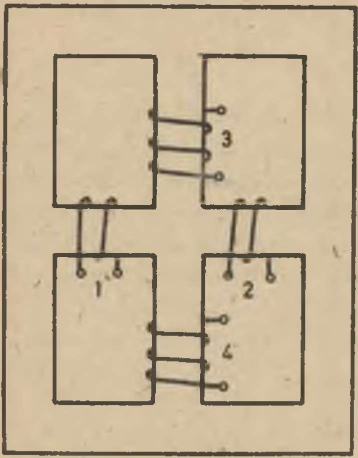
$$\bar{w}_l = \frac{1}{\sqrt{2}}(w_k + w_l),$$

czyli - w interpretacji geometrycznej - skręcając w odpowiednich płaszczyznach osie i,j,k,l naturalnego układu współrzędnych o kąt $\frac{\pi}{4}$, a pozostałe - pozostawiając niezmienione, otrzymujemy ortogonalny układ współrzędnych, którego wersory osi "i" i "k" są równe wektorom własnym macierzy $[M]$. Elementy macierzy indukcyjności w nowym układzie współrzędnych $\left[N_{ik}\right]\left[M\right]\left[N_{ik}\right]^T$ (gdzie: $\left[N_{ik}\right]$ - macierz transformacji) w i-tym i k-tym wierszu oraz w i-tej i k-tej kolumnie przyjmują wartości równe zero z wyjątkiem tych, które leżą na przekątnej głównej. Ich wartości równe są wartościom własnym: $(M_{ii} - M_{ij})$ oraz $(M_{kk} - M_{kl})$.

Przykład obwodu elektromagnetycznego o dwóch symetrycznych parach uzwojeń: 1 i 2 oraz 3 i 4 przedstawia rys. 2. Transponowane wektory własne, niezależne od wartości elementów macierzy indukcyjności głównych

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \; -\frac{1}{\sqrt{2}} \; 0 \; 0\right]^T \quad \text{oraz} \quad \left[0 \; 0 \; \frac{1}{\sqrt{2}} \; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

wyznaczają pierwszy i trzeci wiersz macierzy transformacji $\left[N_{13}\right]$:



Rys. 2. Obwód elektromagnetyczny z dwoma symetrycznymi parami uzwojeń

$$[N_{13}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Jeśli ponadto:

$$R_1 = R_2,$$
$$L_{s1} = L_{s2},$$
$$R_3 = R_4,$$
$$L_{s3} = L_{s4},$$

wówczas w wyniku transformacji układu równań stanu nieustalonego równania: pierwsze i trzecie stają się autonomiczne.

W identyczny sposób postępujemy, gdy obwód elektromagnetyczny zawiera więcej symetrycznych par uzwojeń, przy czym ze wzrostem ich liczby korzyści, wynikające z wprowadzenia nowego układu współrzędnych, są coraz wyraźniejsze. Szczególnym, granicznym przypadkiem jest obwód elektromagnetyczny, którego wszystkie uzwojenia można uporządkować w symetryczne pary. Parom tym odpowiada $\frac{n}{2}$ wektorów własnych, niezależnych od wartości elementów macierzy indukcyjności głównych. Wprowadzając nowy układ współrzędnych przy analizie takiego obwodu elektromagnetycznego powodujemy rozsprzężenie się połowy równań różniczkowych stanu nieustalonego.

LITERATURA

[1] JEFIMOW N.W., ROZENDORN E.R.: Algebra liniowa wraz z geometrią wielowymiarową. PWN, Warszawa 1974.

[2] KLUSZCZYŃSKI K.: Podstawy teoretyczne transformacji k-osiowej i jej zastosowanie w analizie stanów nieustalonych rozgałęzionych obwodów elektromagnetycznych. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. Elektryka z. 61, Gliwice 1978.

Wpłynęło do Redakcji w kwietniu 1980

Recenzent
Prof. dr hab. Kazimierz Bisztyga

АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ С СИММЕТРИЧНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ ОБМОТКАМИ

Р е з ю м е

Доказано, что каждой паре симметрично расположенных обмоток электромагнитной цепи с ненасыщенным ферромагнитным сердечником сответствует собственный вектор матрицы главных индуктивности, независимый от значений ее элементов. Введена система координат с осями, соответствующими определенным таким образом собственным векторам, в которой часть дифференциальных уравнений переходного процесса цепи равна числу симметрических пар обмоток, становится автомной.

AN ANALYSIS OF ELECTROMAGNETIC CIRCUITS WITH SYMMETRICAL PAIRS OF WINDINGS

S u m m a r y

It was shown that for any pair of windings, placed symmetrically on the unsaturated ferrite core of an electromagnetic circuit can be defined an eigenvector of the inductance matrix, regardless of their elements.

If a new orthogonal coordinate system with eigenvectors defined in that way is used in the analysis of electromagnetic circuits, a part of differential equations of transient state, equal with the number of symmetrical pairs of windings, becomes autonomous.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Tadeusz RODACKI

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

Andrzej DUDA

Instytut Elektrotechniki
WSI Opole

TYRYSTOROWE UKŁADY SZYBKIEJ KOMPENSACJI MOCY BIERNEJ

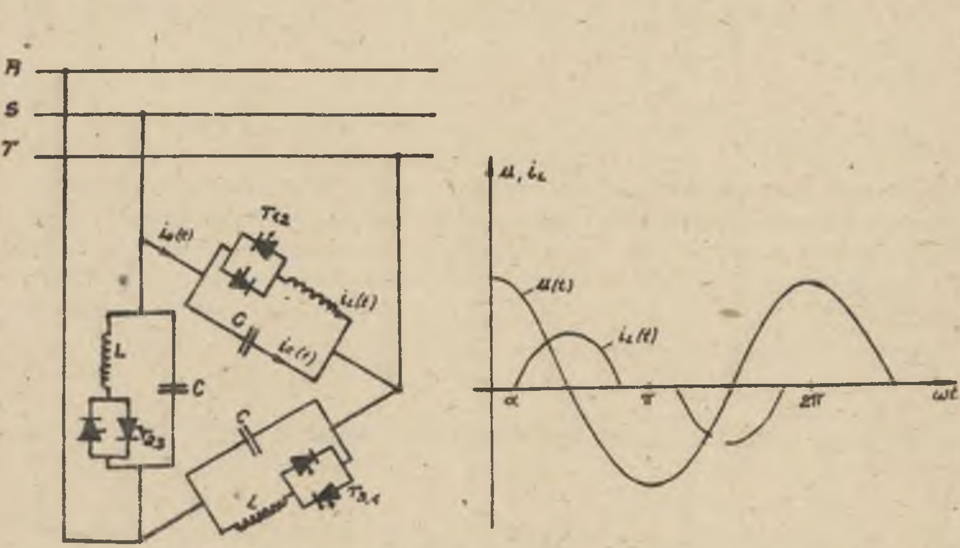
Streszczenie. W artykule omówiono układy kompensacji mocy biernej z tyrystorowo sterowanym dławikiem oraz kompensatory z komutacją wymuszoną. Podano podstawowe zależności opisujące ich pracę i warunki kompensacji mocy biernej.

1. Układ z tyrystorowo sterowanym dławikiem

Układ z tyrystorowo sterowanym dławikiem pozwala na kompensację mocy biernej metodą pośrednią. Polega ona na wytwarzaniu niezmiennej mocy biernej pojemnościowej (równej maksymalnemu zapotrzebowaniu) przez baterię kondensatorów C i zużyciu części tej mocy zbędnej do kompensacji w równolegle pracującym regulowanym dławiku L. W układzie tym obwody siłowe każdej fazy składają się z baterii kondensatorów, do której równolegle podłączony jest układ składający się z dwóch przeciwrównolegle pracujących tyrystorów i dławika (rys. 1). Każda faza zasilana jest napięciem $u = \sqrt{2}\,U \cos t$. Przez zmianę kąta wysterowania tyrystorów α (liczonego od chwili uzyskania przez napięcie zasilające wartości maksymalnej) w zakresie od 0 do $\frac{\pi}{2}$ uzyskuje się zmianę amplitudy pierwszej harmonicznej prądu, a co za tym idzie możliwość regulacji pobieranej mocy biernej. Amplituda pierwszej harmonicznej prądu fazowego kompensatora $I_{k1m(\alpha)}$ jest równa różnicy amplitudy prądu kondensatora i amplitudy pierwszej harmonicznej prądu dławika

$$I_{k1m}(\alpha) = U_m\omega C - I_{L1m}(\alpha).$$

Zależność $I_{L1} = f(\alpha)$ znajdujemy rozkładając w szereg Fouriera funkcję określającą czasowy przebieg prądu dławika $i_{L(t)}$.



Rys. 1. Schemat ideowy układu z tyrystorowo sterowanym dławikiem oraz przebiegi napięcia i prądu $i_{L(t)}$

Ponieważ

$$i_L(t) = \frac{U_m}{\omega L}(\sin\omega t - \sin\alpha),$$

otrzymamy

$$I_{L1m}(\alpha) = \frac{U_m}{\omega L}\left(1 - \frac{2\alpha}{\pi} - \frac{\sin 2\alpha}{\pi}\right).$$

Wartość średnią $I_{śr}$ i skuteczną I prądu płynącego przez jeden tyrystor określają zależności

$$I_{śr} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{U_m}{\omega L}\left[2\cos\alpha - (\pi - 2\alpha)\sin\alpha\right],$$

$$I = \frac{U_m}{\omega L}\sqrt{\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{3}{2}\sin 2\alpha + (\pi - 2\alpha)\sin 2\alpha\right)}.$$

Prąd dławika $i_L(t)$ ma dla kątów wysterowania $\alpha \neq 0$ kształt impulsów o długości $(\pi - 2\alpha)$. Z tego względu zawartość wyższych harmonicznych w prądzie dławika zależy od kąta wysterowania tyrystorów. Wartość amplitudy n-tej harmonicznej prądu i_L w stosunku do maksymalnej wartości amplitudy prądu dławika (dla $\alpha = 0$) można dla danego kąta α obliczyć z równania

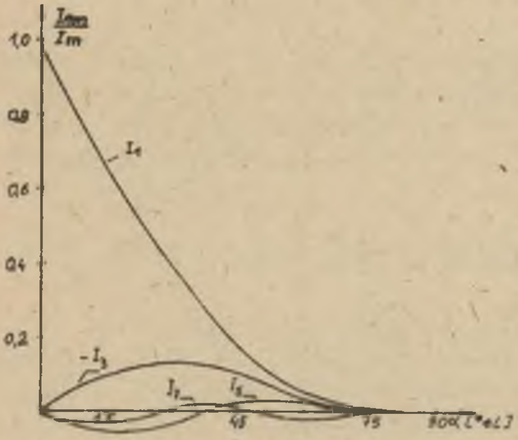
$$\frac{I_{nm}}{I_n} = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin(n+1)\alpha}{2(n+1)} + \frac{\sin(n-1)\alpha}{2(n-1)} - \sin\alpha\frac{\cos n\alpha}{n}\right].$$

gdzie:

$n = 2k+1, \quad k = 0,1,2...$

$I_m = \frac{U_m}{\omega L}$.

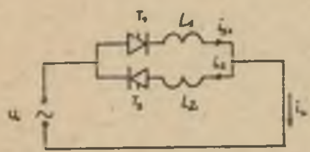
Zależności te w formie graficznej przedstawiono na rys. 2. Z powyższego równania wynika, że w prądzie dławika występuję tylko harmoniczne nieparzyste. Należy tu również zwrócić uwagę na fakt, że w prądzie przewodowym kompensatora nie występuję harmoniczne, których numery są krotnościami trzech, ponieważ dławiki połączone są w trójkąt. Jak wynika z przedstawionych rozważań moc bierna wnoszona przez wyższe harmoniczne prądu jest niewielka w porównaniu z mocą bierną harmonicznej podstawowej i w praktycznych obliczeniach można ją pominąć, tym bardziej że udział ten zmniejsza się im większa jest moc zwarciowa systemu elektroenergetycznego. W celu ewentualnego zmniejszenia zawartości wyższych harmonicznych w prądzie kompensatora można w miejsce baterii kondensatorów zastosować odpowiednio dobrany filtr L,C wyższych harmonicznych.



Rys. 2. Wykresy zależności $\frac{I_{nm}}{I_m} = f(\alpha)$

2. Układ z tyrystorowym sterownikiem o rozdzielonych dławikach

Kompensator mocy biernej przedstawiony na rys. 1 można zmodyfikować, wprowadzając w miejsca indukcyjności L - połączonej szeregowo z przeciwrównoległym układem dwu tyrystorów - układ przedstawiony na rys. 3. Składa się on z dwóch przeciwrównolegle połączonych tyrystorów, przy czym szeregowo z każdym z nich połączony jest jeden dławik L1 i L2. Jeśli napięcie zasilania ma przebieg $u = U_m \sin\omega t$ prąd wyjściowy sterownika i_L jest równy sumie prądów płynących przez dławiki i_{L1} i i_{L2}, przy czym:



Rys. 3. Sterownik z rozdzielonymi dławikami

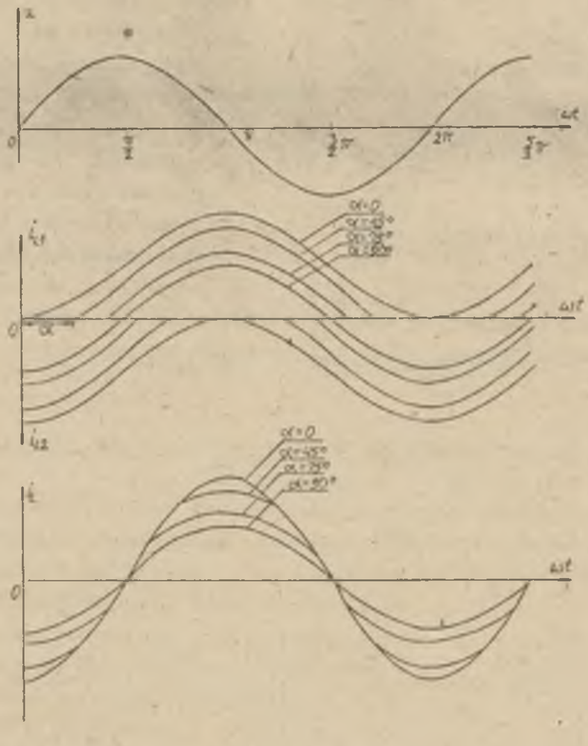
$$i_{L1} = \frac{U_m}{\omega L_1}(\cos\alpha - \cos\omega t) \quad \text{dla} \quad i_{L1} \geq 0,$$

$$i_{L2} = \frac{U_m}{\omega L_2}(-\cos\alpha - \cos\omega t) \quad \text{dla} \quad i_{L2} \leqslant 0.$$

Przy założeniu $L_1 = L_2 = L$, otrzymamy:

$$i_L(t) = \begin{cases} -2\, I_m \cos\omega t & \text{dla} \quad i_{L1} > 0 \ \ \text{i} \ \ i_{L2} < 0 \\ I_m(\cos\alpha - \cos\omega t) & \text{dla} \quad i_{L2} = 0 \\ I_m(-\cos\alpha - \cos\omega t) & \text{dla} \quad i_{L2} = 0 \end{cases}$$

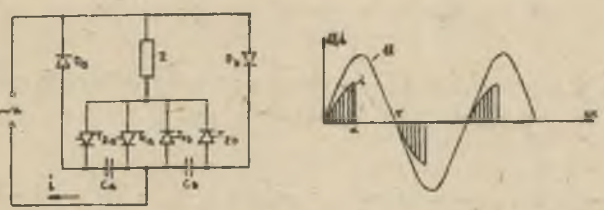
Wynika stąd, że prąd sterownika ma przebieg ciągły dla $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, a dla $\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \pi$ ma przebieg impulsowy, analogiczny jak w układzie z pkt. 1(kąt wysterowania α liczony jest od przejścia napięcia przez 0). Na rys. 4 przedstawiono przebiegi napięcia i prądów i_{L1}, i_{L2}, i_L dla różnych kątów α z przedziału $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.



Rys. 4. Przebiegi napięcia i prądów w sterowniku o rozdzielonych dławikach

3. Tyrystorowe kompensatory mocy biernej z komutacją wymuszoną

Przekształtnik tyrystorowy zasilany z sieci prądu przemiennego może być wykorzystany jako kompensator mocy biernej, jeżeli zastosujemy komutację wymuszoną tyrystorów. Komutacja wymuszona pozwala na załączanie i wyłączanie tyrystorów w dowolnej chwili czasowej, co pozwala na uzyskanie wyprzedzenia przebiegu napięcia zasilania przez pierwszą harmoniczną prądu.



Rys. 5. Schemat ideowy jednofazowego kompensatora mocy biernej z komutacją wymuszoną oraz przebiegi napięcia i prądu

Na rys. 5 przedstawiono schemat prostego jednofazowego kompensatora z komutacją wymuszoną. Zakładając, że obciążenie układu ma charakter rezystancyjny oraz że załączenie tyrystorów głównych następuje na początku każdego półokresu napięcia zasilającego prąd i(t) można określić równaniem:

$$i_{(t)} = \begin{cases} I_m \sin\omega t & \text{dla} \quad 0 \leq \omega t < \alpha \\ 0 & \text{dla} \quad \alpha < \omega t < \pi \end{cases}$$

gdzie:

$I_m = \frac{U_m}{R}$, $u(t) = U_m \sin\omega t$,

α - kąt wyłączenia tyrystora głównego.

Rozwijając powyższą funkcję w szereg Fouriera otrzymujemy

$$i(t) = \frac{U_m}{2\pi R}\Big[(2\alpha - \sin 2\alpha)\sin\omega t + (1 - \cos 2\alpha)\cos\omega t +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\sin 2n\alpha - n\sin 2(n+1)\alpha}{n(n+1)} \sin(2n+1)\omega t +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cos 2n\alpha - n\cos 2(n+1)\alpha - 1}{n(n+1)} \cos(2n+1)\omega t.$$

Z powyższej zależności wynika, że dla pierwszej harmonicznej prądu przekształtnik pobiera z sieci moc czynną

$$P = \frac{U^2}{2\pi R}(2\alpha - \sin 2\alpha)$$

oraz jest źródłem mocy biernej indukcyjnej

$$Q = -\frac{U^2}{2\pi R}(1 - \cos 2\alpha) = -\frac{U^2}{\pi R}\sin^2\alpha.$$

Przeanalizujemy dla przykładu przypadek kompensacji trójfazowego odbiornika o mocy P_o i współczynniku obciążenia $\cos\varphi_o$

$$i_o(t) = I_o \sin(\omega t - \varphi_o) \quad \text{gdzie:} \quad I_o = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{P_o}{U\cos\varphi_o}$$

dla kompensatora

$$i_k(t) = I_{km}\sin\omega t \quad \text{dla} \quad 0 < \omega t < \alpha ,$$

gdzie

$$I_{km} = \frac{U_m}{R}.$$

Uwzględniając tylko pierwszą harmoniczną można napisać

$$R = \frac{3\,U^2(2\alpha - \sin 2\alpha)}{2\pi P_k}.$$

Wypadkowy prąd fazowy i(t) układu odbiornik-kompensator jest równy

$$i(t) = \begin{cases} i_o(t) + i_k(t) = \sqrt{I_o^2 + I_k^2 + 2I_oI_k\cos\varphi_o}\,\sin(\omega t - \varphi) & \text{dla} \quad 0 < \omega t < \alpha \\ i_o(t) & \text{dla} \quad \alpha < \omega t < \pi , \end{cases}$$

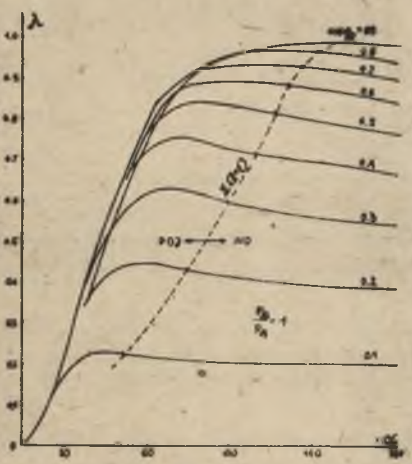
gdzie

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{I_o\sin\varphi_o}{I_o\cos\varphi_o + I_k} = \left[\frac{1}{1 + \frac{2\pi}{(2\alpha - \sin 2\alpha)}\frac{P_k}{P_o}}\right]\mathrm{tg}\,\varphi_o.$$

Po obliczeniu wartości skutecznej prądu i(t) można obliczyć wypadkowy współczynnik mocy układu λ określony jako

$$\lambda = \frac{P_o + P_k}{3UI} = \left(1 + \frac{P_k}{P_o}\right)\left[\frac{1}{2\pi}\left[1 + \frac{4\pi^2 \cos\varphi_o}{(2\alpha - \sin 2\alpha)^2}\left(\frac{P_k}{P_o}\right)^2 + \frac{4\pi \cos\varphi_o}{2\alpha - \sin 2\alpha}\left(\frac{P_k}{P_o}\right)\right]\left[2\alpha - \sin 2(\alpha - \psi) - \sin 2\psi + 2\pi - 2\alpha + \sin 2\varphi_o + \sin 2(\alpha - \varphi_o)\right]\right]^{-\frac{1}{2}} \cos\varphi_o .$$

Rodzinę funkcji $\lambda = f(\alpha)$ obliczonych dla założenia $\frac{P_k}{P_o} = 1$ i różnych wartości $\cos\varphi_o$ przedstawia rys. 6.



