SPIS TREŚCI

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 95 Nr kol. 820

Marian PASKO

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechnika Śląska

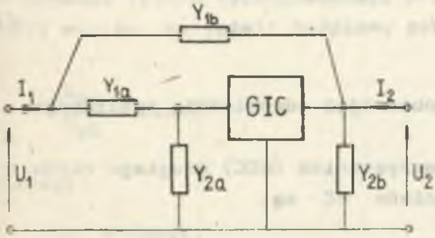
WĄSKOPASMOWY FILTR RC-GIC ZAWIERAJĄCY OKRESOWO STEROWANE PARAMETRY

Streszczenie. W artykule przedstawiono podstawową sekcję wąskopasmowego filtru RC z wykorzystaniem uogólnionego konwertora impedancji (GIC). Syntezę oparto o model syntezy Yanagisawy dla konwertorów impedancji ujemnej. Przedstawiono wpływ na dobroć Q przestrajanych okresowo parametrów filtru. Rozważono wrażliwość S_x^Q, $S_x^{\omega_0}$ $S_x^{|D(j\omega)|}$ proponowanego filtru na zmiany parametrów.

1. Wstęp

W wielu urządzeniach pomiarowo-kontrolnych istnieje potrzeba stosowania filtrów o przestrajanych charakterystykach. Przestrajanie to może odbywać się np. poprzez zmianę wartości przewodności. W pracy zaproponowano model filtru wąskopasmowego wykorzystując uogólniony konwertor impedancji (GIC) drugiego rzędu, który prowadzi do struktury filtru mającego dwie uziemione przewodności, które można łatwo przestrajać.

2. Analiza filtru



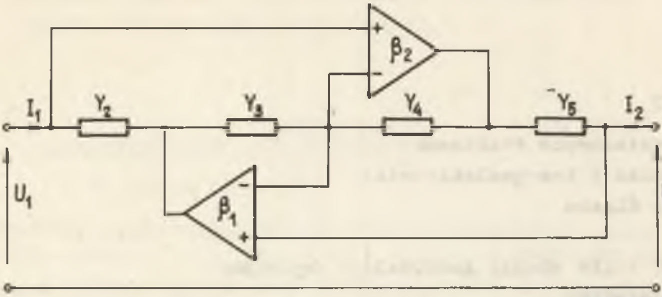
Rys. 1

Zmodyfikowany model syntezy Yanagisawy [2], [9], przedstawiono na rys. 1, w którym: Y_{1a}, Y_{2a}, Y_{1b}, Y_{2b} są to dwójniki RC. Element (GIC) jest czwórnikiem aktywnym o macierzy łańcuchowej.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k(s) \end{bmatrix} \tag{1}$$

gdzie:

$k(s) = \text{const.}$



Rys. 2

Na rysunku 2 przedstawiona jest jedna z możliwych realizacji GIC [1], [2], [4] z wykorzystaniem dwóch wzmacniaczy operacyjnych. Dla nieskończenie dużych współczynników wzmocnienia β_1 i β_2 układ z rys. 2 ma macierz $\mathbb{A}$ o postaci:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{Y_2Y_4}{Y_3Y_5} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Przez dobór odpowiednich admitancji możliwa staje się realizacja dwójników aktywnych o wysokiej dobroci i o impedancjach typu αs^2, βs, $\gamma \frac{1}{s^2}$.
Transmitancja napięciowo-napięciowa układu z rys. 1 ma postać

$$K_u(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Y_{1a} + k(s)\,Y_{1b}}{Y_{1a} + Y_{2a} + k(s)(Y_{1b} + Y_{2b})} \tag{3}$$

Z relacji (3) wynika, że transmitancję napięciowo-napięciową filtru pasmowego postaci

$$K_u(s) = \frac{Hs}{s^2 + 2\sigma s + \omega_0^2} \tag{4}$$

można zrealizować na wiele sposobów dobierając odpowiednio admitancje Y_{1a}, Y_{2a}, Y_{1b}, Y_{2b} oraz $k(s)$.
W pracy zaproponowano strukturę z wykorzystaniem (GIC) drugiego rzędu o $k(s) = ks^2$ i wówczas admitancje dwójników RC są:

$$Y_2 = sC_2, \quad Y_3 = G_3, \quad Y_4 = sC_4, \quad Y_5 = G_5$$

natomiast

$$Y_{1a} = sC_{1a}, \quad Y_{1b} = 0, \quad Y_{2a} = G_{2a}, \quad Y_{2b} = G_{2b}$$

Dla powyższych admitancji transmitancja (3) filtru ma postać:

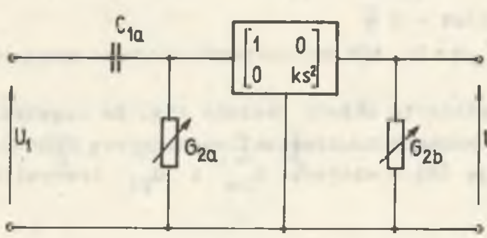
$$K_u(s) = \frac{\frac{C_{1a}}{kG_{2b}}\, s}{s^2 + \frac{C_{1a}}{kG_{2b}}\, s + \frac{G_{2a}}{kG_{2b}}} = \frac{Hs}{s^2 + 2\sigma s + \omega_o^2} = \frac{N(s)}{D(s)} \tag{5}$$

gdzie:

$$k = \frac{C_2 C_4}{G_3 G_5}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{G_{2a}}{kG_{2b}}} \tag{6}$$

$$Q = \frac{\omega_o}{2\sigma} = \frac{\sqrt{kG_{2a}G_{2b}}}{C_{1a}} \tag{7}$$



Rys. 3

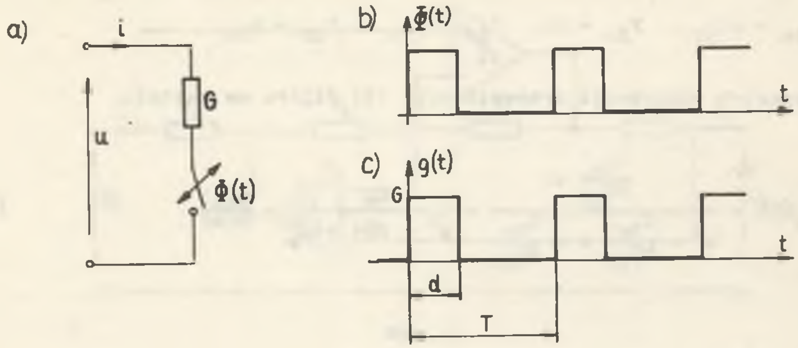
Schemat filtru wąskopasmowego przedstawiono na rys. 3. Z relacji (6) i (7) wynika, że jeżeli będziemy zmieniać G_{2a} i G_{2b}, tak aby

$$\frac{G_{2a}}{G_{2b}} = \text{const}$$

wówczas

$$\omega_o = \text{const},$$

a zmieniać się będzie dobroć Q realizowanego filtru.



Rys. 4

Przestrajanie G_{2a} i G_{2b} można realizować np. poprzez sterowanie kluczem tak jak przedstawiono to na rys. 4a. Niech klucz zmienia swe położenie wg funkcji podanej na rys. 4b, wówczas przebieg przewodności g(t) zmienia się zgodnie z rys. 4c.

Średnia przewodność za okres przyjmie postać:

$$\overline{G(t)} = \frac{1}{T}\int_0^d g(t)dt = G\,\frac{d}{T} \tag{8}$$

Celem poprawności działania układu zakłada się, że częstotliwość kluczowania jest znacznie większa od częstotliwości pracy filtru.

Wstawiając relację (8) w miejsce G_{2a} i G_{2b} transmitancja (7) przyjmie postać:

$$K_u(s) = \frac{\dfrac{C_{1a}T}{kG_{2b}d}}{s^2 + \dfrac{C_{1a}T}{kG_{2b}d}\,s + \dfrac{G_{2a}}{kG_{2b}}} \tag{9}$$

stąd $Q_{śr} = Q\,\frac{d}{T}$, natomiast ω_o pozostaje bez zmiany.

3. Wrażliwość

Wrażliwość S_x^Q, $S_x^{\omega_o}$ i $S_x^{|D(j\omega)|}$ określono wg klasycznej wrażliwości podanej przez Bode'a [6].

$$S_x^{T(s)} = \frac{\partial T(s)}{\partial x} \cdot \frac{x}{T(s)}$$

Wpływ zmian parametrów czwórnika aktywnego na częstotliwościową charakterystykę filtru oceniono poprzez zmiany modułu transmitancji dla $s = j\omega$.

W tym celu wystarczy ocenić zmiany modułu mianownika, zmiana bowiem modułu licznika powoduje jedynie podniesienie charakterystyki bez zmiany kształtu [7].

Dla rozpatrywanego ogniwa filtru

$$S_k^Q = S_{G_{2a}}^Q = S_{G_{2b}}^Q = \frac{1}{2}, \quad S_{C_{1a}}^Q = -1$$

$$S_k^{\omega_o} = -\frac{1}{2} = S_{G_{2b}}^{\omega_o} = \frac{1}{2}, \quad S_{G_{2a}}^{\omega_o} = \frac{1}{2}.$$

Sumaryczna modułowa wrażliwość wynosi

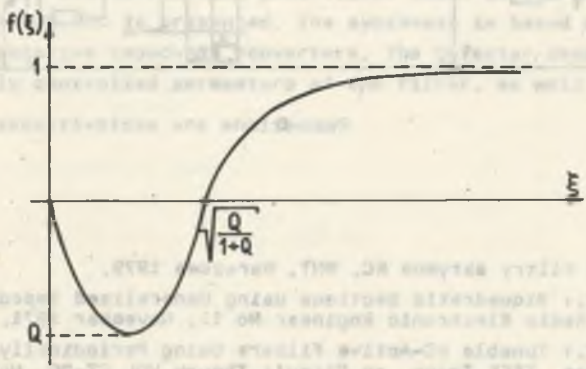
$$\sum \left|S_x^Q\right| = \frac{5}{2}; \quad \sum \left|S_x^{\omega_o}\right| = \frac{3}{2}.$$

Natomiast

$$S_k^{|D(j\omega)|} = \frac{\partial|D(j\omega)|}{|D(j\omega)|} \cdot \frac{k}{\partial k} = -\frac{\omega^2 G_{2b}(G_{2a} - k\omega^2 G_{2b})k}{(G_{2a} - k\omega^2 G_{2b})^2 + (\omega C_{1a})^2}$$

Wyrażenie to przyjmie wartość ekstremalną dla $\omega = \omega_o\sqrt{\frac{Q}{1+Q}}$ i wynosi Q. Przebieg

$S_k^{|D(j\omega)|} = f(\xi)$, gdzie $\xi = \frac{\omega}{\omega_o}$ przedstawiono na rys. 5.



Rys. 5

4. Uwagi końcowe

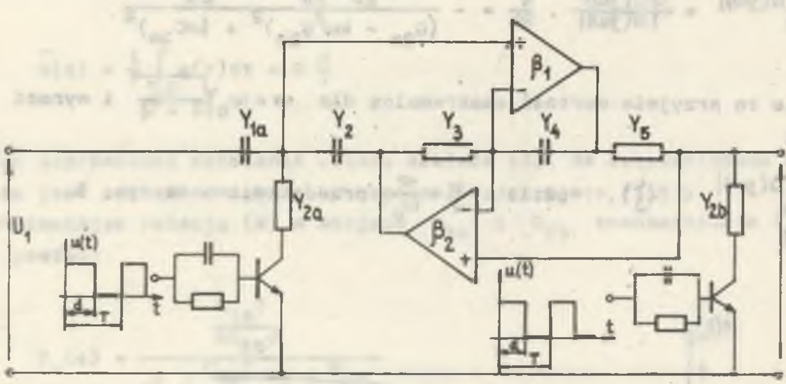
Zaprojektowano filtr o następujących danych $f_o = 1000$ Hz, $Q = 50$, współczynnik $\frac{d}{T} = 0,5$, $T = 10\ \mu s$, przyjęto $G_{2a} = G_{2b} = G = 10^{-3}$ S, $G_3 = G_5 = G_x = 10^{-4}$ S, $C_2 = C_4 = C_x$. Wówczas

$$C_{1a} = \frac{G_{2a}}{Q\omega_o} = 3,184\ \text{nF}, \qquad C_x = \frac{G_x}{\omega_o} = 15,92\ \text{nF}.$$

Transmitancja (7) dla wartości znormalizowanych $R_o = 1$ kΩ, $\omega_o = 2\pi \cdot 1000\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ przyjmuje postać

$$K_u(\bar{s}) = \frac{0,02\ \frac{T}{d}\ \bar{s}}{\bar{s}^2 + 0,02\ \frac{T}{d}\ \bar{s} + 1} \tag{10}$$

Rzeczywisty model filtru został przedstawiony na rys. 6. Parametry rzeczywiste filtru pokrywają się z wyznaczonymi teoretycznie.



Rys. 6

LITERATURA

[1] Białko M.: Filtry aktywne RC. WNT, Warszawa 1979.

[2] Bruton L.T.: Biquadratic Sections using Generalized Impedance Converters. The Radio Electronic Engineer No 11, November 1971.

[3] Bruton L.T.: Tunable RC-Active Filters Using Periodically Switched Conductances. IEEE Trans. on Circuit Theory VOL CT-20, No 3, May 1973.

[4] Bruton L.T.: Multiple-Amplifier RC-Active Filter Design With Emphasis on GIC Realizations. IEEE Trans. on Circuits and Systems, VOL CAS-25, No 10, October 1978.

[5] Hirano K.: Active RC All-Pass Filters Containing Periodically Operated Switches. IEEE Trans. on Circuits and Systems, September 1975.

[6] Mitra S.K.: Analiza i synteza układów aktywnych liniowych. WNT, Warszawa 1974.

[7] Pasko M.: Porównanie metod syntezy aktywnych filtrów RC. Materiały Seminarium VSSE Pilzen, Czechosłowacja 1978.

[8] Temes C., Mitra S.K.: Teoria i projektowanie filtrów. WNT, Warszawa 1978.

[9] Yanagisawa T.: RC Active Networks Using Current Inversion Type Negative Impedance Converters. IRE Trans. on Circuit Theory, No 3, 1967.

Recenzent: prof. dr inż. Stanisław Bolkowski

Wpłynęło do redakcji dnia 4.XI.1983 r.

УЗКОПОЛОСНЫЙ ФИЛТР RC–ОКС С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Р е з ю м е

В статье представлена реализация узкополосного фильтра RC с использованием обобщённого конвертора сопротивления ОКС. Синтез проведён на основе метода Янагисавы в классе RC–КОС. Рассмотрена также чувствительность S_x^Q, $S_x^{\omega_0}$, $S_x^{|D(j\omega)|}$ этого фильтра.

A NARROW BAND-PASS RC-GIC FILTER WITH
PERIODICALLY CONTROLLED PARAMETERS

S u m m a r y

A basic link of the narrow band-pass filter based on the generalized impedance converter GIC is presented. The synthesis is based on Yanagisawa procedure for negative impedance converters. The Q-factor dependence on the periodically controlled parameters of the filter, as well as, its S_x^Q, $S_x^{\omega_0}$, $S_x^{|D(j\omega)|}$ sensitivities are analised.

Seria: ELEKTRYKA z. 95 Nr kol. 820

Marian PASKO

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechnika Śląska

WSZECHPRZEPUSTOWY FILTR DRUGIEGO RZĘDU Z WYKORZYSTANIEM FILTRU ŚRODKOWOPRZEPUSTOWEGO Z PARAMETRAMI STEROWANYMI OKRESOWO

Streszczenie. W artykule podano niektóre realizacje wszechprzepustowej sekcji drugiego rzędu przy zastosowaniu ogniwa filtru środkowoprzepustowego. Wybrano te realizacje filtrów środkowoprzepustowych, które odznaczają się łatwością przestrajania częstotliwości (ω_0), przy której $\varphi = -\pi$. Przestrajanie ω_0 odbywa się poprzez zmieniającą się przewodność sterowaną okresowo [4].

Wprowadzenie

Filtrem wszechprzepustowym nazywamy czwórnik o transmitancji operatorowej np. napięciowo-napięciowej postaci

$$K_u(s) = \pm \frac{P(-s)}{P(s)}, \tag{1}$$

tj. funkcji o stałym module na osi urojonej i zmiennym argumencie.

Wielomian $P(s)$ jest wielomianem Hurwitza. W pracy poszukiwać będziemy transmitancji

$$K_u(s) = \pm \frac{s^2 - as + b}{s^2 + as + b},$$

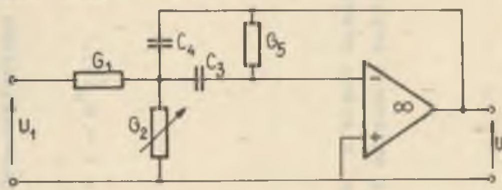
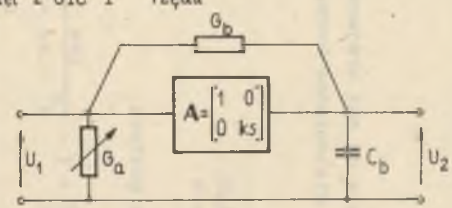
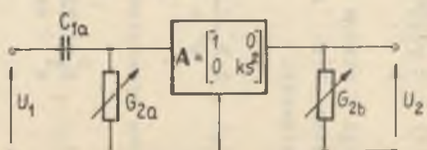
którą można przedstawić w postaci

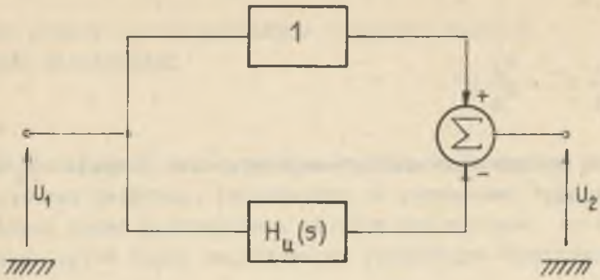
$$K_u(s) = \frac{s^2 - as + b}{s^2 + as + b} = 1 - \frac{2as}{s^2 + as + b} = 1 - H_u(s), \tag{2}$$

przy czym $H_u(s)$ jest transmitancją napięciowo-napięciową filtru środkowoprzepustowego. Zależność (2) można przedstawić jako połączenie równoległe układów o transmitancji:

- środkowoprzepustowej
- identycznościowej.

Tabela 1

lp	Model filtru środkowoprzepustowego	Transmitancja $H_u(s)=\frac{2as}{s^2+as+b}$ (3)	Częstotliwość ω_0
1	Model Bridgmana [1] 	$H_u(s)=-\frac{\frac{G_1}{C_4}s}{s^2+\frac{G_5(C_3+C_4)}{C_3C_4}s+\frac{G_5(G_1+G_2)}{C_3C_4}}$ Dla spełnienia warunku (3), jeżeli $C_3=C_4=C$ musi zachodzić $G_1=4G_5$	$\omega_0=\frac{1}{C}\sqrt{G_5(4G_5+G_2)}$ przestrajana przewodność G_2
2	Model z GIC I rzędu 	$H_u(s)=\frac{\frac{G_b}{C_b}s}{s^2+\frac{G_b}{C_b}s+\frac{G_a}{kC_b}}$ Spełnienie warunku (3), odbywa się poprzez układ sumujący	$\omega_0=\sqrt{\frac{G_a}{kC_b}}$ przestrajana przewodność G_a
3	Model z GIC II rzędu 	$H_u(s)=\frac{\frac{C_{1a}}{kG_{2b}}s}{s^2+\frac{C_{1a}}{kG_{2b}}s+\frac{G_{2a}}{kG_{2b}}}$ Spełnienie warunku (3), jak wyżej	$\omega_0=\sqrt{\frac{G_{2a}}{kG_{2b}}}$ przestrajana przewodność G_{2a} lub G_{2b}



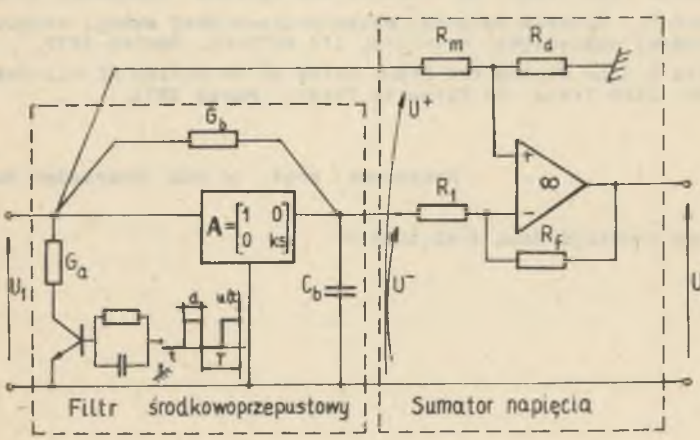
Rys. 1

Zasadę tę przedstawiono na rysunku 1 [5], [6].

Realizacja filtrów środkowoprzepustowych

Do realizacji filtrów środkowoprzepustowych wykorzystano te spośród znanych realizacji, w których w prosty sposób można przestrajać ω_0, np. za pomocą sterowanej przewodności. Zmianę ω_0 uzyskuje się poprzez zmianę przewodności, której wartość średnia zależy od współczynnika wypełnienia. Wartość tę wyraża zależność $\overline{G(t)} = G\frac{d}{T}$, przy spełnieniu warunku, że okres kluczowania T jest znacznie mniejszy od okresu sygnału wejściowego T_s [3], [4].

W tabeli 1 podano trzy różne realizacje filtrów środkowoprzepustowych. Na rys. 2 przedstawiono przykładowo wszechprzepustową sekcję II rzędu przy zastosowaniu GIC I rzędu. Zastosowany w tym rozwiązaniu sumator napięcia opisany jest następującym wzorem, przy założeniu, że wzmacniacz operacyjny jest idealny i jeżeli $R_1 + R_f = R_m + R_d$.



Rys. 2

Zatem

$$U_2 = -\frac{R_f}{R_1}U^- + \frac{R_d}{R_1}U^+ \qquad (4)$$

Z zależności (4) wynika, że współczynnik licznika funkcji $H_u(s)$ można dowolnie nastawiać.

Uwagi końcowe

Z przedstawionych rozwiązań wynika, że układy te pozwalają w prosty sposób na przestrajanie ω_0. Przestrajanie odbywa się poprzez zmianę jednej tylko przewodności. Idea (przestrajania) zmiany rezystancji czy też przewodności w obecnej chwili znajduje wielu zwolenników, dążąc do wprowadzenia tzw. układów R - przełączanych [2], [3], które mogą stać się konkurencyjne z tzw. układami C - przełączanymi. Projektowanie R - przełączanych układów może opierać się na wykorzystaniu klasycznych rozwiązań układów aktywnych RC.

LITERATURA

[1] Białko M.: Filtry aktywne RC. WNT, Warszawa 1979.

[2] Geiger R.L., Allen P.E., Ngo D.T.: Switched-resistor Filters - a Continuous Time Approach to Monolithic MOS Filter Design. IEEE Trans. on CT, Vol. CAS-19, No 5, 1982.

[3] Guziński A.: Filtry R - przełączane realizowane techniką MOS. Materiały VI KKTOiUE, Gliwice 1983.

[4] Hirano K.: Active RC All-Pass Filters Containing Periodically Operated Switches. IEEE Trans. on Circuits and Systems, September 1975.

[5] Kunicki T.: Synteza aktywnej wszechprzepustowej sekcji drugiego rzędu sterowanej napięciowo. Materiały III KKTOiUE, Gdańsk 1979.

[6] Roberts G.: On Tuning the Group Delay of an Active RC All-Pass Resonators. IEEE Trans. on Circuits Theory, March 1973.

Recenzent: prof. dr inż. Stanisław Bolkowski

Wpłynęło do redakcji dnia 4.XI.1983 r.

ВСЕХПОЛОСНЫЙ ФИЛЬТР С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛОСНОГО ФИЛЬТРА С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Р е з ю м е

В статье рассмотрены некоторые реализации всехполосных фильтров с использованием полосных фильтров. Рассмотрены те реализации иолосных фильтров, в которых можно легко регулировать частоту для которой $\varphi = \pi$. Регулировку ω_0 производится через периодически управлямую изменяемую проводимость.

A SECOND ORDER ALL-PASS LINK BASED ON THE BAND-PASS LINK WITH PERIODICALLY CONTROLLED PARAMETERS

S u m m a r y

In this paper there are presented some all-pass link realizations with the band-pass link application. Easy for tuning of ω_0 frequency for which $\varphi = -\pi$ realizations have been chosen.

This frequency is tuned by a change of a periodically controlled conductance.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 95 Nr kol. 820

Marian PASKO
Lesław TOPÓR-KAMIŃSKI

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechnika Śląska

FILTR AKTYWNY RC O STRUKTURZE RÓWNOLEGŁEJ PRZEŁĄCZANEJ

Streszczenie. Przedstawiono sposób realizacji transmitacji zmienianej cyfrowo poprzez przełączanie struktury równoległej filtru, impulsami sterującymi o zmiennym współczynniku wypełnienia. Pokazano przykładową realizację filtru środkowoprzepustowego o regulowanej szerokości pasma.

1. Wprowadzenie

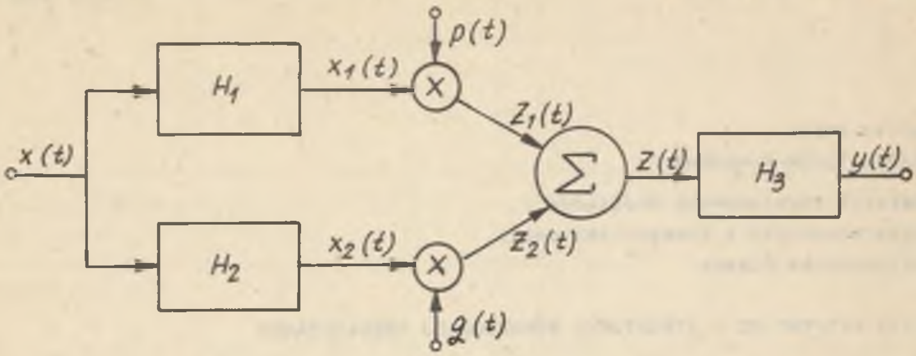
W związku z coraz powszechniejszym stosowaniem mikroprocesorów w układach sterujących, zachodzi często konieczność przestrajania parametrów torów analogowych sygnałem cyfrowym. Realizuje się to obecnie najczęściej poprzez bezpośrednię zmianę wartości pewnych elementów w filtrach analogowych, takich jak rezystancje lub współczynniki wzmocnienia przy zastosowaniu mnożących przetworników cyfrowo-analogowych [1], [3]. W niniejszej pracy przedstawiono sposób realizacji zmienianej cyfrowo poprzez przełączanie, struktury równoległej filtru, przy czym sterowaniu cyfrowemu podlega współczynnik wypełnienia impulsów sterujących przy ich stałej częstotliwości. Zasada ta bywała dotychczas stosowana przy zmianach wielkości rezystancji, przy czym wartość jej przyjmowana była jako średnia za okres przebiegu sterującego [2], [4], [5].

2. Ogólna zasada działania

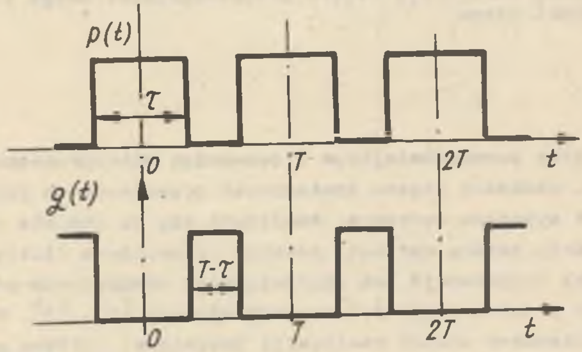
Na rysunku 1 przedstawiony jest blokowy schemat filtru o strukturze równoległej przełączanej.

W układzie tym bloki H_1 i H_2 są filtrami podstawowymi o dowolnych z góry zaprojektowanych transmitancjach elementarnych, np. dolno- górno- lub środkowoprzepustowych.

Bloki mnożące reprezentują w ogólnym przypadku klucze jako elementy przełączające. Blok $\sum$ jest sumatorem, a blok H_3 idealnym filtrem dolnoprzepustowym.



Rys. 1



Rys. 2

Na rysunku 2 przedstawione są przebiegi czasowe funkcji p(t) i q(t) sterujących kluczami.

Funkcje te opisane są relacjami:

$$p(t) = a \sum_{k=-\infty}^{\infty} Sc(k\pi a)e^{jk\omega_s t} \tag{1}$$

$$q(t) = t = (1-a)\sum_{k=-\infty}^{\infty} Sc\left[k\pi(1-a)\right]e^{jk\omega_s (t - \frac{T}{2})} \tag{2}$$

w których: $a = \frac{\tau}{T}$, $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$.

Współczynniki wypełnienia tych przebiegów sterowane są jednocześnie sygnałem cyfrowym w układzie opisanym na rys. 5, w ten sposób, że spełniona jest zawsze zależność:

$$p(t)\ .\ q(t) = 0 \tag{3}$$

Transformaty Fouriera tych przebiegów wynoszą:

$$P(\omega) = 2\pi a \sum_{k=-\infty}^{\infty} Sc(k\omega_s a)\delta(\omega - k\omega_s) \tag{4}$$

$$Q(\omega) = 2\pi(1-a) \sum_{k=-\infty}^{\infty} Sc\left[k\omega_s(1-a)\right]\delta(\omega - k\omega_s)e^{-j\omega\frac{T}{2}} \tag{5}$$

Widma sygnałów wyjściowych z filtrów podstawowych wynoszą:

$$X_1(\omega) = H_1(\omega)X(\omega) \tag{6}$$

$$X_2(\omega) = H_2(\omega)X(\omega) \tag{7}$$

Natomiast sygnały Z_1 i Z_2 za kluczami mają widma:

$$Z_1(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X_1(\omega) * P(\omega)\right] \tag{8}$$

$$Z_1(\omega) = a \sum_{k=-\infty}^{\infty} Sc(k\omega_s a)X_1(\omega - k\omega_s) \tag{9}$$

$$Z_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X_2(\omega) * Q(\omega)\right] \tag{10}$$

$$Z_2(\omega) = (1-a) \sum_{k=-\infty}^{\infty} Sc\left[k\omega_s(1-a)\right]X_2(\omega-k\omega_s)e^{-j\omega\frac{T}{2}} \tag{11}$$

Sygnał wyjściowy z sumatora posiada widmo:

$$Z(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{a\ Sc(k\omega_s a)X_1(\omega-k\omega_s) + (1-a)Sc\left[k\omega_s(1-a)\right]X_2(\omega-k\omega_s)e^{-j\omega\frac{T}{2}}\right\} \tag{12}$$

Zakłada się, że sygnał wejściowy $x(t)$ ma ograniczone widmo, czyli

$$X(\omega) = 0 \quad \text{dla } |\omega| \leqslant \Omega \tag{13}$$

Natomiast pulsacja przełączania kluczy ω_s musi spełniać zależności:

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} \geqslant 2\,\Omega \tag{14}$$

Filtr H_3 teoretycznie powinien być idealnym filtrem dolnoprzepustowym o częstotliwości granicznej ω_d, przy czym winno zachodzić:

$$\Omega \leqslant \omega_d \leqslant \omega_s - \Omega \tag{15}$$

Sygnał wyjściowy $y(t)$ całego układu będzie miał wtedy widmo ograniczone do $k = 0$ i opisane relacją:

$$Y(\omega) = aX_1(\omega) + (1-a)X_2(\omega)e^{-j\omega\frac{T}{2}} \tag{16}$$

Wobec relacji (6) i (7) oraz założeniu, że $\omega_s \geqslant \Omega$ otrzymuje się transmitację całego filtru jako:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = aH_1(\omega) + (1-a)H_2(\omega) \tag{17}$$

Jak wynika z relacji (17) przedstawiona na rys. 1 struktura przełączana filtru pozwala otrzymać wypadkową transmitancję jako sumę transmitancji filtrów podstawowych H_1 i H_2 wziętych z pewnymi wagami zależnymi od współczynnika wypełnienia a sterowanego sygnałem cyfrowym.

3. Filtr środkowo-przepustowy o regulowanej szerokości pasma

Spośród wielu możliwości realizacji filtrów sterowanych na jakie pozwala struktura z rys. 1 jako przykład rozpatrywany będzie filtr środkowoprzepustowy o regulowanej szerokości pasma. W tym przypadku filtry podstawowe H_1 i H_2 dobiera się jako elementarne ogniwa środkowoprzepustowe o tych samych częstotliwościach środkowych i wzmocnieniach:

$$\omega_{o1} = \omega_{o2} = \omega_o, \quad H_{1o} = H_{2o} = H_o \tag{18}$$

a różnych dobrociach Q_1 i Q_2, przy czym:

$$Q_1 = nQ_2 \tag{19}$$

Zatem dla transmitancji H_1 i H_2 wyrażonych relacjami:

$$H_1(\omega) = \frac{jk\omega a_1}{a_0 - \omega^2 + ja_1\omega} \tag{20}$$

$$H_2(\omega) = \frac{jk\omega b_1}{b_0 - \omega^2 + jb_1\omega} \tag{21}$$

oraz wobec relacji (17), (18) i (19) otrzymuje się dla całego filtru:

$$H(\omega) = kjB\,\frac{C\left[a(1-n) + n\right] + jnB}{C^2 + jBC(1+n) - nB^2} \tag{22}$$

gdzie:

$$b_1 = na_1 \tag{23}$$

$$B = a_1\omega \tag{24}$$

$$C = a_0 - \omega^2 \tag{25}$$

Następnie można określić moduł transmitancji $H(\omega)$ dla częstotliwości znormalizowanej.

$$\xi = \frac{\omega}{\omega_0} \tag{26}$$

oraz dobroci

$$Q = \frac{\omega_0}{a_1} \tag{27}$$

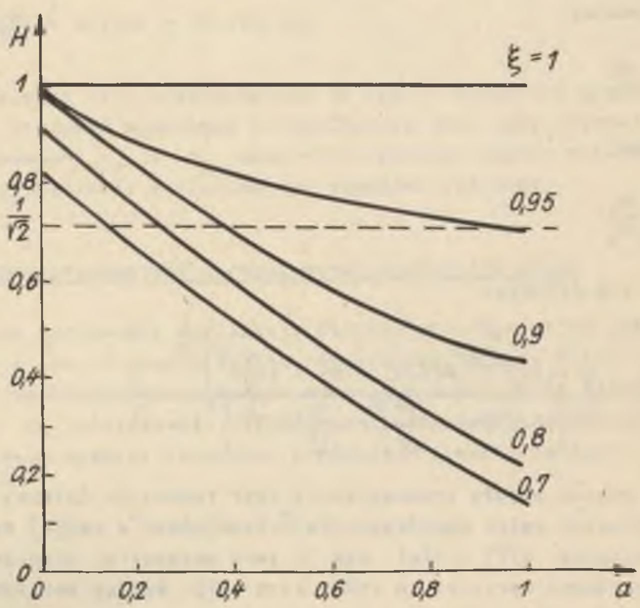
Otrzymuje się relację:

$$\frac{H(\xi)}{H(1)} = \frac{\xi}{Q}\,\frac{\left\{(1-\xi^2)^2\left[a(1-n) + n\right] + \left(\frac{n\xi}{Q}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{\left[(1-\xi^2) - n\,\frac{\xi^2}{Q^2}\right]^2 + \left[\frac{\xi}{Q}(1-\xi^2)\right]^2(1+n)^2} \tag{28}$$

Otrzymana postać modułu transmitancji jest trudna do dalszej analizy, zatem aby określić wpływ współczynnika wypełnienia a na jej wartość sporządzono diagram $H(\xi) = f(a)$ dla ξ jako parametru. Diagram sporządzono dla przykładowych wartości $n = 10$ i $Q = 10$ według tablicy 1 i przedstawiono na rys. 3.

Tablica 1

ξ \ a	0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	0,9	1
0,7	0,81	0,66	0,52	0,45	0,38	0,25	0,18	0,14
0,8	0,91	0,75	0,60	0,53	0,45	0,32	0,26	0,22
0,9	0,98	0,84	0,70	0,64	0,58	0,49	0,45	0,43
0,95	0,99	0,87	0,83	0,79	0,76	0,72	0,71	0,69
1	1	1	1	1	1	1	1	1



Rys. 3

Na diagramie linią przerywaną oznaczono poziom 3 dB spadku modułu wypadkowego transmitancji całego filtru. Na poziomie tym można odczytać wpływ wartości współczynnika wypełnienia a na szerokość pasma.

4. Realizacja praktyczna przykładowego filtru środkowoprzepustowego

W celu przebadania własności podanej struktury filtru zaprojektowano i wykonano filtr o własnościach jak w punkcie 3, którego schemat przedstawiono na rys. 4. Filtry podstawowe zrealizowano na wzmacniaczach W2 i W3 jako środkowoprzepustowe o częstotliwości f_o = 500 Hz i dobrociach odpowiednio Q_1 = 62,8 oraz Q_2 = 6,28.

Funkcję przełączników spełniał układ scalony MCY 74066 sterowany z przetwornika sygnału cyfrowego na szerokość impulsu, którego schemat przedstawiony jest na rys. 5.

Charakterystyki modułu transmitancji całego filtru wykreślone na rejestratorze X-Y w skalach liniowych częstotliwości i wzmocnienia przedstawione są na rys. 6. Linie te są wykreślone odpowiednio dla pięciu wartości współczynnika wypełnienia $a = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$, co odpowiada dwubitowym dekoderom w układzie przetwornika z rys. 5.

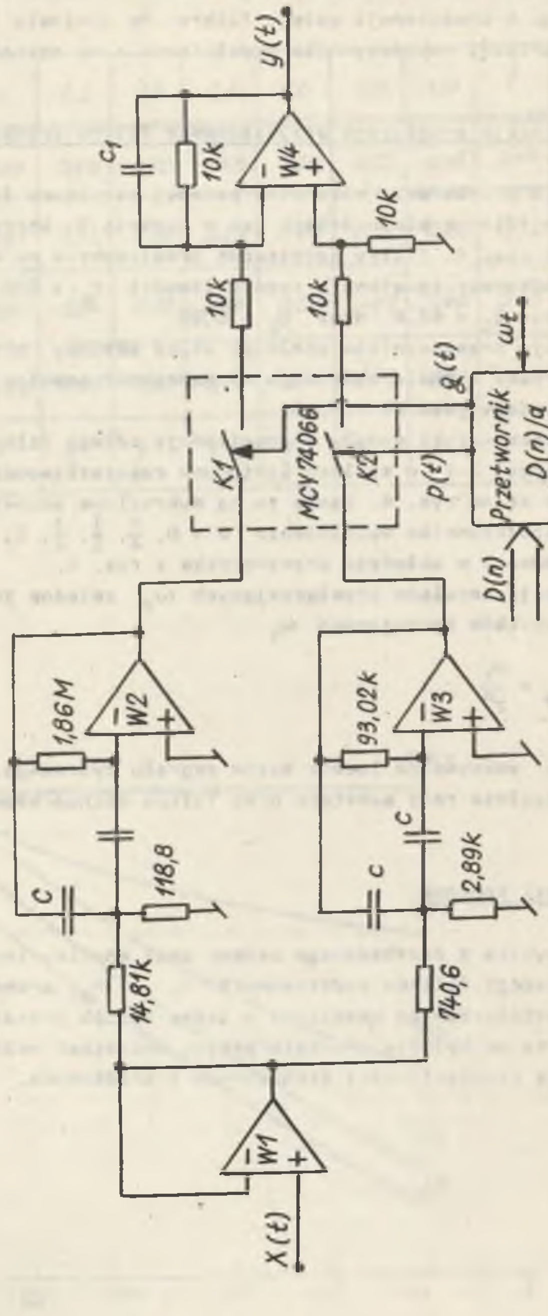
Pulsacja impulsów przełączających ω_s zależna jest od pulsacji przebiegu impulsów taktujących ω_t.

$$\omega_s = \frac{\omega_t}{2^n} \tag{29}$$

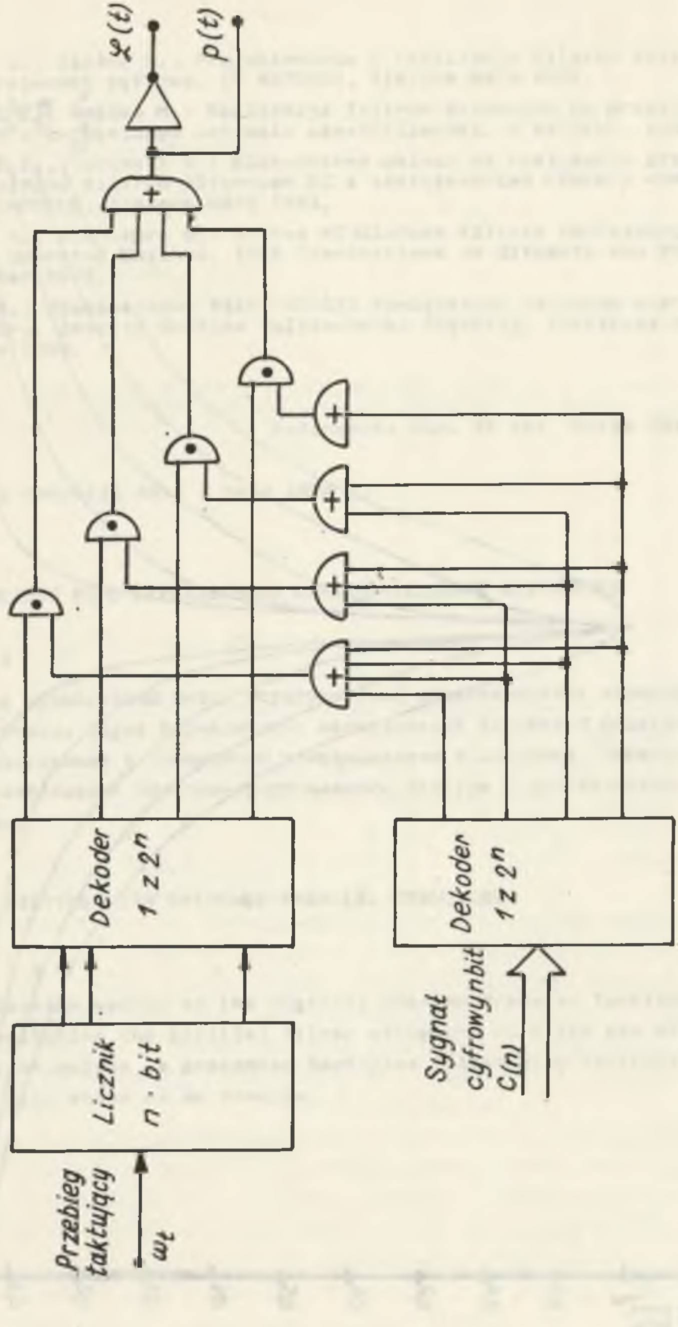
gdzie n maksymalna liczba bitów sygnału cyfrowego. Wzmacniacz W4 na rys. 4 spełnia rolę sumatora oraz filtru dolnoprzepustowego.

5. Wnioski końcowe

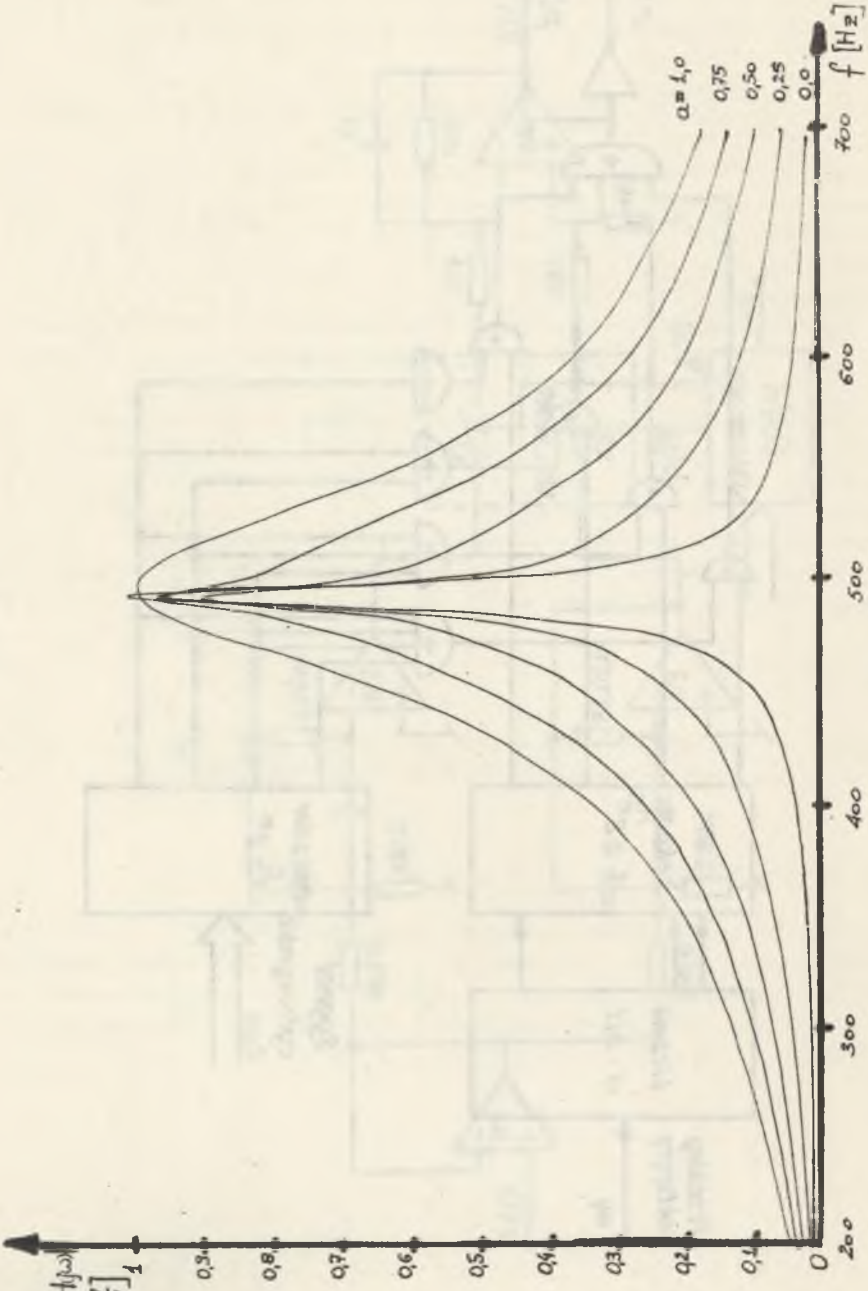
Jak wynika z przebadanego układu oraz analizy innych przypadków doboru transmitancji filtrów podstawowych H_1 i H_2, przedstawiona struktura filtru przełączanego umożliwia w łatwy sposób przestrajanie szerokości pasma oraz nachylenia charakterystyk, natomiast mało efektywne jest przestrajanie częstotliwości granicznych i środkowych.


y(t)
X(t)
C1
10k
10k
10k
10k
10k
W1
W2
W3
W4
1,86M
118,8
14,81k
93,02k
2,89k
140,6
C
C
C
MCY74066
K1
K2
p(t)
q(t)
Przetwornik
D(n)/α
ωt
D(n)

Rys. 4


p(t)
Dekoder
1 z 2ⁿ
Licznik
n · bit
Przebieg
taktujący
Dekoder
1 z 2ⁿ
Sygnał
cyfrowy n bit
C(n)

Rys. 5


|H(jω)|
[V/V]
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
200
300
400
500
600
700
f [Hz]
a=1,0
0,75
0,50
0,25
0,0

Rys. 6

LITERATURA

[1] Żurada J., Białko M.: Projektowanie i realizacja filtrów aktywnych RC przestrajanych cyfrowo. IV KKTOiUE, Zielona Góra 1981.

[2] Czarnul Z., Białko M.: Realizacja filtrów aktywnych RC przestrajanych cyfrowo o zwiększonym zakresie częstotliwości. V KKTOiUE, Łódź 1982.

[3] Czarnul Z., Guzinski A.: Elementarne układy do realizacji przestrajanych cyfrowo filtrów aktywnych RC z zastosowaniem RZNSN o wzmocnieniu 1. IV KKTOiUE, Zielona Góra 1981.

[4] Hirana K., Nishimura S.: Active RC ALL-Pass Filters Containing Periodicaly Operated Swithes. IEEE Transactions on Circuits Aud Systems. September 1975.

[5] Pasko M.: Wąskopasmowy filtr RC-GIC zawierający okresowo sterowane parametry. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 95, Gliwice 1985.

Recenzent: doc. dr inż. Maria Jastrzębska

Wpłynęło do redakcji dnia 2 maja 1984 r.

АКТИВНЫЙ ФИЛЬТР RC С ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПЕРЕКЛЮЧАТЕЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ

Р е з ю м е

В статье представлен метод осуществления характеристики изменяющей цифровым сигналом, через переключение параллельной структуры фильтра, управляемыми импульсами с переменным коэффициентом заполнения. Показано примерное осуществление полосно-пропускающего фильтра с регулированной шириной пропускания.

ACTIVE RC FILTERS WITH SWITCHED PARALLEL STRUCTURE

S u m m a r y

A realization method of the digitaly changed transfer function by the means of switching the parallel filter structure with the use of varying time duration pulses is presented Band-pass filter with controlled band width has been shown as an example.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 95 Nr kol. 820

Zygmunt GARCZARCZYK

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechnika Śląska

ANALIZA NUMERYCZNA PEWNEJ KLASY NIELINIOWYCH OBWODÓW REZYSTANCYJNYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono metodę iteracyjną analizy rezystancyjnych obwodów opisywanych równaniami węzłowymi, która jest zbieżna globalnie.

1. Wstęp

Równanie

$$f(x) \overset{df}{=} Ag(A^t x + E) - AJ = 0 \tag{1}$$

przedstawia dla $n+1$ węzłowego obwodu zawierającego m gałęzi, układ n nieliniowych równań węzłowych z n niewiadomymi potencjałami węzłowymi x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. W równaniu tym A - oznacza zredukowaną macierz incydencji, E - wektor stałych wymuszeń napięciowych, J - wektor stałych wymuszeń prądowych, a $g(\hat{u}) = \left[g_1(\hat{u}_1), g_2(\hat{u}_2), \ldots, g_m(\hat{u}_m)\right]^t$ wektor charakterystyk prądowo-napięciowych rezystorów nieliniowych i liniowych. Przy tym $\hat{u} = A^t x + E$ - oznacza wektor napięć na rezystorach.

Zastosowanie algorytmu Newtona-Raphsona do rozwiązania równania (1) prowadzi do znanej metody iteracyjnej, w której obwód nieliniowy jest przekształcony w obwód liniowy rozwiązywany metodą potencjałów węzłowych [1], [2]. W metodzie tej istnieje jednak problem zbieżności. Jest ona bowiem zbieżna jedynie lokalnie tzn., że przybliżenie początkowe $x^{(o)}$ winno być bliskie właściwemu rozwiązaniu x^* równania (1), aby uzyskany ciąg przybliżeń $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ był zbieżny do x^*.

Wprawdzie twierdzenie Newtona-Raphsona-Kantorowicza ustala jak bliskie właściwemu rozwiązaniu musi być przybliżenie początkowe, aby zapewnić zbieżność, ale rezultat ten ma głównie znaczenie teoretyczne, gdyż jego wykorzystanie w praktyce nie jest łatwe, jeśli wręcz niemożliwe.

Pozostaje więc arbitralny wybór przybliżenia początkowego w oparciu o znajomość charakterystyk elementów nieliniowych. W praktyce prowadzi to do wielokrotnych prób, aż zostanie uzyskane rozwiązanie.

Przedstawione w pracy podejście do rozwiązania równania (1) oparte o znaną w analizie numerycznej metodę kontynuacji [3], [4], [5], pozwala tak zmodyfikować tę metodę analizy obwodu, by była ona zbieżna globalnie, tj. dla dowolnego przybliżenia początkowego $x^{(o)}$.

W oparciu o tę samą ideę w pracy [6] była prezentowana metoda numerycznego rozwiązania równania obwodu, w którym niewiadomymi są napięcia lub prądy rezystorów nieliniowych.

2. Metoda kontynuacji

Metoda kontynuacji jest na ogół zbieżna globalnie [5]. Idea tej metody jest następująca:
załóżmy, że

$$H(x,\lambda) = 0 \quad \text{dla } \lambda \in \langle 0,\ 1 \rangle \tag{2}$$

jest rodziną równań nieliniowych zależnych od parametru λ taką, że

$$f(x) = H(x,1) \tag{3}$$

Istotne przy tym jest by układ równań

$$H(x,0) = 0 \tag{4}$$

był łatwy do rozwiązania.

Funkcja H nazywana jest często homotopię.
Jeżeli pierwiastki $x(\lambda)$ równań (2) zależą od λ w sposób ciągły, to opisują one pewną krzywą łączącą punkt $x(0)$ z zerem $x(1)$ układu (1). Rozwiązanie $x = x(\lambda)$ wyznacza się dla ciągu rosnącego wartości $\lambda_o = 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s = 1$ stosując jakąś szybko zbieżną metodę iteracyjną (np. metodę Newtona-Raphsona) do kolejnych równań

$$H(x,\lambda_i) = 0 \quad i = 0,1,2,\ldots,s \tag{5}$$

z na ogół dobrym przybliżeniem początkowym $x(\lambda_i)^{(o)}$ zera $x(\lambda_i)$. Przybliżenie to otrzymuje się z poprzednich wyników

$$x(\lambda_i)^{(o)} = x(\lambda_{i-1}) \tag{6}$$

Rodzinę równań (2) tworzy się przyjmując jako homotopię następujące wyrażenie:

$$H(x,\lambda) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f_o(x) \tag{7}$$

gdzie rozwiązanie układu

$$H(x,0) = f_o(x) \tag{8}$$

jest łatwe do uzyskania.

Przykład 1

Opisaną metodę kontynuacji zastosowano do rozwiązania układu równań

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x_1,x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - 74 = 0 \\ f_2(x_1,x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 73 = 0 \end{cases}$$

który posiada cztery rozwiązania: $[3, 5]$, $[-3, -5]$, $[8, -5]$, $[-8, 5]$.
Przyjęto homotopię postaci (7) z funkcją

$$f_o(x) = \begin{cases} x_1 - a = 0 \\ x_2 - b = 0 \end{cases}$$

gdzie a, b dowolne liczby stanowiące rozwiązanie układu $f_o(x) = 0$. Stosując algorytm Newtona-Raphsona do rozwiązania równania typu (5) uzyskano, przyjmując kolejno różne stałe a, b, zbieżność do każdego z rozwiązań.
Zastosowanie tego samego algorytmu bezpośrednio do układu $f(x) = 0$ zakończyło się niepowodzeniem dla przybliżenia początkowego $x^{(o)} = [0, 0]$.

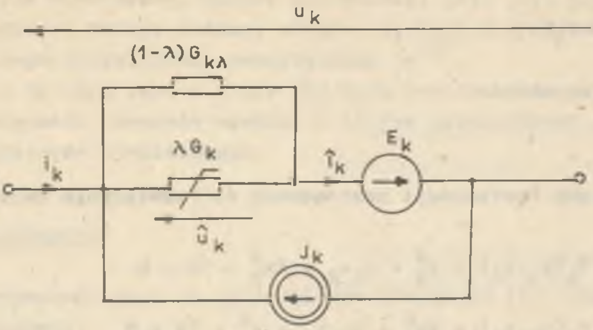
3. Homotopia równań węzłowych

Niech każdy z n gałęzi rozważanego obwodu posiada strukturę pokazaną na rys. 1, gdzie G_k oznacza rezystor nieliniowy lub liniowy opisany zależnością

$$i_k = g_k(\hat{U}_k) \qquad k = 1,2,\dots,m \tag{9}$$

natomiast $G_{k\lambda}$ oznacza konduktancję rezystora liniowego. Pokażemy, że jeśli $\lambda \in <0,1>$ to równanie węzłowe tego obwodu tworzy homotopię postaci (7).
Uwzględniając przyjętą strukturę gałęzi obwodu otrzymuje się równania

$$u = \hat{U} - E \tag{10}$$



Rys. 1

$$i = \hat{i} - J \tag{11}$$

gdzie:

u, i - oznaczają wektory napięć i prądów gałęzi,
$\hat{u}$, $\hat{i}$ - wektory napięć i prądów elementów rezystancyjnych.

Ponieważ

$$\hat{i} = \lambda g(\hat{u}) + (1-\lambda)G_{\lambda}\hat{u} \tag{12}$$

gdzie

$$G_{\lambda} = \mathrm{diag}\left[G_{1_{\lambda}}, G_{2_{\lambda}}, \ldots, G_{m\lambda}\right]$$

to na podstawie I prawa Kirchhoffa

$$Ai = 0 \tag{13}$$

oraz wykorzystując transformację węzłową

$$u = A^t x \tag{14}$$

można napisać

$$A\left\{\lambda g(A^t x + E) + (1-\lambda)G_{\lambda}(A^t x + E) - J\right\} = 0 \tag{14}$$

Stąd otrzymuje się następujące równanie węzłowe

$$H(x,\lambda) = \lambda\left\{Ag(A^t x + E) - AJ\right\} + (1-\lambda)\left\{AG_{\lambda}A^t x - A(J - G_{\lambda}E)\right\} = 0 \tag{15}$$

które jak widać jest homotopią postaci (7)

Przy tym wyznaczenie rozwiązania układu

$$f_0(x) = AG_\lambda A^t x - A(J-G_\lambda E) \tag{16}$$

jest szczególnie proste, gdyż jest to układ równań liniowych.