Rys. 6. Wykresy zależności $\lambda = f(\alpha)$

Z zależności przedstawionych powyżej można również obliczyć wartość kąta α, przy którym sumaryczna moc bierna odbiornika i kompensatora jest równa zeru

$$Q_o + Q_k = 0,$$

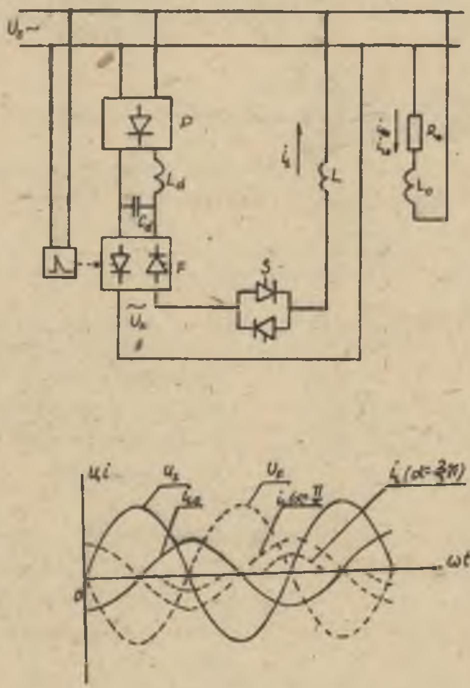
po podstawieniu odpowiednich zależności uzyskamy dla pierwszej harmonicznej

$$2\frac{P_k}{P_o}\,\mathrm{ctg}\,\varphi_o = (2\alpha - \sin 2\alpha).$$

Rozwiązanie tego równania dla $\frac{P_k}{P_o} = 1$ i różnych wartości $\cos\varphi_o$ przedstawiono na rys. 6 linią przerywaną. Z wykresów tych wynika, że dla każdego $\cos\varphi_o$ istnieją dwie optymalne wartości kąta α: jedna zapewniająca maksymalny współczynnik mocy λ i druga, przy której sumaryczna moc bierna układu odbiornik-kompensator jest równa zeru.

4. Kompensatory z komutacją wymuszoną i pośredniczącym obwodem prądu stałego

Na rys. 7 podano schemat blokowy kompensatora mocy biernej indukcyjnej z pośredniczącym obwodem prądu stałego. Układ składa się z: prostownika P, filtru $L_d - C_d$, falownika F, sterownika S i dławika L. Napięcie wyjściowe falownika u_F jest przesunięte w fazie względem napięcia sieci zasilającej u_s o kąt π. Zakładając, że obciążenie falownika jest czysto in-



Rys. 7. Schemat blokowy kompensatora z pośredniczącym obwodem prądu stałego oraz przebiegi prądów i napięć w układzie

dukcyjne, a kąt wysterowania α tyrystorów sterownika S wynosi $\frac{\pi}{2}$, to prąd dławika i_L jest prądem sinusoidalnym opóźnionym o kąt $\frac{\pi}{2}$ względem napięcia falownika. Oznacza to, że prąd i_L wyprzedza o kąt $\frac{\pi}{2}$ napięcia sieci zasilającej, czyli że ma charakter pojemnościowy.

Regulację skutecznej wartości prądu dławika i_L można uzyskać poprzez:

- regulację napięcia stałego zasilającego falownik (poprzez zastosowanie prostownika sterowanego),
- przez zmianę kąta wysterowania tyrystorów sterownika w zakresie od $\frac{\pi}{2}$ do π.

Pracę kompensatora ilustrują przebiegi napięć i prądów przedstawione na rys. 7.

LITERATURA

[1] GYUGGI I., OTTO R.A., PUTMAN T.H.: Principles and application of static, thyristor-controlled shunt compensators. IEEE - Transactions, 1978.

[2] ERLICKI M., EMANNUEL-EIGELES A.: New Aspects Power Factor Improvement (część I i II). IEEE - Transactions, 1968.

[3] Materiały na krajową konferencję napędu elektrycznego i energoelektroniki. Kraków 1977.

[4] TUNIA H., WINIARSKI B.: Podstawy Energoelektroniki. WNT, Warszawa 1980.

[5] DĄBROWSKI W., MARKIEWICZ H.: Kompensacja mocy biernej obciążeń szybkozmiennych przy występowaniu przebiegów odkształconych prędu i napięcia. Przegląd Elektrotechniczny nr 3, 1978.

Wpłynęło do Redakcji w maju 1980

Recenzent:
Doc. dr Zbigniew Białkiewicz

ТИРИСТОРНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ БЫСТРОЙ КОМПЕНСАЦИИ РЕАКТИВНОЙ МОЩНОСТИ

Р е з ю м е

В работе описаны управляемый статический источник реактивной мощности с тиристорно управляемыми реакторами, а также тиристорные компенсаторы с внутренней коммутацией. Представлены основные зависимости, описывающие их работы и условия компенсации реактивной мощности.

THE THYRYSTOR-CONTROLLED DEVICES FOR REACTIVE POWER COMPENSATION

S u m m a r y

The paper describes and analyses the thyrystor-controlled devices for reactive power compensation, particularly the static, thyristor-controlled inductor type compensator and devices with controlled firing and execution angles of the thyristors.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Tadeusz RODACKI

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechnika Śląska

Andrzej DUDA

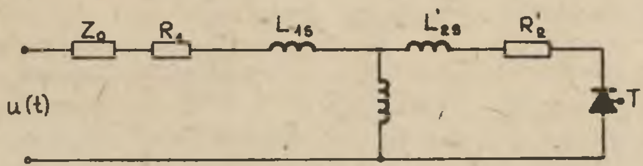
Instytut Elektrotechniki
WSI - Opole

TYRYSTOROWO-MAGNETYCZNY REGULATOR NAPIĘCIA

Streszczenie. W artykule omówiono zasadę działania i sposoby obliczenia tyrystorowo-magnetycznego regulatora napięcia w układzie transformatorowym[x]. Wyprowadzono równania opisujące podstawowe zależności i charakterystyki regulatora tyrystorowo-magnetycznego.

1. Zasada działania regulatora tyrystorowo-magnetycznego

Regulator tyrystorowo-magnetyczny w układzie transformatorowym zbudowany jest z rdzenia, na którym nawinięte są dwa uzwojenia analogicznie, jak w transformatorze jednofazowym: uzwojenie robocze o liczbie zwojów z_r i uzwojenie sterujące o liczbie zwojów z_s. W szereg z uzwojeniem roboczym włączona jest impedancja obciążenia Z_o, natomiast uzwojenie sterujące zbocznikowane jest tyrystorem T. Schemat zastępczy regulatora tyrystorowo-magnetycznego przedstawia rys. 1.



Rys. 1. Schemat zastępczy regulatora T-M

W celu objaśnienia zasady działania regulatora T-M przyjęto następujące założenia upraszczające: nie uwzględniono prądu magnesującego, przyjęto, że pętla histerezy magnetycznej ma współczynnik prostokątności równy jedności, pominięto wpływ impedancji wzdłużnej w schemacie zastępczym, za-

[x] Patent PRL nr 72715.

łożono, że maksymalne napięcie zasilania jest mniejsze lub równe napięciu krytycznemu.

Okres pracy regulatora T-M podzielono na dwa półokresy:

- półokres sterowania, w którym poziom indukcji w rdzeniu B_s jest ustalony przez włączenie tyrystora impulsem bramkowym. Prąd płynie wtedy w uzwojeniu roboczym i sterującym,
- półokres nasycenia, w którym rdzej jest przemagnesowany od indukcji B_s do indukcji nasycenia B_n. W chwili nasycenia się rdzenia prąd płynie tylko w uzwojeniu roboczym.

W półokresie sterowania w przedziale $0 \leq \omega t \leq \alpha_z$ indukcja w rdzeniu zmienia się od wartości B_n według zależności

$$B = B_n + \frac{U_m}{\omega z_r S}\int_0^{\alpha}(-\sin\omega t)d\omega t = B_n\cos\alpha.$$

Od momentu załączenia tyrystora do końca półokresu sterowania $\omega t = \pi$ indukcja w rdzeniu ma wartość stałą i równą

$$B_s = B_n\cos\alpha_z.$$

W czasie półokresu nasycenia w przedziale $0 \leq \omega t \leq \alpha_n$ indukcja w rdzeniu opisana jest zależnością

$$B = B_s + \frac{U_m}{\omega z_r S}\int_0^{\alpha}(\sin\omega t)d\omega t = B_s + B_n(1-\cos\alpha) = B_n(1-\cos\alpha+\cos\alpha_z),$$

gdzie α - bieżący kąt fazowy liczony od początku półokresu nasycenia. Porównując powyższe równanie z indukcją nasycenia, otrzymamy

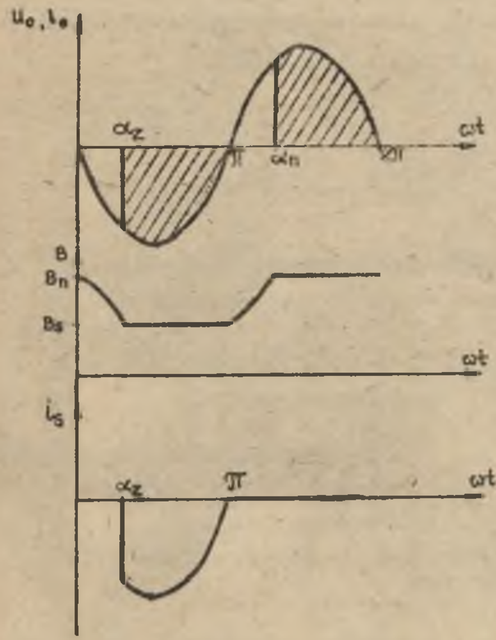
$$\alpha_z = \alpha_n.$$

Od chwili wejścia w nasycenie do końca półokresu nasycenia indukcja pozostaje stała i równa B_n. Przebiegi prądu i indukcji dla obciążenia rezystancyjnego przedstawia rys. 2.

Analizując charakterystyki regulatora T-M przy założeniach upraszczających podanych powyżej, można stwierdzić, że są one bardzo podobne do charakterystyk tyrystorowego regulatora napięcia przemiennego. W porównaniu jednak do regulatorów tyrystorowych regulatory T-M posiadają następujące zalety:

- możliwość regulacji wysokich napięć poprzez odpowiedni dobór przekładni transformatora,

- galwaniczne odizolowanie układu sterowania i regulacji od obwodów siłowych,
- prostą budowę układu sterowania i regulacji.



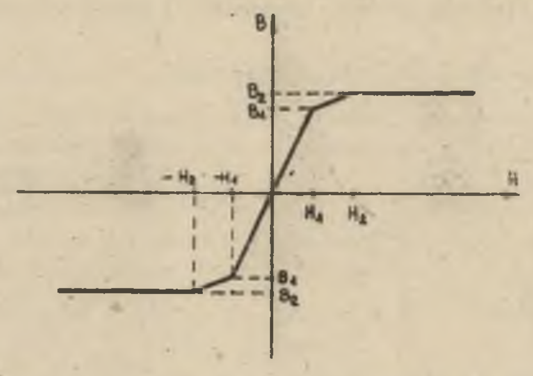
Rys. 2. Przebiegi prądów i indukcji w regulatorze T-M przy obciążeniu rezystancyjnym i przyjętych założeniach upraszczających

Istotną cechę rzeczywistych regulatorów T-M jest istnienie prądu biegu jałowego, którego wielkość zależy od sposobu konstrukcji i wykonania transformatora. Istnienie tego prądu może być wadę przy stosowaniu regulatorów T-M w układach napędowych, ale może stanowić cenną zaletę tych regulatorów, przy zastosowaniu ich w układach zasilania łuku elektrycznego. Pręd ten będzie dodatnio wpływał na stabilność palenia się łuku elektrycznego. W rzeczywistych regulatorach T-M charakterystyka magnesowania rdzenia nie jest idealnie prostokątna, występuje zjawisko histerezy, przenikalność magnetyczna materiału, z którego wykonany jest rdzeń, ma wartość skończoną oraz występuje impedancja wzdłużna schematu zastępczego transformatora. Dlatego też, chcąc określić możliwości zastosowania regulatora T-M, jego właściwości i charakterystyki, należy przeprowadzić analizę pracy regulatora T-M w oparciu o model jak najbardziej zbliżony do układu rzeczywistego.

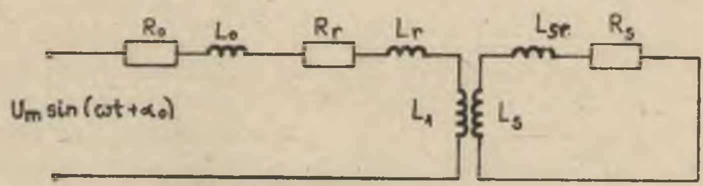
2. Analiza pracy regulatora T-M z uwzględnieniem prądu magnesującego

Przyjęto następujące założenia:

- charakterystyka magnesowania rdzenia aproksymowana jest trójodcinkowo (rys. 3) i nie uwzględniono zjawiska histerezy,
- regulator zasilany jest napięciem przemiennym $u(t) = U_m \sin\omega t$ i $\frac{U_m}{\omega z_r S} \leq B_1$.



Rys. 3. Aproksymowana charakterystyka magnesowania rdzenia



Rys. 4. Schemat zastępczy regulatora T-M dla okresu przewodzenia tyrystora

Załóżmy, że w chwili $\omega t = \pi + \varphi_z = \varphi_0$ następuje załączenie tyrystora. Schemat zastępczy regulatora T-M dla okresu przewodzenia tyrystora jest przedstawiony na rys. 4, gdzie:

R_o, X_o – rezystancja i reaktancja obciążenia,
R_r, X_r – rezystancja i reaktancja rozproszenia uzwojenia roboczego,
R_s, X_{sr} – rezystancja i reaktancja rozproszenia uzwojenia sterującego,
X_1 – reaktancja uzwojenia roboczego,
X_s – reaktancja uzwojenia sterującego:

$$X_1 = \omega L_1, \quad L_1 = \frac{\mu_1 z_r^2 S}{l}, \quad \mu_1 = \frac{B_1}{H_1},$$

$$X_s = \omega L_s, \quad L_s = \frac{\mu_1 z_s^2 S}{l},$$

S – przekrój rdzenia,
l – długość drogi magnetycznej rdzenia,
I(0) – prąd płynący przez uzwojenia robocze w chwili załączenia tyrystora,
M – współczynnik indukcyjności wzajemnej ($M = \sqrt{L_1 L_s}$).

$i(t)$ - prąd płynący w uzwojeniu roboczym po załączeniu tyrystora,
$i_s(t)$ - prąd płynący w uzwojeniu sterującym po załączeniu tyrystora.

Po przesunięciu początku układu współrzędnych do punktu α_0 pracę regulatora T-M po załączeniu tyrystora opisuje układ równań

$$\begin{gathered}(R_o + R_r)i'(t) + L_1\frac{di'(t)}{dt} + L_r\frac{di'(t)}{dt} + L_o\frac{di'(t)}{dt} = U_m\sin(\omega t + \alpha_0)\\ -M\frac{di'(t)}{dt} + L_{sr}\frac{di_s'(t)}{dt} + R_s i_s'(t) + L_s\frac{di_s'(t)}{dt} = 0\end{gathered} \tag{1}$$

$i'(t)$, $i'_s(t)$ - przebiegi czasowe prądów w układzie współrzędnych o początku w pkt α_0. Stosując do układu równań (1) przekształcenie Laplace'a i uwzględniając, że:

$I_s'(0) = 0$; $I'(0) = I(0)$; $L_{ss} = L_{sr} + L_s$; $L_{11} = L_o + L_r + L_1$;

$Z_1(s) = R_2 + sL_{11}$; $Z_2(s) = R_s + sL_{ss}$,

otrzymujemy układ równań:

$$Z_1(s)I'(s) - sMI_s'(s) - L_{11}I(0) = \frac{sU_m\sin\alpha_0 + U_m\cos\alpha_0}{s^2 + \omega^2},$$

$$sMI'(s) + Z_2(s)I_s'(s) + MI(0) = 0, \tag{2}$$

$$\alpha_0 = \pi + \alpha_z.$$

Rozwiązując układ równań (2) otrzymujemy operatorowe równanie prądu w uzwojeniu roboczym $I'(s)$ i w uzwojeniu sterującym $I_s'(s)$. Obliczając transformatę odwrotną oraz wracając do poprzedniego układu współrzędnych (początek w pkt 0) otrzymujemy czasowe przebiegi prądów $i(t)$ i $i_s(t)$.

$$i(t) = C_1\exp\left[\frac{s_1}{\omega}(\omega t - \alpha_0)\right] + C_2\exp\left[\frac{s_2}{\omega}(\omega t - \alpha_0)\right] + C_3\cos\omega t + C_4\sin\omega t, \tag{3}$$

gdzie:

$$C_1 = \frac{s_1^3(L_{ss}L_{11}I(0) - L_1L_sI(0) + s_1^2(U_mL_{ss}\sin\alpha_0 + R_sL_{11}I(0))}{(s_1^2 + \omega^2)(s_1 - s_2)(L_{11}L_{ss} - L_1L_s)} +$$

$$+ \frac{s_1(U_mR_s\sin\alpha_0 + U_mL_{ss}\omega\cos\alpha_0 - \omega^2L_1L_sI(0) + L_{ss}L_{11}I(0)\omega^2)}{(s_1^2 + \omega^2)(s_1 - s_2)(L_{11}L_{ss} - L_1L_s)} +$$

$$+ \frac{U_mR_s\omega\cos\alpha_0 + \omega^2R_sL_{11}I(0)}{(s_1^2 + \omega^2)(s_1 - s_2)(L_{11}L_{ss} - L_1L_s)},$$

$$C_2 = \frac{s_2^3(L_{ss}L_{11}I(0) - L_1L_sI(0)) + s_2^2(U_mL_{ss}\sin\alpha_0 + R_sL_{11}I(0))}{(s_2^2+\omega^2)(s_2 - s_1)(L_{ss}L_{11} - L_1L_s)} +$$

$$+ \frac{s_2(U_mR_s\sin\alpha_0 + U_mL_{ss}\omega\cos\alpha_0 - \omega^2L_1L_sI(0) + L_{ss}L_{11}I(0)\omega^2)}{(s_2^2+\omega^2)(s_2 - s_1)(L_{11}L_{ss} - L_1L_s)} +$$

$$+ \frac{U_mR_s\omega\cos\alpha_0 + \omega^2R_sL_{11}I(0)}{(s_2^2+\omega^2)(s_2 - s_1)(L_{11}L_{ss} - L_1L_s)},$$

$$C_3 = \frac{L_{ss}U_m s_1s_2 - \omega^3L_{ss}U_m + U_mR_s(s_1+s_2)\omega}{(s_2+\omega^2)(s_1^2+\omega^2)(L_{11}L_{ss} - L_1L_s)},$$

$$C_4 = -\frac{\omega^2(s_1+s_2)L_{ss}U_m - U_mR_ss_1s_2 + U_m\omega^2R_s}{(s_2^2+\omega^2)(s_1^2+\omega^2)(L_{11}L_{ss} - L_1L_s)},$$

$$s_{1,2} = \frac{-(L_{ss}R_2 + L_{11}R_s) \pm \sqrt{(L_{ss}R_2 + L_{11}R_s)^2 - 4(L_{11}L_{ss} - L_1L_s)R_2R_s}}{2(L_{11}L_{ss} - L_1L_s)}$$

$$i_s(t) = C_{1s}\exp\left[\frac{s_1}{\omega}(\omega t - \alpha_0)\right] + C_{2s}\exp\left[\frac{s_2}{\omega}(\omega t - \alpha_0)\right] +$$

$$+ C_{3s}\cos\omega t + C_{4s}\sin\omega t, \tag{4}$$

gdzie:

$$C_{1s} = \frac{s_1^2 MU_m\sin\alpha_0 + s_1 MU_m\omega\cos\alpha_0 - R_2MI(0)s_1^2 - R_2MI(0)\omega^2}{(s_1^2+\omega^2)(s_1 - s_2)(L_{11}L_{ss} - L_1L_s)},$$

$$C_{2s} = \frac{s_2^2 MU_m\sin\alpha_0 + s_2 MU_m\omega\cos\alpha_0 - R_2MI(0)s_2^2 - R_2MI(0)\omega^2}{(s_2^2+\omega^2)(s_2 - s_1)(L_{11}L_{ss} - L_1L_s)},$$

$$C_{3s} = \frac{MU_m(\omega s_1s_2 - \omega^3)}{(L_{11}L_{ss} - L_1L_s)(s_1^2+\omega^2)(s_2^2+\omega^2)},$$

$$C_{4s} = -\frac{\omega^2MU_m(s_1+s_2)}{(L_{11}L_{ss} - L_1L_2)(s_1^2+\omega^2)(s_2^2+\omega^2)}.$$