4. Dyskretny obwód równoważny

Algorytm Newtona-Raphsona dla układu równań (15) ma postać:

$$J(x^{(j)},\lambda)x^{(j+1)} = J(x^{(j)},\lambda)x^{(j)} - H(x^{(j)},\lambda) \tag{17}$$

Macierz Jacobiego funkcji $H(x,\lambda)$ jest następująca:

$$J(x^{(j)},\lambda) = A\left[\lambda G^{(j)} + (1-\lambda)G_\lambda\right]A^t \tag{18}$$

gdzie $G^{(j)}$ oznacza diagonalną macierz dynamicznych konduktancji rezystorów nieliniowych dla napięć na tych rezystorach w j-tej iteracji.

Uwzględniając zależność (18) można przekształcić równanie (17) do postaci:

$$A\left[\lambda G^{(j)} + (1-\lambda)G_\lambda\right]A^t x^{(j+1)} =$$
$$= A\left[J^{(j)} - \lambda G^{(j)}E + (1-\lambda)(J-G_\lambda E)\right] \quad \text{dla} \quad \lambda \in \langle 0,1 \rangle \tag{19}$$

gdzie

$$J^{(j)} \overset{df}{=} \lambda\left[J - J_Q^{(j)} + G^{(j)}U_Q^{(j)}\right] \tag{20}$$

$$U_Q^{(j)} \overset{df}{=} A^t x^{(j)} + E \tag{21}$$

$$J_Q^{(j)} \overset{df}{=} g(U_Q^{(j)}) \tag{22}$$

Równania (19) stanowią zmodyfikowaną postać równań węzłowych tzw. dyskretnego obwodu równoważnego [2].
Rozwiązywanie tych równań rozpoczyna się od rozwiązania układu równań liniowych reprezentujących dla $\lambda = 0$ początkowy obwód liniowy:

$$AG_\lambda A^t x^{(j+1)} = A(J-G_\lambda E) \tag{23}$$

Dla $0 < \lambda < 1$ rozwiązywane są równania obwodów, w których konduktancje liniowe gałęzi są stopniowo zmniejszane i zastępowane konduktancjami nieliniowymi.

Dla $\lambda = 1$ rozwiązuje się układ równań

$$AG^{(j)}A^{t}x^{(j+1)} = A(J^{(j)} - G^{(j)}E) \tag{24}$$

stanowiący algorytm Newtona-Raphsona dla równania (1).

Postępowanie to pozwala na otrzymanie dobrego przybliżenia początkowego $x(1)^{(o)}$ dla równania (24), co zapewnia zbieżność do właściwego rozwiązania x^* równania (1).

5. Program komputerowy

Równanie (19) stanowiło podstawę do napisania programu komputerowego analizy nieliniowych obwodów rezystancyjnych opisanych równaniem węzłowym (1). Tekst programu napisanego w języku Fortran i realizowanego na minikomputerze MERA 60 podany jest w DODATKU.

W programie tym użytkownik może wielokrotnie zadawać wybrane wartości konduktancji początkowego obwodu liniowego oraz przyrostu parametru λ. Przedstawiona wersja programu przystosowana jest do pobierania informacji dotyczących obwodu ze zbioru wcześniej przygotowanego.

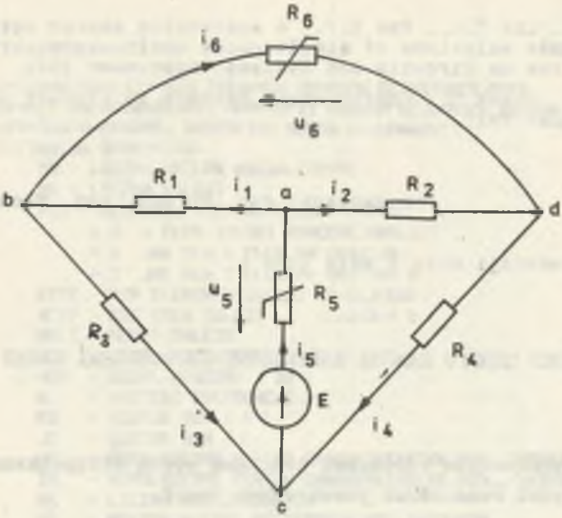
Przykład 2

Wykorzystując napisany program dokonano obliczeń dla obwodu pokazanego na rys. 2. Przyjęto, że $E = 11$ V, $R_1 = R_4 = 2\Omega$, $R_2 = R_3 = 8\Omega$. Założono przy tym, że charakterystyki rezystorów liniowych są określone dla zakresu napięć <-20 V, 20 V$>$. Charakterystyki kondukcyjne rezystorów nieliniowych R_5 i R_6 określone zostały tabelami

u_5	0	1	2	3	4	5	V
i_5	0	0,25	0,75	1,25	2	3,25	A

u_6	0	1	2	3	4	5	V
i_6	0	1	1,5	1,75	1,95	2	A

Przyjęto, że konduktancje początkowe obwodu liniowego mają wartości: $G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = G_6 = 0{,}25$ S, $\hat{G}_5 = 1$ S. Wybierając przyrost parametru $\Delta\lambda = 0{,}5$ uzyskano właściwe rozwiązanie równe $x_a = 4$ V, $x_b = 1$ V, $x_c = -3$ V, $x_d = 0$.



Rys. 2

6. Uwagi końcowe

Przedstawiona metoda analizy jak łatwo spostrzec może być również stosowana w przypadku obwodów nieliniowych zawierających liniowe jak i nieliniowe źródła prądowe sterowane napięciem. W tym przypadku macierz $G^{(j)}$ w równaniu (19) nie będzie już diagonalna.

Konduktancje liniowe $G_{1\lambda}, G_{2\lambda}, \ldots, G_{m\lambda}$ mogą stanowić zbiór dowolnych liczb rzeczywistych. Oznacza to, że dla różnych zbiorów ich wartości otrzymuje się różne przybliżenia rozwiązania $x(0)$. Fakt ten można by wykorzystać przy opracowywaniu procedury znajdowania wszystkich rozwiązań równania (1) [7].

LITERATURA

[1] Calahan D.A.: Projektowania układów elektronicznych za pomocą maszyny cyfrowej. WNT, Warszawa 1978.

[2] Chua L.O., Lin P.M.: Komputerowa analiza układów elektronicznych. WNT, Warszawa 1981.

[3] Dahlquist G., Bjorck A.: Metody numeryczne. PWN, Warszawa 1983.

[4] Dryja M., Jankowscy J.M.: Przegląd metod i algorytmów numerycznych. WNT, Warszawa 1982.

[5] Ortega J.M., Rheinboldt W.C.: Iterative solution of nonlinear equations in several variables. Academic Press, New York 1970.

[6] Tadeusiewicz M.: Analiza pewnej klasy obwodów rezystancyjnych w przestrzeni m_n. Rozprawy Elektrotechniczne, 1973, z. 2.

[7] Chao K.S., Lin D.K., Pan C.T.: A systematic search method for obtaining multiple solutions of simultaneous nonlinear equations, IEEE Transactions on Circuits and Systems, September 1975.

[8] Chao K.S., Saeks S.: Continuation Methods in Circuit Analysis. Proc. IEEE, August 1977.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Michał Tadeusiewicz

Wpłynęło do redakcji dnia 2 maja 1984 r.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

Р е з ю м е

В статье представлен глобально сходимый метод итерративного решения узловых уравнений нелинейных резистивных цепей.

NUMERICAL ANALYSIS OF A CLASS OF NONLINEAR RESISTIVE NETWORKS

S u m m a r y

In the paper globally convergent iterative method of analysis of nonlinear resistive networks described by nodal equations has been presented.

```
FORTRAN IV      V02.5                                          PAGE 001

        C... PROGRAM ANALIZY NIELINIOWYCH OBWODOW REZYSTANCYJNYCH
        C... OPARTY NA ROZWIAZANIU HOMOTOPII ROWNAN WEZLOWYCH METODA
        C... NEWTONA-RAPHSONA. DYSKRETNY OBWOD ROWNOWAZNY
        C... DEFINICJA ZMIENNYCH
        C...    NW - LICZBA WEZLOW NIEZALEZNYCH
        C...    NG - LICZBA GALEZI
        C...    MIX - WSKAZNIK TYPU WYDRUKOW
        C...          = 0  V PLUS WYNIKI KONCOWE ANALIZY
        C...          = 1  JAK DLA 0 PLUS GN ORAZ JN
        C...          = 2  JAK DLA 1 PLUS A, UQ, JQ, G
        C...    ETYP - TYP ELEMENTU GALEZI (G,E,J,EX)
        C...    NTYP - KOD TYPU GALEZI      (1,2,3,4 )
        C...    GALZ - NUMER GALEZI
        C...    NOD  - WEZEL POCZATKOWY ( OD )
        C...    NDO  - WEZEL KONCOWY ( DO )
        C...    A    - MACIERZ INCYDENCJI
        C...    ES   - WEKTOR SEM ( E )
        C...    JS   - WEKTOR SPM (J)
        C...    UG   - WSPOLRZEDNE NAPIEC CHARAKTERYSTYK NIEL.(WIERSZAMI)
        C...    IG   - WSPOLRZEDNE PRADOW CHARAKTERYSTYK NIEL.(WIERSZAMI)
        C...    NK   - LICZBA WSPOLRZEDNYCH
        C...    UQ   - WEKTOR NAPIEC REZYSTOROW NIELINIOWYCH
        C...    JQ   - WEKTOR PRADOW REZYSTOROW NIELINIOWYCH
        C...    G    - MACIERZ ROZNICZKOWYCH KONDUKTANCJI GALEZIOWYCH
        C...    GN   - MACIERZ KONDUKTANCJI WEZLOWYCH
        C...    JN   - WEKTOR WEZLOWYCH WYDAJNOSCI PRADOWYCH
        C...    V,VN - WEKTOR POTENCJALOW WEZLOWYCH
        C...    U1   - WEKTOR NAPIEC GALEZI
        C...    JG   - WEKTOR PRADOW GALEZI
        C...    X    - POMOCNICZY WEKTOR NAPIEC CHARAKTERYSTYKI NIEL.
        C...    Y    - POMOCNICZY WEKTOR PRADOW CHARAKTERYSTYKI NIEL.
        C...    ND   - LICZBA WSPOLRZEDNYCH WEKTORA X I Y
        C...    T    - PARAMETR HOMOTOPII
        C...    DT   - PRZYROST PARAMETRU
        C...    GT   - WEKTOR KONDUKTANCJI POCZATKOWEGO OBWODU LINIOWEGO
        C... DANE WEJSCIOWE
        C...    REKORD 0 - NW, NG, MIX
        C...    REKORD 1 - ETYP, GALZ, NOD, NDO
        C...    REKORD 2 - ND, X(1), Y(1), X(2), Y(2),...,X(ND), Y(ND)
        C...       ALBO - ES(GALZ)
        C...        LUB - JS(GALZ)
        C...    ZESTAW REKORDOW 1 I 2 NALEZY POWTORZYC TYLE RAZY
        C...    ILE JEST ELEMENTOW (G,E,J) W OBWODZIE
        C... DANE POCZATKOWE
        C...    REKORD 0 - V(1), V(2),...,V(NW)
        C... UWAGA: DANE WEJSCIOWE KONCZY REKORD Z 'ELEMENTEM' EX.
        C...        WEZEL ODNIESIENIA WINIEN MIEC NUMER 0.
        C...        CHARAKTERYSTYKI REZYSTOROW LINIOWYCH SA
        C...        ZADAWANE PRZEZ TRZY PUNKTY ( U, J(U) ).
0001          PROGRAM ANOR
0002          REAL JS,JN,J1,IG,JQ,JG,JW
0003          INTEGER ETYP,GALZ
0004          DIMENSION NTYP(4),A(10,20),ES(20),JS(20),J1(20),G(20,20),
             *GN(10,10),G1(20,10),JN(10),V(10),X(10),Y(10),
```

```
FORTRAN IV      V02.5                                                  PAGE 002
         $UQ(20),U1(20),JQ(20),VN(10),JG(20),GT(20)
          COMMON UG(20,10),IG(20,10),NK(20)
          DATA A/200*0./,ES/20*0./,JS/20*0./,NTYP(1),NTYP(2),
         *NTYP(3),NTYP(4)/'G ','E ','J ','EX'/
          OPEN(UNIT=2,NAME='DX1:FTN2.DAT',TYPE='OLD')
          WRITE(7,1000)
    1000  FORMAT(//' DANE'//)
          READ(2,10) NW,NG,MIX
      10  FORMAT(3I3)
          WRITE(7,20) NW,NG
      20  FORMAT(5X,' ANALIZA NIELINIOWEGO OBWODU REZYSTANCYJNEGO'/5X,
         *' METODA POTECJALOW WEZLOWYCH - DYSKRETNY OBWOD ROWNOWAZNY'//
         $5X,' LICZBA WEZLOW = ',I2,5X,'LICZBA GALEZI = ',I2//)
C... CZYTANIE I WYDRUK DANYCH
      30  READ(2,40) ETYP,GALZ,NOD,NDO
      40  FORMAT(A2,3I2)
          DO 50 I=1,4
          IF(ETYP.EQ.NTYP(I)) GO TO 70
      50  CONTINUE
          WRITE(7,60) ETYP
      60  FORMAT(/5X,A2,' *NIEWLASCIWY TYP ELEMENTU*'/)
          GO TO 30
      70  IF(I-4) 100,80,80
      80  WRITE(7,90)
      90  FORMAT(//5X,' KONIEC DANYCH'//' PUNKT STARTOWY'/)
     100  GO TO (110,150,180,205),I
     110  READ(2,120) ND,(X(I),Y(I),I=1,ND)
     120  FORMAT(I3,20F9.3)
          NK(GALZ)=ND
          DO 130 I=1,ND
          UG(GALZ,I)=X(I)
     130  IG(GALZ,I)=Y(I)
          WRITE(7,140) ETYP,GALZ,NOD,NDO,(X(I),Y(I),I=1,ND)
     140  FORMAT(/5X,A2,'   GALAZ',I3,'  OD WEZLA',I3,'  DO WEZLA',I3,
         *6X,'U',10X,'J'/30(47X,E10.3,1X,E10.3/))
          GO TO 200
     150  READ(2,160) WARTOSC
     160  FORMAT(F6.2)
          ES(GALZ)=WARTOSC
          WRITE(7,170) ETYP,GALZ,WARTOSC
     170  FORMAT(5X,A2,'   GALAZ',I3,5X,'WARTOSC=',E10.3/)
          GO TO 30
     180  READ(2,190) WARTOSC
     190  FORMAT(F6.2)
          JS(GALZ)=WARTOSC
          WRITE(7,170) ETYP,GALZ,WARTOSC
          GO TO 30
     200  IF(NOD.GT.0) A(NOD,GALZ)=1.0
          IF(NDO.GT.0) A(NDO,GALZ)=-1.0
          GO TO 30
C... PUNKT STARTOWY
     205  CLOSE(UNIT=2)
     210  READ(5,215) DT,(GT(I),I=1,NG)
     215  FORMAT(21F10.5)
```

```
FORTRAN IV      V02.5                                          PAGE 003

          T=0.
      220 L=0
          WRITE(7,225) T
      225 FORMAT(' PARAMETR = ',F4.2//)
      230 L=L+1
          IF(T.EQ.0.) GO TO 265
C... ITERACJA L - TA
C... OBLICZANIE WEKTORA NAPIEC REZYSTOROW UQ=AT*V+ES
          DO 260 I=1,NG
          U1(I)=0.
          DO 250 J=1,NW
      250 U1(I)=U1(I)+A(J,I)*V(J)
      260 UQ(I)=U1(I)+ES(I)
C... OBLICZANIE WEKTORA PRADOW REZYSTOROW NIELINIOWYCH JQ ORAZ
C... MACIERZY ROZNICZKOWYCH KONDUKTANCJI GALEZIOWYCH
      265 DO 280 I=1,NG
          DO 270 J=1,NG
      270 G(I,J)=0.
          IF(T.EQ.0.) GO TO 280
          IGAR=I
          CALL FUNC(IGAR,UQ(I),JQ(I),G(I,I),FIX,L)
          IF(FIX.EQ.0.) GO TO 210
      280 CONTINUE
C... WYDRUKI KONTROLNE
          IF(MIX.LE.1) GO TO 380
          WRITE(7,290)
      290 FORMAT(///5X,' MACIERZ INCYDENCJI'/)
          DO 300 I=1,NW
      300 WRITE(7,310) (A(I,J),J=1,NG)
      310 FORMAT(1X,20F6.1)
          WRITE(7,320)
      320 FORMAT(//5X,' WEKTORY:',5X,'UQ',6X,'JQ'/)
          DO 330 I=1,NG
      330 WRITE(7,340) I,UQ(I),JQ(I)
      340 FORMAT(12X,I2,2(2X,F6.2))
          WRITE(7,350)
      350 FORMAT(//' MACIERZ ROZNICZKOWYCH KONDUKTANCJI GALEZIOWYCH'/)
          DO 360 I=1,NG
      360 WRITE(7,370) (G(I,J),J=1,NG)
      370 FORMAT(1X,15F8.2)
C... FORMOWANIE ROWNAN WEZLOWYCH
C... MACIERZ KONDUKTANCJI WEZLOWYCH GN=A*G*AT
      380 DO 385 I=1,NG
      385 G(I,I)=T*G(I,I)+(1-T)*GT(I)
          DO 390 J=1,NW
          DO 390 I=1,NG
          G1(I,J)=0.
          DO 390 K=1,NG
      390 G1(I,J)=G1(I,J)+G(I,K)*A(J,K)
          DO 400 I=1,NW
          DO 400 J=1,NW
          GN(I,J)=0.
          DO 400 K=1,NG
      400 GN(I,J)=GN(I,J)+A(I,K)*G1(K,J)
```

```
FORTRAN IV      V02.5                                          PAGE 004

         IF(MIX.LT.1) GO TO 440
         WRITE(7,410)
     410 FORMAT(//5X,' MACIERZ KONDUKTANCJI WEZLOWYCH'/)
         DO 420 I=1,NW
     420 WRITE(7,430) (GN(I,J),J=1,NW)
     430 FORMAT(1X,10E12.3)
   C... WEKTOR WEZLOWYCH WYDAJNOSCI PRADOWYCH JN=A*(JS-JQ+G*AT*V)
     440 DO 460 I=1,NG
         J1(I)=0.
         IF(T.EQ.0.) GO TO 455
         DO 450 J=1,NW
     450 J1(I)=J1(I)+G1(I,J)*V(J)
         J1(I)=JS(I)-T*(JQ(I)-J1(I))
     455 J1(I)=J1(I)-(1-T)*GT(I)*ES(I)
     460 CONTINUE
         DO 470 I=1,NW
         JN(I)=0.
         DO 470 J=1,NG
     470 JN(I)=JN(I)+A(I,J)*J1(J)
         IF(MIX.LT.1) GO TO 510
         WRITE(7,480)
     480 FORMAT(//5X,' WEKTOR WEZLOWYCH WYDAJNOSCI PRADOWYCH'/)
         DO 490 I=1,NW
     490 WRITE(7,500) JN(I)
     500 FORMAT(1X,E12.3)
   C... OBLICZANIE POTENCJALOW WEZLOWYCH - METODA ELIMINACJI GAUSSA
     510 CALL GAUSS(NW,GN,JN,DIX)
         IF(DIX.EQ.0.) GO TO 210
         TOL=1.E-4
         IF(T.EQ.0.) GO TO 530
         DO 520 I=1,NW
         VN(I)=JN(I)
         IF(ABS(V(I)-VN(I))-TOL) 520,520,530
     520 CONTINUE
         GO TO 550
   C... NASTEPNA ITERACJA
     530 DO 540 I=1,NW
     540 V(I)=JN(I)
         IF(T.GT.0.) GO TO 230
     550 WRITE(7,555) L,(I,VN(I),I=1,NW)
     555 FORMAT(' ITERACJA=',I3,'  WEZEL',',   POTENCJAL'/10(16X,I2,3X,
        *E13.6/))
         T=T+DT
         IF(T.GT.1.) GO TO 560
         GO TO 220
   C... WYNIKI ANALIZY - PRADY I NAPIECIA GALEZI OBWODU
     560 DO 565 I=1,NG
         U1(I)=0.
         DO 565 J=1,NW
     565 U1(I)=U1(I)+A(J,I)*V(J)
         DO 570 I=1,NG
     570 JG(I)=JQ(I)-JS(I)
         DO 580 I=1,NG
     580 WRITE(7,590) I,U1(I),JG(I)
```

```
FORTRAN IV      V02.5                                                  PAGE 005

      590 FORMAT(6X,' GALAZ ',I2,3X,'NAPIECIE=',E10.3,3X,'PRAD=',E10.3/)
C... SPRAWDZENIE WYNIKOW ANALIZY - I PRAWO KIRCHHOFFA
          DO 620 I=1,NW
          JW=0.
          DO 600 J=1,NG
      600 JW=JW+A(I,J)*JG(J)
          WRITE(7,610) I,JW
      610 FORMAT(' WEZEL ',I2,'  SUMA PRADOW=',F8.5)
      620 CONTINUE
      630 WRITE(7,640)
      640 FORMAT(///5X,' KONIEC ANALIZY'///)
          STOP
          END
```

```
FORTRAN IV      V02.5                                           PAGE 001

      C... PODPROGRAM OBLICZANIA PRADOW I ROZNICZKOWYCH KONDUKTANCJI
      C... REZYSTOROW NIELINIOWYCH O CHARAKTERYSTYKACH J(U) INTERPOLOWANYCH
      C... NATURALNYMI FUNKCJAMI SKLEJANYMI STOPNIA 3  -
            SUBROUTINE FUNC(K,Z,S,DS,FIX,IER)
            REAL M,IG
            DIMENSION A(10,20),B(10,20),C(10,20),D(10,20),
           *          H(10),W(10),U(10),V(10),M(10,10)
            COMMON UG(20,10),IG(20,10),NK(20)
            DATA M/900*0./
            N=NK(K)
            IF(IER.GT.1) GO TO 80
      C... WYZNACZANIE WSPOLCZYNNIKOW FUNKCJI SKLEJANYCH
            N1=N-1
            DO 10 I=1,N1
         10 H(I)=UG(K,I+1)-UG(K,I)
            N2=N-2
            DO 20 I=1,N2
            W(I)=H(I+1)/(H(I)+H(I+1))
         20 U(I)=1.-W(I)
            DO 30 I=1,N2
         30 V(I)=3.0*((IG(K,I+2)-IG(K,I+1))/H(I+1)-(IG(K,I+1)-IG(K,I))/
           *     H(I))/(H(I)+H(I+1))
            DO 50 I=1,N2
            IF(I.GT.(N-3)) GO TO 40
            M(I,I+1)=W(I)
            M(I+1,I)=U(I+1)
         40 M(I,I)=2.0
         50 CONTINUE
            CALL GAUSS(N2,M,V,DIX)
            C(1,K)=0.
            C(N,K)=0.
            DO 60 I=1,N2
         60 C(I+1,K)=V(I)
            DO 70 I=1,N1
            A(I,K)=IG(K,I)
            B(I,K)=(IG(K,I+1)-IG(K,I))/H(I)-H(I)*(C(I+1,K)+2.*C(I,K))/3.
         70 D(I,K)=(C(I+1,K)-C(I,K))/H(I)/3.
      C... WYZNACZENIE PRZEDZIALU W KTORYM LEZY Z
         80 IF(Z-UG(K,1)) 120,90,100
         90 I=1
            GO TO 170
        100 IF(Z-UG(K,N)) 140,110,120
        110 I=N-1
            GO TO 170
        120 WRITE(7,130) Z,K
        130 FORMAT(' *ZMIENNA NIEZALEZNA=',E10.3,' Z GALEZI',I3,
           *  ' NIE NALEZY DO DZIEDZINY*'//' ZMIENIC PUNKT STARTOWY'/)
            FIX=0.
            RETURN
        140 DO 150 I=2,N
            IF(Z-UG(K,I)) 160,160,150
        150 CONTINUE
        160 I=I-1
      C... OBLICZANIE WARTOSCI FUNKCJI S(Z) I POCHODNEJ DS(Z)
```

```
FORTRAN IV      V02.5                                        PAGE 002

0048     170 S=A(I,K)+(Z-UG(K,I))*(B(I,K)+(Z-UG(K,I))*
            *  (C(I,K)+(Z-UG(K,I))*D(I,K)))
0049         DS=B(I,K)+(Z-UG(K,I))*(2.*C(I,K)+(Z-UG(K,I))*3.*D(I,K))
0050         FIX=1.
0051         RETURN
0052         END
```

```
FORTRAN IV      V02.5                                          PAGE 001

      C... PODPROGRAM ROZWIAZYWANIA UKLADU ROWNAN LINIOWYCH
            SUBROUTINE GAUSS(N,A,B,DIX)
            DIMENSION A(10,10),B(10)
            N1=N-1
            DO 100 I=1,N1
            P=0.
            DO 20 K=I,N
            IF(ABS(P)-ABS(A(K,I))) 10,20,20
         10 P=A(K,I)
            L=K
         20 CONTINUE
            IF(ABS(P)-0.) 30,30,50
         30 WRITE(7,40)
         40 FORMAT(/10X,'* OSOBLIWY UKLAD ROWNAN *'/
           *' ZMIENIC PUNKT STARTOWY'/)
            DIX=0.
            RETURN
         50 DO 60 J=1,N
            SAVE=A(I,J)
            A(I,J)=A(L,J)
            A(L,J)=SAVE
         60 CONTINUE
            SAVE=B(I)
            B(I)=B(L)
            B(L)=SAVE
            KK=I+1
            DO 70 K=KK,N
            A(K,I)=A(K,I)/P
         70 CONTINUE
            DO 90 K=KK,N
            DO 80 JK=KK,N
            A(K,JK)=A(K,JK)-A(K,I)*A(I,JK)
         80 CONTINUE
            B(K)=B(K)-A(K,I)*B(I)
         90 CONTINUE
        100 CONTINUE
            B(N)=B(N)/A(N,N)
            IF(N.EQ.1) GO TO 130
            DO 120 I=1,N1
            IB=N-I
            IC=N
            DO 110 K=1,I
            B(IB)=B(IB)-A(IB,IC)*B(IC)
            IC=IC-1
        110 CONTINUE
            B(IB)=B(IB)/A(IB,IB)
        120 CONTINUE
        130 DIX=1.
            RETURN
            END
```

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 95 Nr kol. 820

Stanisław FRYCZ
Lesław TOPÓR-KAMIŃSKI

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechnika Śląska

PRZEŁĄCZNIKOWO-KONDENSATOROWY UKŁAD MNOŻĄCY

Streszczenie. Przedstawiono klasyfikację analogowych i cyfrowych układów mnożących. Pokazano przykład układu parametrycznego sterowanego cyfrowo oraz opisano model układu mnożącego zbudowanego na bazie aktywnych obwodów przełącznikowo-kondensatorowych.

1. Wprowadzenie

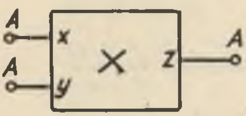
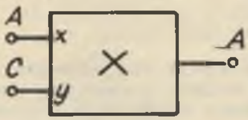
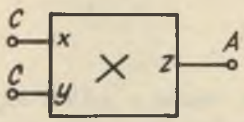
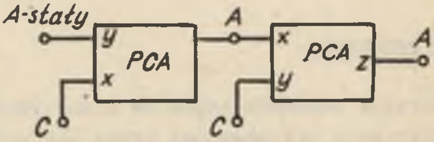
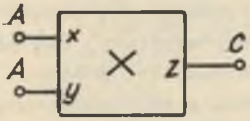
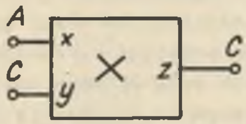
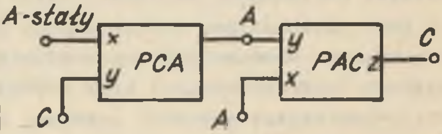
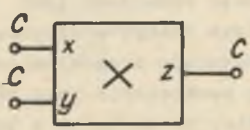
Operacja mnożenia sygnałów elektrycznych, ważna z punktu widzenia przetwarzania przenoszonej przez nie informacji, jest niemożliwa do wykonania w układach liniowych i stacjonarnych.