Równania (3) i (4) są prawdziwe dla $\alpha_0 \leqslant \omega t \leqslant \alpha_0 + \lambda$, gdzie λ jest kątem przewodzenia tyrystora. Kąt ten można obliczyć, przyrównując równanie (4) do zera i podstawiając $\omega t = \alpha_0 + \lambda$. Zmiana indukcji w przedziale $\alpha_0 \leqslant \omega t \leqslant \alpha_0 + \lambda$ dana jest wzorem

$$B_s(t) = A\left[\exp\left(\frac{s_1(\omega t - \alpha_0)}{\omega}\right) - 1\right] + B\left[\exp\left(\frac{s_2(\omega t - \alpha_0)}{\omega}\right) - 1\right] +$$

$$+ C(\sin\omega t - \sin\alpha_0) + D(\cos\omega t - \cos\alpha_0) + B(0),$$

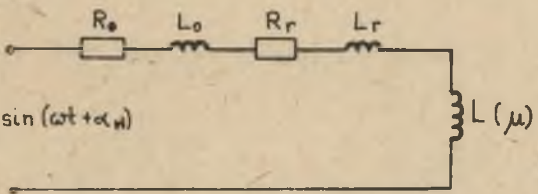
gdzie:

$$A = C_{1s}\left(\frac{R_s}{s_1 z_s S} + \frac{L_s}{z_s S}\right); \quad B = C_{2s}\left(\frac{R_s}{s_2 z_s S} + \frac{L_s}{z_s S}\right),$$

$$C = \frac{C_{3s}R_s}{\omega} + C_{4s}L_s; \quad D = L_s C_{3s} - \frac{R_s C_{4s}}{\omega}.$$

$$B(0) = \frac{\mu_1 z_r I(0)}{l}.$$

Począwszy od chwili wyłączenia tyrystora, tzn. od $\omega t = \alpha_w = \alpha_0 + \lambda$ do chwili jego ponownego załączenia dla $\omega t = 2\pi + \alpha_0$, indukcyjność główna uzwojenia roboczego ulega zmianie w zależności od zmiany przenikalności magnetycznej rdzenia. Schemat zastępczy dla tego okresu pracy jest przedstawiony na rys. 5.



Rys. 5. Schemat zastępczy regulatora T-M po wyłączeniu tyrystora

Korzystając z tego schematu można napisać ogólne równanie różniczkowe prawdziwe dla $\omega t \geqslant \alpha_w$

$$U_m \sin\omega t = (L_o + L_r + L(\mu))\frac{di(t)}{dt} + R_2 i(t).$$

Rozwiązanie tego równania ma postać

$$i(t) = \left[i(0) - I_m \sin(\alpha_w - \varphi)\right]\exp\left[(\alpha_w - \omega t)\mathrm{ctg}\varphi\right] + I_m \sin(\omega t - \varphi), \quad (5)$$

gdzie:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R_2^2 + \omega^2(L_o + L_r + L(\mu))^2}},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{(L_o + L_r + L_{(\mu)})\omega}{R_2},$$

$$R_2 = R_o + R_r.$$

W chwili $\omega t = \alpha_w$ mamy $\mu = \mu_1$; $L_{(\mu)} = L_1 = \frac{\mu_1 z_r^2 S}{l}$ $i(0) = I(\alpha_w)$, a prąd $i_1(t)$, który płynie w uzwojeniu roboczym dla $\omega t \geq \alpha_w$, jest zgodnie z zależnością (5) określony wzorem

$$i_1(t) = \left[I(\alpha_w) - I_{m11}\sin(\alpha_w - \varphi_1)\right]\exp\left[(\alpha_w - \omega t)\operatorname{ctg}\varphi_1\right] + I_{m11}\sin(\omega t - \varphi_1), \tag{6}$$

gdzie:

$$I_{m11} = \frac{U_m}{\sqrt{R_2^2 + \omega^2(L_o + L_r + L_1)^2}}; \quad \varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{\omega(L_o + L_r + L_1)}{R_2}.$$

Z równania (6) można wyprowadzić zależność opisującą przebieg indukcji $B_1(t)$

$$B_1(t) = -\frac{U_m}{\omega z_r S}(\cos\omega t - \cos\alpha_w) + \frac{Z_o I_{m11}}{\omega z_r S}\left[\cos(\omega t - \varphi_1 + \varphi_3) - \right.$$
$$\left. - \cos(\alpha_w - \varphi_1 + \varphi_3)\right] - A_1\left[\exp((\alpha_w - \omega t)\operatorname{ctg}\varphi_1) - 1\right] + B(0), \tag{7}$$

gdzie:

$$Z_o = \sqrt{R_2^2 + \omega^2(L_o + L_r)^2},$$

$$\varphi_3 = \operatorname{arctg}\frac{\omega(L_r + L_o)}{R_2},$$

$$A_1 = \frac{L_r + L_o}{\omega z_r S}\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_3}\right)(I(\alpha_w) - I_{m11}\sin(\alpha_w - \varphi_1)).$$

Zależności (6) i (7) są prawdziwe w przedziale $\alpha_w \leq \omega t \leq \alpha_{z1}$, gdzie α_{z1} jest to kąt fazowy, przy którym prąd i_1 osiąga wartość $\frac{H_1 l}{z_r}$. W tym momencie indukcja w rdzeniu osiąga wartość B_1 i następuje skokowa zmiana przenikalności magnetycznej z wartości μ_1 do μ_2, co powoduje skokową zmianę indukcyjności uzwojenia roboczego z wartości $L_1 = \frac{\mu_1 z_r^2 S}{l}$ do wartości $L_2 = \frac{\mu_2 z_r^2 S}{l}$. Wartość kąta α_{z1} można obliczyć z zależności (6), podstawiając $\omega t = \alpha_{z1}$ i $i_1(t) = \frac{H_1 l}{z_r}$. Po osiągnięciu przez indukcję wartości B_1 (dla $\omega t > \alpha_{z1}$) prąd w uzwojeniu roboczym jest określony równaniem

$$i_2(t) = \left[\frac{H_1 l}{z_r} - I_{m22}\sin(\alpha_{z1} - \varphi_2)\right]\exp\left[(\alpha_{z1} - \omega t)\operatorname{ctg}\varphi_2\right] +$$

$$+ I_{m22}\sin(\omega t - \varphi_2) \tag{8}$$

a indukcja w rdzeniu

$$B_2(t) = -\frac{U_m}{\omega z_r S}(\cos\omega t - \cos\alpha_{z1}) + \frac{z_o I_{m22}}{\omega z_r S}\Big[\cos(\omega t - \varphi_2 + \varphi_3) -$$

$$- \cos(\alpha_{z1} - \varphi_2 + \varphi_3)\Big] - A_2\left\{\exp\left[(\alpha_{z1} - \omega t)\operatorname{ctg}\varphi_2\right] - 1\right\} + B_1,$$

gdzie:

$$X_{22} = \omega L_{22} = \omega(L_o + L_r + L_2),$$

$$I_{m22} = \frac{U_m}{\sqrt{R_2^2 + X_{22}^2}},$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{X_{22}}{R_2},$$

$$A_2 = \frac{L_r + L_o}{\omega z_r S}\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\varphi_2}{\operatorname{tg}\varphi_3}\right)\left[\frac{H_1 l}{z_r} - I_{m22}\sin(\alpha_{z1} - \varphi_1)\right].$$

Równania (8) i (9) są określone w przedziale $\alpha_{z1} \leq \omega t \leq \alpha_{z2}$, gdzie α_{z2} jest to kąt, przy którym indukcja w rdzeniu osiąga wartość B_2, a prąd wartość $\frac{H_2 l}{z_r}$. Wartość kąta α_{z2} obliczymy z równania (8) podstawiając $\omega t = \alpha_{z2}$ i $i(t) = \frac{H_2 l}{z_r}$.

Po osiągnięciu przez indukcję wartości B_2 następuje nasycenie rdzenia a co za tym idzie indukcyjność uzwojenia maleje skokowo do zera. Przebieg prądu dla okresu nasycenia, tzn. dla $\alpha_{z2} \leq \omega t \leq \alpha_{w1}$, dany jest równaniem

$$i_3(t) = \left[\frac{H_2 l}{z_r} - I_{m33}\sin(\alpha_{z2} - \varphi_3)\right]\exp\left[(\alpha_{z2} - \omega t)\mathrm{ctg}\varphi_3\right] +$$

$$+ I_{m33}\sin(\omega t - \varphi_3), \tag{10}$$

gdzie $I_{m33} = \dfrac{U_m}{\sqrt{R_2 + \omega^2(L_o + L_r)^2}}$, a α_{w1} jest kątem, przy którym prąd osiąga ponownie wartość $\frac{H_2 l}{z_r}$. Kąt ten można obliczyć z równania (10), podstawiając $\omega t = \alpha_{w1}$ i $i_3(t) = \frac{H_2 l}{z_r}$.

Dla wartości $\omega t \geqslant \alpha_{w1}$ indukcyjność uzwojenia roboczego ponownie osiąga wartość L_2 i rozpoczyna się rozmagnesowanie rdzenia. Do chwili $\omega t = \alpha_{w2}$, w której indukcja osiąga wartość B_1, prąd płynący przez uzwojenie robocze zmienia się wg zależności

$$i_2'(t) = \left[\frac{H_2 l}{z_r} - I_{m22}\sin(\alpha_{w1} - \varphi_2)\right]\exp\left[(\alpha_{w1} - \omega t)\mathrm{ctg}\varphi_2\right] +$$

$$+ I_{m22}\sin(\omega t - \varphi_2) \tag{11}$$

a indukcja w rdzeniu

$$B_2'(t) = -\frac{U_m}{\omega z_r S}(\cos\omega t - \cos\alpha_{w1}) + \frac{z_o I_{m22}}{\omega z_r S}\left[\cos(\omega t - \varphi_2 + \varphi_3) -\right.$$

$$\left. - \cos(\alpha_{w1} - \varphi_2 + \varphi_3)\right] - A_2'\left\{\exp\left[(\alpha_{w1} - \omega t)\mathrm{ctg}\varphi_2\right] - 1\right\} + B_2, \tag{12}$$

gdzie

$$A_2' = \frac{L_r + L_o}{\omega z_r S}\left(1 - \frac{\mathrm{tg}\varphi_2}{\mathrm{tg}\varphi_3}\right)\left(\frac{H_2 l}{z_r} - I_{m22}\sin(\alpha_{w1} - \varphi_2)\right).$$

Wartość kąta α_{w2} można wyznaczyć z zależności (11), wstawiając $\omega t = \alpha_{w2}$, i $i_2'(t) = \frac{H_1 l}{z_r}$.

Od chwili $\omega t = \alpha_{w2}$ przenikalność magnetyczna ma ponownie wartość μ_1, a indukcyjność uzwojenia roboczego wartość L_1. Prąd i indukcja określane są wtedy zależnościami:

$$i_1'(t) = \left[\frac{H_1 l}{z_r} - I_{m11}\sin(\alpha_{w2} - \varphi_1)\right]\exp\left[(\alpha_{w2} - \omega t)\mathrm{ctg}\varphi_1\right] +$$

$$+ I_{m11}\sin(\omega t - \varphi_1), \tag{13}$$

$$B_1'(t) = -\frac{U_m}{\omega z_r S}(\cos\omega t - \cos\alpha_{w2}) + \frac{z_0 I_{m11}}{\omega z_r S}\Big[\cos(\omega t - \varphi_1 + \varphi_3) -$$

$$- \cos(\alpha_{w2} - \varphi_1 + \varphi_3)\Big] + A_1'\Big[\exp((\alpha_{w2} - \omega t)\mathrm{ctg}\varphi_1) - 1\Big] + B_1, \quad (14)$$

gdzie

$$A_1' = \frac{L_r + L_0}{\omega z_r S}\left(1 - \frac{\mathrm{tg}\varphi_1}{\mathrm{tg}\varphi_3}\right)\left(\frac{H_1 l}{z_r} - I_{m11}\sin(\alpha_{w2} - \varphi_1)\right).$$

Równania (13) i (14) są prawdziwe dla $\alpha_{w2} \leqslant \omega t \leqslant 2\pi + \alpha_0$. W chwili $2\pi + \alpha_0$ następuje ponowne załączenie tyrystora. Prąd w uzwojeniu roboczym I(0), który płynie w chwili załączenia tyrystora, można obliczyć z równania (13), po podstawieniu

$$\omega t = 2\pi + \alpha_0 \quad \text{i} \quad i_1'(t) = i_1'(2\pi + \alpha_0) = I(0).$$

Wyprowadzone powyżej równania opisują w miarę dokładnie pracę regulatora T-M, jednakże korzystanie z nich w praktyce ze względu na złożoną postać jest bardzo trudne, nawet przy zastosowaniu maszyny cyfrowej. Szczególnie kłopotliwe jest wyznaczenie zależności $I(0) = f(\alpha_z)$, ponieważ:

$$I(0) = f_1(\alpha_z, \alpha_{w2}, \beta)$$

oraz

$$\alpha_{w2} = f_2(\alpha_z, I(0), \lambda, \alpha_{z1}, \alpha_{z2}, \alpha_{w1}, \beta),$$

$$\alpha_{w1} = f_3(\alpha_z, I(0), \lambda, \alpha_{z1}, \alpha_{z2}, \beta),$$

$$\alpha_{z2} = f_4(\alpha_z, I(0), \lambda, \alpha_{z1}, \beta),$$

$$\alpha_{z1} = f_5(\alpha_z, I(0), \lambda, \beta),$$

$$\lambda = f_6(\alpha_z, I(0), \beta),$$

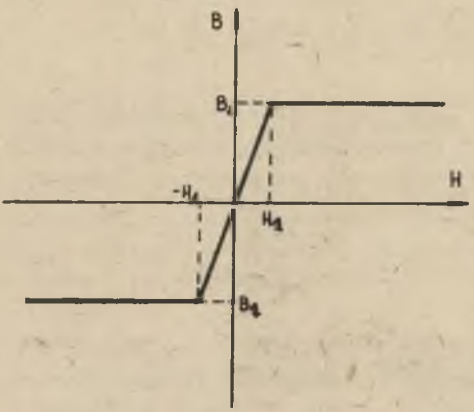
gdzie β - parametry elektryczne regulatora T-M oraz ze względu na to, że funkcja f_1-f_6 są transcendentne. W celu wyznaczania zależności $I(0) = f(\alpha_z)$ można wykorzystać twierdzenie, że odpowiedź układu na okresowe wymuszenia (załączenie tyrystora) będzie w stanie ustalonym także okresowa. Oznacza to, że dla stanu ustalonego będą spełnione warunki:

$$I(0) = i_1'(2\pi + \alpha_0),$$
$$B(0) = B_1'(2\pi + \alpha_0).$$

Ze względu na te trudności obliczenia przeprowadzono w dwu wariantach, wprowadzając dalsze założenia upraszczające.

3. Obliczenia przebiegów prądu obciążenia z uwzględnieniem prądu magnesującego, przy dwuodcinkowej aproksymacji charakterystyki magnesowania

W porównaniu do rozważań z pkt. 2 wprowadzono uproszczenia polegające na dwuodcinkowej aproksymacji charakterystyki magnesowania (rys. 6).



Rys. 6. Charakterystyka magnesowania aproksymowana dwuodcinkowo

Przyjęcie tego założenia nie ma żadnego wpływu na pracę regulatora w czasie przewodzenia tyrystora, tzn. w przedziale

$$\pi + \alpha_z \leqslant \omega t \leqslant \pi + \alpha_z + \lambda = \alpha_w$$

równania opisujące przebieg prądu $i(t)$, $i_s(t)$, $B_s(t)$ są takie same, jak wyprowadzone w pkt. 2. Pozwala to jednak uprościć równania dla okresu, w którym tyrystor nie przewodzi.

W przedziale $\alpha_w \leqslant \omega t \leqslant \alpha_{z1}$, tzn. od chwili wyłączenia tyrystora do chwili wejścia rdzenia w nasycanie, prąd $i_1(t)$ i indukcja $B_1(t)$ określone są równaniami (5) i (6). W przedziale $\alpha_{z1} \leqslant \omega t \leqslant \alpha_{w1}$ rdzeń jest nasycony (α_{w1} – kąt wyjścia z nasycania). Prąd określony jest równaniem

$$i_3(t) = \left[\frac{H_1 l}{z_1} - I_{m33}\sin(\alpha_{z1} - \varphi_3)\right]\exp\left[(\alpha_{z1} - \omega t)\operatorname{ctg}\varphi_3\right] + $$

$$+ I_{m33}\sin(\omega t - \varphi_3), \tag{15}$$

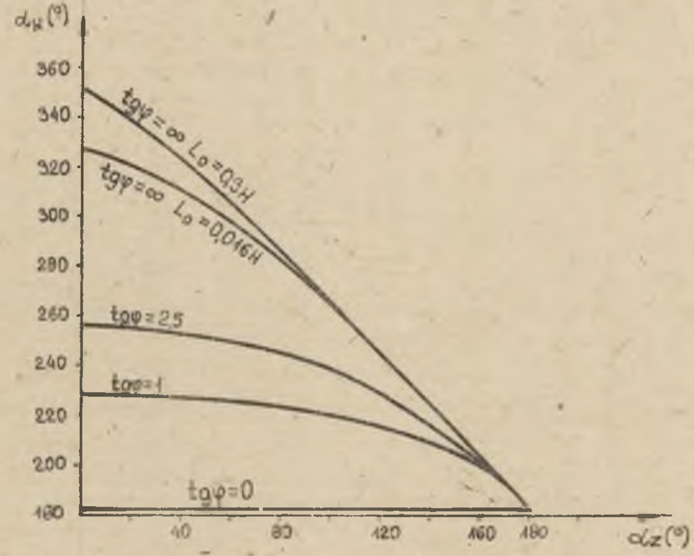
gdzie:

I_{m33} określony jest analogicznie, jak w równaniu (10),
$B(t) = B_1 = \mathrm{const}$.

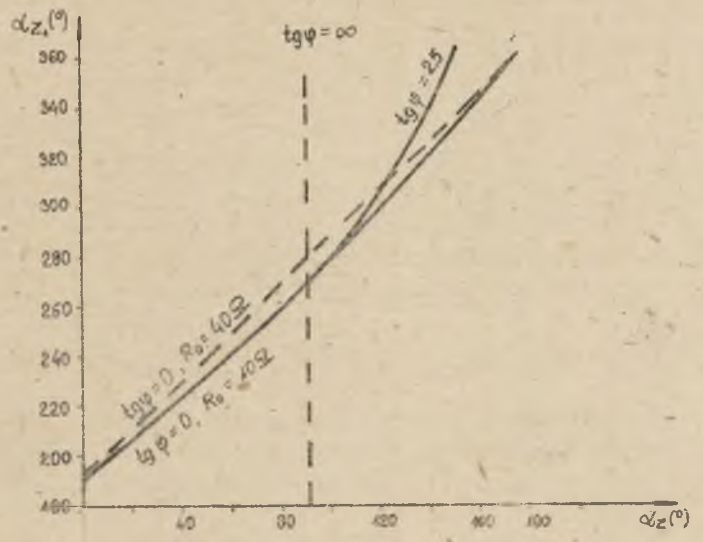
W przedziale $\alpha_{w1} \leqslant \omega t \leqslant 2\pi + \alpha_o$, to znaczy w przedziale od chwili wyjścia z nasycenia do ponownego załączenia tyrystora:

$$i_1'(t) = \left[\frac{H_1 l}{z_r} - I_{m11}\sin(\alpha_{w1} - \varphi_1)\right]\exp\left[(\alpha_{w1} - \omega t)\operatorname{ctg}\varphi_1\right] + $$

$$+ I_{m11}\sin(\omega t - \varphi_1). \tag{16}$$



Rys. 7. Wykresy funkcji $\alpha_w = f(\alpha_z)$



Rys. 8. Wykresy funkcji $\alpha_{z1} = f(\alpha_z)$

Rys. 9. Wykresy funkcji I(0) = f(α_z)

$$B_1'(t) = -\frac{U_m}{\omega z_r S}(\cos\omega t - \cos\alpha_{w1}) + \frac{Z_0 I_{m11}}{z_r \omega S}\Big[\cos(\omega t - \varphi_1 + \varphi_3) - \tag{17}$$

$$- \cos(\alpha_{w1} - \varphi_1 + \varphi_3)\Big] - A_1'\Big\{\exp\big[(\alpha_{w1} - \omega t)\mathrm{ctg}\varphi_1\big] - 1\Big\} + B_1,$$

gdzie

$$A_1' = \frac{L_r + L_0}{\omega z_r S}\left(1 - \frac{\mathrm{tg}\varphi_1}{\mathrm{tg}\varphi_3}\right)\left(\frac{H_1 l}{z_r} - I_{m11}\sin(\alpha_{w1} - \varphi_1)\right).$$

Obliczenie przeprowadzono przy zastosowaniu maszyny cyfrowej wykorzystując fakt, że w stanie ustalonym $I(0) = i_1'(2\pi + \alpha_0)$ i $B(0) = B_1'(2\pi + \alpha_0)$.

Program obliczeń sporządzono w oparciu o następujący algorytm:

a) przyjęć wartość prądu $I(0) = I_{m11}\sin(\alpha_0 - \varphi_1)$ dla danego kąta załączenia tyrystora α_z.

b) dla danego α_z, $I(0)$ i $B(0)$, obliczyć wartości λ, α_{z1}, α_{w1}.

c) sprawdzić, czy spełniony jest warunek

$$I(0) = i_1'(2\pi + \alpha_0) \quad \text{lub} \quad B(0) = B_1'(2\pi + \alpha_0),$$

d) w przypadku kiedy $I(0) \neq i_1'(2\pi + \alpha_0)$ lub $B(0) \neq B_1(2\pi + \alpha_0)$ wykonać ponowne obliczenia λ, α_{z1}, α_{w1}, przyjmując do tych obliczeń wartość $I(0) = i_1'(2\pi + \alpha_0)$,

e) obliczenia zakończyć, gdy nastąpi spełnienie warunku

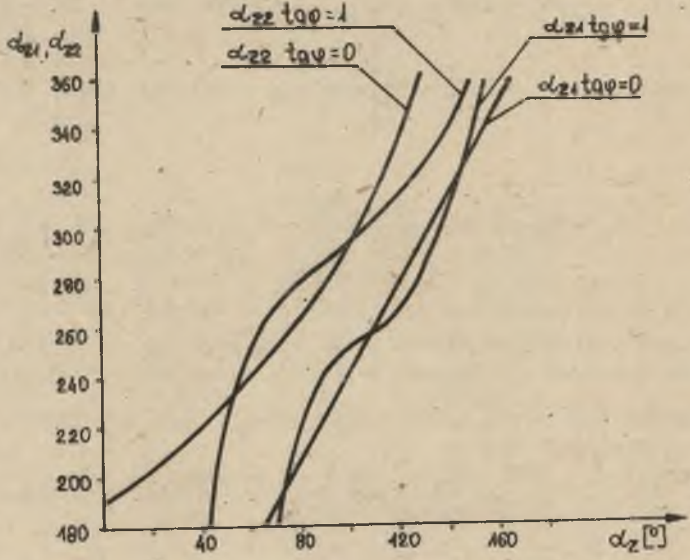
$$I(0) = i_1'(2(k-1)\pi + \alpha_0) = i_1'(2k\pi + \alpha_0)$$

z dokładnością do 0,05.

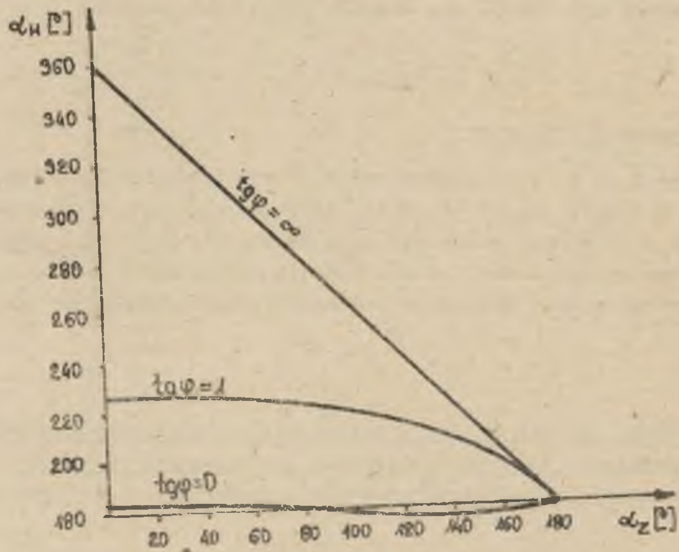
Na rysunkach 7, 8, 9 przedstawiono w formie graficznej obliczone zależności $\alpha_{w1} = f(\alpha_z)$; $\alpha_{z1} = f(\alpha_z)$ i $I(0) = f(\alpha_z)$ dla niektórych obciążeń. W oparciu o te wyniki można obliczyć przebiegi prądu obciążenia i indukcji w rdzeniu regulatora T-M dla różnych kątów wysterowania i różnych obciążeń. Przykładowo, obliczone przebiegi prądu obciążenia zamieszczone na rys. 13.

4. Obliczenie przebiegów prądu obciążenia z uwzględnieniem prądu magnesującego, przy trójodcinkowej aproksymacji charektyrystyki magnesowania i pominięciu impedancji wzdłużnej transformatora

W porównaniu do rozważań z pkt. 2 wprowadzono uproszczenie polegające na pominięciu w obliczeniach impedancji wzdłużnej transformatora. Przyję-



Rys. 10. Wykresy funkcji $\alpha_{z1}, \alpha_{z2} = f(\alpha_z)$



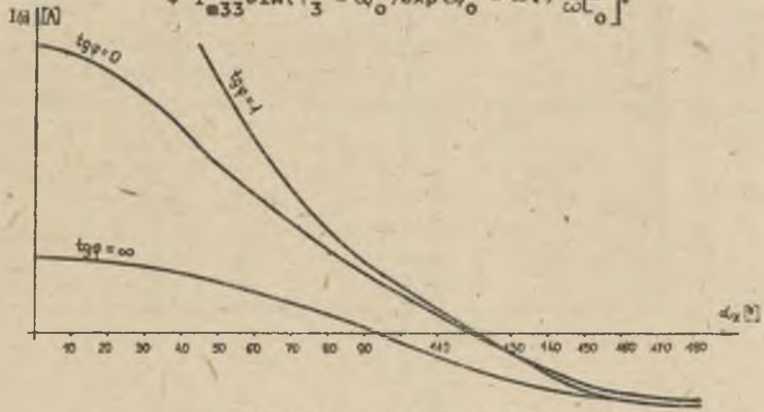
Rys. 11. Wykresy funkcji $\alpha_H = f(\alpha_z)$

cie takiego założenia bardzo upraszcza równanie dla okresu przewodzenia tyrystora. Mają one teraz następującą postać:

$$i_{(t)} = I_{m33}\sin(\omega t - \varphi_3) + \left[I_{m33}\sin(\varphi_3 - \alpha_0) + I(0)\right] e^{(\alpha_0 - \omega t)\frac{R_0}{\omega L_0}},$$

$$i_s(t) = \frac{M}{L_s}\Big[I_{m33}\sin(\omega t - \varphi_3) - I(0)\big(1 - \exp\big((\alpha_0 - \omega t)\frac{R_0}{\omega L_0}\big)\big) +$$

$$+ I_{m33}\sin(\varphi_3 - \alpha_0)\exp\big((\alpha_0 - \omega t)\frac{R_0}{\omega L_0}\big)\Big].$$



Rys. 12. Wykresy funkcji $I(0) = f(\alpha_z)$

Równania dla półokresu nasycenia mają postać identyczną, jak w pkt. 2. Należy tylko wstawić do nich $R_r = 0$ i $L_r = 0$. Dla tego przypadku przeprowadzono obliczenia analogiczne, jak w pkt. 3. Obliczono zależności $\alpha_{z1} = f(\alpha_z)$; $\alpha_w = f(\alpha_z)$; $\alpha_{z2} = f(\alpha_z)$; $I(0) = f(\alpha_z)$, które przedstawiono na rysunkach 10, 11, 12. W oparciu o te zależności można obliczyć przebiegi prądu obciążenia i indukcji w rdzeniu dla różnych kątów wysterowania i różnych obciążeń. Przykładowo obliczone przebiegi prądu obciążenia zamieszczono na rys. 14.

LITERATURA

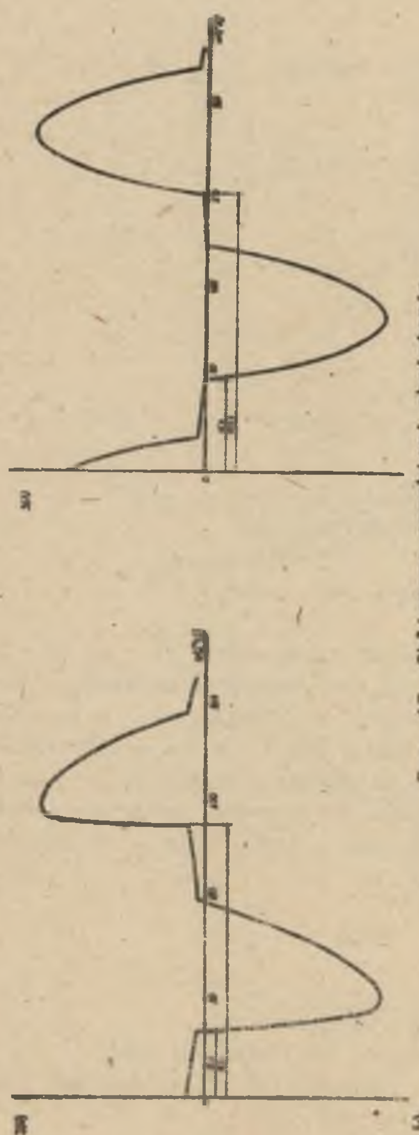
[1] LUCIŃSKI J.: Układy tyrystorowe. WNT, Warszawa 1973.

[2] ROZENBLAD M.A.: Wzmacniacze magnetyczne. WNT, Warszawa 1965.

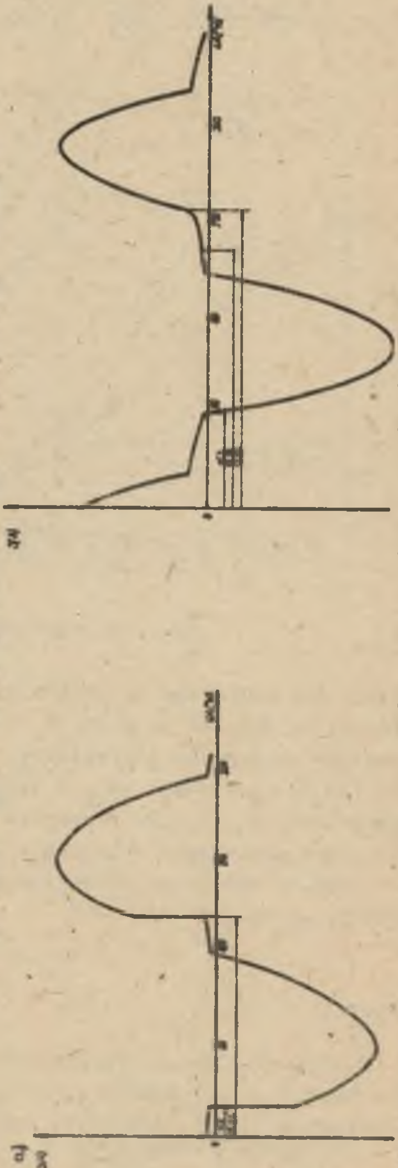
[3] ROZENBLAD M.A.: Magnitnyje elementy awtomatiki i wyczislitielnoj tiechniki, Nauka, Moskwa 1974.

Wpłynęło do Redakcji w lutym 1980

Recenzent:
Doc. dr Henryk Mońka



Rys. 13. Obliczone przebiegi obciążenia
a) obciążenie rezystancyjne, b) obciążenie rezystancyjno-indukcyjne



Rys. 14. Obliczone przebiegi prądu obciążenia
a) obciążenie rezystancyjne, b) obciążenie rezystancyjno-indukcyjne

ТИРИСТОРНО-МАГНИТНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ ПЕРЕМЕННОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Р е з ю м е

В работе представлены принципы действия, метод расчета и аналитически определенные основные зависимости и характеристики для для тиристорно-магнитного регулятора переменного напряжения.

THE THYRYSTOR-MAGNETIC REGULATORS OF ALTERNATING VOLTAGE

S u m m a r y

The paper presents theoretical discussion on thyrystor-magnetic regulators of alternating voltage.

The fundamental equations and characteristics have been presented.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Tadeusz RODACKI

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

Andrzej DUDA

Instytut Elektrotechniki
WSI Opole

STATYCZNA I DYNAMICZNA STABILNOŚĆ ŁUKU ELEKTRYCZNEGO

Streszczenie. W artykule wyprowadzono i przeanalizowano warunki statycznej i dynamicznej stabilności pracy łuku elektrycznego.

1. Wstęp

Rozwój techniki półprzewodnikowej umożliwił zastosowanie tyrystorów do budowy regulowanych źródeł zasilania łuku elektrycznego. Zarówno tyrystorowe układy zasilania, jak i układy klasyczne (transformatory i generatory spawalnicze) powinny przede wszystkim zapewnić ciągłe (stabilne) wyładowania łukowe w całym zakresie regulacji. Dlatego celowe jest poznanie warunków koniecznych do zapewnienia stabilnej pracy łuku. W celu ich określenia należy przeanalizować zjawiska związane ze współpracą źródła zasilania z łukiem elektrycznym (warunki stabilności statycznej), a dla łuku prądu przemiennego ponadto zjawiska zachodzące przy powtórnym zapalaniu się łuku przy prądach bliskich zeru (warunki stabilności dynamicznej). Otrzymane wyniki przydatne będą przy projektowaniu źródeł zasilania łuku elektrycznego.

2. Warunki statycznej stabilności palenia się łuku

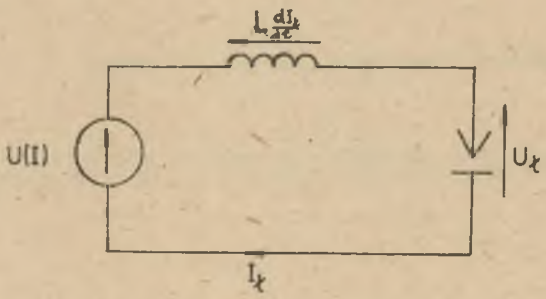
W ogólnym przypadku stabilność dowolnego procesu fizycznego ocenia się wg jego zmiany energii. Zmiana energii Q w jednostce czasu $\frac{dQ}{dt}$ określona jest różnicą między mocą dostarczaną do systemu P_d i oddaną przez system P_o

$$\frac{dQ}{dt} = P_d - P_o.$$

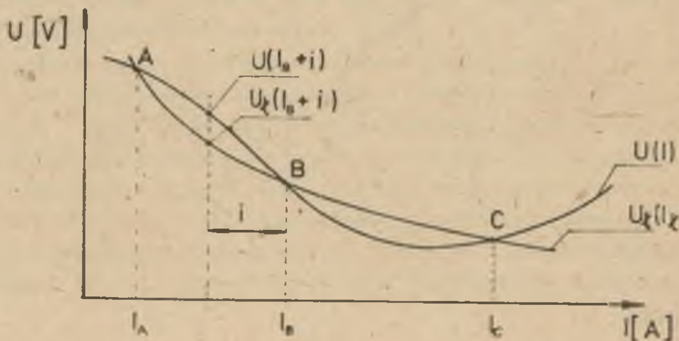
Jeżeli w łuku elektrycznym, rozpatrywanym wg tej zasady, przyrost energii $dQ = 0$, to wszystkie jego parametry pozostają niezmienione. Jest to stan ustalony, najbardziej pożądany w procesach jarzenia się łuku. Dla łuku elektrycznego moc oddawaną P_o można w większości wypadków uważać za stałą. Dlatego stabilność łuku określona jest przez stałość mocy P_d dostarczonej do łuku. Dla obwodu zasilania łuku (rys. 1) można napisać równanie:

$$U(I) = L\frac{dI_ł}{dt} + U_ł(I_ł), \qquad (1)$$

gdzie funkcja $U_ł(I_ł)$ określa statyczną charakterystykę łuku, a funkcja $U(I)$ charakterystykę zewnętrzną źródła zasilania (rys. 2).



Rys. 1



Rys. 2

W przypadku gdy $\frac{dI_ł}{dt} = 0$ punkt pracy układu zasilania łuku wyznaczony jest przez punkty A, B lub C przecięcia charakterystyk statycznych źródła zasilania i łuku. Określmy, który z punktów A, B, C będzie punktem stabilnej pracy układu.

Przypuśćmy, że w chwili $t = 0$ z dowolnej przyczyny prąd łuku uległ zmianie o wartości $i(0) = \Delta I$. Oznaczmy jednocześnie przez $i(t)$ bieżącą wartość odchylenia prądu łuku od wartości $I_{A,B,C}$. Dla każdej chwili $t > 0$

prąd łuku będzie równy: $I_Ł = I_{A,B,C} + i(t)$, a równanie (1) przybiera postać

$$U(I_{A,B,C} + i) = L\frac{d}{dt}(I_{A,B,C} + i) + U_ł(I_{A,B,C} + i). \tag{2}$$

Funkcje $U(I)$ i $U_ł(I_ł)$ są nieliniowe i przy małych zmianach prądu od wartości $I_{A,B,C}$ wartości $U(I_{A,B,C} + i)$ i $U_ł(I_{A,B,C} + i)$ można obliczyć, linearyzując te funkcje w otoczeniu punktów A,B,C:

$$U(I_{A,B,C} + i) = U_{A,B,C} + \left(\frac{\partial U}{\partial I}\right)_{A,B,C} i,$$

$$L\frac{d}{dt}(I_{A,B,C} + i) = L\frac{di}{dt}, \tag{3}$$

$$U_ł(I_{A,B,C} + i) = U_{A,B,C} + \left(\frac{\partial U_ł}{\partial I_ł}\right)_{A,B,C} i.$$

Podstawiając wzór (3) do (2) otrzymujemy równanie

$$\left(\frac{\partial U}{\partial I}\right)_{A,B,C} i - \left(\frac{\partial U_ł}{\partial I_ł}\right)_{A,B,C} i = L\frac{di}{dt}.$$

Rozwiązanie tego równania przy uwzględnieniu warunku początkowego $i(0)=\Delta I$ ma postać

$$i = \Delta I \exp\left\{-\frac{1}{L}\left[\left(\frac{\partial U_ł}{\partial I_ł}\right)_{A,B,C} - \left(\frac{\partial U}{\partial I}\right)_{A,B,C}\right]t\right\}. \tag{4}$$

Z równania (4) wynika, że dla zapewnienia stabilnego wyładowania łukowego w warunkach określonych przez punkty przecięcia statycznej charakterystyki źródła zasilania i łuku musi w każdym z tych punktów być prawdziwa nierówność

$$k = \frac{\partial U_ł}{\partial I_ł} - \frac{\partial U}{\partial I} > 0 \tag{5}$$

Wielkość k nazywamy statycznym współczynnikiem stabilności łuku. Przykładowo, dla źródła zasilania i łuku, o charakterystykach podanych na rys. 2, tylko w punkcie B jest spełniony warunek (5) i dlatego punkt ten jest punktem stabilnej pracy łuku.