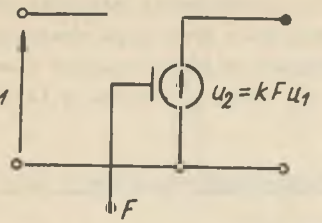
Do realizacji mnożników analogowych wykorzystuje się elementy o pewnych charakterystykach nieliniowych np. logarytmicznych, lub elementy o parametrach sterowanych innym sygnałem np. tranzystor polowy.

W praktyce mnożniki te wykonywane są technikę mikroelektroniczną jako elementy scalone. Mając do dyspozycji analogowy układ mnożący o odpowiedniej klasie dokładności mnożenia, można tworzyć sieci elektryczne o zadanych z góry własnościach nieliniowości lub niestacjonarności czasowej. Obecnie wskutek powszechnego wprowadzenia do praktyki cyfrowych systemów sterujących (mikroprocesory) oraz sterowanych mini układów analogowych (filtry przestrajane cyfrowo) zachodzi konieczność stosowania układów mnożących jednocześnie sygnały analogowe i cyfrowe. Zakładając w ogólności, że każdy układ mnożący posiada dwa wejścia oznaczone jako x i y, jedno wyjście z oraz dzieląc sygnały na dwie klasy: analogowe (A) i cyfrowe (C), można wyróżnić sześć rodzajów mnożników przedstawionych w tablicy 1. Bloki 2 i 4 z tej tablicy znane są powszechnie jako przetworniki w układach analogowo-cyfrowych przy założeniu, że na jedno z ich wejść podawany jest analogowy sygnał wzorcowy.

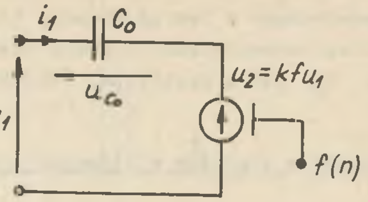
Z punktu widzenia teorii obwodów interesujące znaczenie ma blok PCA, gdyż pozwala on budować sieci analogowe o parametrach sterowanych sygnałem cyfrowym. W najprostszym przypadku PCA może być uważany ze źródło napięciowe sterowane napięciem, którego współczynnik wzmocnienia z kolei

Tablica 1

Lp.	Rodzaje sygnałów zaciskowych	Nazwa lub schemat zastępczy
1.		Analogowy układ mnożący (AUM)
2.		Przetwornik cyfrowo-analogowy (PCA)
3.		
4.		Przetwornik analogowo-cyfrowy (PAC)
5.		
6.		Cyfrowy układ mnożący (CUM)



Rys. 1



Rys. 2

sterowany jest sygnałem cyfrowym (rys. 1). Na bazie tego źródła da się zrealizować przykładowo układ z pojemnością C_o, przedstawiony na rys. 2. W ogólnym przypadku jest on opisany równaniem różnicowo-różniczkowym o postaci:

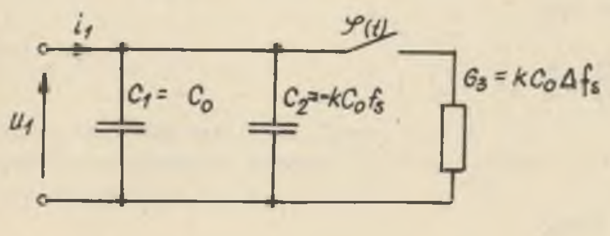
$$i_1(t) = C_o \frac{d}{dt}\left\{u_1(t)\left[1 - kf(n)\right]\right\} \tag{1}$$

Zakładając, że wartość współczynnika f w źródle u_2 jest podtrzymywana przez cały okres kwantyzacji sygnału cyfrowego f(n), można w równaniu (1) zastąpić go funkcją schodkową czasu ciągłego $f_s(t)$. Równanie to wtedy przyjmie postać:

$$i_1 = C_o \frac{du_1}{dt} - kC_o f_s(t)\frac{du_1}{dt} + kC_o u_1 \frac{df_s(t)}{dt} \tag{2}$$

Odpowiadający równaniu (2) schemat zastępczy układu z rys. 2 przedstawiony jest na rys. 3, na którym:

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-n\tau), \qquad \Delta f_s = f(n\tau) - f\left[(n-1)\tau\right] \tag{3}$$

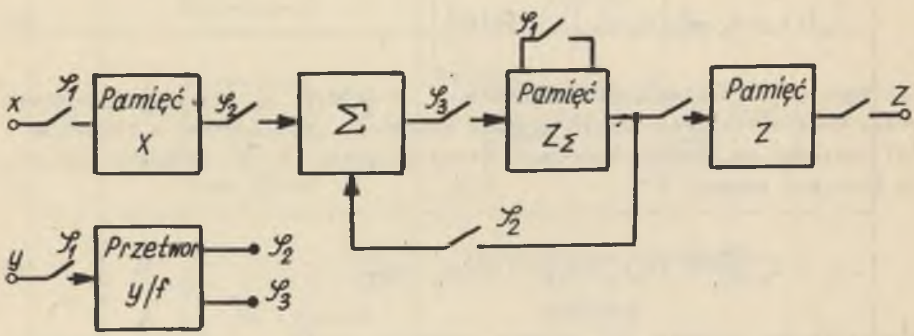


Rys. 3

Z analizy przedstawionego prostego przykładu zastosowania mnożnika analogowo-cyfrowego w teorii obwodów widać, że tworzone przy jego zastosowaniu sieci są parametryczne o typie niestacjonarności zarówno ciągłej (kondensator C_2) jak i dyskretnej (konduktancja G_3 wraz z kluczem $\varphi(t)$).

2. Mnożenie sygnałów w układach przełącznikowo-kondensatorowych (SC)

Przedstawiona dotychczas klasyfikacja układów mnożących zakłada rozpatrywanie tylko dwu rodzajów sygnałów: analogowych i cyfrowych. Istnieją jednak układy, w których sygnały o wartościach ciągłych (dowolna liczba rzeczywista) są przetwarzane dla dyskretnych momentów czasowych (np. układy SC). Na rys. 4 przedstawiony jest schemat blokowy mnożnika, w któ-



Rys. 4

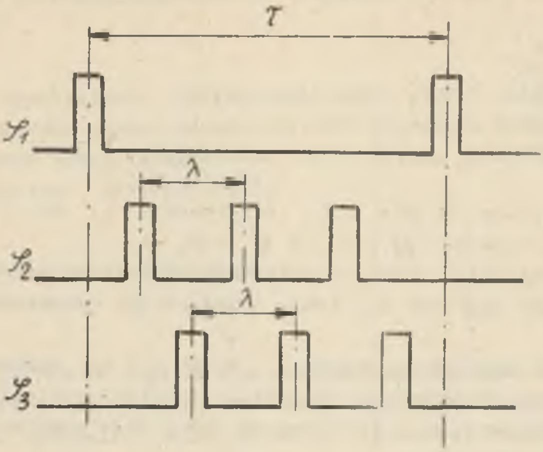
rym proces mnożenia sygnałów x i y dokonywany jest w okresie kwantyzacji τ jednego z nich, przy czym wartość drugiego przetwarzania jest na częstotliwość impulsów sterujących pewnymi przełącznikami. Przebiegi sterujące kluczami przedstawione są na rys. 5.
Odpowiednik układu z rys. 4 zrealizowany przy użyciu przełączników, kondensatorów i wzmacniaczy operacyjnych pokazuje rys. 6.

W układzie tym:

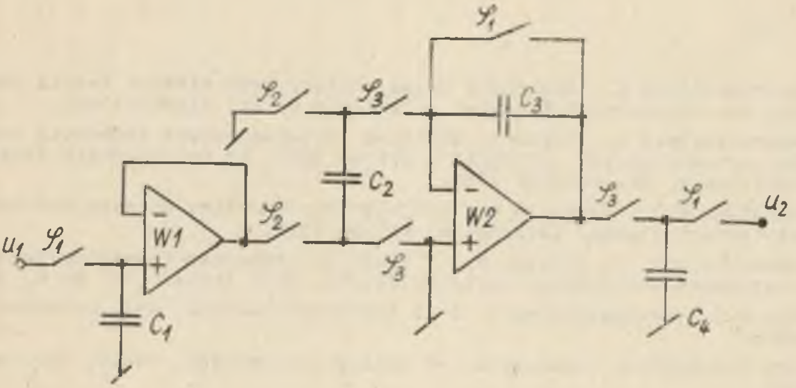
$$u_2 = \frac{C_2}{C_3} \cdot \frac{\tau}{\tau_x} u_1, \tag{4}$$

przy czym:

$$\frac{1}{\tau_x} = f = \alpha u_3. \tag{5}$$



Rys. 5



Rys. 6

zatem dla całego układu zachodzi:

$$u_2 = \frac{C_2}{C_3}\tau\alpha u_1 u_3, \tag{6}$$

przy czym mnożenie jest dwućwiartkowe, gdyż $u_3 > 0$.
Poprzez wprowadzenie dodatkowego sygnału u_4 sterującego częstotliwością funkcji przełączającej φ_1:

$$\frac{1}{\tau} = \beta u_4. \tag{7}$$

otrzymuje się układ mnożąco-dzielący działający zgodnie z relacją:

$$u_2 = k\alpha\beta \frac{u_1 u_3}{u_4}, \tag{8}$$

gdzie

$k = C_2/C_3$.

Aby u_2 było równe 0 dla $\lambda > \tau$ przetwornik u_3 na f powinien wytwarzać w tym przypadku $\varphi_2 = 0$, a $\varphi_3 = \varphi_1$.

W celu uzyskania mnożenia czteroćwiartkowego należałoby wprowadzić dodatkowo detektor znaku sygnału u_3, który przełączałby odpowiednio strukturę całego układu.

Jeżeli założyć ciągłość sygnałów u_1 oraz u_2, np. poprzez zastosowanie na wyjściu ekstrapolatora lub filtra, natomiast częstotliwość f sterować sygnałem cyfrowym, to przedstawiony układ może spełniać rolę przetwornika cyfrowo-analogowego.

LITERATURA

[1] Topór-Kamiński L.: Analogowy układ mnożący jako element teorii obwodów. ZN Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 54, Gliwice 1976.

[2] Topór-Kamiński L.: Elementy składowe rezystancyjnych aktywnych obwodów parametrycznych. III SPETO, Ustroń 1979, ZN Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 68, Gliwice 1980.

[3] Michajłow F.A., Terjajew D., Buljekow W.: Dinamika niestacjonarnych diskretnych sistem. Izd. Nauka, Moskwa 1980.

[4] Viswanathan T.R., Faruque S.M., Vlach J.: Switched-Capacitor Transconductance and Related Building Blocks. IEEE Trans. CAS, No 6, 1980.

[5] Jury E.I.: Przekształcenie Z i jego zastosowanie, WNT, Warszawa 1969.

[6] Data acquisition components and subsystems catalog. Analog Davices, 1980.

Recenzent: doc. dr inż. Maria Jastrzębska

Wpłynęło do redakcji dnia 10 maja 1984 r.

АНАЛОГОВЫЕ И ЦИФРОВЫЕ МНОЖИТЕЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА

Р е з ю м е

В статье представлена классификация аналоговых и цифровых множительных устройств. Показан пример параметрической системы с цифровым управлением а также описана модель множительного устройства, построенного на основе активных ёмкостно- ключевых цепей.

ANALOQUE AND DIGITAL MULTIPLIERS

S u m m a r y

Classification of digital and analoque multipliers has been presented. An example of a time-varying digitally controlled network is shown and a model of the multiplier built of active switched-capacitor elements is described.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 95 Nr kol. 820

Lesław TOPÓR-KAMIŃSKI

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechnika Śląska

POŁĄCZENIA ELEMENTÓW OSOBLIWYCH Z DWÓJNIKAMI KLASYCZNYMI

Streszczenie. Opisano charakterystyczne dla sieci osobliwych reguły rozdzielności połączeń szeregowych i równoległych względem siebie. Przedstawiono sposób określania dwójnika zastępczego przy połączeniach mieszanych elementów osobliwych i klasycznych, ilustrując go analizą podstawowych dwójników układów z przełączanymi kondensatorami.

1. Wstęp

Dwójniki elektryczne, na zaciskach których prąd i napięcie mogą być tylko zerowe lub dowolne w pewnym obszarze wartości, nazywane są elementami osobliwymi.

Do zbioru tych elementów oprócz wprowadzonych przez Carlina i Youla'ę [1] nullatora i noratora, można także zaliczyć przerwę i zwarcie [2], uogólnione komutatory [3], źródła autonomiczne [4] oraz idealne elementy diodowe [5]. Jak pokazano w pracach [3, 4, 5], elementy te można opisywać za pomocą formuł boolowskich, korzystając z transformacji N przekształcającej zbiór R liczb rzeczywistych w zbiór dwuelementowy $\{0,1\}$ według definicji:

$$Nx = \tilde{x} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in R \text{ i jest równe tylko } 0 \\ 1 & \text{gdy } x \in R \text{ i jest dowolne} \end{cases}$$

Formuły te mają ogólną postać:

$$A\,\tilde{i} + B\,\tilde{u} = 0, \tag{2}$$

w których:

A, B - są operatorami logicznymi o wartościach ze zbioru $\{0,1\}$, które mogą być stałe, zależne od czasu lub od obszarów zmienności prądu i napięcia,

"." "+" "=" - są odpowiednio logicznymi działaniami koniunkcji, alternatywy i równoważności.

Natomiast $\vec{i}$, $\vec{u}$ są N-transformacjami prądu i napięcia. Własności opisywanego przez formułę (2) dwójnika osobliwego określone są jednoznacznie przez operatory A i B, gdyż prąd i napięcie mogą przyjmować tylko takie wartości, dla których formuła ta jest spełniona.

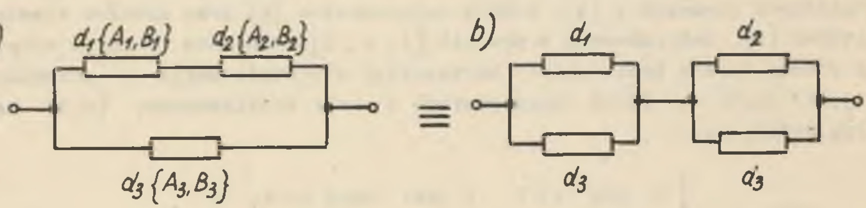
2. Charakterystyczne własności sieci elementów osobliwych

W pracach [3], [4], [5] pokazano sposób poszukiwania dwójników osobliwych równoważnych do danej sieci osobliwej widzianej między dwoma wybranymi węzłami. Sprowadza się on do wykonania odpowiednich działań logicznych na operatorach opisujących poprzez formuły boolowskie typu (2) elementy składowe tej sieci. Dla połączeń szeregowego i równoległego dwóch elementów opisanych parami operatorów $\{A_1, B_1\}$ oraz $\{A_2, B_2\}$, elementy zastępcze opisują odpowiednio formuły:

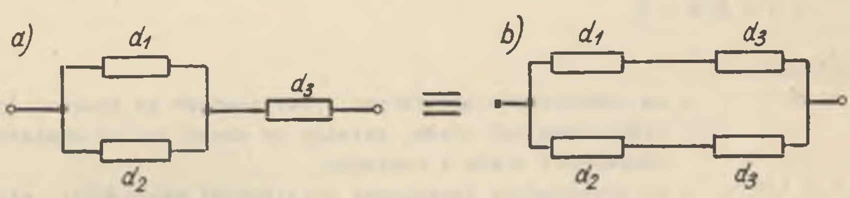
$$(A_1 + A_2)\vec{i} + (B_1 \cdot B_2)\vec{u} = 0 \tag{3}$$

$$(A_1 \cdot A_2)\vec{i} + (B_1 + B_2)\vec{u} = 0 \tag{4}$$

Korzystając z podanych związków można wykazać równoważność tak zwanych połączeń mieszanych trzech dwójników osobliwych przedstawionych na rys. 1 oraz rys. 2.



Rys. 1



Rys. 2

I tak układy a) i b) z rys. 1 opisują odpowiednio formuły boolowskie:

$$\left[(A_1 + A_2)A_3\right]\tilde{i} + \left[B_1B_2 + B_3\right]\tilde{u} = 0 \tag{5}$$

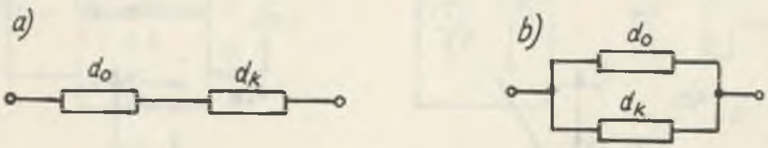
$$\left[A_1A_3 + A_2A_3\right]\tilde{i} + \left[(B_1 + B_3)\ (B_2 + B_3)\right]\tilde{u} = 0 \tag{6}$$

Dwa dwójniki osobliwe można uważać za równoważne jeżeli operatory logiczne w opisujących je formułach boolowskich są sobie równe, co dla relacji (5) i (6) można łatwo pokazać na podstawie reguł rozdzielności dodawania względem mnożenia (operatory A) oraz rozdzielności mnożenia względem dodawania (operatory B), obowiązujących w algebrze Boole'a [7]. Wykazaną równoważność układów a) i b) z rys. 1 można nazwać regułą rozdzielności połączenia szeregowego względem równoległego elementu osobliwego, natomiast równoważność układów z rys. 2 regułą rozdzielności połączenia równoległego względem dwójnika osobliwego szeregowego.

Pokazane reguły rozdzielności nie obowiązują dla połączeń dwójników klasycznych (nieosobliwych), które opisują prawa algebry klasycznej [8].

3. Połączenia elementów osobliwych z dwójnikami klasycznymi

Rozpatrywane będą podstawowe połączenia, przedstawione na rys. 3, dwójnika osobliwego d_o opisanego formułą (2) z dwójnikiem klasycznym d_k opisanym zależnością funkcyjną algebry klasycznej wiążącą jego zmienne zaciskowe.



Rys. 3

W obu przypadkach dwójnik zastępczy może być osobliwym lub klasycznym, przy czym uzależnione to jest wyłącznie od wartości operatorów $\{A, B\}$ opisujących element osobliwy. Aby to rozstrzygnąć należy badać dla połączenia szeregowego wartość relacji (7), a dla równoległego wartość relacji (8), które są funkcjami logicznymi typu iloczyn z zakazem.

$$E_s = \bar{A}\ B \tag{7}$$

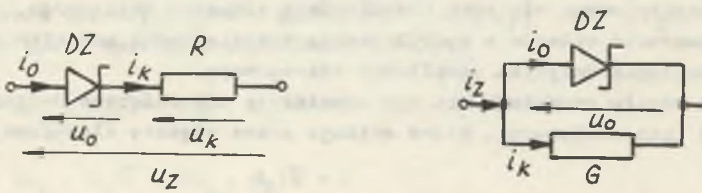
$$E_R = A\bar{B} \tag{8}$$

Wartość operatora E dla odpowiedniego połączenia dwójników poprzez relację (9) decyduje o rodzaju dwójnika zastępczego d_z.

$$d_z = d_o\overline{E} + d_k E \tag{9}$$

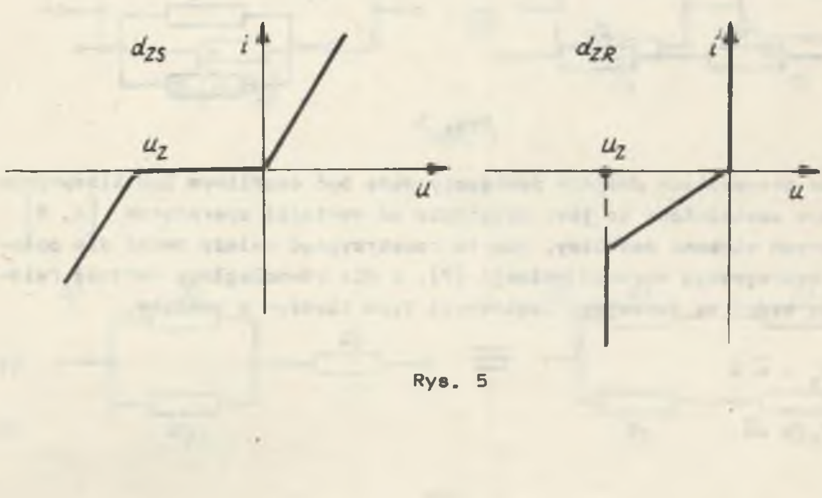
Dla dwójników osobliwych zmiennych w czasie (np. typu komutator) należy relacje (7), (8) i (9) rozpatrywać w odpowiednich przedziałach czasowych, natomiast dla dwójników osobliwych nieliniowych (np. elementy diodowe) dla odpowiednich przedziałów zmiennych zaciskowych.

Przykładem ilustrującym powyższe zależności (7) (8) (9) mogą być układy połączeń idealnej diody Zenera z rezystancją i konduktancją (rys. 4).



Rys. 4

Dla obu połączeń diody Zenera szeregowego i równoległego wartości odpowiednich operatorów według relacji (7) (8) (9) przedstawiono w tablicy 1 oraz zilustrowano zależnościami geometrycznymi na płaszczyźnie i - u, pokazanymi na rys. 5.



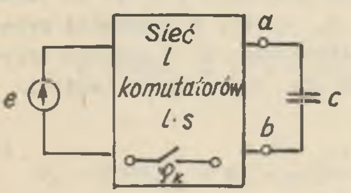
Rys. 5

Tablica 1

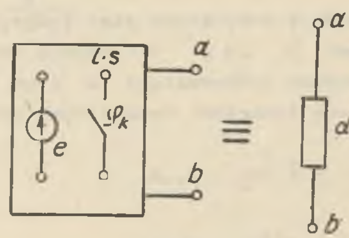
i_o	u_o	A	B	E_S	E_r	d_{ZS}	d_{ZR}
>0	0	0	1	1	0	d_k	d_o
0	$u_Z \div 0$	1	0	0	1	d_o	d_k
<0	U_o	0	1	1	0	d_k	d_o

4. Układy SC jako przykład połączeń elementów klasycznych

Układy SC są typowym przykładem połączeń komutatorów sterowanych określonymi dyskretnymi funkcjami czasu φ, jako elementów osobliwych oraz kondensatorów jako elementów klasycznych.
Modele podstawowych bloków SC można przedstawić ogólnie w postaci schematu podanego na rys. 6, przy czym źródło e reprezentuje zmienny w czasie sygnał wejściowy u_1.



Rys. 6

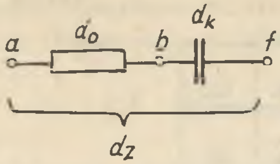


Rys. 7

Źródło e wraz z siecią l komutatorów tworzą dwójnik osobliwy d_o widziany z zacisków ab (rys. 7). Układ wypadkowy $d_o d_k$ będzie rozpatrywany jako połączenie szeregowe dwójnika wypadkowego d_o z kondensatorem C (rys. 8).

Jeżeli komutatory S_1 do S_l będą sterowane dyskretnymi funkcjami czasu φ_1 do φ_l i ich negacjami $\overline{\varphi}_1$ do $\overline{\varphi}_l$, to elementy sieci komutatorowej łącznie ze źródłem e opisują formuły:

$$\left.\begin{array}{l} S_1 :\ \overline{\varphi}_1 \tilde{i} + \varphi_1 \tilde{u} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_k :\ \overline{\varphi}_k \tilde{i} + \varphi_k \tilde{u} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_l :\ \overline{\varphi}_l \tilde{i} + \varphi_l \tilde{u} = 0 \end{array}\right\} \qquad (10)$$

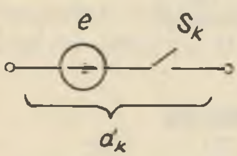


Rys. 8

$$e:\ 0\,\tilde{i} + 1(\widetilde{u-e}) = 0 \tag{11}$$

Formułę (11) można inaczej zapisać jako (12) dla przesuniętego o e układu współrzędnych.

$$0\,\tilde{i} + 1 < e > \tilde{u} = 0 \tag{12}$$



Rys. 9

W układach SC zawsze z sygnałem wejściowym u_1 (czyli źródłem e) występuje w połączeniu szeregowym jeden z komutatorów S_k, pełniąc rolę elementu kwantyzującego napięcie u_1 w czasie [9]. Powoduje to występowanie w sieci osobliwej d_o gałęzi o strukturze podanej na rys. 9 opisanej formułą (13).

$$d_k:\ \bar{\varphi}_k\,\tilde{i} + \varphi_k < e > \tilde{u} = 0 \tag{13}$$

Obliczając zastępczy osobliwy dwójnik całej sieci komutatorowej d_o otrzymuje się formułę (14), w której operatory A i B są funkcjami boolowskimi operatorów zmiennych w czasie φ_1 do φ_l oraz ich negacji.

$$A\left[\varphi_1 \ldots \varphi_l, \bar{\varphi}_1 \ldots \bar{\varphi}_l\right]\tilde{i} + B\left[\varphi_1 \ldots \varphi_l, \bar{\varphi}_1 \ldots \bar{\varphi}_l\right]\tilde{u} = 0 \tag{14}$$

Konsekwencją powyższego jest także zależność relacji (7) i (9) od funkcji czasowych φ_1 do φ_l dla całego dwójnika d_z z rys. 8. Napięcia przed naładowaniem kondensatora u' i po jego naładowaniu u'' w ogólnym przypadku będą funkcjami dyskretnymi przebiegów φ_1 do φ_l oraz napięcia e.

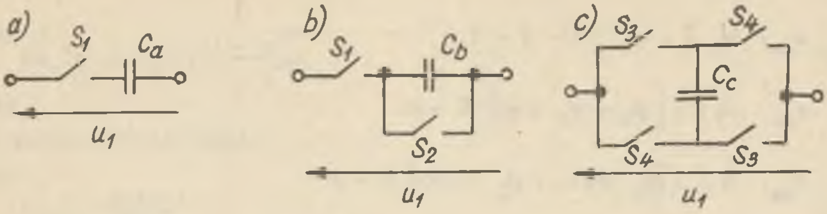
$$u' = f'(\varphi_1 \ldots \varphi_l, e) \tag{15}$$

$$u'' = f''(\varphi_1 \ldots \varphi_l, e) \tag{16}$$

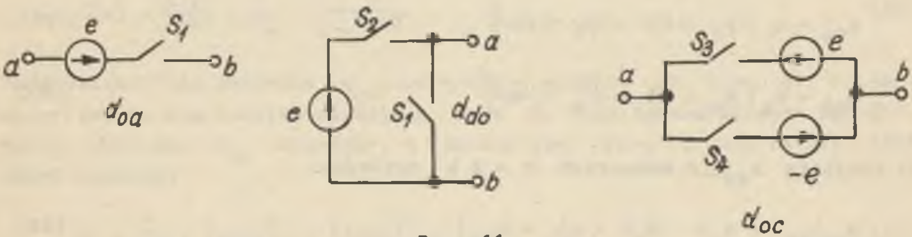
Dla koncepcji układów SC przedstawionej przez Fettweisa [10] zbiór dwójników podstawowych, które są odpowiednikami dwójników klasycznych C, R i L pokazany jest na rys. 10, a odpowiadające im sieci osobliwe na rys. 11.