3. Warunki dynamicznej stabilności łuku

Stabilność dynamiczna związana jest ze zjawiskami zachodzącymi w przestrzeni międzyelektrodowej przy prądach łuku bliskich zeru. W chwilach tych następuje wzrost działania czynników dejonizacyjnych, co może uniemożliwić ponowny zapłon łuku. Dlatego stabilność dynamiczna palenia się łuku zależeć będzie nie tylko od parametrów elektrycznych układu zasilania łuku elektrycznego, ale także od właściwości fizykochemicznych przestrzeni międzyelektrodowej.

Rezystancję łuku można określić wzorem

$$R = D\exp\left(-\frac{Q}{Q_0}\right) = \frac{U_{ł}}{I_{ł}}, \tag{6}$$

gdzie:

Q - energia dostarczana do łuku,

D, Q_0 - stałe.

Z równania (6) można obliczyć szybkość zmian energii $\frac{dQ}{dt}$

$$\frac{dQ}{dt} = Q_0\left(\frac{1}{I_{ł}} \cdot \frac{dI_{ł}}{dt} - \frac{1}{U_{ł}} \cdot \frac{dU_{ł}}{dt}\right). \tag{7}$$

Jednocześnie równanie bilansu energii łuku elektrycznego ma postać

$$\frac{dQ}{dt} = U_{ł}I_{ł} - P_0. \tag{8}$$

Podstawiając wzór (7) do (8), otrzymujemy zależność określającą dynamiczną charakterystykę napięciowo-prądową łuku

$$Q_0\left(\frac{1}{I_{ł}} \cdot \frac{dI_{ł}}{dt} - \frac{1}{U_{ł}} \cdot \frac{dU_{ł}}{dt}\right) = I_{ł}U_{ł} - P_0. \tag{9}$$

Załóżmy następnie, że w dowolnej chwili $t > 0$ napięcia i prąd łuku można określić równaniem:

$$U_{ł} = U_{ł0} + u(t); \quad I_{ł} = I_0 = i(t); \quad U_{ł}(0) = U_{ł0}; \quad I(0) = I_0;$$

$$P_0 = U_{ł0}\, I_0.$$

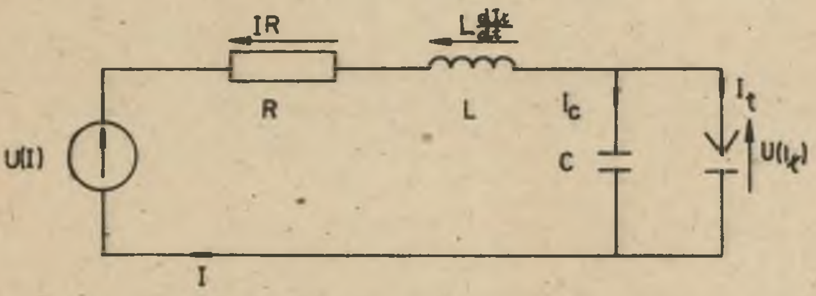
Po podstawieniu wartości $U_{ł}$ i $I_{ł}$ do równania (9) i wykonaniu różniczkowanie, otrzymamy

$$\Theta\left(U_{ł0}\frac{di}{dt} - I_0\frac{du}{dt}\right) = I_0 u + U_{ł0} i. \tag{10}$$

Wielkość $\Theta = \frac{Q_0}{P_0}$ nazywamy stałą czasową łuku. Korzystając jednocześnie ze schematu zastępczego układu zasilania łuku dla stanów dynamicznych (rys. 3), można napisać równanie

$$L\,C\,\frac{d^2u}{dt^2} + RC\,\frac{du}{dt} + u + L\,\frac{di}{dt} + Ri = 0,$$

gdzie R,L,C - parametry elektryczne obwodu zasilania.



Rys. 3

Rozwiązując układ równań (10) i (11) otrzymujemy równanie operatorowe pozwalające określić czasowy przebieg prądu i(t)

$$a_3p^3i + a_2p^2i + a_1p_1i + a_0 = 0, \tag{12}$$

gdzie:

$a_3 = 1,$

$a_2 = \frac{R}{L} - \frac{1}{\Theta} + \frac{1}{R_oC},$

$a_1 = \frac{1}{LC} - \frac{R}{L\Theta} + \frac{R}{LCR_0} + \frac{1}{R_0C\Theta},$

$a_0 = \frac{R-R_e}{LCR_0\Theta}.$

System opisany zależnością (12) jest stabilny, jeżeli współczynniki a_0, a_1, a_2, a_3 spełniają warunki:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 > 0 \quad i \quad a_1\,a_2 - a_0\,a_3 > 0.$$

Z powyższych zależności wynikają równania określające warunki dynamicznej stabilności łuku elektrycznego

$$\frac{R}{L}+\frac{1}{CR_0}-\frac{1}{\theta}>0$$

$$\left(\frac{R}{L}+\frac{1}{CR_0}-\frac{1}{\theta}\right)\left(\frac{1}{LC}+\frac{R}{LCR_0}+\frac{1}{CR_0\theta}-\frac{R}{\theta C}\right)-\frac{R-R_0}{LCR_0\theta}>0 \qquad (13)$$

$$\frac{R}{R_0}-1>0$$

$$\frac{1}{LC}-\frac{R_0}{L\theta}+\frac{R}{LCR_0}+\frac{1}{CR_0\theta}>0.$$

Ponieważ dla najczęściej spotykanych układów zasilania łuku warunek (13) jest zawsze spełniony ($a_0 < 1.10^{-19}\ s^{-3}$; $a_2 \approx 10^6\ s^{-1}$; $a_1 \approx 10^{14}\ s^{-2}$) i ponieważ $\frac{R}{L} \ll \frac{1}{CR_0}$, warunki dynamicznej stabilności pracy łuku mają postać:

$$\frac{1}{CR_0}>\frac{1}{\theta},$$

$$\frac{R}{R_0}-1>0.$$

4. Wnioski

Z nierówności $k = \frac{\partial U_ł}{\partial I_ł} - \frac{\partial U}{\partial I} > 0$, która określa warunek stabilnej pracy łuku, wynika, że źródła zasilania łuku powinny mieć charakterystykę napięciowo-prądową, zbliżoną jak najbardziej do charakterystyki idealnego źródła prądu, tzn. $\frac{\partial U}{\partial I} \to \infty$. Zapewni to możliwość zasilania łuków o różnych typach charakterystyki statycznej.

Wraz ze wzrostem współczynnika stabilności k skróceniu ulega czas ustalania się prądu w przypadku jego zmiany wywołanej dowolnym zaburzeniem oraz wzrostem elastyczności łuku (możliwość zwiększenia jego długości). Zmianę długości łuku można określić wzorem

$$\Delta I_ł = \frac{\Delta L_ł}{k} \cdot \frac{\partial U_ł}{\partial L_ł}.$$

Warunki stabilności dynamicznej łuku mają postać:

$$\frac{1}{CR_0}>\frac{1}{\theta},$$

$$\frac{R}{R_0}-1>0.$$

Stabilność dynamiczną wyładowania łukowego można zwiększyć poprzez:

a) zwiększanie wartości napięcia $U(\psi)$ źródła zasilania łuku w chwili zgaśnięcia łuku,
b) zwiększenie napięcia biegu jałowego,
c) zmniejszenie pojemności C w obwodzie zasilania łuku,
d) zwiększenie stałej czasowej,
e) zmniejszenie rezystancji R_0 łuku w chwili jego zgaśnięcia,
f) zmniejszenie długości łuku,
g) zwiększenie indukcyjności L w obwodzie zasilania łuku w chwili zgaśnięcia łuku,
h) wyeliminowanie lub zmniejszenie prądów wirowych.

Wszystkie te sposoby prowadzą w konsekwencji do zwiększenia prądu przedłukowego, dlatego wielkość tego prądu można uważać za obiektywną miarę stabilności dynamicznej łuku.

LITERATURA

[1] LESKOW G.U.: Elektriczeskaja swarocznaja duga. Moskwa.MaSzGIZ 1968.

[2] PATON B.E., LEBIEDIEW W.K.: Elektrooborudowanie dla dugawoj i szlakowoj swarki. Moskwa, Maszinostrojenie 166.

Wpłynęło do Redakcji w lutym 1980

Recenzent:
Doc. dr Henryk Mońka

СТАТИЧЕСКАЯ И ДИНАМИЧЕСКАЯ СТАБИЛЬНОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ

Р е з ю м е

В статье выведены и проанализированы условия статической и динамической стабильности работы электрической дуги.

STATIC AND DYNAMIC STABILITY OF AN ELECTRIC ARC

S u m m a r y

Conditions for static and dynamic operation of an electric arc are derived and analysed in the paper.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Tadeusz RODACKI
Kazimierz GIERLOTKA
Mariusz KLYTTA

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

UKŁADY REGULACJI TYRYSTOROWYCH PRZETWORNIKÓW DO ZASILANIA ŁUKU ELEKTRYCZNEGO PRĄDU STAŁEGO

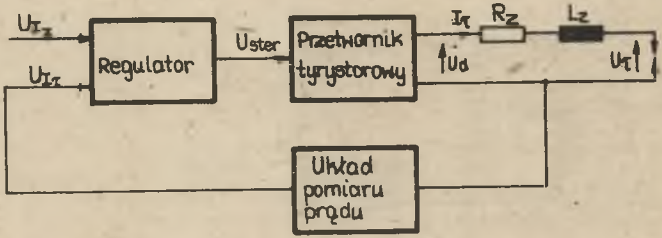
Streszczenie. W artykule przedstawiono struktury układów regulacji, podano zasady doboru nastaw regulatora prądu i określono wpływ różnych parametrów obwodu łuku elektrycznego prądu stałego na stabilną pracę układu.

1. Wstęp

Układy zasilania łuku elektrycznego muszą spełniać wymagania stawiane im w celu zapewnienia stabilnego palenia się łuku elektrycznego oraz zapewnić możliwość szybkiego i dokładnego nastawiania optymalnych parametrów elektrycznych dla uzyskania najkorzystniejszych wskaźników procesu technologicznego. W ostatnich latach coraz częściej wykorzystuje się do tego celu przetworniki tyrystorowe, pracujące w różnych układach połączeń z przekształtnikami tyrystorowymi w układzie mostkowym oraz z regulacją po stronie prądu przemiennego po pierwotnej lub wtórnej stronie transformatora dopasowującego. Przetworniki tyrystorowe, pracujące w układzie otwartym, nie bardzo nadają się do zasilania łuku elektrycznego, głównie z powodu stosunkowo sztywnych charakterystyk zewnętrznych i pulsacji prądu na wyjściu. W celu zapewnienia poprawnej pracy konieczne jest stosowanie elektronicznych układów regulacji, których zadaniem będzie odpowiednie ukształtowanie charakterystyk zewnętrznych przetwornika tyrystorowego, rozszerzenie zakresu regulacji, poprawa dynamiki układu w stanach przejściowych, stworzenie możliwości sterowania programowego całego procesu technologicznego. Dlatego też bardzo ważnym zagadnieniem jest wybór właściwej struktury układu regulacji i określenie optymalnych nastaw regulatora prądu łuku, który jest obiektem o silnie nieliniowej charakterystyce zależnej od wielu czynników zewnętrznych.

2. Układ ze sprzężeniem zwrotnym prądowym i regulatorem PI

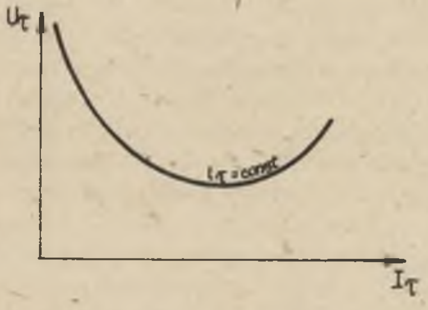
Uproszczony schemat zamkniętego układu regulacji prądu łuku, do którego można sprowadzić wszystkie układy z przetwornikiem tyrystorowym, przedstawia rys. 1.



Rys. 1. Uproszczony schemat układu regulacji

Łuk elektryczny określony jest nieliniową charakterystyką napięciowo-prądową, przedstawioną na rys. 2. Z charakterystyki tej można określić dynamiczny współczynnik wzmocnienia łuku k_τ, który jest funkcją prądu łuku i jego długości

$$k_\tau = \frac{dU_\tau}{dI_\tau} = f(I_\tau, l_\tau).$$



Rys. 2. Charakterystyka zewnętrzna łuku elektrycznego

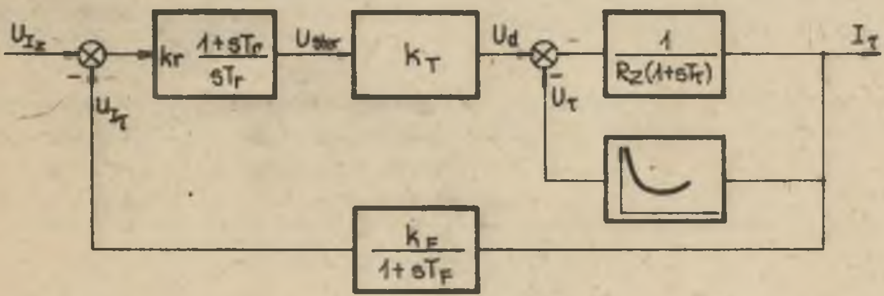
Jak widać z rys. 2, dynamiczny współczynnik wzmocnienia łuku k_τ zmienia się nieliniowo w szerokich granicach od wartości ujemnych dla małych prądów do wartości dodatnich dla prądów dużych. W obwodzie prądu stałego znajduje się indukcyjność zastępcza L_z równa sumie indukcyjności włączonych w obwód łuku i indukcyjności układu zasilania sprowadzonych na stronę prądu stałego oraz rezystancja zastępcza R_z równa rezystancji obwodu łuku i układu zasilania. Stała czasowa samego łuku jest bardzo mała, rzędu 10 μs - 100 μs [2], jednakże ponieważ w obwodzie łuku znajduje się pewna indukcyjność i rezystancja, można wówczas określić stałą czasową całego obwodu łuku $T_\tau = \frac{L_z}{R_z}$. Zwiększanie indukcyjności w obwodzie łuku jest zjawiskiem korzystnym, ponieważ pozwala zwiększyć stałą czasową łuku oraz wpływa na wygładzenie prądu łuku, co z kolei pozwala zmniejszyć stałą czasową filtru układu pomiaru prądu.

Układ pomiaru prądu jest elementem inercyjnym pierwszego rzędu, którego współczynnik wzmocnienia oznaczono przez k_F, a stałą czasową przez T_F. W celu uproszczenia dalszych rozważań założono, że przetwornik tyrystorowy jest elementem bezinercyjnym, bez opóźnienia i ma współczynnik wzmocnienia k_T.

W układzie zastosowano regulator typu PI, którego funkcja przejścia określona jest równaniem

$$G_r(s) = k_r \frac{1 + sT_r}{sT_r}.$$

W oparciu o te rozważania można narysować schemat blokowy układu regulacji prądu, przedstawiony na rys. 3.



Rys. 3. Schemat blokowy układu regulacji

Ze względu na silnie nieliniową zależność współczynnika wzmocnienia łuku $k_{\text{ł}}$ od prądu, tak opisany układ można stosunkowo łatwo analizować tylko przy małych odchyleniach od stanu ustalonego scharakteryzowanego ustalonymi parametrami napięcia łuku $U_{\text{ł}u}$ i prądu łuku $I_{\text{ł}u}$:

$$u_{\text{ł}} = U_{\text{ł}} - U_{\text{ł}u},$$

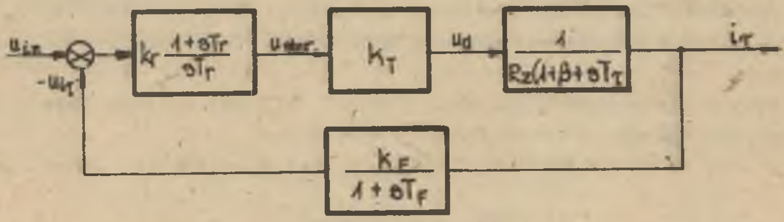
$$i_{\text{ł}} = I_{\text{ł}} - I_{\text{ł}u},$$

gdzie $u_{\text{ł}}$ i $i_{\text{ł}}$ są niewielkimi wartościami odchyleń napięcia i prądu od stanu ustalonego. Przy tych założeniach można napisać

$$\frac{i_{\text{ł}}(s)}{u_d(s)} = \frac{\frac{1}{R_z(1 + sT_{\text{ł}})}}{1 + \frac{1}{R_z(1 + sT_{\text{ł}})} k_{\text{ł}}} = \frac{1}{R_z(1 + \beta + sT_{\text{ł}})},$$

gdzie $\beta = \frac{k_{\text{ł}}}{R_z}$.

Dla małych odchyleń od stanu ustalonego schemat blokowy układu regulacji będzie więc wyglądał tak, jak na rys. 4.



Rys. 4. Schemat blokowy układu regulacji dla małych odchyleń od stanu ustalonego

Transmitancja operatorowa zamkniętego układu regulacji, przedstawionego na rys. 4, jest opisana równaniem

$$G_z(s) = \frac{i_ł(s)}{u_{1z}(s)} = \frac{(1 + sT_r)(1 + sT_F)}{\frac{R_z T_r T_F T_ł}{k_r k_T} s^3 + \frac{R_z T_r}{k_r k_T}\left[T_ł + (1+\beta)T_F\right]s^2 + \frac{R_z T_r}{k_r k_T}\left(\frac{k_r k_T k_F}{R_z} + 1 + \beta\right)s + k_F}.$$

Określając warunki stabilności układu z kryterium Hurwitza, otrzymamy:

$$\frac{k_r k_T k_F}{R_z} + 1 + \beta > 0,$$

$$T_ł + T_F(1 + \beta) > 0,$$

$$\frac{R_z T_r}{k_r k_T k_F}\left(\frac{k_r k_T k_F}{R_z} + 1 + \beta\right)\left[T_ł + T_F(1 + \beta)\right] - T_ł T_F > 0.$$

Z warunków tych określić można wartości stałej czasowej filtru, współczynnika wzmocnienia i stałej czasowej regulatora, aby zapewnić dla danego β stabilność układu regulacji. Z analizy pracy łuku wynika, że krytyczne warunki tej pracy występują przy małych prądach łuku, gdy wartości współczynnika β, określającego nachylenie charakterystyki napięciowo-prądowej łuku w stosunku do rezystancji R_z obwodu zasilania, są $\beta \leq -1$. Zauważmy, że wówczas całkowita rezystancja układu $R_z(1 + \beta)$ jest równa lub mniejsza od zera

$$R_z(1 + \beta) \leq 0.$$

Aby zapewnić możliwie krótki czas trwania przebiegów przejściowych w układzie i nie pozwolić na niedopuszczalne oscylacje prądu łuku, przy możliwie najmniejszej indukcyjności zastępczej w obwodzie łuku, nastawy regulatora powinny być dobrane w oparciu o kryterium optymalizujące. Chcąc zapewnić możliwie szeroki zakres poprawnej pracy, nastawy regulatora należy dobierać dla β odpowiadającego minimum prądu łuku $I_{łmin}$. Optymalne wartości współczynnika k_r i stałej czasowej regulatora T_r można wyznaczyć w oparciu o kryterium modułowe Kesslera.

Transmitancja operatorowa otwartego układu regulacji (z rys. 4)

$$G_o(s) = \frac{u_{ił}(s)}{u_{ster}(s)} = \frac{k_T k_F}{(1+\beta)} \cdot \frac{1}{\left(1 + s\frac{T_ł}{1+\beta}\right)(1 + sT_F)}$$

Dla takiego obiektu optymalne nastawy regulatora można obliczyć [1]:

– dla przypadku $\frac{T_ł}{1+\beta} \approx T_F$

$$k_r = \frac{R_z(1+\beta)}{2k_T k_F}\left[\frac{T_ł}{(1+\beta)T_F} + \frac{(1+\beta)T_F}{T_ł}\right],$$

$$T_r = \frac{T_ł}{1+\beta} + \frac{T_F}{1 + \frac{T_ł}{(1+\beta)T_F} + \left[\frac{T_ł}{(1+\beta)T_F}\right]^2},$$

– dla przypadku $\frac{T_ł}{1+\beta} \gg T_F$

$$k_r = \frac{R_z}{k_T k_F} \cdot \frac{T_ł}{2\,T_F}$$

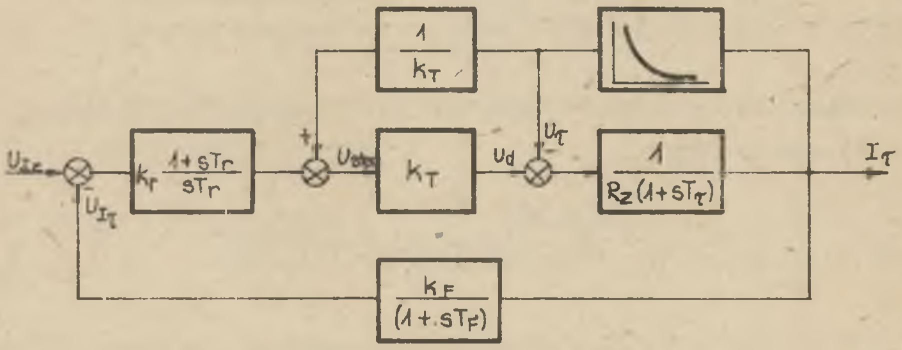
$$T_r = \frac{T_ł}{1+\beta}.$$

Należy zaznaczyć, że z powodu uproszczeń zastosowanych w powyższych rozważaniach (pominięcie opóźnienia wnoszonego przez przekształtnik tyrystorowy) oraz z powodu nieliniowej charakterystyki łuku, zależnej dodatkowo od chwilowych warunków jego palenia się, obliczone optymalne nastawy regulatora należy potraktować orientacyjnie. Znacznie dokładniej można analizować pracę układu regulacji prądu łuku stosując modelowanie na maszynie analogowej, pozwoli to na zrezygnowanie z niektórych uproszczeń oraz na optymalny dobór nie tylko nastaw regulatora, ale indukcyjności w obwodzie łuku i stałej czasowej filtru układu pomiaru prądu.

W przypadku gdyby dla założonych warunków pracy i parametrów układu nie udało się uzyskać w proponowanym układzie właściwej pracy, znaczną poprawę można uzyskać wprowadzając dodatkowe kompensujące sprzężenie zwrotne (rys. 5).

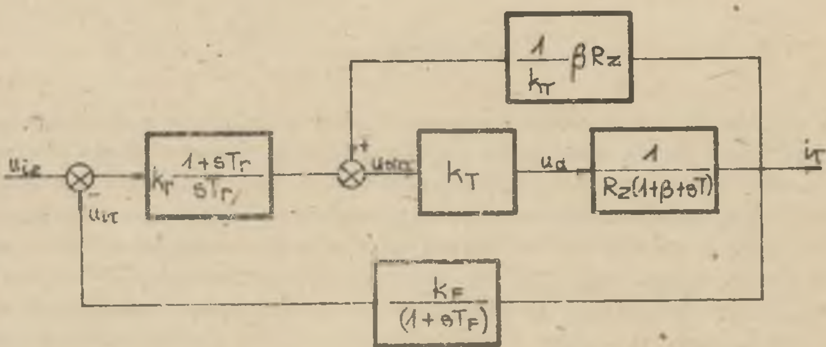
3. Układ z dodatkowym kompensującym sprzężeniem zwrotnym

Na rys. 5 przedstawiono schemat blokowy układu regulacji prądu łuku ze sprzężeniem prądowym i dodatkowym sprzężeniem kompensującym od napięcia łuku.



Rys. 5. Schemat blokowy układu regulacji z dodatkowym kompensującym sprzężeniem zwrotnym

Analizując pracę układu dla małych odchyleń od stanu ustalonego, można narysować schemat blokowy podany na rys. 6.



Rys. 6. Schemat blokowy układu regulacji z dodatkowym kompensującym sprzężeniem zwrotnym dla małych odchyleń od stanu ustalonego

W oparciu o ten schemat można obliczyć transmitancję operatorową zamkniętego układu regulacji

$$G_z(s) = \frac{i_ł(s)}{u_{1z}(s)} = \frac{(1 + sT_r)(1 + sT_F)}{\frac{R_z T_r T_ł T_F}{k_r k_T} s^3 + \frac{R_z T_r}{k_r k_T}(T_ł + T_F)s^2 + \left(\frac{R_z}{k_r k_T} + k_F\right)T_r s + k_F}$$

Wynika stąd, że dzięki takiemu sprzężeniu zwrotnemu eliminujemy nieliniowe właściwości łuku, układ regulacyjny staje się całkowicie liniowy. Optymalne nastawy regulatora, obliczone z kryterium modułowego Kesslera, wynoszą:

- dla przypadku, kiedy $T_ł \approx T_F$

$$k_r = \frac{R_z}{2k_T k_F}\left(\frac{T_ł}{T_F} + \frac{T_F}{T_ł}\right),$$

$$T_r = T_ł + \frac{T_F}{1 + \frac{T_ł}{T_F} + \frac{T_ł}{T_F}^2},$$

- dla przypadku, kiedy $T_ł \gg T_F$

$$k_r = \frac{R_z}{k_T k_F} \cdot \frac{T_ł}{2T_F},$$

$$T_r = T_ł.$$

W rzeczywistych układach nie uda się osiągnąć tak idealnych wyników, co jest spowodowane następującymi przyczynami:

- W powyższych rozważaniach pominięto opóźnienie, które wnosi do układu przekształtnik tyrystorowy. Powoduje to, że po zmianie sygnału sterującego napięcie na wyjściu przekształtnika zmieni się dopiero po następnym impulsie wyzwalającym.
- Napięcie łuku wykazuje duże i szybkie wahanie, dlatego też wartość mierzona przed wprowadzeniem do układu regulacji musi być wygładzona. Zastosowanie filtru w torze napięciowego sprzężenia zwrotnego powoduje że sygnał napięciowy wprowadzony jest do układu regulacji z pewną stałą czasową. Pomimo tych trudności w układzie z kompensującym sprzężeniem zwrotnym można uzyskać znacznie szerszy zakres regulacji prądu łuku niż w układzie bez tego sprzężenia.

4. Wnioski

- Łuk elektryczny jest odbiornikiem o silnie nieliniowej charakterystyce zależnej od szeregu parametrów zewnętrznych, dlatego też w prostym układzie regulacji z regulatorem PI nie można uzyskać optymalnych warunków pracy w szerokim zakresie zmian prądu łuku.
- W układzie z regulatorem PI stabilna praca jest możliwa dla $\beta > -1$ i dla $\beta < -1$, przy odpowiednio dobranych parametrach układu. Na pracę układu i optymalne nastawy regulatora mają wpływ następujące parametry: rezystancja obwodu zasilania R_z, indukcyjność w obwodzie łuku L_z, stała czasowa filtru w torze sprzężenia prądowego T_F i dynamiczny współczynnik wzmocnienia łuku k_γ.
- Wybór optymalnych nastaw regulatora powinien być wykonywany dla najtrudniejszych warunków pracy układu, tzn. dla $\beta \to -1$ (przy pracy na części charakterystyki łuku, gdzie $\beta > -1$ dla minimalnego prądu łuku).
- Dynamika układu regulacji w szerokim zakresie zmian prądu uległaby poprawie przez zastosowanie adaptacyjnego regulatora PI, w którym nastawy można by było zmieniać w zależności od punktu pracy tak, aby w zależności od aktualnej wartości współczynnika β były zawsze optymalne.
- Zakres regulacji prądu łuku w układzie z regulatorem PI można znacznie rozszerzyć przez zastosowanie kompensującego napięciowego sprzężenia zwrotnego.

LITERATURA

[1] TUNIA H., WINIARSKI B.: Układy elektroniczne w automatyce napędowej. WNT, Warszawa 1969.

[2] LÖLLEIN F., STRÖLE D.: Dynamik der Lichtbogenstroregelung.Simens Zeitschrift nr 5/69.

[3] ESIBJAN E.M.: Plazmienno-dugowaja apparatura. Tiechnika, Kijew 1973.

Wpłynęło do Redakcji w lutym 1980

Recenzent:
Doc. dr Józef Dancewicz

СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ ТИРИСТОРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ДЛЯ ПИТАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Р е з ю м е

В статье представлены схемы системы регулирования и принципы расчета установки регулятора тока электрической дуги, питаемой от тиристорного преобразователя. Определено влияние параметров цепи электрической дуги постоянного тока на устойчивость системы.

THE CONTROL SYSTEM OF THYRISTOR TRANSDUCERS FOR POWERING THE D.C. ELECTRIC ARC

S u m m a r y

The paper contains the patterns of the control systems, gives the principles of choosing the current regulator settings, determines the impact of various parameters of the d.c. electric arc on the operational stability.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Mariusz KLYTTA
Tadeusz RODACKI

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki

PROCESY ELEKTROMAGNETYCZNE W OBWODACH GŁÓWNYCH FALOWNIKA PRĄDU POŚREDNIEGO PRZEMIENNIKA CZĘSTOTLIWOŚCI

Streszczenie. W artykule przedstawiono podstawowe związki analityczne między parametrami elektrycznymi, cechującymi pracę falownika prądu w czasie komutacji. Rozważono komutację dla przypadku zasilania silnika asynchronicznego oraz 3-fazowego odbioru o charakterze R-L. Szczególną uwagę zwrócono na precyzyjne określenie czasów trwania poszczególnych etapów komutacji.

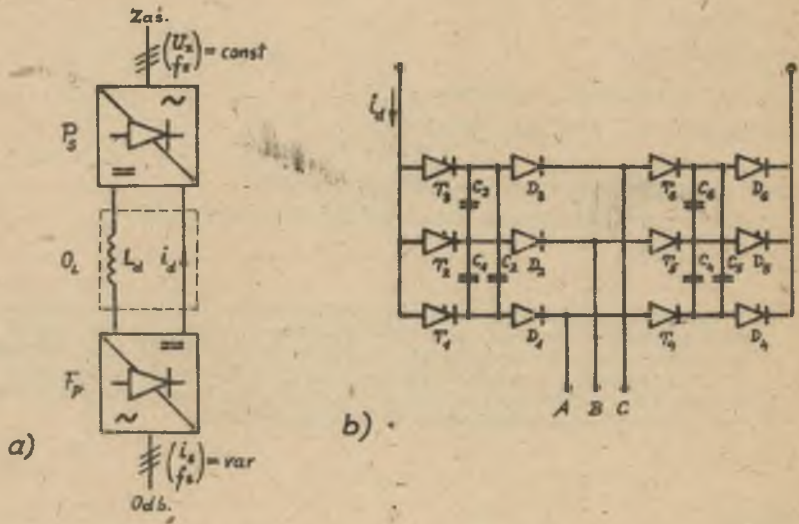
1. Wstęp

Wśród znanych rozwiązań pośrednich przemienników częstotliwości o szerokim zakresie zmian częstotliwości wyjściowej, wieloma korzystnymi własnościami wyróżnia się rozwiązanie wykorzystujące w II stopniu przetwarzania mocy falownik prądu [2], [3], [5]; (rys. 1a).

Prąd I_d wymuszany jest przez zespół: prostownik sterowany - dławik obwodu pośredniczącego L_d. Wartość prądu I_d ustalana jest poprzez zmianę wysterowania prostownika. Drugi z przekształtników, falownik, pozwala na uzyskanie pożądanej częstotliwości przebiegów na wyjściu przemiennika, spełniając rolę komutatora elektronicznego wybierającego kolejne pary gałęzi 3-fazowego obciążenia [1], [5]. Podstawą poprawnej pracy falownika oraz w konsekwencji całego przemiennika, są komutacje zachodzące w obrębie zespołu: falownik prądu - obciążenie. Celem artykułu jest podanie związków analitycznych między wielkościami elektrycznymi, opisujących proces komutacji w falowniku prądu. Założono:

- że zawory są idealne w sensie ich statyki (pominięcie spadków napięć na zaworach w stanie przewodzenia oraz prądów tyrystorów w stanach blokowania i zaworowym),
- idealne wygładzenie prądu obwodu pośredniczącego (tzn. $i_d(t) = I_d$ = const ≡ $L_d = \infty$),
- zakres komutacji prostej (całkowity czas komutacji $t_k < \frac{1}{6 f_{smax}}$),

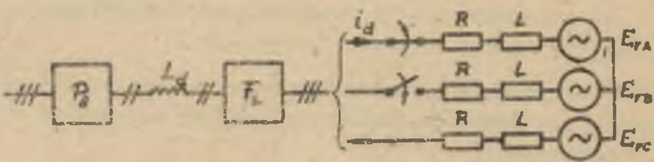
- strukturę falownika prądu zgodnie z rys. 1b,
- obciążenie w postaci klatkowego silnika asynchronicznego oraz 3-fazowego symetrycznego odbioru typu R-L.



Rys. 1. Schemat blokowy pośredniego przemiennika częstotliwości z falownikiem prądu (a) (P_s - prostownik sterowany, O_L - obwód pośredniczący prądu stałego, F_p - falownik prądu) oraz schemat ideowy falownika prądu z diodami odcinającymi (b)

2. Analiza procesu komutacji w falowniku prądu zasilającym silnik asynchroniczny

Dla silnika asynchronicznego zasilanego z falownika prądowego można przyjąć, w całym niemal zakresie częstotliwości, schemat zastępczy typu R-L-E [2] (rys. 2).



Rys. 2. Schemat zastępczy silnika asynchronicznego przy zasilaniu z falownika prądu

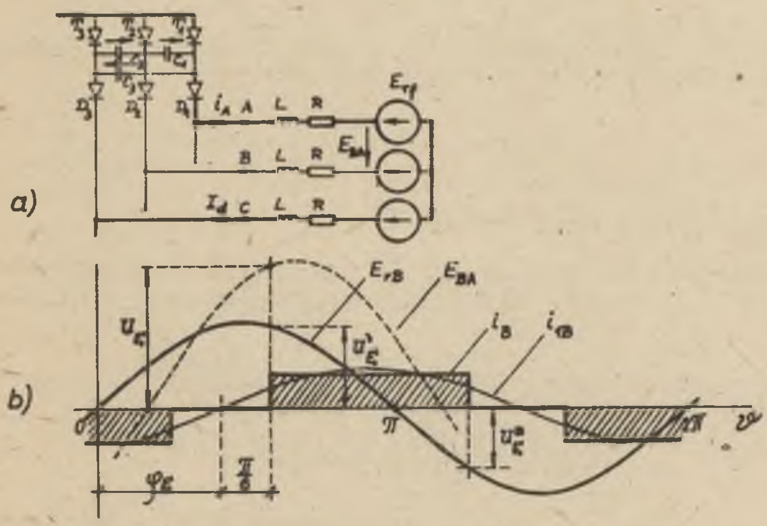
Przy założeniu pracy ze stabilizacją strumienia skojarzonego wirnika (Ψ_r= =const) wartości sił elektromotorycznych rotacji E_r są proporcjonalne do częstotliwości zasilania silnika

$$E_r = E_{rn} \frac{f_s}{f_n}, \tag{1}$$

gdzie E_{rn} jest, określoną parametrami maszyny, wartością amplitudy sem E_r dla warunków znamionowych.
Zależność wartości E_{rn} od parametrów zwarciowych oraz znamionowego współczynnika mocy $\cos\varphi_n$ maszyny, sprawia, iż spotykane w opracowaniach tematu oszacowanie przybliżone: $E_{rn} \approx U_{mn}$ prowadzić może do określonych błędów obliczeniowych, zwłaszcza dla niezbyt dużych mocy napędów.

Przykładowo już dla silników o mocach znamionowych $P_n \approx$ 20-25 kW, typowe wartości E_{rn} nie przekraczają 95% U_{mn}.

Najistotniejsze z punktu widzenia projektowania i doboru elementów falownika, są zależności wartości maksymalnych napięć na kondensatorach komutacyjnych oraz czasów poszczególnych etapów komutacji od parametrów(częstotliwości f_s oraz obciążenia) pracy napędu. Opisowi procesu komutacji w omawianym falowniku poświęcono wiele prac. Poniżej, przy podawaniu określonych związków, ograniczono się jedynie do niezbędnych uwag.



Rys. 3. Schemat fragmentu zespołu falownik prądu-silnik asynchroniczny; stan przed komutacją tyrystora T_1 ($U_{c1} = -U_{c3} = U_c(0)$, $U_{c2} = 0$)(a) oraz uproszczone przebiegi czasowe wybranych wielkości układu ($U_E = U_E' - U_E''$) (b)

Jak wynika z rys. 3b, międzyprzewodowa sem rotacji komutujących faz

$$U_E = \frac{f_s}{f_n} E_{rn}\left[\sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi_E\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi_E + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = \sqrt{3}\alpha E_{rn} \sin\varphi_E, \tag{2}$$

gdzie

$$\varphi_E = \sphericalangle\ (\underline{E}_r, \underline{i}_1) = \varphi(\beta) \tag{3}$$

jest kątem między wskazami sem E_r oraz 1-harmonicznej prądu stojana oraz:

α, β – są względnymi wartościami częstotliwości harmoniczmych podstawowych, odpowiednio w obwodzie stojana i wirnika silnika.

Ponieważ zachodzi: $\varphi_E \in (\varphi_{Emin}, \varphi_{Emax}) \subset (0, \pi)$; napięcie U_E zmienne wraz z częstotliwością oraz z obciążeniem (por. (2), (3)), przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie. W konsekwencji, w I etapie komutacji, rozpoczynającym się włączeniem tyrystora fazy mającej przejąć prąd obciążenia, a kończącym się z chwilą dodatniej polaryzacji diody w gałęzi ww. tyrystora (dla przypadku z rys. 3a tyrystor T_2, faza B oraz dioda D_2), napięcie kondensatora komutacyjnego przeładowywanego stałym prądem I_d

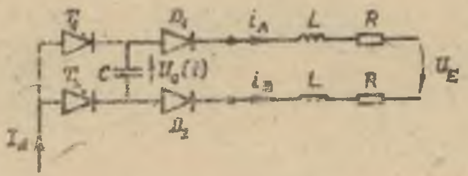
$$U_c(t) = U_c(0) - \frac{I_d}{C} t \tag{4}$$

zmienia znak $(U_c(t_1) < 0)$.
Przebieg czasowy napięcia na diodzie D_2 ma postać

$$U_{D2}(t) = -U_c(t) - U_E + I_d R, \tag{5}$$

skąd czas trwania I etapu komutacji

$$t_1 = C\left\{\left[U_c(0) + U_E\right] \frac{1}{I_d} - R\right\}. \tag{6}$$



Rys. 4. Schemat wycinka układu podczas II etapu komutacji w grupie anodowej między fazami A i B
Pojemność $C = \frac{3}{2} C_i$; $i = 1,2,3$

W II etapie komutacji, cechującym się chwilowym przewodzeniem wszystkich 3 faz, struktura tworzącego się obwodu (rys. 4) prowadzi do równania

$$\frac{d^2}{dt^2}U_c(t) + 2\alpha\omega_0\frac{d}{dt}U_c(t) + \omega_o^2U_c(t) = -\omega_o^2(RI_d + U_E), \tag{7}$$

z warunkami początkowymi:

$$\begin{aligned} U_c(0) &= RI_d - U_E \\ \frac{d}{dt}U_c(t)\Big|_{t=0} &= -\frac{I_d}{C}, \end{aligned} \tag{7a}$$

gdzie:

$\alpha = \frac{R}{\varrho}$ – współczynnik tłumienia obwodu komutacyjnego,

$\varrho = \sqrt{\frac{2L}{C}}$ – impedancja falowa obwodu komutacyjnego,

$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$ – pulsacja własna nietłumiona obwodu komutacyjnego.