Pracę kluczy S_1 do S_4 opisują dyskretne funkcje czasu będące okresowymi ciągami impulsów zerojedynkowych opisanych wraz z ich transformatami z przez relacje:

$$\varphi_1 = \left\{1010\right\}_4 \triangleq \Phi_1 = \frac{1 + z^{-2}}{1 - z^{-4}} = \frac{1}{1 - z^{-2}} \tag{17}$$



Rys. 10



Rys. 11

$$\varphi_2 = \{0101\}_4 \mathrel{\hat{=}} \Phi_2 = \frac{z^{-1} + z^{-3}}{1 - z^{-4}} = \frac{z^{-1}}{1 - z^{2}} \tag{18}$$

$$\varphi_3 = \{1000\}_4 \mathrel{\hat{=}} \Phi_3 = \frac{1}{1 - z^{-4}} \tag{19}$$

$$\varphi_4 = \{0010\}_4 \mathrel{\hat{=}} \Phi_4 = \frac{z^{-2}}{1 - z^{-4}} \tag{20}$$

Klucze S_1 do S_4 opisywane są zatem formułami:

$$S_1:\ \varphi_2 \vec{i} + \varphi_1 \vec{u} = 0 \tag{21}$$

$$S_2:\ \varphi_1 \vec{i} + \varphi_2 \vec{u} = 0 \tag{22}$$

$$S_3:\ \varphi_3 \vec{i} + \varphi_4 \vec{u} = 0 \tag{23}$$

$$S_4:\ \varphi_4 \vec{i} + \varphi_3 \vec{u} = 0 \tag{24}$$

Natomiast dwójniki osobliwe z rys. 11 formułami:

$$d_{oa}:\ \varphi_2 \tilde{i} + \varphi_1 <e> \tilde{u} = 0 \tag{25}$$

$$d_{ob}:\ 0 \tilde{i} + \left[\varphi_2 + \varphi_1 <e>\right] \tilde{u} = 0 \tag{26}$$

$$d_{oc}:\ 0 \tilde{i} + \left[\varphi_4 <e> + \varphi_3 <-e>\right] \tilde{u} = 0 \tag{27}$$

Odpowiadające im relacje typu (9) mają postać:

$$d_{za} = d_o\bar{\varphi}_1 <e> + d_k\varphi_1 <e> \tag{28}$$

$$d_{zb} = d_k\left[\varphi_2 <0> + \varphi_1 <e>\right] \tag{29}$$

$$d_{zc} = d_k\left[\varphi_4 <e> + \varphi_3 <-e>\right] \tag{30}$$

Dla dwójnika d_{za} w momentach $n = 2\ k$ zachodzi:

$$d_{za(2k)} = d_o 0 + d_k 1 <e> = d_k \tag{31}$$

Zatem kondensator ładuje się do napięcia e bowiem prąd może być dowolny, gdyż $A = \varphi = 0$. W momentach $n = 2k + 1$ zachodzi:

$$d_{za(2k+1)} = d_o 1 < e> + d_k \cdot 0 = d_o \tag{32}$$

Lecz d_o jest wtedy przerwą, a zatem u_c pozostaje takie samo jak dla poprzedzającego momentu parzystego.
Napięcia na kondensatorze C_a wynoszą:

$$u_a'(n) = \sum_0^n \varphi_1(k)e(n-k) \tag{33}$$

$$u_a''(n) = \sum_0^n \varphi_1(k-2)e(n-k) \tag{34}$$

Stąd transformata Z ładunku dopływającego:

$$\Delta Q_a(z) = C_a E(z)\left[\Phi_1(z) - \Phi_1(z)z^{-2}\right] \tag{35}$$

czyli:

$$\Delta Q_a(z) = C_a E(z)\frac{1 - z^{-2}}{1 + z^{-2}} \tag{36}$$

Prąd można określić jako:

$$I(z) = \frac{\Delta Q(z)}{T} \tag{37}$$

gdzie $T = 2\tau$, a τ jest odstępem kwantyzacji dyskretnych funkcji czasu . Impedancja $Z(z)$ wynosi zatem:

$$Z(z) = \frac{E(z)}{I(z)} = \frac{T}{C_a} \cdot \frac{1 + z^{-2}}{1 - z^{-2}} \tag{38}$$

Analogicznie dla dwójnika d_{zb}, po zwarciu punktów af (rys. 8), kondensator ładuje się kolejno do napięć e i 0. Prąd ładowania może być dowolny, gdyż dla d_{ob} operator A zawsze jest równy 0. Dla relacji (29) można napisać:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \{1010\}_4 + \{0101\}_4 = \{1\ 1\}_2 = \varphi_o \tag{39}$$

Stąd jej transformata Z:

$$\Phi_o = \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-1}} = 1(z) \tag{40}$$

Napięcia na C_b wynoszą:

$$u'_b(n) = \sum_0^n \varphi_o(k)e(n-k) \tag{41}$$

$$u''_b(n) = \sum_0^n \varphi_o(k-1)0 = 0 \tag{42}$$

Stąd:

$$Q_b(z) = C_b E(z)\frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} = C_b E(z)1(z) \tag{43}$$

Natomiast:

$$Z_b(z) = \frac{T}{C_b} \tag{44}$$

Dla trzeciego dwójnika d_{zc} po zwarciu punktów af kondensator ładuje się na przemian do napięć e i -e.

Dla relacji (30) można napisać:

$$\varphi_3 + \varphi_4 = \{1010\}_4 = \{10\}_2 = \varphi_1' \tag{45}$$

Napięcia na kondensatorze C_c wynoszą:

$$u_c'(n) = \sum_0^n \varphi_1(k)e(n-k) \tag{46}$$

$$u_c''(n) = \sum_0^n \varphi_1(k-2)\left[-e(n-k)\right] \tag{47}$$

Stąd:

$$Q_c(z) = C_c E(z)\left[\Phi_1(z) + \Phi_1(z)z^{-2}\right] \tag{48}$$

Czyli:

$$Q_c(z) = C_c E(z)\frac{1 + z^{-2}}{1 - z^{-2}} \tag{49}$$

Stąd:

$$Z_c(z) = \frac{T}{C} \cdot \frac{1 - z^{-2}}{1 + z^{-2}} \tag{50}$$

Jeżeli dla impedancji $Z(z)$ opisanych relacjami (38), (44) i (50) wprowadzić przekształcenia:

$$z^2 = w \tag{51}$$

oraz:

$$\frac{w - 1}{w + 1} = \psi \tag{52}$$

to otrzymuje się relacje:

$$Z_a = \frac{T}{C_a} \cdot \frac{1}{\psi} \tag{53}$$

$$z_b = \frac{T}{C_b} \tag{54}$$

$$z_c = \frac{T}{C_c}\,\psi \tag{55}$$

które opisują odpowiedniki elementów C, R i L na płaszczyźnie ϕ.

5. Uwagi końcowe

Przedstawiony sposób opisu połączeń układów elementów osobliwych z dwójnikami klasycznymi daje dla prostych przykładów wyniki zgodne z otrzymanymi poprzez metody klasyczne. Wydaje się także, że opis ten może być dużym ułatwieniem przy analizie układów bardziej złożonych, które można by rozwiązywać z zastosowaniem przekształceń macierzy boolowskich [6] w miejsce operatorów A i B.

LITERATURA

[1] Carlin H.J., Youla D.C.: Network synthesis with negative resistors. Proc. IRE, 49, 1961.

[2] Davies A.C.: The Significance of Nullators, Norators and Nullors in Active - network Theory. The Radio and Electr. Engin. Nov. 1967.

[3] Topór-Kamiński L.: Elementy osobliwe i rozszerzenie pojęcia komutacji w obwodach elektrycznych. V SPETO, Ustroń 1981, ZN Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 79; 1982.

[4] Topór-Kamiński L.: Wprowadzenia idealnych źródeł autonomicznych i źródlatora do zbioru elementów osobliwych. ZN Politechniki Śląskiej, Automatyka z. 71, 1983.

[5] Topór-Kamiński L.: Diodowe elementy osobliwe. VI SPETO, Ustroń 1983.

[6] Topór-Kamiński L.: Analiza obwodów osobliwych metodą macierzowych formuł boolowskich. ZN Politechniki Śląskiej, Automatyka (przyjęte do druku).

[7] Grzegorczyk A.: Zarys logiki matematycznej. PWN, Warszawa 1981.

[8] Opial Z.: Algebra wyższa. PWN, Warszawa 1976.

[9] Nossek J.A.: Switched - Capacitor - Filterra: A Comparison of the Basic Design Principles. ECCTD, Warszawa 1980.

[10] Tettweis A.: Basic Principles of Switched Capacitor - Filters Using Voltage Inverter Switches. Arch. Elektron. u. Ubertragungstechnik, 33, 1973.

Recenzent: doc. dr inż. Maria Jastrzębska

Wpłynęło do redakcji dnie 10 maja 1984 r.

СОЕДИНЕНИЕ АНОМАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С КЛАССИЧЕСКИМИ ДВУХПОЛЮСНИКАМИ

Р е з ю м е

В статье описаны типичные для аномальных сетей правила распределения соединений последовательных и параллельных относительно себя. Представлен метод определения заменительного двухполюсника для смешанных соединений аномальных и классических элементова также приведён анализ основных двухполюсников в ёмкостно-ключевых цепях.

CONNECTIONS OF SINGULAR ELEMENTS WITH CONVENTIONAL ELEMENTS

S u m m a r y

The characteristic distributivity rules of series and parallel connections for singular networks are described.

The method of determining of the equivalent one-part for mixed connections of singular and convencional elements is shown and ilustrated by means of the analysis of basic one parts with switched capacitors.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 95 Nr kol. 820

Jan CHOJCAN

Instytut Elektroniki
Politechnika Śląska

OBLICZANIE WRAŻLIWOŚCI WYŻSZYCH RZĘDÓW I ICH ZASTOSOWANIE

Streszczenie. W pracy przedstawiono wzory na obliczenie wrażliwości 2 i 3 rzędu funkcji układowych (oraz ich modułu i fazy) w dziedzinie częstotliwości. Uwzględnienie wrażliwości wyższych rzędów pozwala na rozszerzenie kresu górnego wrażliwości małoprzyrostowych. Pozwala to na lepszą aproksymację funkcji układowych przy większych odchyłkach parametrów.

1. Wprowadzenie

Do analizy zachowania się obwodów przy małych zmianach wartości parametrów wykorzystuje się wrażliwości małoprzyrostowe 1 rzędu. Można określić ich kres górny [7, 10]. Przy większych zmianach wartości parametrów wykorzystuje się wrażliwości wielkoprzyrostowe. Mankamentem tej metody jest znaczny nakład czasu na analizę.

Wykorzystanie małoprzyrostowych wrażliwości wyższych rzędów rozszerza znacznie zakres stosowania metod małoprzyrostowej analizy wrażliwościowej dla większych przyrostów parametrów. Takiemu postawieniu problemu i próbie jego rozwiązania poświęcona jest ta praca.

Wyprowadzono wzory na obliczanie wrażliwości 2 i 3 rzędu efektywną metodę obwodów dołączonych w dziedzinie częstotliwości dla liniowych obwodów złożonych z dwójników pasywnych i źródeł sterowanych i niesterowanych. Podano również wzory na wrażliwości modułu fazy prostych i złożonych funkcji układowych.

Przeanalizowano ile i jakich dodatkowych obwodów należy rozwiązać aby obliczyć współczynniki wrażliwości 2 i 3 rzędu.

Wskazano, na prostych przykładach, na możliwość znacznego zwiększenia kresu górnego wrażliwości małoprzyrostowych.

2. Wrażliwości 2 rzędu

Do obliczania wrażliwości 2 rzędu wykorzystano metodę obwodów dołączonych [1, 2, 4, 5, 6, 8], a uzyskane wyniki dla prostych funkcji układowych podano w pracach [9, 10]. Dla przypomnienia podano wzory na wrażliwość napięcia wyjściowego układu U_o na zmiany admitancji Y_i oraz Y_j

$$S_{Y_i^2}^{U_o} \stackrel{df}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{Y_i^2}{U_o} \cdot \frac{\partial^2 U_o}{\partial Y_i^2} = \frac{Y_i^2}{U_o} U_i U_i^o U_i^{o,i} \quad (1)$$

$$S_{Y_i Y_j}^{U_o} \stackrel{df}{=} \frac{Y_i Y_j}{U_o} \cdot \frac{\partial^2 U_o}{\partial Y_i \partial Y_j} = \frac{Y_i Y_j}{U_o}(U_i U_j^o U_j^{o,i} + U_i^o U_j U_i^{o,j}) \quad (2)$$

gdzie

U_i, U_j – napięcie na admitancji Y_i (Y_j) w obwodzie podstawowym,

U_i^o, U_j^o – napięcie na tych samych elementach w obwodzie dołączonym,

$U_i^{o,i}$, $U_j^{o,i}$ – napięcia na Y_i, Y_j w obwodzie podstawowym zasilanym przez SPM 1 A dołączoną równolegle do admitancji Y_i,

$U_i^{o,j}$ – napięcie na admitancji Y_i w obwodzie podstawowym zasilanym przez SPM 1 A dołączoną równolegle do admitancji Y_j.

Wiadomo, że dla wrażliwości 1 rzędu

$$S_{x_i}^{U_o} = S_{x_i}^{|U_o|} + jQ_{x_i}^{U_o} \quad (3)$$

gdzie

$U_o = |U_o| e^{j\varphi}$

$S_{x_i}^{|U_o|} \stackrel{df}{=} \frac{x_i}{|U_o|} \cdot \frac{\partial |U_o|}{\partial x_i}$ – wrażliwość względna 1 rzędu modułu napięcia wyjściowego U_o na zmianę rzeczywistego parametru x_i,

$-Q_{x_i}^{U_o} \stackrel{df}{=} x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ – wrażliwość 1 rzędu fazy napięcia U_o na zmianę rzeczywistego parametru x_i.

Zależność ta dla wrażliwości 2 rzędu jest bardziej złożona. Można wykazać [10], że np.

$$S_{x_i^2}^{U_o} = S_{x_i^2}^{|U_o|} - \frac{1}{2}(Q_{x_i}^{U_o})^2 + j(Q_{x_i^2}^{U_o} + S_{x_i}^{|U_o|} Q_{x_i}^{U_o}) \quad (4)$$

gdzie

$S_{x_i^2}^{|U_o|} \stackrel{df}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{x_i^2}{|U_o|} \cdot \frac{\partial^2 |U_o|}{\partial x_i^2}$ – wrażliwość względna 2 rzędu modułu napięcia U_o na zmianę parametru x_i,

$Q_{x_i^2}^{U_o} \overset{df}{=} \frac{1}{2}\, x_i^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}$ - wrażliwość 2 rzędu fazy napięcia U_o na zmianę parametru x_i.

Ze wzoru (4) wynika, że

$$S_{x_i^2}^{|U_o|} = \mathrm{Re}(S_{x_i^2}^{U_o}) + \frac{1}{2}(Q_{x_i}^{U_o})^2 \tag{5}$$

oraz

$$Q_{x_i^2}^{U_o} = \mathrm{Im}(S_{x_i^2}^{U_o}) - S_{x_i}^{|U_o|} Q_{x_i}^{U_o} \tag{6}$$

Postępując analogicznie, uzyskano

$$S_{x_i x_j}^{|U_o|} \overset{df}{=} \frac{x_i x_j}{|U_o|} \cdot \frac{\partial^2 |U_o|}{\partial x_i \partial x_j} = \mathrm{Re}(S_{x_i x_j}^{U_o}) + Q_{x_i}^{U_o} Q_{x_j}^{U_o} \tag{7}$$

oraz

$$Q_{x_i x_j}^{U_o} \overset{df}{=} x_i x_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \mathrm{Im}(S_{x_i x_j}^{U_o}) - S_{x_i}^{|U_o|} Q_{x_j}^{U_o} - S_{x_j}^{|U_o|} Q_{x_i}^{U_o} \tag{8}$$

Dla złożonych funkcji układowych $(T = K_U, K_I, M, N, Y_{we}, Y_{wy})$ $T = \frac{a}{b}$, gdzie a, b proste funkcje układowe (prądy lub napięcia na wrotach), wrażliwości 2 rzędu na zmianę jednego parametru x_i lub dwóch x_i, x_j można wyznaczyć z zależności [10]:

$$S_{x_i^2}^{T} = S_{x_i^2}^{a} - S_{x_i^2}^{b} - S_{x_i^2}^{a} S_{x_i}^{b} + (S_{x_i}^{b})^2 \tag{9}$$

oraz

$$S_{x_i x_j}^{T} = S_{x_i x_j}^{a} - S_{x_i x_j}^{b} - S_{x_i}^{a} S_{x_j}^{b} - S_{x_j}^{a} S_{x_i}^{b} + 2 S_{x_i}^{b} S_{x_j}^{b} \tag{10}$$

Po przekształceniach [10] uzyskano wzory na wrażliwości modułu i fazy funkcji układowych:

$$S_{x_i^2}^{|T|} = S_{x_i^2}^{|a|} - S_{x_i^2}^{|b|} - S_{x_i}^{|a|} S_{x_i}^{|b|} + (S_{x_i}^{|b|})^2 \tag{11}$$

i

$$Q^T_{x_i^2} = Q^a_{x_i^2} - Q^b_{x_i^2} \tag{12}$$

oraz

$$S^{|T|}_{x_i x_j} = S^{|a|}_{x_i x_j} - S^{|b|}_{x_i x_j} - S^{|a|}_{x_i} S^{|b|}_{x_j} S^{|a|}_{x_j} S^{|b|}_{x_i} + 2\, S^{|b|}_{x_i} S^{|b|}_{x_j} \tag{13}$$

i

$$Q^T_{x_i x_j} = Q^a_{x_i x_j} - Q^b_{x_i x_j} \tag{14}$$

Z przeprowadzonej w pracach [10 i 4] analizy wynika, że do obliczenia wrażliwości 2 rzędu funkcji układowej na zmianę m parametrów obwodu należy dodatkowo rozwiązać m układów równań opisujących układ podstawowy z wymuszeniami (SPM 1 A) połączonymi równolegle kolejno do każdego ze zmieniających się elementów lub gałęzi sterowanych zmieniających współczynnik sterowania źródeł.

3. Wrażliwości 3 rzędu

Obliczanie wrażliwości 3 rzędu metodą obwodów dołączonych jest bardzo ekonomiczne, wymaga bowiem tylko dodatkowej l-krotnej analizy obwodu podstawowego (gdzie l - liczba zmieniających się źródeł sterowanych) [10] zasilanego przez SPM 1 A połączoną kolejno równolegle do gałęzi sterującej zmieniającego się źródła sterowanego.

Wrażliwości względne 3 rzędu funkcji układowej T na zmiany parametrów $x_i x_j x_k$ zdefiniowane są następująco:

$$S^T_{x_i^3} \overset{df}{=} \frac{1}{6} \cdot \frac{x_i^3}{T} \cdot \frac{\partial^3 T}{\partial x_i^3} \tag{15}$$

$$S^T_{x_i^2 x_j} \overset{df}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{x_i^2 x_j}{T} \cdot \frac{\partial^3 T}{\partial x_i^2 \partial x_j} \tag{16}$$

$$S^T_{x_i x_j x_k} \overset{df}{=} \frac{x_i x_j x_k}{T} \cdot \frac{\partial^3 T}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \tag{17}$$

Prześledźmy wyprowadzenie wzoru na wrażliwość 3 rzędu prostej funkcji układowej, np. $T = U_o$ na zmianę parametru $x_i = Y_i$. Trzecia pochodna napięcia U_o podług Y_i wyznaczona jest z zależności

$$\frac{\partial^3 U_o}{\partial Y_i^3} = \frac{\partial}{\partial Y_i}(2U_i U_i^o U_i^{o,i}) = 2U_i U_i^i U_i^o U_i^{o,i} + 2U_i U_i^o U_i^{o,i}, U_i^{o,i} +$$

$$+ 2U_i U_i^o U_i^{o,i} U_i^{o,i,i} = 6U_i U_i^o (U_i^{o,i})^2$$

a wrażliwość 3 rzędu

$$S_{Y_i^3}^{U_o} = \frac{1}{6} \cdot \frac{Y_i^3}{U_o} \cdot \frac{\partial^3 U_o}{\partial Y_i^3} = \frac{Y_i^3}{U_o} U_i U_i^o (U_i^{o,i})^2 . \tag{18}$$

Jeszcze wyprowadzenie wzoru na wrażliwość 3 rzędu napięcia U_o na zmianę współczynnika wzmocnienia napięciowego $x_i = ws_i$ i-tego źródła napięciowego sterowanego napięciem (ŹNSN). Trzecią pochodną napięcia U_o podług ws_i wyznacza się z zależności:

$$\frac{\partial^3 U_o}{\partial ws_i^3} = \frac{\partial}{\partial ws_i}(U_{1i} U_{1i}^{0,22i} U_{22i}^{0} + U_{1i} U_{1i}^{0} U_{22i}^{0,22i})$$

gdzie [8]

U_{1i}, U_{1i}^{0}, $U_{1i}^{0,22i}$ - napięcia na gałęzi sterującej i-tego ŹNSN kolejno w obwodzie podstawowym, dołączonym i podstawowym zasilanym przez SPM 1 A połączoną równolegle do gałęzi sterowanej tego źródła,

U_{22i}^{0}, $U_{22i}^{0,22i}$ - napięcie na gałęzi sterowanej i-tego ŹNSN kolejno w obwodzie dołączonym i podstawowym zasilanym przez SPM 1 A połączoną równolegle do gałęzi sterowanej tego źródła.

Ponieważ pochodne cząstkowe pierwszego rzędu można wyznaczyć [8] z zależności:

$$\frac{\partial U_{1i}}{\partial ws_i} = U_{1i} U_{22i}^{1i}$$

$$\frac{\partial U_{1i}^{0,22i}}{\partial ws_i} = U_{1i}^{0,22i} U_{22i}^{0,22i,1i}$$

Tablica 2

Lp.	Parametr x_i	Parametr x_j	Parametr x_k	Analizowane obwody (bez N i N^0)	Analizowane obwody nie wykorzystane przy obliczeniu wrażliwości drugiego rzędu	$\frac{\partial^3 U_0}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$
1	Y_i	Y_i	Y_i	$N^{0,i}$		$6\,U_i U_i^0 (U_i^{0,i})^2$
2	Y_i	Y_i	Y_j	$N^{0,i}$, $N^{0,j}$		$2(U_i U_i^{0,i} U_j U_j^{0,i} + U_i U_i^{0,j} U_j^{0,i} + U_i^0 U_i^{0,i} U_i^{0,j} U_j)$
3	Y_i	Y_j	Y_k	$N^{0,i}$, $N^{0,j}$ $N^{0,k}$		$U_i(U_j^0 U_j^{0,k} U_k^{0,i} + U_j^{0,i} U_k^{0,j}) + U_i^0(U_i^{0,j} U_j^{0,k} U_k + U_i^{0,k} U_j U_k^{0,j}) + U_i^{0,j} U_j U^0 U_k^{0,i}{}_k +$ $+ U_i^{0,k} U_j^0 U_j^{0,i} U_k$
4	ŻNSN $w s_i$	ŻNSN $w s_i$	ŻNSN $w s_i$	$N^{0,22i}$, $N^{0,1i}$	$N^{0,1i}$	$U_{1i}\left[2U_{1i}^0 U_{1i}^{0,22i} U_{22i}^{0,22i} + 2U_{22i}^0 (U_{1i}^{0,22i})^2 + U_{1i}^0 U_{22i}^{0,22i} \cdot (U_{1i}^{0,22i} + U_{22i}^{0,1i})\right]$
5	ŻNSN $w s_i$	ŻNSN $w s_i$	ŻNSN $w s_j$	$N^{0,22i}$ $N^{0,22j}$ $N^{0,1i}$	$N^{0,1i}$	$U_{1i} U_{1j}^0 (U_{1i}^{0,22i} U_{22j}^{0,22i} + U_{22i}^{0,22i} U_{22j}^{0,1i}) + U_{1i} U_{1j}^{0,22i} \cdot$ $\cdot (U_{1i}^0 U_{22i}^{0,22j} + U_{1i}^{0,22j} U_{22i}^0) + U_{1i}^{0,22j} U_{1j} (U_{1i}^{0,22i} U_{1i}^0 + U_{1i}^0 U_{22i}^{0,22i})$
6	ŻNSN $w s_i$	ŻNSN $w s_j$	ŻNSN $w s_k$	$N^{0,22i}$ $N^{0,22j}$ $N^{0,22k}$		$U_{1i}^0 (U_{22i}^{0,22j} U_{1ij}^{0,22k} U_{1k} + U_{22i}^{0,22k} U_{1ij} U_{1k}^{0,22j}) + U_{1ij} U_{1k} \cdot$ $\cdot (U_{1i} U_{22k}^{0,22j} + U_{22i}^{0,22j} U_{22k}^{0,22j}) + U_{22j}^0 (U_{1i} U_{1ij}^{0,22k} U_{1k}^{0,22i} + U_{1i}^{0,22k} U_{1ij}^{0,22i} U_{1k})$
7	ŻNSN $w s_i$	Y_j	Y_j	$N^{0,j}$ $N^{0,22i}$		$2U_{1i}^{0,j} U_j (U_j^{0,j} U_{22i}^0 + U_j^0 U_j^{0,22i}) + 2U_{1i} U_j^0 U_j^{0,j} U_j^{0,22i}$
8	ŻNSN $w s_i$	Y_j	Y_k	$N^{0,22i}$ $N^{0,j}$, $N^{0,k}$		$U_{1i}(U_j^{0,22i} U_k^0 U_k^{0,j} + U_j^0 U_j^{0,k\ 0,22i}) + U_{22i}(U_{1i}^{0,k} U_j U_k^{0,j} +$ $+ U_{1i}^{0,j} U_j^{0,k} U_k) + U_{1i}^{0,j} U_j U_k^0 U_k^{0,22i} + U_{1i}^{0,k} U_j^0 U_j^{0,22i} U_k$

$$\frac{\partial U^{0}_{22i}}{\partial ws_{i}} = U^{0}_{1i}U^{0,22i}_{22i}$$

$$\frac{\partial U^{0}_{1i}}{\partial ws_{i}} = U^{0}_{1i}U^{0,1i}_{22i}$$

$$\frac{\partial U^{0,22i}_{22i}}{\partial ws_{i}} = U^{0.22i}_{1i}U^{0.22i.22i}_{22i}$$

więc po przekształceniach i wykorzystaniu zasady międzywzajemności [1, 10] uzyskamy wzór na wrażliwość postaci:

$$S^{U_o}_{ws_1^3} = \frac{1}{6}\cdot\frac{ws_1^3}{U_o}\,U_{1i}\Big(2U^{0}_{1i}U^{0,22i}_{1i}U^{0,22i}_{22i} + 2U^{0}_{22i}\big(U^{0,22i}_{1i}\big)^2 +$$

$$+\,U^{0}_{1i}U^{0,22i}_{22i}\big(U^{0,22i}_{1i} + U^{0,1i}_{22i}\big)\Big). \tag{19}$$

Wszystkie wzory podano w pracy [10], niektóre z nich umieszczono w tablicy 1. Analogicznie, jak dla wrażliwości 2 rzędu, wyprowadza się wzory na wrażliwości 3 rzędu modułu i fazy prostych funkcji układowych (np. $T = U_o$) na zmiany parametrów $x_ix_jx_k$ i tak [10]

$$S^{|U_o|}_{x_i^3} \overset{df}{=} \frac{1}{6}\cdot\frac{x_i^3}{U_0}\cdot\frac{\partial^3|U_0|}{\partial x_i^3} = \mathrm{Re}\big(S^{U_0}_{x_i^3}\big) + \frac{1}{2}S^{|U_0|}_{x_i}\big(Q^{U_0}_{x_i}\big)^2 + Q^{U_0}_{x_i^2}Q^{U_0}_{x_i} \tag{20}$$

i

$$Q^{U_0}_{x_i^3} \overset{df}{=} \frac{1}{6}x_i^3\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_i^3} = \mathrm{Im}\big(S^{U_0}_{x_i^3}\big) - S^{|U_0|}_{x_i^2}Q^{U_0}_{x_i} - S^{|U_0|}_{x_i}Q^{U_0}_{x_i^2} + \frac{1}{6}\big(Q^{U_0}_{x_i}\big)^3 \tag{21}$$

oraz

$$S^{|U_0|}_{x_i^2x_j} \overset{df}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{x_i^2x_j}{|U_0|}\cdot\frac{\partial^3|U_0|}{\partial x_i^2\,\partial x_j} = \mathrm{Re}\big(S^{U_0}_{x_i^2x_j}\big) + \frac{1}{2}S^{|U_0|}_{x_j}\big(Q^{U_0}_{x_i}\big)^2 +$$

$$+\,S^{|U_0|}_{x_i}\cdot Q^{U_0}_{x_i}Q^{U_0}_{x_j} + Q^{U_0}_{x_ix_j}Q^{U_0}_{x_i} + Q^{U_0}_{x_i^2}Q^{U_0}_{x_j} \tag{22}$$

i

$$Q^{U_0}_{x_i^2 x_j} \stackrel{df}{=} \frac{1}{2}\, x_i^2 x_j \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i^2 \partial x_j} = \mathrm{Im}(S^{U_0}_{x_i^2 x_j}) - S^{|U_0|}_{x_i^2} Q^{U_0}_{x_j} - S^{|U_0|}_{x_i x_j} Q^{U_0}_{x_i} -$$

$$- S^{|U_0|}_{x_i} Q^{U_0}_{x_i x_j} - S^{|U_0|}_{x_j} Q^{U_0}_{x_i^2} + \frac{1}{2}(Q^{U_0}_{x_i})^2 Q^{U_0}_{x_j} \tag{23}$$

wreszcie

$$S^{|U_0|}_{x_i x_j x_k} \stackrel{df}{=} \frac{x_i x_j x_k}{|U_0|} \cdot \frac{\partial^3 |U_0|}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \mathrm{Re}(S^{U_0}_{x_i x_j x_k}) + S^{|U_0|}_{x_i} \cdot Q^{U_0}_{x_j} Q^{U_0}_{x_k} +$$

$$+ S^{|U_0|}_{x_j} Q^{U_0}_{x_i} Q^{U_0}_{x_k} + S^{|U_0|}_{x_k} Q^{U_0}_{x_i} Q^{U_0}_{x_k} + Q^{U_0}_{x_i x_j} Q^{U_0}_{x_k} +$$

$$+ Q^{U_0}_{x_i x_k} Q^{U_0}_{x_j} + Q^{U_0}_{x_j x_k} Q^{U_0}_{x_i} \tag{24}$$

i

$$Q^{U_0}_{x_i x_j x_k} \stackrel{df}{=} x_i x_j x_k \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \mathrm{Im}(S^{U_0}_{x_i x_j x_k}) - S^{|U_0|}_{x_i x_j} \cdot Q^{U_0}_{x_k} -$$

$$- S^{|U_0|}_{x_i x_k} Q^{U_0}_{x_j} - S^{|U_0|}_{x_j x_k} Q^{U_0}_{x_i} - S^{|U_0|}_{x_i} Q^{U_0}_{x_j x_k} -$$

$$- S^{|U_0|}_{x_j} Q^{U_0}_{x_i x_k} - S^{|U_0|}_{x_k} Q^{U_0}_{x_i x_j} + Q^{U_0}_{x_i} Q^{U_0}_{x_j} Q^{U_0}_{x_k}. \tag{25}$$

Wzory dla złożonych funkcji układowych podano w pracy [10].