Na podstawie równania różniczkowego (7) otrzymuje się

$$\alpha^{-1}\left\{U_c(p)\right\} = -I_d\varrho w^{-1}\exp(-\alpha\omega_o t)\left[\sin w\omega_o t - 2\alpha\cos(w\omega_o t - \delta)\right] - (RI_d + U_E), \tag{8}$$

gdzie:

$w = \sqrt{1 - \alpha^2}$,

$\delta = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{w}$.

Znajomość przebiegu czasowego napięcia kondensatora komutacyjnego $U_c(t)$ pozwala na określenie prądów komutujących faz:

$$\begin{aligned} i_A(t) &= -C\frac{dU_c(t)}{dt} = I_d\exp(-\alpha\omega_o t)(\cos w\omega_o t + \alpha w^{-1}\sin w\omega_o t), \\ i_B(t) &= I_d - i_A(t) \end{aligned} \tag{9}$$

oraz czasu trwania II etapu komutacji

$$t_2 = \frac{1}{w\omega_o}\left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{w}\right)\right]. \tag{10}$$

Napięcie początkowe kondensatora komutacyjnego $U_c(0)$ można obliczyć z warunku cykliczności przebiegów w falowniku

$$U_c(0) = -U_c(t_k) \tag{11}$$

(t_k - całkowity czas komutacji).

Uwzględniając podane wcześniej zależności, w szczególności (9) i (10), napięcie $U_c(0)$, będące jednocześnie maksymalnym napięciem blokowania i wstecznym tyrystorów mostka falowniczego, przyjmuje postać

$$U_c(0) = U_E + I_d\left\{\varrho \exp\left[-\frac{\alpha}{w}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{w}\right)\right] + R\right\}. \tag{12}$$

Wstawiając powyższą wartość do wzoru (6), otrzymuje się w odniesieniu do czasu I etapu komutacji

$$t_1 = \frac{1}{\omega_0}\left\{\frac{2}{\varrho I_d}U'_E + \exp\left[-\frac{\alpha}{w}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{w}\right)\right]\right\}. \tag{13}$$

Od poziomu napięcia $U_c(0)$ zależy także najistotniejsza z punktu widzenia niezawodnej komutacji tyrystorów wartość czasu dysponowanego na wyłączanie

$$t'_{dw} = \frac{C.U_c(0)}{I_d} = \frac{1}{\omega_0}\left\{\frac{U_E}{\varrho I_d} + \exp\left[-\frac{\alpha}{w}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{w}\right)\right] + \alpha\right\}. \tag{14}$$

3. Zależności obowiazujące dla komutacji w falowniku prądu w przypadku 3-fazowego, symetrycznego odbioru typu R-L

Dla rozważanego przypadku (który obejmuje również stan zwarcia silnika) ważność zachowują podane w punkcie 2 zależności, opisujące przebieg prądu w II etapie komutacji oraz czas trwania II etapu (9) oraz (10). Czas trwania I etapu komutacji oraz napięcie na kondensatorze komutacyjnym $U_c(0)$ otrzymać można przyjmując odpowiednio we wzorach (13) oraz (12) $U_E = 0$.

$$t_1 = \frac{1}{\omega_0}\exp\left[-\frac{\alpha}{w}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{w}\right)\right]. \tag{15}$$

$$U_c(0) = I_d\left\{R + \varrho\exp\left[-\frac{\alpha}{w}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{w}\right)\right]\right\}. \tag{16}$$

Ponieważ napięcie końcowe kondensatora komutacyjnego w I etapie komutacji

$$U_c(t_1) = RI_d > 0, \tag{17}$$

czas dysponowany na wyłączanie komutowanego tyrystora t_{dw} wykracza poza pierwszy etap komutacji

$$t_{dw} = t_1 + t', \tag{18}$$

gdzie czas t' w formie uwikłanej podaje równanie (otrzymane z $U_c(t)$ wg wzoru (8) dla $U_E = 0$)

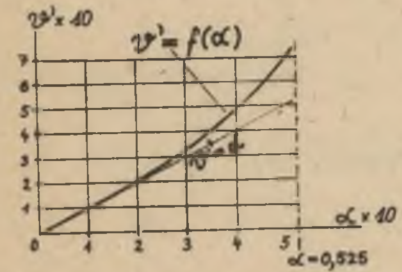
$$I_d\left\{-R - \varrho\exp(-\alpha\omega_0 t')\left[\frac{1}{w}\sin w\omega_0 t' - \frac{2\alpha}{w}\cos(w\omega_0 t' - \delta)\right]\right\} = 0. \tag{19}$$

Przekształcając powyższe równanie (przy uwzględnieniu rzędu wartości α oraz t', skąd $\exp(-\alpha\omega_0 t') \approx 1$), otrzymuje się

$$w\omega_0 t' = \mathrm{arctg}\left(\frac{2\alpha w}{w^2-\alpha^2}\right) - \arcsin w\alpha. \tag{20}$$

Wobec spełnienia w realnych układach warunku $\alpha \leqslant 0{,}525$ i wynikającej stąd nierówności: $(w\alpha)^2 + (2w\alpha)^2 \leqslant 1$, zapisać można ostatecznie

$$\vartheta' = \omega_0 t' = \frac{1}{w}\arcsin\left[2w\alpha\sqrt{1-(w\alpha)^2} - w\alpha\sqrt{1-(2w\alpha)^2}\right] \tag{21}$$



Rys. 5. Wykres zależności kąta ϑ' od współczynnika tłumienia obwodu komutacyjnego

Charakter zależności $\vartheta' = f(\alpha)$ (rys. 5), pozwala na przyjęcie w zakresie realnych wartości współczynnika tłumienia, praktycznie bez błędu, oszacowania

$$\vartheta' = \alpha. \tag{22}$$

W konsekwencji, wzór określający czas dysponowany na wyłączanie dla przypadku obciążenia typu R-L przyjmuje postać

$$t_{dw} = \frac{1}{\omega_0}\left\{\exp\left[-\frac{\alpha}{w}\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\,\frac{\alpha}{w}\right)\right] + \alpha\right\}. \tag{23}$$

4. Zakończenie

Przedstawione w artykule zależności są istotne z punktu widzenia analizy przebiegu komutacji i projektowania elementów obwodów głównych falownika. Obowiązują one przy upraszczającym założeniu stanu idealnego wymuszenia prądowego $i_d(t) = I_d = \mathrm{const}$. Związki te, jakkolwiek użyteczne, szczególnie z inżynierskiego punktu widzenia, prowadzą do wartości odbiegających w ogólności nieco od wartości mierzonych w układach rzeczywistych [3], [4]. Rozbieżności te wynikają z mającego miejsce, a nie uwzględnianego w przyjętym modelu, odkształcenia krzywej prądu i_d w chwili komutacji. Wielkości rozbieżności, osiągające wartości rzędu kilkunastu procent, zależą w konkretnych przypadkach od wartości indukcyjności L_d dławika obwodu pośredniczącego.

LITERATURA

[1] KRIVICKIJ S.O., EPSZTEJN I.I.: Dinamika czastotno-regulirujemych elektropriwodow s awtonomnymi inwiertorami. Eniergia, Moskwa, 1970.

[2] KLAUTSCHEK H.: Das Verhalten der Induktionsmaschine bei Speisung über Stromzwischenkreisumrichter. ETZ, Bd. 95, 1974, H. 5.

[3] GRZESIK B., WOSIŃSKI H.: Projektowanie elementów obwodów głównych przemiennika z falownikiem prądowym zasilającym silnik asynchroniczny. Krajowa Konferencja, AGH, Kraków, 1977.

[4] WOSIŃSKI H., GRZESIK B., MYRCIK Cz., NOWAK J., KLYTTA M.: Wyniki badań prototypu układu napędowego z silnikiem asynchronicznym klatkowym o mocy 45 kW zasilanym z falownika prądowego. Krajowa Konferencja, AGH Kraków 1977.

[5] KLYTTA M.: Układy napędowe z asynchronicznymi silnikami klatkowymi zasilanymi z falowników prądu. Materiały konferencyjne, OPT, Katowice 1976.

Wpłynęło do Redakcji w lutym 1980

Recenzent:
Doc. dr Józef Dancewicz

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИЛОВЫХ ЦЕПЯХ ИНВЕРТОРА ТОКА ПОСРЕДНЕГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ЧАСТОТЫ

Р е з ю м е

В статье представлены основные аналитические отношения между электрическими параметрами, характеризующими коммутационные процессы в инверторе тока. Проанализированы коммутационные процессы во время питания асинхронного двигателя, а также 3-фазной активно-индуктивной нагрузки. Обращено особое внимание на точное определение времени коммутационных этапов.

ELECTROMAGNETIC PROCESSES IN THE MAIN CIRCUITS
OF THE TRANSIENT CURRENT INVERTOR IN THE FREQUENCY CONVERTOR

S u m m a r y

The paper presents the basic analytical ties among electrical parameters that characterize the current invertor's operation at the time of commutation. The commutation for powering the asynchronous motor and 3-phase reception, type R-L have been analysed. Special attention has been paid to precise determination of the duration time of each particular commutation stage.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1981

Seria: ELEKTRYKA z. 75 Nr kol. 681

Krzysztof KRYKOWSKI

ZASTOSOWANIE REGULATORA O ZMIENNYM CZASIE CAŁKOWANIA W OBWODZIE UJEMNEGO NAPIĘCIOWEGO SPRZĘŻENIA ZWROTNEGO UKŁADU STEROWANIA FAZOWEGO CYKLOKONWERTORA

Streszczenie. Cyklokonwertor stanowi specyficzny wzmacniacz mocy, którego linearyzację można osiągnąć poprzez zastosowanie sprzężeń zwrotnych. Ze względu na nieliniowości należałoby przy tym zalecić stosowanie regulatora o parametrach zmiennych, w zależności od aktualnych warunków pracy. W artykule opracowano metodę doboru nastaw takiego regulatora, dla układu sterowania fazowego z ujemnym napięciowym sprzężeniem zwrotnym.

1. Wprowadzenie

Do problemów analizy i syntezy układów sterowania fazowego cyklokonwertorów można podejść w sposób dwojaki [7].

A. Wychodząc z założenia, że cyklokonwertor i obciążenie wzajemnie na siebie oddziaływają, optymalizować w oparciu o założone wskaźniki pracę całego zespołu cyklokonwertor-obciążenie.

B. Potraktować cyklokonwertor jako wzmacniacz mocy o parametrach stałych, niezależnych od warunków pracy. Optymalizacja pracy zespołu cyklokonwertor-obciążenie polega wtedy na doborze odpowiednich sygnałów sterujących cyklokonwertorem i odbywa się bez ingerencji w sam układ sterowania fazowego, który powinien zapewnić liniowe odwzorowanie sygnału wzorcowego, przy równoczesnej stabilnej pracy.

Sterowanie cyklokonwertorów o płynnej regulacji częstotliwości napięcia wyjściowego można uzyskać poprzez:

a) sterowanie synchronizowane w układzie otwartym,
b) sterowanie synchronizowane w układzie ze sprzężeniem zwrotnym,
c) sterowanie śledzące.

Pierwszy z podanych sposobów sterowania jest bardzo wrażliwy na zakłócenia, co poważnie ogranicza możliwości jego wykorzystania [2, 4, 5, 6, 7]. Zastosowanie ujemnego napięciowego sprzężenia zwrotnego pozwala ograniczyć wpływ zakłóceń na sygnał wyjściowy. Aproksymując cyklokonwertor jako człon liniowy z czasem martwym [4, 5, 6], określono strukturę i nastawy regulatora. Tak dobrany regulator znacznie polepsza własności cyklokonwertora. Przybliżony sposób doboru regulatora nie pozwala jednak [4, 5, 6] uznać tej metody za optymalną.

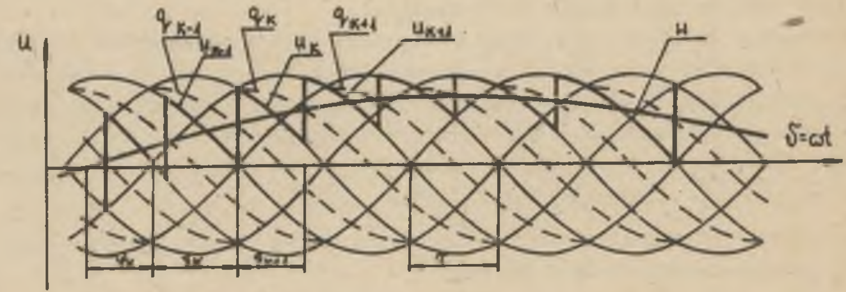
Pozornie najkorzystniejsze jest sterowanie śledzące z elementem całkującym różnicę pomiędzy sygnałami żądanym i wyjściowym. Zapewnia on dla pojedynczego pulsu równość średnich wartości napięcia wyjściowego i żądanego. Układ taki nie pracuje jednak stabilnie [1 , 7].

2. Zasada sterowania synchronizowanego w układzie z ujemnym napięciowym sprzężeniem zwrotnym

Na rysunku 1 przedstawiono arcussinusoidalny sposób formowania napięcia wyjściowego cyklokonwertora uzyskany w synchronizowanym układzie sterowania [7, 8]. Załączenie k-tego pulsu napięcia wyjściowego u_k następuje w chwili, gdy napięcie wzorcowe w zrównuje się z odpowiednim napięciem synchronizującym q_k. W układzie z ujemnym napięciowym sprzężeniem zwrotnym, zamiast napięcia wzorcowego, porównywana jest z napięciem synchronizującym q_k całka z różnicy między napięciem wzorcowym a wyjściowym sprowadzonym do poziomu napięć sterujących. Zakładając jednostkową amplitudę napięcia zasilającego, sprowadzonego do poziomu napięć sterujących, można napisać:

$$u_k = \sin(\omega t - k\tau) = \sin(\vartheta - k\tau),$$

$$q_k = A\sin(\vartheta + \frac{\pi}{2} - k\tau).$$



Rys. 1. Arcussinusoidalny sposób formowania napięcia wyjściowego cyklokonwertora w synchronizowanym układzie sterowania

Warunek formowania napięcia przyjmuje wtedy postać

$$\frac{1}{T}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (u - w)dt = q_{k+1}(t_{k+1}) \tag{1}$$

lub

$$\int_{\vartheta_k}^{\vartheta_{k+1}} \left[\sin(\vartheta - k\tau) - w\right]d\vartheta = a\sin(\vartheta_{k+1} + \frac{\tau}{2} - k\tau), \tag{2}$$

gdzie

$$a = A\omega T. \tag{3}$$

Dla sterowania bez zaburzeń zachodzi

$$\int_{\vartheta_{o_k}}^{\vartheta_{o_{k+1}}} \left[\sin(\vartheta - k\tau) - w\right]d\tau = a\sin(\vartheta_{o_{k+1}} - k\tau - \frac{\tau}{2}). \tag{4}$$

Porównując (3) i (4), uzyskuje się

$$\int_{\vartheta_k}^{\vartheta_{o_k}} \left[\sin(\vartheta - k\tau) - w\right]d\vartheta - \int_{\vartheta_{o_{k+1}}}^{\vartheta_{k+1}} \left[\sin(\vartheta - k\tau) - w\right]d\vartheta =$$

$$= a\sin(\vartheta_{k+1} - k\tau - \frac{\tau}{2}) - a\sin(\vartheta_{o_{k+1}} - k\tau - \frac{\tau}{2}). \tag{5}$$

Aproksymując równanie (6) dla małych przyrostów, uzyskuje się

$$x_k = \frac{w_{o_k} - \sin(\vartheta_{o_k} - k\tau)}{w_{o_{k+1}} - \sin(\vartheta_{o_{k+1}} - k\tau) - a\cos(\vartheta_{o_{k+1}} - k\tau - \frac{\tau}{2})}. \tag{6}$$

W wyrażeniu tym występuje współczynnik przeregulowania

$$x_k = \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k},$$

gdzie

$$\delta_k = \vartheta_k - \vartheta_{o_k}.$$

Jeżeli

$$w_{o_{k+1}} \neq \sin(\vartheta_{o_{k+1}} - k\tau),$$

to

$$x_k = z_k \frac{1}{1 - ab_k}, \tag{8}$$

gdzie

$$b_k = \frac{\cos(\vartheta_{o_{k+1}} - k\tau - \frac{\tau}{2})}{w_{o_{k+1}} - \sin(\vartheta_{o_{k+1}} - k\tau)} \tag{9}$$

- z_k oznacza współczynnik przeregulowania w układzie śledzącym (napięcie synchronizujące jest równe zeru) i wynosi

$$z_k = \frac{w_{o_k} - \sin(\vartheta_{o_k} - k\tau)}{w_{o_k} - \sin(\vartheta_{o_{k+1}} - k\tau)}. \tag{10}$$

3. Śledzenie jako szczególny przypadek ujemnego sprzężenia zwrotnego

W chwili gdy napięcie synchronizujące zaczyna być równe zeru, znika synchronizacja napięciem sieci zasilającej, a układ sterowania z ujemnym napięciowym sprzężeniem zwrotnym staje się układem śledzącym napięcie. O stabilności pracy tego układu decyduje wielkość przeregulowań występujących po pojawieniu się zakłócenia. Jeśli wartość bezwzględna współczynnika przeregulowania z_k jest większa od jedności, układ jest niestabilny, jeśli mniejsza - układ jest stabilny. Przyjmując dodatkowo, że sygnał wzorcowy jest sygnałem wolnozmiennym można napisać:

$$w_{o_k} \approx \frac{2}{\tau} \sin\frac{\tau}{2} \sin(\vartheta_{o_k} - k\tau + \frac{\tau}{2}), \tag{11}$$

$$w_{o_{k+1}} \approx \frac{2}{\tau} \sin\frac{\tau}{2} \sin(\vartheta_{o_{k+1}} - k\tau - \frac{\tau}{2}). \tag{12}$$

Podstawiając (11) i (12) do (10), uzyskuje się

$$z_k = \frac{\frac{2}{\tau} \sin\frac{\tau}{2} \sin(\vartheta_{o_k} - k\tau + \frac{\tau}{2}) - \sin(\vartheta_{o_k} - k\tau)}{\frac{2}{\tau} \sin\frac{\tau}{2} \sin(\vartheta_{o_{k+1}} - k\tau - \frac{\tau}{2}) - \sin(\vartheta_{o_{k+1}} - k\tau)} \tag{13}$$

lub

$$z_k = \frac{\sin(\vartheta_{o_k} - k\tau - \eta)}{\sin(\vartheta_{o_{k+1}} - k\tau + \eta)}, \tag{14}$$

gdzie

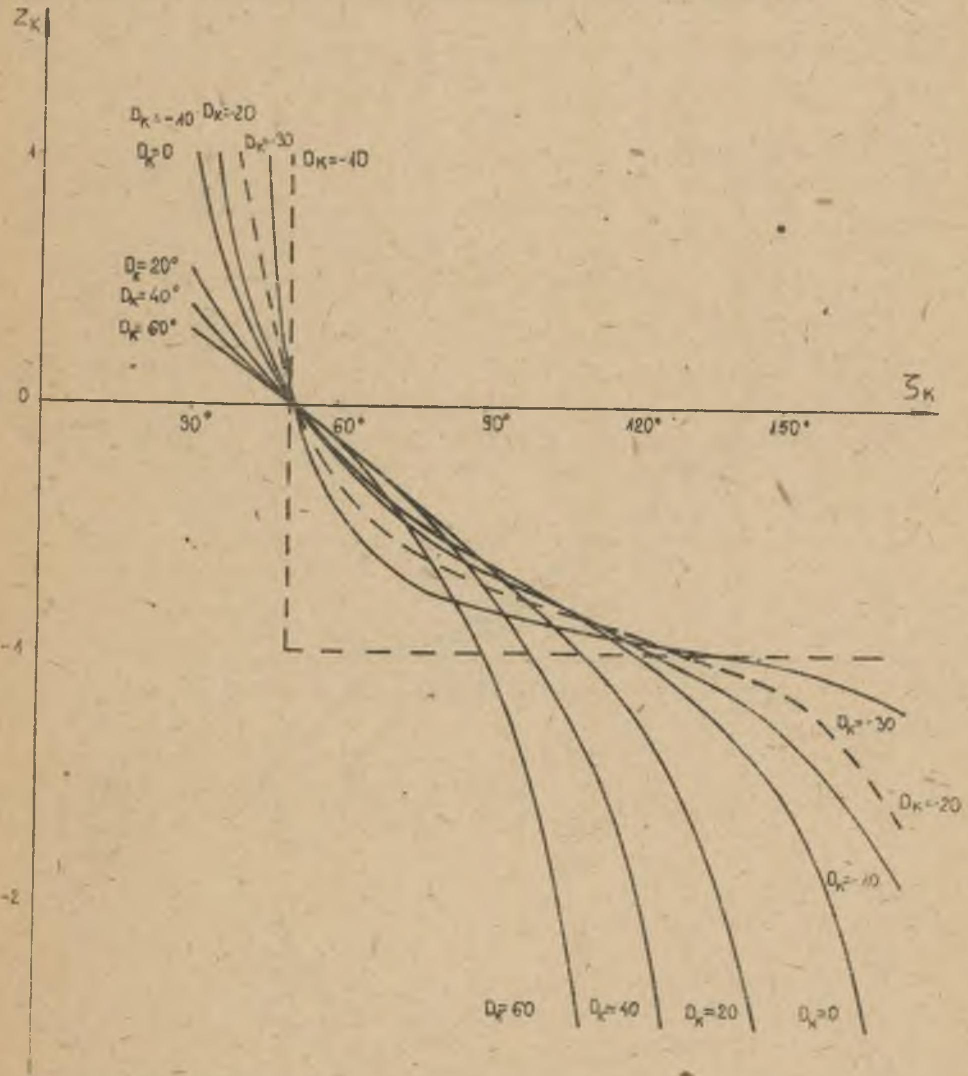
$$\eta = \operatorname{arcctg} \frac{1 - \frac{\sin\tau}{\tau}}{\frac{2}{\tau} \sin^2 \frac{\tau}{2}}. \tag{15}$$