Tak więc dla obliczenia wrażliwości małoprzyrostowej prostej funkcji układowej na zmiany, np. n parametrów metodą obwodów dołączonych należy przeprowadzić analizę:

- obwodu podstawowego N i dołączonego N^0 (wrażliwości 1 rzędu),
- n obwodów podstawowych ($N^{0,i}$, $i = 1,\dots,n$) zasilanych przez SPM 1 A połączoną kolejno równolegle do każdego ze zmieniających się elementów jeśli jest to dwójnik lub równolegle do gałęzi sterowanych, jeśli zmieniającym się parametrem jest współczynnik sterowania źródła sterowanego (wrażliwości 2 rzędu),
- l obwodów podstawowych (gdzie l - liczba zmieniających się współczynników sterowania źródeł sterowanych) zasilanych kolejno przez SPM 1 A połączoną równolegle do gałęzi sterujących zmieniających się źródeł

(wrażliwości 3 rzędu), czyli liczba niezbędnych analiz obwodu do obliczenia wrażliwości 1, 2 i 3 rzędu wynosi

$$N = 2 + n + 1. \tag{26}$$

4. Zastosowanie

Jak już wspomniano wrażliwości wyższych rzędów mogą być wykorzystane również do lepszej aproksymacji funkcji układowych dla większych, niż to było możliwe przy uwzględnieniu tylko wrażliwości 1 rzędu, odchyłek wartości parametrów obwodu. Przeanalizujemy dokładność aproksymacji modułu funkcji układowej T.

Gdy uwzględnione zostaną wrażliwości 1 rzędu wówczas odchyłka

$$t'_{|T|} = \sum_{i=1}^{n} S_{x_i}^{|T|} t_i, \tag{27}$$

gdzie

n – liczba parametrów obwodu uwzględnionych przy obliczaniu wrażliwości 1 rzędu,

t_i – odchyłka i-go parametru x_i.

Po uwzględnieniu wrażliwości 1 i 2 rzędu odchyłka aproksymowana jest zależnością

$$t''_{|T|} = \sum_{i=1}^{n} S_{x_i}^{|T|} t_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} S_{x_i x_j}^{|T|} t_i t_j \tag{28}$$

gdzie

m – liczba parametrów obwodu uwzględnionych przy obliczaniu wrażliwości 2 rzędu,

t_j – odchyłka j-go parametru x_j.

Analogicznie, gdy uwzględnimy wrażliwości 1, 2 i 3 rzędu

$$t'''_{|T|} = \sum_{i=1}^{n} S_{x_i}^{|T|} t_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} S_{x_i x_j}^{|T|} t_i t_j +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=j}^{p} S_{x_i x_j x_k}^{|T|} t_i t_j t_k \tag{29}$$

gdzie

p - liczba parametrów obwodu uwzględnionych przy obliczaniu wrażliwości 3 rzędu,

t_k - odchyłka k-go parametru x_k.

Na uwagę zasługuje fakt, że w zależnościach (28) (29) występują wrażliwości modułów funkcji układowych a nie części rzeczywiste wrażliwości funkcji układowych.

Analogicznie, jak dla wrażliwości 1 rzędu, można i dla wrażliwości wyższych rzędów zdefiniować kres górny wrażliwości małoprzyrostowych jako tę wartośc odchyłki parametrów, dla której moduł względnej różnicy między odchyłką funkcji układowej aproksymowanej zależnością (27) (28) lub (29) a dokładną wartością tej odchyłki jest mniejszy od zadanej wartości e(e = 0,005; 0,01; 0,05; 0,1) [3, 7, 10].

Dla najgorszych warunków pracy (dla wrażliwości 1 rzędu) i równych (co do modułów) tolerancyjnych parametrów zależności (27) (28) (29) redukują się do postaci

$$t'_{|T|} = at, \tag{30}$$

$$t''_{|T|} = at + bt^2, \tag{31}$$

$$t'''_{|T|} = at + bt^2 + ct^3 \tag{32}$$

Aproksymacja odchyłki jest przedstawiona w postaci potęgowego szeregu Taylora, więc uwzględnienie kolejnego wyrazu rozwinięcia zmniejsza resztę, czyli błąd aproksymacji.

Oznaczmy dokładną wartość odchyłki modułu funkcji układowej przez $t^0_{|T|}$ wówczas kres górny wrażliwości małoprzyrostowych można wyznaczyć z zależności:

$$\left| \frac{t'_{|T|} - t^0_{|T|}}{t^0_{|T|}} \right| = e \tag{33}$$

dla wrażliwości 1 rzędu,

$$\left| \frac{t''_{|T|} - t^0_{|T|}}{t^0_{|T|}} \right| = e \tag{34}$$

dla wrażliwosci 1 i 2 rzędu

$$\left| \frac{t'''_{|T|} - t^0_{|T|}}{t^0_{|T|}} \right| = e \tag{35}$$

dla wrażliwości 1, 2 i 3 rzędu.

Zilustrujmy te wyniki prostymi, dla przejrzystości, przykładami. Bardziej złożone podano w pracy [10].

Przykład 1

Należy określić kres górny wrażliwości małoprzyrostowej dla wrażliwości 1, 2 i 3 rzędu oporowego dzielnika napięcia EG_1G_2 dla najgorszych warunków pracy dzielnika $(t_1 = t_{G1} = t = -t_{G_2} = -t_2)$ jeśli napięcie wyjściowe $T = U_0$ zbierane jest z G_2, $t_E = 0$ a nominalna wartości parametrów: $E = 3$ V, $G_1 = 1$ S, $G_2 = 0{,}5$ S.

Odchyłka napięcia U_0 dla najgorszych warunków pracy aproksymowana jest zależnością

$$t_{U_0} \cong (S^{U_0}_{G_1} t_1 + S^{U_0}_{G_2} t_2) + (S^{U_0}_{G_1^2} t_1^2 + S^{U_0}_{G_1G_2} t_1 t_2 + S^{U_0}_{G_2^2} t_2^2) +$$

$$+ S^{U_0}_{G_1^3} t_1^3 + S^{U_0}_{G_1^2G_2} t_1^2 t_2 + S^{U_0}_{G_1G_2^2} t_1 t_2^2 + S^{U_0}_{G_2^3} t_2^3) =$$

$$= (S^{U_0}_{G_1} - S^{U_0}_{G_2}) t + (S^{U_0}_{G_1^2} + S^{U_0}_{G_2^2} - S^{U_0}_{G_1G_2}) t^2 +$$

$$+ (S^{U_0}_{G_1^3} + S^{U_0}_{G_1G_2^2} - S^{U_0}_{G_1^2G_2} - S^{U_0}_{G_2^3}) t^3 = \frac{2}{3} t - \frac{2}{9} t^2 + \frac{2}{27} t^3 .$$

Stąd można obliczyć, że kres górny tolerancji $t = t_g$ wynosi:

- dla wrażliwości 1 rzędu $t_g = \pm 3\, e$,
- dla wrażliwości 1 i 2 rzędu $t_g = \pm 3\sqrt{|e|}$,
- dla wrażliwości 1, 2 i 3 rzędu $t_g = \pm 3\sqrt[3]{|e|}$.

W tablicy 2 podano kresy górne tolerancji dla kilku wartości e.

Tablica 2

$\lvert t_g \rvert$ dla wrażliwości rzędu:	e = 0,05	e = 0,01	e = 0,05	e = 0,1
1	0,015	0,03	0,15	0,3
1 i 2	0,212	0,3	0,671	0,949
1, 2 i 3	0,513	0,646	1,11	1,393

Przykład 2

Dzielnik z poprzedniego przykładu zastąpiono dzielnikiem EGC. Nominalne wartości: $E = 1$ V, $G = 1$ S, $\omega C = 1$ S. Funkcja układowa $T = U_0$, gdzie U_0 napięcie na zaciskach kondensatora.

Kresy górne tolerancji i modułu napięcia U_0 dla najniekorzystniejszych warunków pracy $(t = t_G = -t_C)$ dla kilku wartości e podano w tablicy 3.

Tablica 3

$\|tg\|$ dla wrażliwości rzędu:	$e = 0{,}005$	$e = 0{,}01$	$e = 0{,}05$	$e = 0{,}1$
1	0,01	0,02	0,088	0,16
1 i 2	0,102	0,145	0,31	0,51
1, 2 i 3	0,215	0,27	0,428	0,52

5. Wnioski

Wykorzystanie wrażliwości wyższych rzędów do zwiększenia dokładności aproksymacji lub rozszerzenia przedziału dopuszczalnych odchyłek parametrów przy stałym błędzie aproksymacji funkcji układowej budzi, ze względu na konkurencyjny w porównaniu z analizą wielkoprzyrostową czas obliczeń, uzasadnioną nadzieję na ich szersze zastosowanie.

Uwzględnienie wrażliwości wyższych, niż 3 rzędów nie wymaga dodatkowych analiz obwodu, wydłużają się jednak wzory końcowe.

LITERATURA

[1] Calahan D.: Projektowanie układów elektronicznych za pomocą maszyn cyfrowych, WNT, Warszawa 1978.

[2] Chua L., Pen-M.L.: Komputerowa analiza układów elektronicznych, WNT, Warszawa 1981.

[3] Styblińskl M.: Metody analizy i optymalizacji tolerancji parametrów układów elektronicznych, WNT, Warszawa 1981.

[4] Seth A.K., Roe P.H.: Higher Derivative Network Sensitivities Using Adjoint Network, Int. J. Cir. Theory Appl., Vol. 1, 215-226 (1973).

[5] Richards G.A.: Second-Derivative Sensitivity Using the Concept of the Adjoint Network, El. Lett., 5, 398-399 (1969).

[6] Goddard P.J., Spence R.: Efficient Method for Calculation of First and Secong-Order Network Sensitivities, El. Lett., 5, 351-352 (1969).

[7] Metody statystycznej i wrażliwościowej analizy i optymalizacji układów, Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1981.

[8] Chojcan J., Lasek L.: Metody analizy wrażliwościowej układów elektronicznych, skrypt uczelniany Politechniki Śląskiej, wyd. II, Gliwice 1982.

[9] Chojcan J.: Analiza wrażliwości wyższych rzędów, Materiały VI KKTOiUE s. 156-161, Gliwice 1983.

[10] Chojcan J.: Obliczanie wrażliwości wyższych rzędów, Raport wewnętrzny Instytutu Elektroniki, Gliwice 1983.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Michał Tadeusiewicz

Wpłynęło do redakcji dnie 10 maja 1984 r.

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МАЛЫХ ПРИРАЩЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Р е з ю м е

В статье представлен анализ чувствительности, методом присоединённых схем, второго и третьего порядка. Рассматривается применение его к анализу разбросов выходов электронных схем. Представлены численные примеры.

SOLVING OF HIGHER ORDER NETWORK SENSITIVITIES AND THEIR APPLICATIONS

S u m m a r y

In the paper formulas for solving second and third order network sensitivities in the frequency domain and their application to the approximation of the transfer functions for larger change of parameters are given.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 95 Nr kol. 820

Andrzej DRYGAJŁO

Instytut Elektroniki
Politechnika Śląska

DYSKRETNE DIADYCZNE UKŁADY LINIOWE

Streszczenie. W pracy przedstawiono opis dyskretnych układów liniowych niezmiennych względem przesunięcia diadycznego wykorzystując metodę odpowiedzi impulsowej. Wykazano, że diadyczne układy liniowe mogą być realizowane przez cyfrowe skalarne filtry sekwencyjnościowe za pomocą algorytmów szybkich transformacji.

1. Wprowadzenie

Rozwój techniki cyfrowej, oparty na postępach technologii układów scalonych, stworzył potrzebę adekwatnej analizy i syntezy liniowych układów dyskretnych za pomocą algorytmów o minimalnej złożoności obliczeniowej. Znaczny postęp w tym zakresie można uzyskać na bazie teorii sekwencyjnościowej sygnałów [1], w której pod pojęciem sekwencyjność rozumiana jest uogólniona częstotliwość oznaczająca jedną drugą liczby przejść przez zero funkcji Walsha w przedziale określoności.

Punktem wyjścia do rozważań przeprowadzonych w niniejszej pracy są następujące znane stwierdzenia [2]:

- matematyczną definicją układu dyskretnego jest jednoznaczne przekształcenie lub operator, który odwzorowuje ciąg wejściowy $\{x\}$ w ciąg wyjściowy $\{y\}$:

$$\{y\} = T\left[\{x\}\right] \tag{1}$$

- klasy układów dyskretnych określa się na podstawie właściwości $T[.]$,
- klasę układów liniowych określa zasada superpozycji: jeśli $\{y_1\}$ i $\{y_2\}$ są odpowiedziami układu odpowiednio na pobudzenia $\{x_1\}$ i $\{x_2\}$, to układ jest liniowy wtedy i tylko wtedy, gdy

$$T\left[a\{x_1\} + b\{x_2\}\right] = a\,T\left[\{x_1\}\right] + b\,T\left[\{x_2\}\right] = a\{y_1\} + b\{y_2\} \tag{2}$$

dla dowolnych stałych a i b.

2. Splot diadyczny

Dowolny skończony ciąg $\{x(m)\}$ dany w $N = 2^p$ $(p = 0,1,2,\dots)$ punktach można wyrazić jako sumę diadycznie przesuniętych i pomnożonych ciągów impulsowych

$$x(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(m \ominus n)\, x(n) \tag{3}$$

gdzie $\ominus$ oznacza różnicę modulo 2, która jest równoważna sumie modulo 2 oznaczanej przez $\oplus$.

Zatem opis równoważny ma postać

$$x(m) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(m \oplus n)\, x(n) \tag{4}$$

Przykładowo, wynik zastosowania operacji przesunięcia diadycznego dyskretnych sygnałów skończonych danych w $N = 8$ punktach przedstawia rysunek 1. Można zauważyć, że przesunięcie diadyczne skończonych ciągów $\{x(n)\}$ dla $N = 2^p$ zachowuje ich podstawowe symetrie.

Diadyczny sposób przedstawiania sygnałów (4) w połączeniu z zależnością (2) sugeruje, że układ liniowy można w pełni scharakteryzować za pomocą jego odpowiedzi impulsowej.

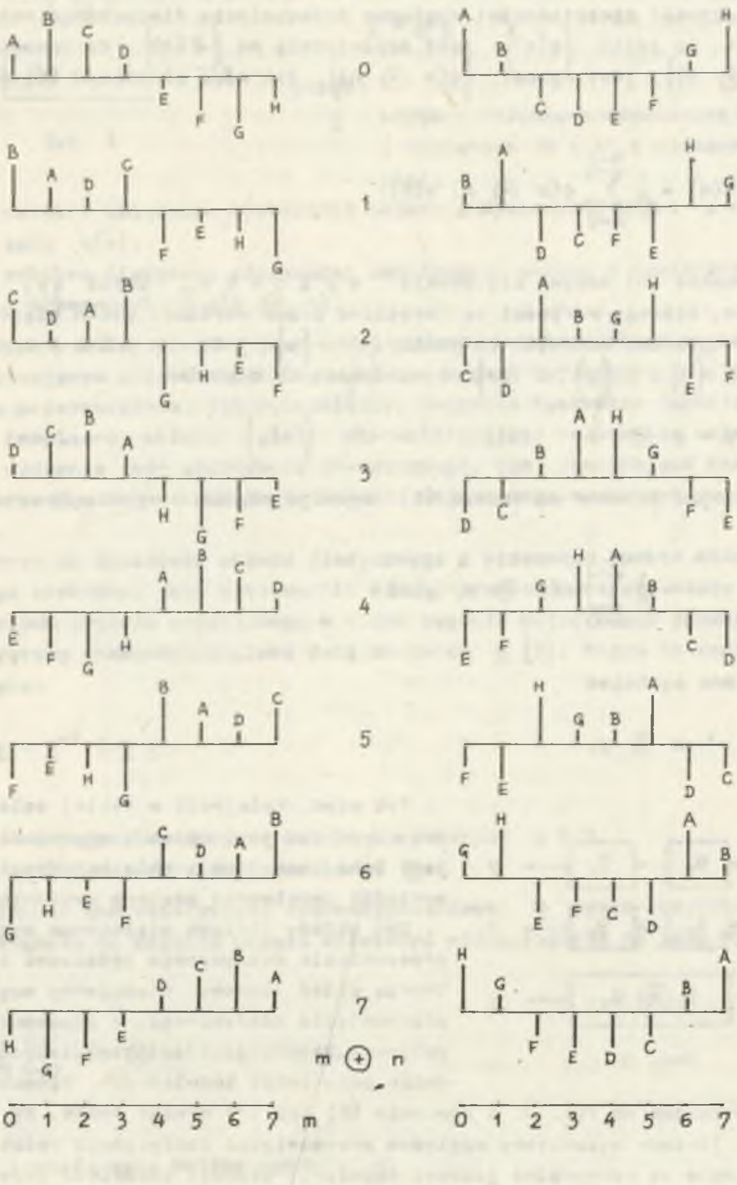
W szczególności niech $\{g(m,n)\}$ będzie odpowiednią układu na ciąg impulsowy $\delta(m \oplus n)$, występujący dla $m = n$. Wówczas z zależności (1) i (4):

$$y(m) = T\left[\sum_{n=0}^{N-1} \delta(m \oplus n)\, x(n)\right].$$

Na podstawie równania (2) można napisać

$$y(m) = \sum_{n=0}^{N-1} T\left[\delta(m \oplus n)\right] x(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(m,n)\, x(n) \tag{5}$$

Zgodnie z zależnością (5) odpowiedź układu na pobudzenie $\{x(n)\}$ można wyrazić w zależności od odpowiedzi układu na $\{\delta(m \oplus n)\}$. Jeśli narzucić tylko warunek liniowości, $g(m,n)$ będzie zależeć zarówno od m jak i od n, a to bardzo ograniczy możliwości obliczenia wyrażenia (5). Znacznie bardziej użyteczne wyniki uzyskuje się, jeśli przyjąć dodatkowo warunek niezmienności względem przesunięcia diadycznego.



Rys. 1

K l a s ę u k ł a d ó w l i n i o w y c h n i e z m i e n n y c h w z g l ę d e m p r z e s u n i ę c i a d i a d y c z n e g o charakteryzuje się przez właściwość, że jeśli $\{y(m)\}$ jest odpowiedzią na pobudzenie $\{x(n)\}$, to $\{y(m \oplus k)\}$ jest odpowiedzią na $\{x(n \oplus k)\}$, gdzie k jest dodatnią liczbą całkowitą [3], [4].

Właściwość niezmienności względem przesunięcia diadycznego nasuwa wniosek, że jeśli $\{g(n)\}$ jest odpowiedzią na $\{\delta(n)\}$, to odpowiedzią na $\{\delta(m \oplus n)\}$ jest wprost $\{g(m \oplus n)\}$. Tak więc zależność (5) przyjmuje postać

$$y(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} g(m \oplus n)\, x(n) \tag{6}$$

Równanie (6) nazywa się zwykle s p l o t e m. Jeśli $\{y\}$ jest ciągiem, którego wartości są określone przez wartości dwóch ciągów $\{g\}$ i $\{x\}$ poprzez wzór (6) to mówimy, że $\{y\}$ jest s p l o t e m d i a d y c z n y m $\{g\}$ z $\{x\}$ i oznaczamy to symbolem

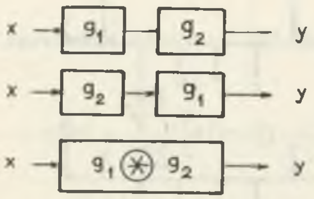
$$y = g \circledast x$$

Zamieniając zmienne we wzorze (6) uzyskuje się inne wyrażenie

$$y(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(m \oplus n)\, g(n) \tag{7}$$

oznaczane symbolem

$$y = x \circledast g.$$

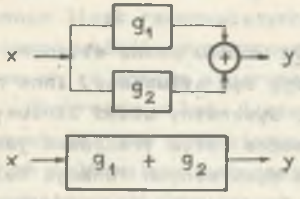


Rys. 2

Tak więc, kolejność w jakiej splata się dwa ciągi nie jest ważna i odpowiedź układu jest taka sama, jeśli role pobudzenia i odpowiedzi impulsowej zostaną zamienione.

Dwa układy liniowe niezmienne względem przesunięcia diadycznego połączone kaskadowo tworzą układ liniowy, niezmienny względem przesunięcia diadycznego, o odpowiedzi impulsowej, która jest splotem diadycznym dwóch odpowiedzi impulsowych. Właściwość ta jest pokazana na rys. 2. Z równania (6) lub (7) wynika także, że dwa układy liniowe niezmienne względem przesunięcia diadycznego połączone równolegle są równoważne jednemu układowi, którego odpowiedź impulsowa jest sumą poszczególnych odpowiedzi impulsowych. Pokazano na na rys. 3.

3. Realizacja diadycznych układów liniowych



Rys. 3

Jak wynika z zapisu (6) równanie splotu diadycznego można wyrazić macierzowo:

$$\underline{y} = \underline{g}\,\underline{x} \tag{8}$$

gdzie:

$\underline{y}$ - macierz kolumnowa odpowiedzi układu o wymiarach $N \times 1$ i elementach $y(m)$,

$\underline{x}$ - macierz kolumnowa wymuszenia układu o wymiarach $N \otimes 1$ i elementach $x(n)$,

$\underline{g}$ - macierz diadyczna odpowiedzi impulsowych układu o wymiarach $N \times N$ i elementach $\frac{1}{N} g(m \oplus n)$.

Diadyczny układ liniowy jest swego rodzaju przetwornikiem sygnału, przetwarzającym sygnał wejściowy $\{x\}$ na sygnał wyjściowy $\{y\}$. O rodzaju tego przetwarzania, jak wykazaliśmy, decyduje dyskretna funkcja odpowiedzi impulsowej układu $\{g(n)\}$ charakteryzująca całkowicie układ z punktu widzenia jego zachowania zewnętrznego, tzn. zawierająca dostateczną informację, aby na podstawie sygnału wejściowego wyznaczyć sygnał wyjściowy.

Patrząc na działanie układu diadycznego z widmowego punktu widzenia, można go traktować jako przetwornik widma, przekształcający widmo sekwencyjnościowe sygnału wejściowego w widmo sygnału wyjściowego zgodnie z charakterystyką sekwencyjnościową daną macierzą $\underline{G}$ [5]. Można to zapisać następująco:

$$\underline{y} = \underline{W}^{-1}\,\underline{G}\,\underline{W}\,\underline{x} \tag{9}$$

gdzie:

$\underline{W}$ - ortogonalne macierz Walsha o wymiarach $N \times N$,

$\underline{W}^{-1}$ - macierz odwrotna do macierzy $\underline{W}$.

Znajomość charakterystyki sekwencyjnościowej $\underline{G}$ wystarcza, aby znając widmo sygnału na wejściu układu wyznaczyć widmo sygnału na jego wyjściu. Zatem

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} g(m \oplus n)\, x(n) \triangleq \underline{G}\,\underline{X} \tag{10}$$

gdzie:

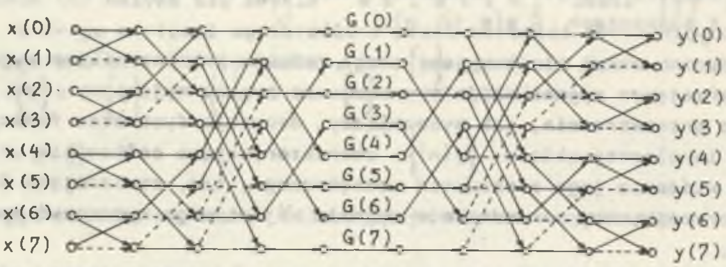
$\underline{X}$ - transformata Walsha sygnału $\underline{x}$.

oraz

$$\underline{g} = \underline{W}^{-1}\ \underline{G}\ \underline{W} \tag{11}$$

W zależności od kształtu charakterystyki $\underline{G}$ układu pewne składowe sekwencyjnościowe widma sygnału wejściowego mogą być stłumione, inne natomiast pozostawione bez zmian lub wzmocnione. Dyskretny układ liniowy niezmienny względem przesunięcia diadycznego można zatem traktować jako cyfrowy filtr sekwencyjnościowy. Z właściwości dyskretnych funkcji Walsha oraz macierzy diadycznych wynika, że macierz $\underline{G}$ odpowiadająca dowolnej macierzy diadycznej jest macierzą diagonalną [6]:

$$\underline{G} = \underline{W}\ \underline{g}\ \underline{W}^{-1} = \mathrm{diag}\left[G(0), G(1), \ldots, G(N-1)\right] \tag{12}$$



$$\underline{G} = \mathrm{diag}\left[G(0), G(1), \ldots, G(7)\right]$$

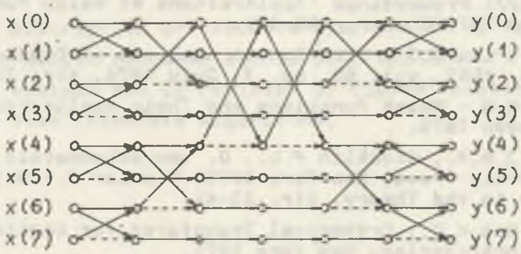
$$\underline{g} = \begin{bmatrix} g(0) & g(1) & g(2) & g(3) & g(4) & g(5) & g(6) & g(7) \\ g(1) & g(0) & g(3) & g(2) & g(5) & g(4) & g(7) & g(6) \\ g(2) & g(3) & g(0) & g(1) & g(6) & g(7) & g(4) & g(5) \\ g(3) & g(2) & g(1) & g(0) & g(7) & g(6) & g(5) & g(4) \\ g(4) & g(5) & g(6) & g(7) & g(0) & g(1) & g(2) & g(3) \\ g(5) & g(4) & g(7) & g(6) & g(1) & g(0) & g(3) & g(2) \\ g(6) & g(7) & g(4) & g(5) & g(2) & g(3) & g(0) & g(1) \\ g(7) & g(6) & g(5) & g(4) & g(3) & g(2) & g(1) & g(0) \end{bmatrix}$$

Rys. 4

Zatem dyskretny układ liniowy niezmienny względem przesunięcia diadycznego jest skalarnym filtrem sekwencyjnościowym i charakteryzuje się tym, że jeśli na jego wejście podany zostanie sygnał będący dyskretną funkcją Walsha, to odpowiedź układu też będzie dyskretną funkcją Walsha o tej samej sekwencyjności. Dyskretny diadyczny układ liniowy opisany zależnością (9) może być realizowany za pomocą algorytmów szybkiej transformacji Walsha w sposób podany na rys. 4 [5].

Ogólnie, złożoność obliczeniowa takiej realizacji wynosi $2N\log_2 N$ operacji dodawania i odejmowania liczb rzeczywistych oraz N operacji mnożenia liczb rzeczywistych i jest znacznie mniejsza od złożoności obliczeniowej układów dyskretnych niezmiennych względem przesunięcia i realizowanych za pomocą algorytmów szybkiej transformacji Fouriera [7].

Dyskretne układy liniowe niezmienne względem przesunięcia diadycznego aproksymujące charakterystyki sekwencyjnościowe za pomocą elementów będących całkowitymi potęgami liczby 2 mogą wykorzystywać algorytmy szybkich transformacji bazujących na układach ortogonalnych funkcji trójwartościowych [8], [9]. Złożoność obliczeniowa takich realizacji jest mniejsza i wynosi jedynie od $4(N-1)$ do $2N\log_2 N-N$ operacji dodawania i odejmowania liczb rzeczywistych. Przykładową realizację przedstawia rys. 5.



$$\underline{G} = \mathrm{diag}\left[1, 1, 1/2, 1/2, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4\right]$$

$$\underline{g} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/8 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 1/8 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Rys. 5

4. Podsumowanie

Największą zaletą przedstawionych w pracy układów liniowych niezmiennych względem przesunięcia diadycznego w porównaniu z układami liniowymi niezmiennymi względem przesunięcia jest ich lepsze przystosowanie do techniki cyfrowej. Dyskretne diadyczne układy liniowe wykorzystując algorytmy szybkiej transformacji Walsha mogą służyć do konstrukcji modeli układów dyskretnych aproksymujących układy liniowe niezmienne względem przesunięcia [10]. Pozwala to na efektywną identyfikację i syntezę systemów liniowych stacjonarnych [11]. Mogą być również zastosowane jako szybkie filtry cyfrowe do przetwarzania sygnałów [12], [13], [14]. Diadyczne układy liniowe bazujące na ortogonalnych funkcjach trójwartościowych okazały się, ze względu na małą złożoność obliczeniową, szczególnie dogodne do cyfrowego przetwarzania sygnałów wielowymiarowych, w tym obrazów cyfrowych [15].

LITERATURA

[1] Harmuth H.F.: Sequency Theory - Foundations and Applications. Academic Press, New York 1977.

[2] Oppenheim A.V., Schafer R.W.: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. WKŁ, Warszawa 1979.

[3] Pichler F.: On State-Space Description of Linear Dyadic-Invariant Systems. 1971 Proceedings "Applications of Walsh Functions", Washington D.C. AD-727000, str. 158-165.

[4] Cheng D.K., Liu J.J.: Time-Domain Analysis of Dyadic-Invariant Systems. Proc. IEEE, vol. 62, no. 7, July 1974, str. 1038-1040.

[5] Beauchamp K.G.: Walsh Functions and Their Applications. Academic Press, London 1975.

[6] Griffiths J.W.R., Stocklin P.L., C. van Schoonevald: Signal Processing. Academic Press, New York 1973; Pichler F.: Walsh Functions-Introduction to the Theory, str. 23-41.

[7] Ahmed N., Rao K.R.: Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing. Springer-Verlag, New York 1975.

[8] Drygajło A.: Zastosowania ortogonalnych funkcji trójwartościowych do analizy widmowej sygnałów dyskretnych. Materiały VI SPETO, Gliwice - Ustroń, 13-16.04.1983, str. 53-62.

[9] Drygajło A.: Zastosowanie szybkich transformacji bazujących na funkcjach schodkowych do przetwarzania sygnałów cyfrowych jedno- i dwuwymiarowych. Praca doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1983.

[10] Pearl J.: Optimal Dyadic Models of Time-Invariant Systems. IEEE Trans. Comp., vol. C-24, no. 6, June 1975, str. 598-603.

[11] Kulesza W.: Widmowa synteza systemów dyskretnych ze szczególnym uwzględnieniem systemów liniowych stacjonarnych. Dodatek do Biuletynu Nr 11 (351) WAT, Warszawa 1981.

[12] Rumatowski K.: Zastosowanie dyskretnych transformacji Walsha i Haara w algorytmach filtracji cyfrowej. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Seria Rozprawy nr 75, Poznań 1976.

[13] Drygajło A., Ihnatowicz J.: Szybkie nierekursywne filtry sekwencyjnościowe jedno- i dwuwymiarowe. VI KK TOiUE, Gliwice-Kozubnik, 19-22.10.1983, str. 269-272.

[14] Harmuth H.F.: Nonsinusoidal Waves for Radar and Radio Communication. Academic Press, New York 1981.

[15] Drygajło A., Ihnatowicz J.: On the Construction of Two-Dimensional Digital Filters by Fast Hadamard-Haar Hybrid Transforms. VI European Conference on Circuit Theory and Design (ECCTD'83), Stuttgart, 6-9 Sept. 1983, str. 450-453.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Kazimierz Mikołajuk

Wpłynęło do redakcji dnie 10 maja 1984 r.

ДИСКРЕТНЫЕ ДИАДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Р е з ю м е

В работе представлено опиоание дискретных инвариантных систем относительно диадного сдвига линейных систем при помощи метода импульсной функции Указано, что диадные линейные системы были реализованы цифровыми скалярными секвентными фильтрами на базе алгоритмов быстрых преобразований.

DISCRETE DYADIC LINEAR SYSTEMS

S u m m a r y

In the paper a description of discrete dyadic-shift-invariant linear systems using unit-sample response method is presented. It is shown, that the dyadic linear systems can be realized by digital scalar sequency filters based on the fast transform algorithms.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 95 Nr kol. 820

Piotr PACANOWSKI

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechnika Śląska

DYSKRETNA REPREZENTACJA UKŁADÓW W OPARCIU O ALGEBRY BANACHA

Streszczenie. W pracy pokazano, że stosowana powszechnie w teorii układów dyskretnych transformacja Z jest przekształceniem Gelfanda w odpowiednio skonstruowanej algebrze Banacha. Pozwala to na zastąpienie transformacji Z ogólniejszym przekształceniem, którego właściwości są dowodzone za pomocą aparatu analizy funkcjonalnej. Został podany przykład ilustrujący użyteczność takiego podejścia.

Wstęp

W teorii układów dyskretnych powszechnie stosowana jest transformacja Z. Posiada ona szereg własności, które są dowodzone na gruncie teorii funkcji analitycznych czy rzeczywistych. Artykuł ten ukazuje związek transformacji Z z przekształceniem Gelfanda, którego własności można badać na gruncie analizy funkcjonalnej. Związek ten pozwala na traktowanie sygnałów dyskretnych jako punktów pewnej przestrzeni unormowanej, w której określone jest ponadto struktura algebry. Umożliwia to wykorzystanie zarówno zależności geometrycznych, jak i algebraicznych do dyskusji tak złożonych obiektów jakimi są zbiory ciągów sygnałów dyskretnych.

Konstrukcja pewnej algebry Banacha:

Niech $P_r(N_+)$ będzie zbiorem sygnałów $x(n)$ o następujących właściwościach

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)|\, r^{-n} < +\infty$$

Określamy w zbiorze $P_r(N_+)$ następujące działanie:

$$(x + y)(n) = x(n) + y(n) \tag{1}$$

$$(\alpha x)(n) = \alpha . x(n)$$

Zachodzi ponadto:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|x(n) + y(n)|\, r^{-n} \leq \sum_{n=0}^{\infty}|x(n)|\, r^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty}|y(n)|\, r^{-n}$$

Wynika stąd, że suma elementów zbioru $P_r(N_+)$ jest także elementem tego zbioru. Tak więc $P_r(N_+)$ jest przestrzenią liniową.
Określamy w $P_r(N_+)$ następujący funkcjonał $\|\cdot\|_r$

$$\|x\|_r := \sum_{n=0}^{\infty}|x(n)|\, r^{-n} \tag{2}$$

Funkcjonał ten jest normą w $P_r(N_+)$, gdyż:

1° $\|x\|_r = 0 \Leftrightarrow x = \{0\}$

2° $\|\alpha x\|_r = \|\alpha\| \cdot \|x\|_r \quad \forall \alpha \in C, \quad x \in P_r(N_+)$

3° $\|x + y\|_r \leq \|x\|_r + \|y\|_r$

Gdy $x(n)$ jest elementem $P_r(N_+)$, to $x(n)r^{-n}$ jest elementem $L(N_+)$ ([1], [2]). Z zupełności przestrzeni $(L(N_+), \|.\|)$ wynika zupełność $(P_r(N_+), \|.\|_r)$.

<u>Wniosek</u>: Zbiór $P_r(N_+)$ z działaniami określonymi wzorami (1) z normą określoną wzorem (2) jest przestrzenią Banacha $(P_r(N_+), \|.\|_r)$. W $P_r(N_+)$ wprowadzamy mnożenie określone wzorem:

$$xy(n) = \sum_{m \in N} x(n-m)y(m) \tag{3}$$

Jest ono odwzorowaniem $P_r(N_+) \times P_r(N_+) \to P_r(N_+)$, gdyż

$$\sum_{n \in N}|xy(n)|\, r^{-n} = \sum_{n \in N}\Big|\sum_{m \in N} x(n-m)y(m)\Big|\, r^{-n} \leq$$

$$\leq \sum_{m \in N} y(m)\, r^{-m} \sum_{n \in N} x(n-m)\, r^{-(n-m)} =$$

$$= \sum_{m \in N}|y(m)|\, r^{-m} \cdot \sum_{n \in N}|x(n)|\, r^{-n}.$$

Jest ono także przemienne, a ponadto zachodzi:

$$\|xy\|_r \leq \|x\|_r \cdot \|y\|_r$$

Mnożenie określone wzorem (3) jest łączne, liniowe ze względu na każdy czynnik z osobna, rozdzielne i przemienne z mnożeniem przez liczby zespolone (własności splotu). Posiada jedność

$$e(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 0 \\ 0 & \text{dla} \quad n \neq 0 \end{cases}$$

a ponadto $\|e\|_r = 1$.

Wniosek: Przestrzeń $(P_r(N_+), \|\cdot\|_r)$ z mnożeniem określonym wzorem (3) tworzy komutatywną algebrę Banacha z jednością [1], [3]. Określenie przekształcenia Gelfanda w $(P_r(N_+), \|\cdot\|_r)$.

Definicja:

Przestrzenią $P^{\infty}_{1/r}(N_+)$ nazywamy zbiór wszystkich sygnałów, dla których

$$\sup_{n \in N} |x(n)| \left(\frac{1}{r}\right)^{-n} < +\infty$$

Twierdzenie:

Przestrzeń sprzężoną do przestrzeni $(P_r(N_+), \|\cdot\|_r)$ można utożsamić z przestrzenią $(P^{\infty}_{1/r}(N_+), \|\cdot\|_{\infty})$, gdzie $\|\cdot\|_{\infty} = \sup_{n \in N} |x(n)|\, r^n$. Ponadto każdy liniowy funkcjonał zadany na $P_r(N_+)$ określony jest wzorem:

$$h(x) = \sum_{n \in N} H(n)\, x(n) = \sum_{n \in N} H'(n) r^{-n}\, x(n)$$

gdzie

$$H(n) \in P^{\infty}_{1/r}(N_+), \quad H'(n) \in L^{\infty}(N_+).$$

Dowód:

Każdy ciąg $x(n)r^{-n}$ jest elementem $L(N_+)$, a jak wiadomo [1], [2] każdy funkcjonał liniowy zadany na $L(N_+)$ ma postać:

$$h(x) = \sum_{n \in N_+} H'(n) r^{-n}\, x(n)$$

gdzie $H'(n) = L^{\infty}(N_+)$. Wobec tego $H'(n)r^{-n} \in P^{\infty}_{1/r}(N_+)$, co kończy dowód.

Jeżeli $x, y \in P_r(N_+)$, to

$$h(x, y) = \sum_{n \in N} H'(n) r^{-n} \sum_{m \in N} x(n-m) y(m)$$

$$h(x, y) = \sum_{n \in N} \sum_{m \in N} H'(n+m) x(n) r^{-n} y(m) r^{-m}$$

Funkcjonał ten jest multiplikatywny wtedy i tylko wtedy, gdy $H'(n) \in L^{\infty}(N_+)$ spełnia równanie funkcyjne:

$$H'(m + n) = H'(m) \cdot H'(n) \tag{4}$$

Jedynym rozwiązaniem tego równania w $L^{\infty}(N_+)$ jest rodzina

$$H'(n) = \chi^{n} \quad \chi \in \overline{K}(0, 1) \tag{5}$$

lub co jest równoważne:

$$H'(n) = \chi^{-n} \quad \chi \in C \setminus K(0, 1)$$

Jest to oczywiste, gdyż w przypadku, gdy $|z| > 1$ (dla 5) to wówczas $H'(n)$ nie byłby elementem przestrzeni $L^{\infty}(N_+)$. Można też przeprowadzić bardziej formalny dowód.

Wobec powyższego każdy homomorfizm (funkcjonał liniowo-multiplikatywny) określony na $P_r(N_+)$, taki że

$$h(x) = \sum_{n \in N_+} \chi^{-n} r^{-n} x(n) = \sum_{n \in N_+} z^{-n} x(n)$$

można utożsamić z określonym punktem $z \in C \setminus K(0, r)$, przy czym zbiór ten wyczerpuje wszystkie tego typu funkcjonały. Przekształcenie Gelfanda ([1], [3]) elementu $x(n) \in P_r(N_+)$ ma postać

$$\hat{x}(z) = h(x) = \sum_{n \in N_+} z^{-n} x(n), \quad z \in C \setminus K(0, r)$$

Czyli przekształcenie Gelfanda danego ciągu przyporządkowuje mu jego transformację Z. Przekształcanie Gelfanda jest tutaj homomorfizmem algebry $(P_r(N_+), \|\cdot\|_r)$ na podalgebrze wszystkich ograniczonych C-wartościowych funkcji zadanych na $C \setminus K(0, r)$. Przykład zastosowania wyprowadzonych związków:

Twierdzenie:

Dla każdej transformaty Z istnieje jednoznacznie wyznaczalna transformata odwrotna określona wzorem:

$$x(n) = \frac{1}{n!}\hat{x}^{(n)}(z), \qquad n \in N_+.$$

Nie istnieją dwa różne ciągi $\{x_n\} \in P_r(N_+)$ posiadające tę samą transformatę Z.

Dowód:

Ponieważ:

$$\mathrm{Ker}(.)^\wedge = \left\{ x \in P_r(N_+) : \bigwedge_{z \in C \setminus K(0,r)} \hat{x}(z) = 0 \right\} = \{0\}$$

algebra $(P_r(N_+), \|\cdot\|_r)$ jest algebrą półprostą [1], [3].
Na mocy odpowiedniego twierdzenia analizy funkcjonalnej [1] odwzorowania $x \to \hat{x}(z)$ dla $z \in C \setminus K(0,r)$ jest izomorfizmem, dbu.

Wnioski:

Dzięki interpretacji transformacji Z jako przekształcenie Gelfanda możemy w teorii układów dyskretnych stosować aparat analizy funkcjonalnej, co może znacznie wzbogacić arsenał środków dostępnych przy analizie czy syntezie układów dyskretnych.

LITERATURA

[1] Siwczyński M.: Zastosowanie algebr Banacha w teorii sygnałów i układów wielowymiarowych. Politechnika Śląska, Elektryka z. 81.

[2] Musielak J.: Wstęp do analizy funkcjonalnej. Warszawa 1976.

[3] Żelazko W.: Algebry Banacha. Warszawa 1967.

[4] Nowomiejski Z.: Transformacja Fouriera. Gliwice 1979.

[5] Jury E.: Transformacja Z i jej zastosowania. Warszawa 1970.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Maciej Siwczyński

Wpłynęło do redakcji dnia 2 maja 1984 r.

ДИСКРЕТНЫИ АНСАМБЛЬ УСТРОИСТВ НА ОСНОВАНИЕ
БАНАХОВЫХ АЛГЕБР

Р е з ю м е

В работе показано, что применяемая всеобще в теории дискретных устройств трансформация Z является преобразованием Гельфанда в алгебре Банаха. Это позваляет на замену трансформации Z более общим преобразованием, свойства которого доказываются при помощи аппарата функционального анализа. Приведён пример иллюстрирующий пригодность такого подхода.

DISCRETE REPRESANTATION OF SYSTEMS BASED
ON BANACH ALGEBRAS

S u m m a r y

In the paper it has been proved that the well known discrete Z transform is the Gelfand transform in a Banach algebra. The Z transform may be substituted by the more general transform whose properties are derived using functional analysis. The example has been given to present advantages of this approach.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 95 Nr kol. 820

Tadeusz GLINKA

Instytut Maszyn i Urządzeń Elektrycznych
Politechnika Śląska

SILNIK PIEZOELEKTRYCZNY

Streszczenie. Nowe materiały piezoelektryczne typu ceramicznego posiadają energetyczny współczynnik sprawności wynoszący kilkadziesiąt procent.

Materiały te umożliwiają budowę elektromechanicznych przetworników energii - silników piezoelektrycznych.

W artykule przedstawiono podstawy budowy i działania silnika piezoelektrycznego, przedstawiono także model takiego silnika i podstawowe jego charakterystyki elektromechaniczne.

1. Wstęp

Zjawisko powstawania indukcji elektrycznej w ciele stałym zachodzące pod wpływem naprężeń mechanicznych, nazywane w fizyce prostym efektem piezoelektrycznym, odkryli w 1880 r. bracia Pierre i Jacques Curie.

Zjawisko powstawania odkształceń materiałów piezoelektrycznych pod wpływem pola elektrycznego, odwrotny efekt piezoelektryczny, został teoretycznie przewidziany przez G. Lippmana, a praktycznie potwierdzony przez braci Curie w 1881 roku.

W praktyce po raz pierwszy kryształy piezoelektryczne zostały wykorzystane w 1917 r. do pobudzania fal akustycznych w wodzie. Odtąd rozpoczyna się okres stosowania kryształów piezoelektrycznych również w innych urządzeniach, np. w układach rezonansowych, generatorach o bardzo stabilnej częstotliwości zmian napięcia, filtrach o bardzo wąskim paśmie częstotliwości i innych.

Coraz powszechniejsze stosowanie kryształów piezoelektrycznych jest czynnikiem wymuszającym rozwój technologii ich otrzymywania, a także stymuluje poszukiwania coraz to nowych materiałów piezoelektrycznych. W układach i przyrządach elektronicznych wykorzystuje się kryształy kwarcu SiO_2, kryształy berlinitu $AlPO_4$ oraz kryształ niobianu litu $LiNbO_3$. Kryształy te cechuje duża stałość parametrów w czasie i w szerokim przedziale temperatury - natomiast mają niską sprawność przetwarzania energii w granicach 1% [1].

Drugą grupę materiałów piezoelektrycznych stanowią materiały ceramiczne. Materiały te cechuje prosta technologia wytwarzania, pozwalająca uzyskiwać próbki o dowolnej wielkości i kształcie. Wadą tych materiałów jest trudność otrzymywania ceramik o powtarzalnych parametrach oraz znacznie mniejsza w porównaniu z kryształami kwarcu, stabilność parametrów w czasie, a także większa zależność ich parametrów od temperatury.

Ceramiki piezoelektryczne mają wysoką sprawność przetwarzania energii mechanicznej na elektryczną dochodzącą do kilkudziesięciu procent.

Wysoka sprawność stanowi główną ich zaletę i stwarza możliwość wykorzystania tych materiałów do budowy elektromechanicznych przetworników energii [2, 3, 4, 5]. Konstruktorzy tych przetworników podają szereg ich zalet:

- duża stabilność prędkości obrotowej lub liniowej,
- prosta budowa w szczególności silnika liniowego,
- proste układy zasilania i sterowania,
- niski poziom hałasów, jeżeli pracują przy częstotliwościach ponad akustycznych.

W Instytucie Maszyn i Urządzeń Elektrycznych Politechniki Śląskiej przeprowadzono także pewne wstępne prace dotyczące przetworników elektromechanicznych piezoelektrycznych [2]. Zbudowano model takiego silnika i przeprowadzono jego badania, co w sposób krótki omówiono w tym artykule.

2. Rezonator piezoelektryczny

Rezonator piezoelektryczny jest to próbka materiału piezoceramicznego określonego kształtu z naniesionymi metalicznymi elektrodami. W przetwornikach elektromechanicznych stosowane są rezonatory piezoelektryczne o kształcie prostopadłościanu lub pierścienia. W rezonatorze pod wpływem przyłożonego przemiennego pola elektrycznego wzbudzane są drgania mechaniczne. Piezoelektryczny rezonator mechanicznie nieobciążony (swobodny), w pobliżu częstotliwości rezonansowej można przedstawić w postaci schematu zastępczego z elementami skupionymi (rys. 1).

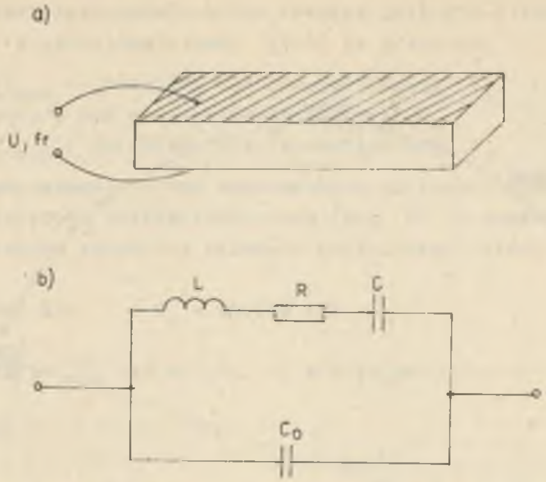
Pojemność C_0 nazywana jest pojemnością statyczną rezonatora, a parametry L, R, C parametrami dynamicznymi, przy czym rezystancja R reprezentuje straty mechaniczne w płytce.

Charakterystyka modułowo-fazowa admitancji rezonatora piezoelektrycznego wynosi

$$\underline{Y} = j\omega C_0 + \frac{1}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = G + jB \tag{1}$$

przy czym

$$G = \frac{\omega^2 C^2 R}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}$$



Rys. 1. Rezonator piezoelektryczny (a) i jego elektryczny schemat zastępczy (b)

$$B = \omega C_0 + \frac{\omega C(1 - \omega^2 LC)}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}$$

i ma kształt zbliżony do okręgu (rys. 2).

Charakterystyka ta może być wykorzystana dla identyfikacji parametrów schematu zastępczego:

Maksimum admitancji $|\underline{Y}_{max}|$ występuje w przypadku tzw. rezonansu szeregowego, to znaczy gdy:

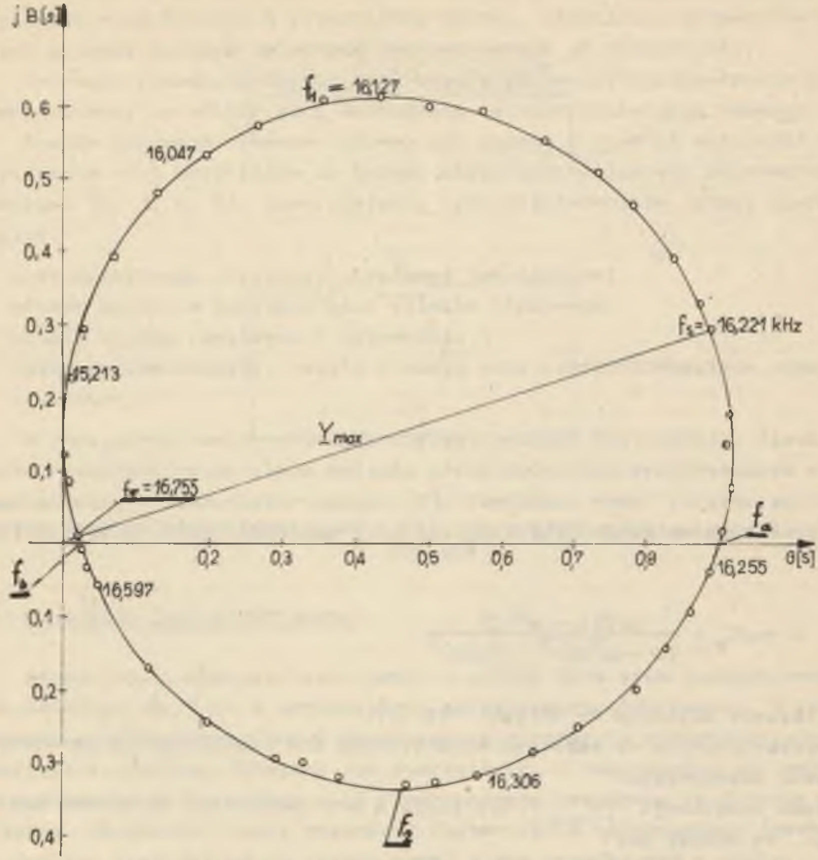
$$j\omega_s L + \frac{1}{j\omega_s C} = 0 \tag{2}$$

$$\omega_s = 2\pi f_s = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\underline{Y}_{max} = \frac{1}{R} + j\omega_s C_0 \tag{3}$$

Minimum admitancji $|\underline{Y}_{min}|$ występuje, gdy zachodzi tzw. rezonans równoległy:

$$j\omega_r L + \frac{1}{j\omega_r C} + \frac{1}{j\omega_r C_0} = 0 \tag{4}$$



Rys. 2. Wykres admitancji płytki piezoelektrycznej

$$2\pi f_r = \omega_r = \sqrt{\frac{C_o + C}{LCC_o}}$$

$$\underline{Y}_{min} = \frac{R}{R^2 + \frac{LC}{C_o(C_o + C)}} + j\left[\sqrt{\frac{1 + \frac{C}{C_o}}{LC}}\, C_o - \frac{\frac{C}{C_o}\sqrt{\frac{L}{C}}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{C}{C_o}}}}{R^2 + C_o(C_o + C)}\right] \qquad (5)$$

Znając z pomiarów wykres modułowo-fazowy rezonatora, można określić metodą graficzną admitancje $\underline{Y}_{max}$ i $\underline{Y}_{min}$ dla częstotliwości rezonansowych f_s i f_r. Z admitancji $\underline{Y}_{max}$ (równanie 3) oblicza się R i C_o, a z admitancji $\underline{Y}_{min}$ (równanie 5) pozostałe dwa parametry płytki L i C.

Parametry schematu zastępczego można również obliczyć z innych punktów charakterystyki częstotliwościowej $\underline{Y}(\omega)$, na przykład:

$B_{max} = (\mathrm{Im}\ \underline{Y})_{max}$ - określoną dla częstotliwości f_1,
$B = 0$ - określoną dla częstotliwości f_a i f_b,
$B_{min} = (\mathrm{Im}\ \underline{Y})_{min}$ - określoną dla częstotliwości f_2.

Dla płytki nieobciążonej, którą wykorzystano do budowy modelu silnika, zdjęto charakterystykę częstotliwościową (rys. 2). W oparciu o tę charakterystykę wyznaczono parametry schematu zastępczego, które wynoszą:

$f_s = 16{,}221$ kHz $\quad f_r = 16{,}755$ kHz

$R = 1{,}084\Omega$; $\quad C_o = 4{,}97\ \mu F$, $\quad C = 0{,}32\ \mu F$

$L = 17$ mH.

Parametry te mogą służyć do doboru generatora zasilającego oraz do obliczeń projektowych przetwornika elektromechanicznego. Płytki piezoelektryczne mają kilka pasm częstotliwości rezonansowych. Podane tutaj pasmo 16 kHz jest pierwszą częstotliwością rezonansową. Druga i wyższe częstotliwości rezonansowe leżą w pasmie znacznie wyższym od częstotliwości akustycznej. Stąd też są częściej wykorzystywane w przetwornikach elektromechanicznych z uwagi na minimalne zakłócenia akustyczne.

3. Piezoelektryczne przetworniki elektromechaniczne

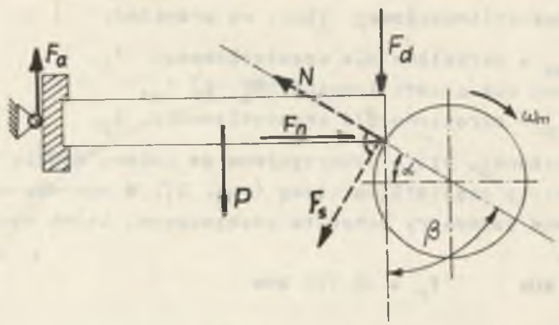
Energia elektryczna dostarczana do płytki piezoelektrycznej jest zamieniana pod wpływem pola elektrycznego na energię drgań mechanicznych. Problem konstrukcji przetwornika elektromechanicznego piezoelektrycznego sprowadza się do zamiany tych drgań w ruch obrotowy lub liniowy.

Obecnie w konstrukcji silników piezoelektrycznych można wyróżnić trzy typy [3]:

- silniki piezoelektryczne z aktywnym stojanem i pasywnym wirnikiem,
- silniki piezoelektryczne z aktywnym wirnikiem i pasywnym stojanem,
- silniki piezoelektryczne z aktywnym wirnikiem i aktywnym stojanem.

Zaprezentowany tutaj zostanie silnik z aktywnym stojanem i pasywnym wirnikiem. Schemat kinematyczny tego silnika podano na rys. 3. Układ pokazany na rys. 3 poddany jest działaniu następujących sił:

F_d - siły docisku płytki do wirnika,
P - siły ciężkości płytki,
F_s - siły reakcji w punkcie zamocowania płytki,
$F_n(t)$ - siły napędzającej.