Wprowadzając kąt załączenia

$$\zeta_k = \vartheta_{o_k} - k\tau \tag{16}$$

oraz przyrost kąta załączenia

$$D_k = \zeta_{k+1} - \zeta_k \tag{17}$$

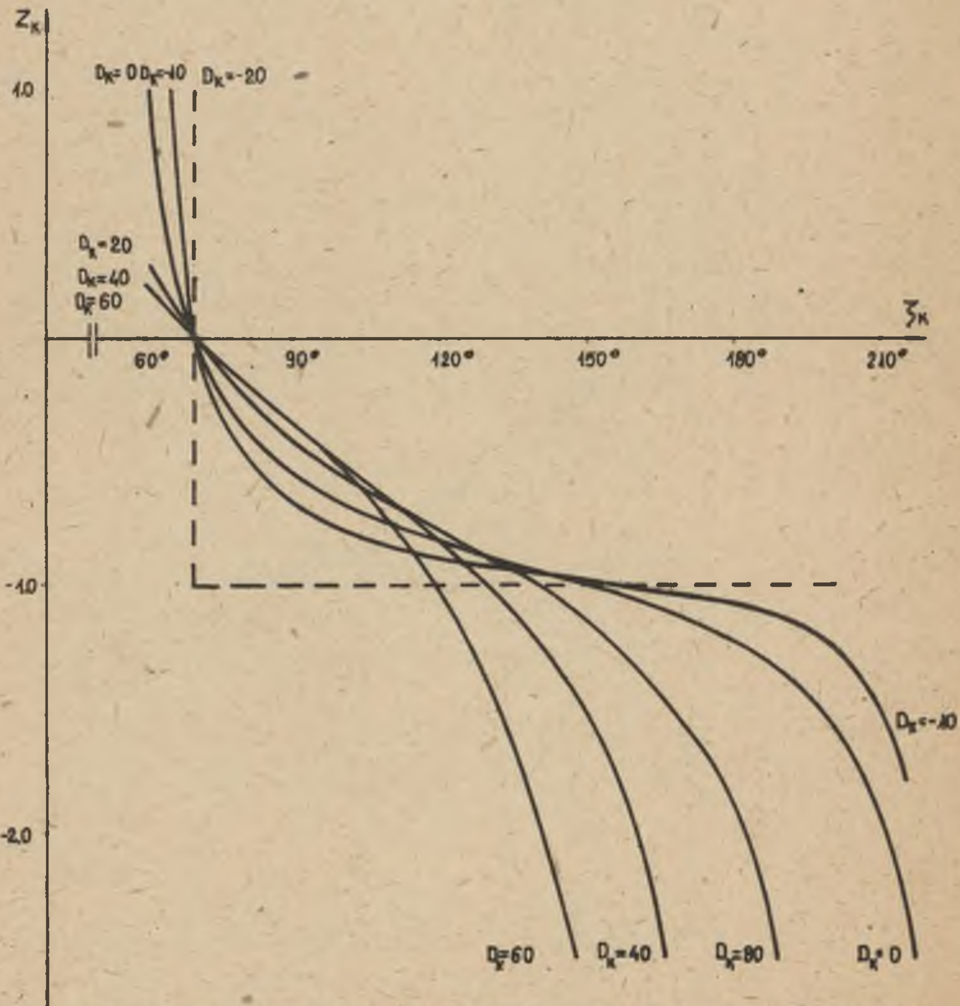


Rys. 2. Zależność współczynnika przeregulowania z_k układu śledzącego od kąta załączenia tyrystorów ζ_k dla układu trójpulsowego

uzyskuje się po przekształceniach

$$z_k = \frac{\sin(\zeta_k - \rho)}{\sin(\zeta_k + \tau + \eta + D_k)}. \tag{18}$$

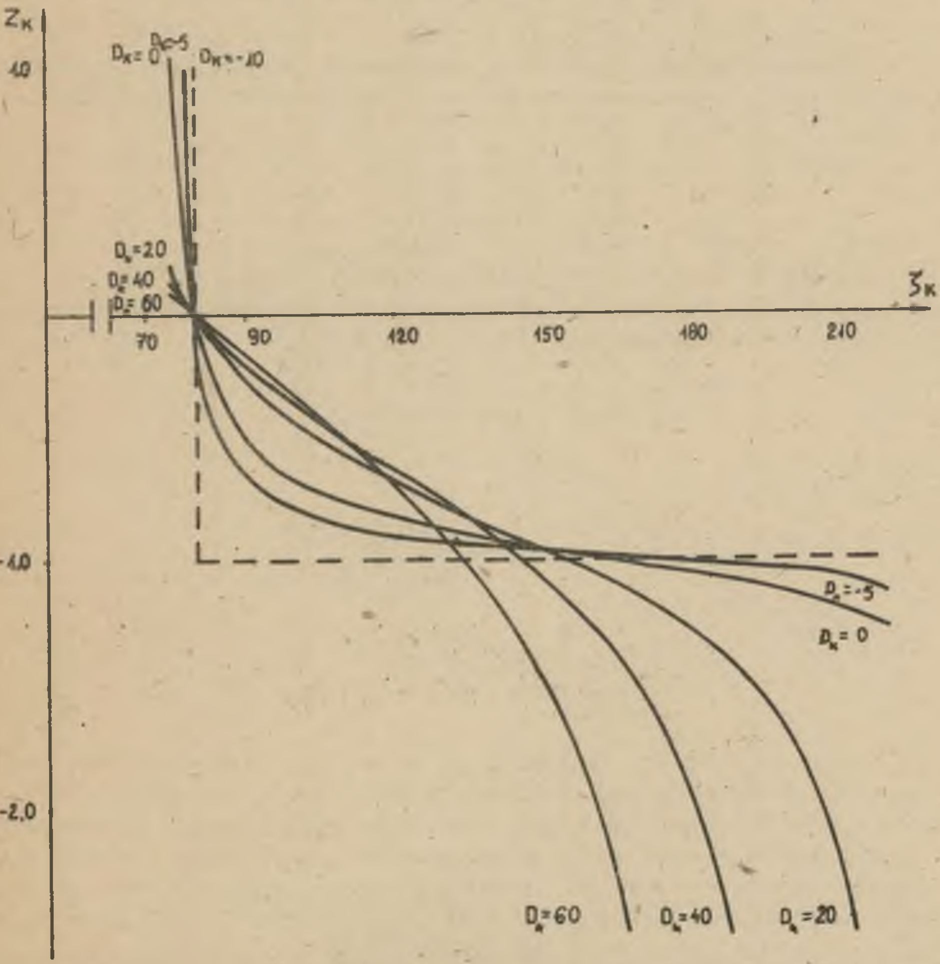
Graficzną ilustrację zależności współczynnika przeregulowania z_k w funkcji kąta załączenia ζ_k przedstawiono na rysunkach 2, 3 i 4 dla układów 3-, 6- i 12-pulsowych, przy różnych wartościach przyrostu kąta załączenia D_k.



Rys. 3. Zależność współczynnika przeregulowania z_k układu śledzącego od kąta załączenia tyrystorów ζ_k dla układu 6-pulsowego

Z dyskusji wzoru wynika, że przy całkującym śledzeniu napięcia wyjściowego:

a) nawet przy stałym sygnale wzorcowym układ ten jest przy pracy falowniczej niestabilny,
b) przy napięciu wzorcowym malejącym zakres pracy stabilnej zmniejsza się a przy napięciu wzorcowym narastającym wzrasta,
c) przy szybkich zmianach napięcia wzorcowego następuje dodatkowe pogorszenie stabilności układu,
d) układ sterowania nie może pracować bez dodatkowych układów stabilizujących.



Rys. 4. Zależność współczynnika przeregulowania z_k układu śledzącego od kąta załączenia tyrystorów ζ_k dla układu 12-pulsowego

4. Poprawa stabilności przez zastosowanie synchronizacji

Wprowadzające synchronizację siecią zasilającą do układu śledzącego napięcie uzyskuje się możliwość dodatkowych oddziaływań na przeregulowania występujące przy pojawieniu się zakłóceń. Na współczynnik przeregulowania x_k w takim układzie mają również wpływ napięcia synchronizujące oraz współczynnik korekcyjny b_k określony wzorem (9). Wprowadzając oznaczenie (16) do wzoru (9) uzyskuje się

$$b_k = \frac{1}{t_g(\zeta_{k+1} + \frac{\tau}{2})(\frac{\tau}{2} \sin . \frac{\tau}{2} - \cos \frac{\tau}{2}) - \sin \frac{\tau}{2}}. \tag{19}$$

Graficzną ilustrację zależności współczynnika korekcyjnego b_k od kąta załączenia ζ_{k+1} przedstawiono na rys. 5 dla układów 3-, 6- i 12-pulsowych.

W przypadku

$$w_{e_{k+1}} = \sin(\vartheta_{o_{k+1}} - k\tau) \tag{20}$$

przy określaniu przeregulowań należy korzystać bezpośrednio ze wzoru (5). Po przekształceniach uzyskuje się

$$x_k = \frac{B}{a} \sin(2\eta + \tau + D_k), \tag{21}$$

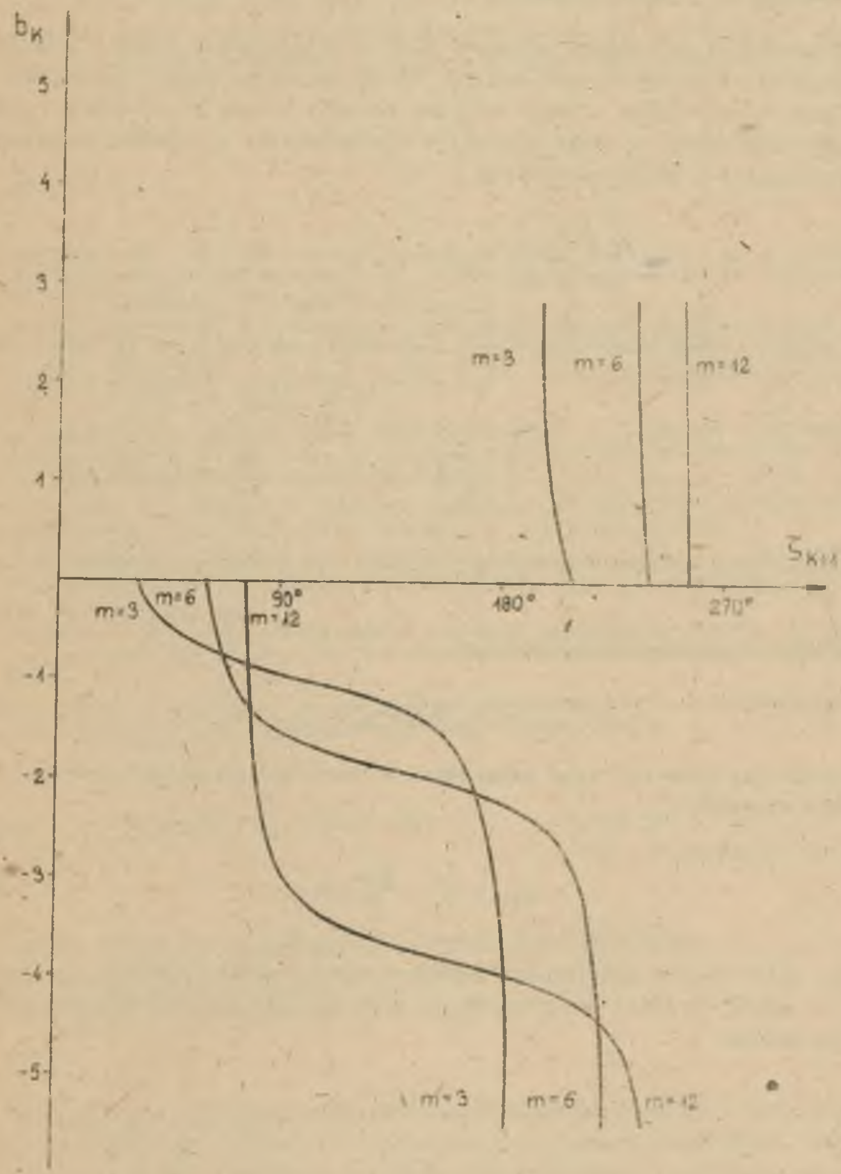
gdzie

$$B = \frac{-\frac{2}{\tau}\sin^2\frac{\tau}{2}}{\sin\eta\cos(\eta + \frac{\tau}{2})} \tag{22}$$

Dla małych τ

$$B \approx 3.$$

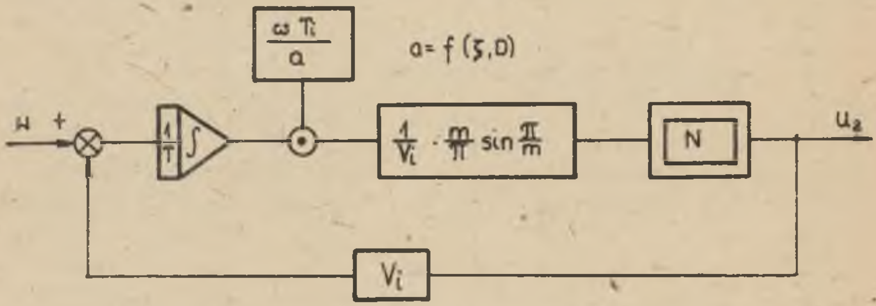
Ze względu na komutację maksymalny kąt opóźniania załączenia nie może przekroczyć wartości 140°-160°. Układ sterowania, spełniający warunek $a \geqslant 3$, jest więc zawsze stabilny. Taki układ posiada jednak małe wzmocnienie w pętli sprzężenia zwrotnego. Z kolei dla małych kątów załączenia układ jest stabilny nawet przy $a = 0$. W tej sytuacji należy zalecić stosowanie regulatora adaptacyjnego o wartości współczynnika a dążącej do zera, przy małych kątach opóźnienia włączenia oraz do 3 przy dużych kątach opóźnienia włączenia. Szczegółowy dobór współczynnika a należy przy tym dokonać w oparciu o charakterystyki $a = f(\zeta_k)$ lub $a = f(\zeta_k, D_k)$ przy założeniu, że $|x_k| < 1$.



Rys. 5. Przebieg współczynnika korygującego b_k w funkcji kąta załączenia następnego pulsu ζ_{k+1}

5. Praktyczny dobór regulatora

Wprowadzając do znanego schematu blokowego cyklokonwertora, z ujemnym napięciowym sprzężeniem zwrotnym [4, 5, 6] węzeł mnożący, uzyskuje się regulator adaptacyjny. Schemat blokowy takiego układu przedstawia rysunek 6. Blok nieliniowy N charakteryzuje nieliniowości statyczne i dynamiczne występujące w cyklokonwertorze.



Rys. 6. Schemat układu sterowania fazowego z ujemnym napięciowym sprzężeniem zwrotnym przy zastosowaniu regulatora adaptacyjnego.

Jeśli napięcie wzorcowe ma przebieg

$$w = M\sin\omega_2 t, \tag{23}$$

to maksymalny przyrost kąta załączenia w idealnych warunkach określa przybliżona zależność:

$$D_{max} = \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{2\tau}{m} \cdot M. \tag{24}$$

Znając ilość pulsów napięcia, przypadających na okres napięcia zasilającego m, można określić kąty τ, D_{max} oraz ϑ, co z kolei pozwala określić zależności

$$z_k = f(\zeta_k)$$

oraz

$$b_k = f(\zeta_k),$$

a następnie określić minimalną wartość współczynnika a, przy której układ sterowania jest jeszcze stabilny

$$a_{min}(\zeta_k) = \frac{z_k + 1}{b_k}. \tag{25}$$

Znając zależność współczynnika a_{min} w funkcji kąta załączenia ξ_k, należy skonstruować układ nieliniowy, który kontrolując przewidywany dla idealnych warunków pracy cyklokonwertora kąt załączenia tyrystorów, zapewnia dostrajanie obwodu głównego, zgodnie z algorytmem uzyskanym ze wzoru (25).

LITERATURA

[1] ABRAMOW A.N., STAŠIŠIN B.A.: Ob ustojčiwesti sleżenia za wychodnym napriażeniem preabrazowatela s jestwestwennoj kommutacej. Preobrazovatelnajy technika Nowosibirsk 1975.

[2] BUCZEK A.: Układy kompensujące zaburzenia w przebiegach napięcia wyjściowego w cyklokonwertoracn. Praca dyplomowa Politechnika Śląska,1980.

[3] FIGARO B.I., Gotowskij B.S., LISS Z.A.: Tiristornye ciklokonwertory. Nauka i Technika, Minsk 1973.

[4] KRYKOWSKI K.: Analiza pracy cyklokonwertora z ujemnym napięciowym sprzężeniem zwrotnym przy obciążeniu rezystancyjno-indukcyjnym. Politechnika Śląska 1974. Praca doktorska.

[5] KRYKOWSKI K.: Własności ruchowe zespołu cyklokonwertor asynchroniczny silnik klatkowy. Gospodarka Paliwami i Energią 8/9 1975.

[6] KRYKOWSKI K.: Zastosowanie w cyklokonwertorze ujemnego napięciowego sprzężenia zwrotnego. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 54, 1976.

[7] KRYKOWSKI K.: Układy sterowania fazowego cyklokonwertorów. II Ogólnopolska Konferencja Naukowo-Techniczna "Energoelektronika" Kazimierz 1980.

[8] PELLY B.R.: Thyristor phase controlled converters and cykloconverters John Willey, New York/London/Sydney/Toronto 1971.

Wpłynęło do Redakcji we wrześniu 1980

Recenzent:
Prof. dr Zygmunt Kuczewski

ПРИМЕНЕНИЕ РЕГУЛЯТОРА С ПЕРЕМЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ЦЕПИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО НАПРЯЖЕНИЮ ДЛЯ СИСТЕМЫ ФАЗНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЦИКЛОКОНВЕРТОРА

Р е з ю м е

Циклоконвертор является специфическим усилителем мощности, линеаризации которого можно достигнуть путем применения обратных связей. Ввиду нелинейности следовало бы рекомендовать применение регулятора с изменяющимися в зависимости от актуального режима работы параметрами. В статье разработан метод подбора наладки такого регулятора для системы фазного управления с отрицательной обратной связью по напряжению.

THE USE OF A VARIABLE INTEGRATION TIME REGULATOR IN THE CIRCUIT OF NEGATIVE VOLTAGE FEEDBACK OF PHASE CYCLOCONVERTOR CONTROL SYSTEM

S u m m a r y

The cycloconvertor is a specific power amplifier the linearization of which can be obtained by using feedback. Due to nonlinearity it would be adviseable to utilize the regulator of variable parameters depending on the actual operational conditions. The paper presents the method of choice settings of the regulator for the phase control system with a negative voltage feedback.