Rys. 3. Kinematyczny schemat silnika piezoelektrycznego

Wektory sił F_d, P, F_a, F_n na rys. 3 narysowane są linią ciągłą. Siły F_d, P, F_a są siłami stałymi w czasie, natomiast siła F_n jest siłą zmienną sinusoidalnie

$$F_n(t) = F_o \sin\omega t \tag{6}$$

Jeśli płytka piezoelektryczna jest zamocowana wahliwie, to z równania momentów działających w punkcie styku płytki z wirnikiem można obliczyć, że

$$F_a = \frac{1}{2} P \tag{7}$$

W punkcie styczności płytki piezoelektrycznej i wirnika działają dwie siły wypadkowe:

- siła styczna:

$$F_s(t) = F_n(t)\sin\alpha - (F_d + \frac{1}{2} P)\sin\beta \tag{8}$$

- siła normalna:

$$N(t) = F_n(t)\cos\alpha + (F_d + \frac{1}{2} P)\cos\beta \tag{9}$$

Wektory siły $F_s(t)$ i $N(t)$ na rys. 2 są narysowane linią przerywaną. Na rys. 3 pokazano siły $F_s(t)$ i $N(t)$ działające na płytkę piezoelektryczną. Identyczne siły o zwrotach przeciwnych będą działać na wirnik. Pod wpływem siły $\left[-F_s(t)\right]$ będzie odbywał się ruch wirnika. W przedziałach czasu, w których płytka się wydłuża i siła napędzająca ma wartość dodatnią przy odpowiednim kącie α, istnieje możliwość spełnienia warunku:

$$\eta_t\, N(t) \geqslant F_s(t)$$

gdzie

η_t - współczynnik tarcia

i wówczas mamy do czynienia z ruchem płytki i ruchem wirnika bezpoślizgowym. Z warunku tego można obliczyć kąt α styku płytki z normalną do powierzchni wirnika, przy którym nie występuje poślizg. Kąt ten określamy dla amplitudy siły napędzającej, to jest dla chwili $t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$

$$F_n(t_1) = F_o$$

Oznaczając

$$\lambda = \frac{F_d + \frac{1}{2}P}{F_o} \tag{10}$$

oraz

$$\eta_t = \sin\alpha_o \tag{11}$$

a także biorąc pod uwagę, że wartość η_t jest mała $\eta_t \cong 0{,}1$ można założyć, że

$$1 \approx \cos\alpha_o. \tag{12}$$

Przy tym założeniu otrzymuje się wyrażenie na określenie kąta styku α, przy którym nie występuje poślizg, to jest przy którym prędkość liniowa płytki piezoelektrycznej przy jej wydłużaniu się jest równa prędkości obwodowej wirnika.

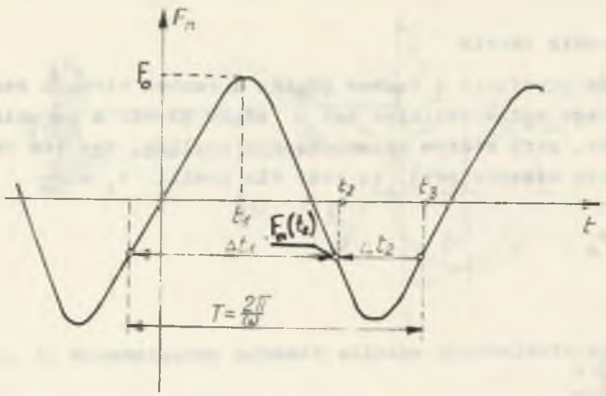
$$\alpha = \arcsin\left[\lambda \sin(\beta + \alpha_o)\right] + \alpha_o \tag{13}$$

Można również określić optymalny stosunek siły docisku i amplitudy siły napędzającej

$$\lambda = \frac{\sin(\alpha - \alpha_o)}{\sin(\beta + \alpha_o)} \tag{14}$$

W półokresach drgań płytki, przy których długość płytki piezoelektrycznej zmniejsza się, kierunek siły napędzającej $F_n(t)$ zmienia się na przeciwny $F_n(t) < 0$, co powoduje zmniejszenie się siły normalnej $N(t)$.
Gdy $N(t)$ zmniejszy się do zera, wówczas nastąpi oderwanie roboczego końca płytki piezoelektrycznej od powierzchni wirnika (rys. 4).

$$N(t_2) = F_n(t_2)\cos\alpha + (F_d + \frac{1}{2}P)\cos\beta = 0 \tag{15}$$



Rys. 4. Przebieg czasowy siły napędzającej $F_n(t)$ płytki piezoelektrycznej przy jej blokadzie mechanicznej

stąd

$$\sin\omega t_2 = \frac{F_d + \frac{1}{2}P}{F_o} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

$$t_2 = \frac{1}{\omega}\left[\pi + \arcsin\frac{F_d + \frac{1}{2}P}{F_o} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right]$$

Natomiast ponowny styk płytki i wirnika nastąpi w czasie narastania $N(t)$ w chwili t_3, gdy $N(t_3) = 0$ (rys. 4).

$$t_3 = \frac{1}{\omega}\left[2\pi - \arcsin\frac{F_d + \frac{1}{2}P}{F_o} \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right]$$

Czas styku płytki piezoelektrycznej z wirnikiem

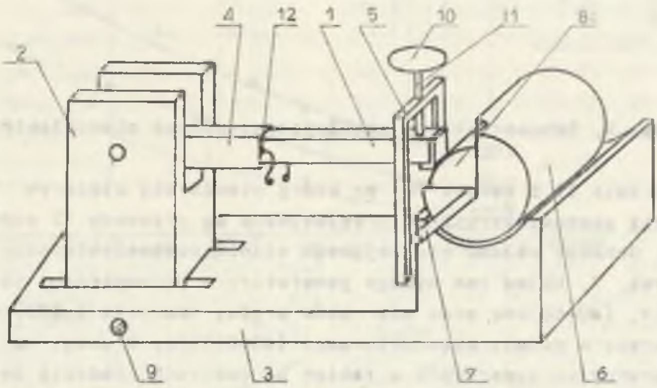
$$\Delta t_1 = \frac{2\pi}{\omega} - \Delta t_2$$

przy czym czas oderwania się końca płytki od wirnika

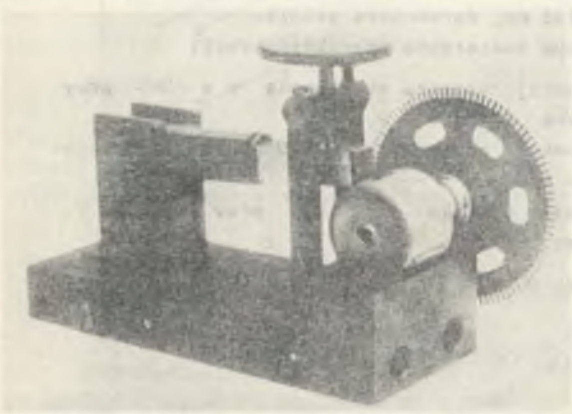
$$\Delta t_2 = t_3 - t_2 = \frac{1}{\omega}\left[\pi - 2\arcsin\frac{F_d + \frac{1}{2}P}{F_o} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right]$$

4. Opis modelu silnika

Szkic konstrukcyjny modelu silnika pokazany jest na rys. 5, a na rys. 6 zdjęcie zbudowanego modelu. Elementem aktywnym jest prostopadłościenna



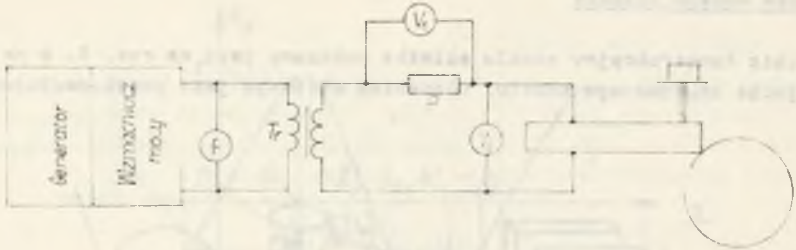
Rys. 5. Szkic konstrukcyjny silnika piezoelektrycznego



Rys. 6. Silnik piezoelektryczny - widok ogólny

płytka piezoelektryczna 1 z metalicznymi elektrodami napylonymi na jej dwóch przeciwległych powierzchniach bocznych. Wielkość płytki warunkowała wybór konstrukcji silnika. Płytka piezoceramiczna umieszczona jest w metalowej obejmie 4 i odizolowana jest od niej folią mikanitową. Obejma łącznie z płytką umieszczona jest wahliwie w trzymadle 2 zamocowanym na podstawie 3. Trzymadło jest blokowane śrubą 9 i można go przesuwać, zmieniając w ten sposób kąt przyłożenia płytki do wirnika. Koniec roboczy płytki piezoceramicznej zakończony jest nasadką ze stali twardej i oparty jest na wirniku stalowym 8.

Wirnik osadzony jest na wałku 7, który jest ułożyskowany za pomocą łożysk ślizgowych samocentrujących się w obudowie 6. Urządzenie dociskające roboczy koniec płytki piezoelektrycznej do wirnika składa się z prowadni-



Rys. 7. Schemat układu zasilającego silnik piezoelektryczny

cy 5, sworznia 11 i tarczy 10, na którą stawia się ciężarek F_d. Do elektrod płytki piezoelektrycznej przylutowane są przewody 12 doprowadzające napięcie. Schemat układu zasilającego silnik piezoelektryczny pokazany jest na rys. 7. Układ ten wymaga generatora o parametrach: około 100 W, (100-300)V, (40-60)kHz oraz mierników prądu, napięcia i mocy przystosowanych do pracy w paśmie częstotliwości (40-60)kHz. Z uwagi na brak w naszym laboratorium generatora o takich parametrach, badania zostały przeprowadzone w paśmie pierwszej częstotliwości rezonansowej płytki, to jest (15-17)kHz. Układ ten z uwagi na transformator dopasowujący Tr nie mógł być wykorzystany w pasmach wyższych częstotliwości rezonansowych. Nie mieliśmy również rozwiązanego zagadnienia pomiaru mocy, co zubożyło pomiary, gdyż nie można było określić np. sprawności silnika.

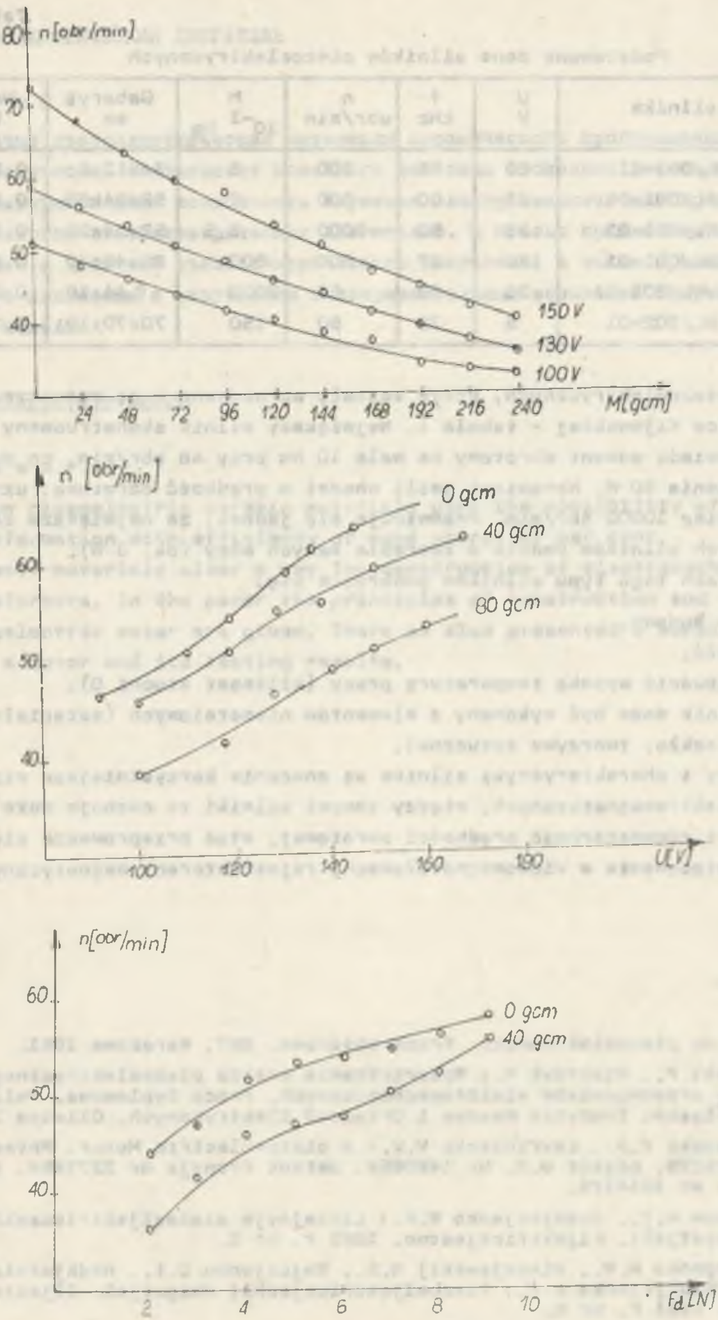
W tym układzie pomiarowym pomierzono charakterystyki:

- prędkości obrotowej w funkcji momentu obciążenia $n = f(M)$ przy $U = const$ i $f = 16{,}3$ kHz i $F_d = 4$ N,
- prędkości obrotowej w funkcji napięcia $n = f(U)$ przy $M = const$ i $f = 16{,}3$ kHz i $F_d = 4$ N,
- prędkości obrotowej od siły docisku $n = f(F_d)$ przy $U = 100$ V, $f = 16{,}3$ kHz i $M = const$,

które przedstawiono na rys. 8.

5. Wnioski

Badania wykazały, że istnieje możliwość wykorzystania materiałów piezoelektrycznych do budowy przetworników elektromechanicznych. Z uwagi na brak w naszych laboratoriach źródeł zasilania o wysokiej częstotliwości i dużej mocy, badania były prowadzone przy dolnej częstotliwości rezonansowej płytki, to jest 16,3 kHz. Częstotliwość zalecana do zasilania silnika winna mieścić się w przedziale częstotliwości ultradźwiękowych (20-200) kHz. Brak watomierza uniemożliwił wykonanie pełnego zakresu badań charakterystyk elektromechanicznych silnika. W literaturze [5] podane są dane



Rys. 8. Charakterystyki silnika piezoelektrycznego

Tabela 1

Podstawowe dane silników piezoelektrycznych

Typ silnika	U V	f kHz	n obr/min	M 10^{-3} Nm	Gabaryt mm	Masa kg
DPE-01, WL/001-01	20	65	300	3	34x13x6	0,005
DPE-0,4, WL/001-01	35	50	600	7	52x24x20	0,035
DPE-0,4, WL/001-02	35	50	2000	2,5	52x24x20	0,035
DPE-1,5, WL/001-01	120	27	600	500	88x40x30	0,080
DPE-0,75, NL/301-01	30	60	60	2000	Φ 44x10	0,080
DPE-0,4, NL/302-01	5	70	60	150	70x70x10	0,150

silników piezoelektrycznych, które zostały opracowane i są wytwarzane w Politechnice Kijowskiej - tabela 1. Największy silnik skonstruowany w tym ośrodku posiada moment obrotowy na wale 10 Nm przy 48 obr/min, co daje moc obciążenia 50 W. Natomiast jeśli chodzi o prędkość obrotową, uzyskano górną granicę 10000 obr/min. Przewiduje się jednak, że największe zastosowanie tych silników będzie w zakresie małych mocy (ok. 3 W).

W zaletach tego typu silników podkreśla się:

- prostotę budowy,
- niepalność,
- można dopuścić wysoką temperaturę pracy (kilkaset stopni C),
- cały silnik może być wykonany z elementów niemetalowych (materiały ceramiczne, szkło, tworzywa sztuczne),
- parametry i charakterystyki silnika są znacznie korzystniejsze niż silników elektromagnetycznych, między innymi silniki te cechuje duża stabilność i równomierność prędkości obrotowej, stąd przeprowadza się próby ich stosowania w videomagnetofonach, rejestratorach magnetycznych itp.

LITERATURA

[1] Wstęp do piezoelektroniki. Praca zbiorowa. WNT, Warszawa 1981.

[2] Migurski P., Pietrzyk W.: Wykorzystanie efektu piezoelektrycznego do budowy przetworników elektromechanicznych. Praca dyplomowa. Politechnika Śląska, Instytut Maszyn i Urządzeń Elektrycznych, Gliwice 1983.

[3] Vishnevski V.S., Lavrinienko V.V.: A piezo-Electric Motor. Patent USA Nr 4019079, patent U.K. Nr 1480864, patent Francja Nr 2277458, patent Canada Nr 1034179.

[4] Trofimow A.I., Jewmjenjenko W.W.: Liniejnyje piezoeljektriczeskije mikrodwigatjeli. Eljektriczjestwo. 1981 r. Nr 5.

[5] Ławrinjenko W.W., Wisznjewskij W.S., Bojczjenko O.Ł., Hadkjernicznyj S.P., Szuljrjenko A.P.: Piezoeljektriczjeskij dwigatjel. Eljektriczjestwo 1981 r. Nr 6.

Recenzent: doc. dr inż. Jerzy Hickiewicz

Wpłynęło do redakcji dnia 2.V.1984 r.

ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДВИГАТЕЛЬ

Р е з ю м е

Новые пьезоэлектрические материалы керамического прогсноэдения имеют энергетический коэффициент полезного действия несколько десятков процент. Эти материалы дают возможность строения электромеханических преобразователей энергии-пьезоэлектрических двигателей. В статье предложены основы постройки и действия пьезоэлектрического двигателя, а также приведены модель такого двигателя и результаты экспериментальных испытаний полученные на этой модели.

PIEZO-ELECTRIC MOTOR

S u m m a r y

New piezoelectric ceramic materiale give the poesibility of energy transformation with efficiency of some scores of per cent.

These materials clear a way for construction of electromechanical transformers. In the paper the principles of construction and action of piezoelectric motor are given. There is also presented a working model of such a motor and its testing results.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 95 Nr kol. 820

Krzysztof KLUSZCZYŃSKI

Instytut Maszyn i Urządzeń Elektrycznych
Politechnika Śląska

HARMONICZNE PRZESTRZENNE PRZEPŁYWU W MASZYNACH ASYNCHRONICZNYCH

Streszczenie. W wielofazowych symetrycznych uzwojeniach maszyn asynchronicznych można rozłożyć wektory napięć i prądów fazowych na składowe, wytwarzające określone ciągi harmonicznych przestrzennych przepływu. W k-osiowym układzie współrzędnych składowe te odpowiadają parom współrzędnych lub pojedynczym współrzędnym. W stanach ustalonych wiążą się ze składowymi symetrycznymi. Model matematyczny uzwojenia w k-osiowym układzie współrzędnych nazwany schematem rozkładu uzwojenia wielofazowego na uzwojenia elementarne w bezpośredni sposób pozwala wyznaczać widmo krzywej przestrzennej przepływu przy różnym zasilaniu i różnych połączeniach faz.

1. Rozkład ortogonalny wektorów prądów i napięć fazowych maszyny asynchronicznej w stanie nieustalonym

W pracach [2], [3] wykazano, że w wielofazowej symetrycznej maszynie asynchronicznej o gładkiej szczelinie powietrznej i liniowym (nienasyconym) obwodzie magnetycznym jest możliwy rozkład ortogonalny wektorów prądów i napięć fazowych stojana, i wirnika na składowe, generujące określone ciągi harmonicznych przestrzennych przepływu (pola magnetycznego) w szczelinie powietrznej maszyny. Rozkład ten szczególnie dogodnie można przedstawić w k-osiowym układzie współrzędnych, wprowadzanym za pomocą macierzy transformacji:

$$\sqrt{\frac{2}{m}}\begin{bmatrix} \cos 0 & \cos\alpha & \cos 2\alpha & \dots & \cos(m-1)\alpha \\ \sin 0 & \sin\alpha & \sin 2\alpha & \dots & \sin(m-1)\alpha \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cos 0 & \cos\frac{m-1}{2}\alpha & \cos 2\frac{m-1}{2}\alpha & \dots & \cos(m-1)\frac{m-1}{2}\alpha \\ \sin 0 & \sin\frac{m-1}{2}\alpha & \sin 2\frac{m-1}{2}\alpha & \dots & \sin(m-1)\frac{m-1}{2}\alpha \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{1}$$

gdy m = liczba nieparzysta, lub

$$\sqrt{\frac{2}{m}}\begin{bmatrix} \cos 0 & \cos\alpha & \cos 2\alpha & \dots & \cos(m-1)\alpha \\ \sin 0 & \sin\alpha & \sin 2\alpha & \dots & \sin(m-1)\alpha \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cos 0 & \cos(\frac{m}{2}-1)\alpha & \cos 2(\frac{m}{2}-1)\alpha & \dots & \cos(m-1)(\frac{m}{2}-1)\alpha \\ \sin 0 & \sin(\frac{m}{2}-1)\alpha & \sin 2(\frac{m}{2}-1)\alpha & \dots & \sin(m-1)(\frac{m}{2}-1)\alpha \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{2}$$

gdy m = liczba parzysta,

gdzie:

m - liczba faz uzwojenia,

$\alpha = \frac{2\pi}{m}$

albowiem poszczególnym składowym rozkładu ortogonalnego odpowiadają wówczas pary lub pojedyncze współrzędne

$$\left[w^{(k)}\right] = \begin{bmatrix} w_1^{(k)} \\ w_2^{(k)} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_3^{(k)} \\ w_4^{(k)} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{m-2}^{(k)} \\ w_{m-1}^{(k)} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ w_m^{(k)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} w_1^{(k)} \\ w_2^{(k)} \\ w_3^{(k)} \\ w_4^{(k)} \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{m-2}^{(k)} \\ w_{m-1}^{(k)} \\ w_m^{(k)} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{składowa } w_1,\ w_1^{(k)} + jw_2^{(k)} = \underline{w}_1^{(k)} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{składowa } w_2,\ w_3^{(k)} + jw_4^{(k)} = \underline{w}_2^{(k)} \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{składowa } w_{\frac{m-1}{2}},\ w_{m-2}^{(k)} \underset{k}{+} jw_{m-1}^{(k)} = \underline{w}_{\frac{m-1}{2}}^{(k)} \\ \quad \text{składowa } w_{\frac{m+1}{2}} \end{array} \tag{3}$$

gdy m = liczba nieparzysta,

lub

$$
w^{(k)} = \begin{bmatrix} w_1^{(k)} \\ w_2^{(k)} \\ w_3^{(k)} \\ w_4^{(k)} \\ \cdot \\ \cdot \\ w_{m-3}^{(k)} \\ w_{m-2}^{(k)} \\ w_{m-1}^{(k)} \\ w_m^{(k)} \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \left.\right\} \text{składowe } w_1,\ w_1^{(k)} + jw_2^{(k)} = \underline{w}_1^{(k)} \\ \left.\right\} \text{składowa } w_2,\ w_3^{(k)} + jw_4^{(k)} = \underline{w}_2^{(k)} \\ \vdots \\ \left.\right\} \text{składowa } w_{\frac{m}{2}-1},\ w_{m-2}^{(k)} + jw_{m-2}^{(k)} = \underline{w}_{\frac{m}{2}-1}^{(k)} \\ \text{składowa } w_{\frac{m}{2}} \\ \text{składowa } w_{\frac{m}{2}+1} \end{array} \tag{4}
$$

gdy m = liczba parzysta.

Jak pokazano powyżej, w miejsce par rzeczywistych współrzędnych k-osiowych, opisujących poszczególne składowe 2-wymiarowe rozkładu ortogonalnego, można wprowadzić współrzędne zespolone (wektory uogólnione, wektory przestrzenne).

2. Rozkład ortogonalny wektorów prądów i napięć fazowych maszyny asynchronicznej w stanie ustalonym

Niechaj w stanie ustalonym przy niesymetrycznym sinusoidalnym zasilaniu uzwojenia wartościom symbolicznym prądów i napięć fazowych $\underline{W}_1$, $\underline{W}_2 \ldots \underline{W}_m$ odpowiadają składowe symetryczne $\underline{W}_1^{(1)}$, $\underline{W}_2^{(1)} \ldots \underline{W}_m^{(1)}$

$$
\begin{bmatrix} \underline{W}_1^{(1)} \\ \underline{W}_2^{(1)} \\ \underline{W}_3^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{W}_m^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 1 & a^{m-1} & a^{m-2} & a^{m-3} & \ldots & a \\ 1 & a^{m-2} & a^{m-4} & a^{m-6} & \ldots & a^2 \\ 1 & a^{m-3} & a^{m-6} & a^{m-9} & \ldots & a^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{W}_1 \\ \underline{W}_2 \\ \underline{W}_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{W}_m \end{bmatrix} \tag{5}
$$

gdzie $a = e^{j\alpha}$.

Można wykazać, że pomiędzy rzeczywistymi i zespolonymi współrzędnymi k-osiowymi (składowymi rozkładu ortogonalnego) i składowymi symetrycznymi zachodzą następujące relacje:

$$
\begin{aligned}
&\underline{w}_1^{(k)}(t) = \underline{W}_1^{(1)} e^{j\omega_o t} + \underline{W}_{m-1}^{(1)} e^{-j\omega_o t}\\
&\underline{w}_2^{(k)}(t) = \underline{W}_2^{(1)} e^{j\omega_o t} + \underline{W}_{m-2}^{(1)} e^{-j\omega_o t}\\
&\vdots\\
&\underline{w}_{\frac{m-1}{2}}^{(k)}(t) = \underline{W}_{\frac{m-1}{2}}^{(1)} e^{j\omega_o t} + \underline{W}_{\frac{m+1}{2}} e^{-j\omega_o t}\\
&w_m^{(k)}(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\ \underline{W}_m^{(1)} e^{j\omega_o t}
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

gdy m = liczba nieparzysta

lub

$$
\begin{aligned}
&\underline{w}_1^{(k)}(t) = \underline{W}_1^{(1)} e^{j\omega_o t} + \underline{W}_{m-1}^{(1)} e^{-j\omega_o t}\\
&\vdots\\
&w_{\frac{m}{2}-1}^{(k)}(t) = \underline{W}_{\frac{m}{2}-1}^{(1)} e^{j\omega_o t} + \underline{W}_{\frac{m}{2}-1}^{(1)} e^{-j\omega_o t}\\
&w_{m-1}^{(k)}(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\ \underline{W}_{\frac{m}{2}}^{(1)} e^{j\omega_o t}\\
&w_m^{(k)}(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\ W_m^{(1)} e^{j\omega_o t}
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

gdy m = liczba parzysta.

Każda składowa 2-wymiarowa rozkładu ortogonalnego jest określona przez dwie składowe symetryczne, zaś 1-wymiarowa - przez jedną składową symetryczną.

3. Schemat rozkładu uzwojenia wielofazowego na uzwojenia elementarne

Podsumowaniem przedstawionych rozważań jest tabela 1, w której zestawiono ciągi harmonicznych przestrzennych przepływu (pola magnetycznego w szczelinie powietrznej) wytwarzanych w stanie nieustalonym przez poszczególne składowe rozkładu ortogonalnego (zespolone i rzeczywiste współrzędne k-osiowe) oraz w stanie ustalonym przez poszczególne składowe symetryczne. Tabelę tę dogodnie można ująć w formę tablicy, której wiersze odpowiadają składowym ortogonalnym rozkładu (3), (4), zaś kolumny - rzędom harmonicznych przestrzennych przepływu. Liczba wierszy równa się liczbie składowych rozkładu ortogonalnego (liczbie zespolonych i rzeczywis-

Tabela 1

Ciągi harmonicznych przestrzennych przepływu generowane przez poszczególne składowe rozkładu ortogonalnego, współrzędne k-osiowe i składowe symetryczne

ciąg	współrzędne k-osiowe	zespolone współ k-osiowe	składowe symetryczne	rzędy harmonicznych przestrzennych przepływu
1	$w_1^{(k)}$ $w_2^{(k)}$	$\underline{W}_1^{(k)}$	$\underline{W}_1^{(l)}, \underline{W}_{m-1}^{(l)}$	1, m-1, m+1, 2m-1, 2m+1, 3m-1, 3m+1...
2	$w_3^{(k)}$ $w_4^{(k)}$	$\underline{W}_2^{(k)}$	$\underline{W}_2^{(l)}, \underline{W}_{m-2}^{(l)}$	2, m-2, m+2, 2m-2, 2m+2, 3m-2, 3m+2...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\frac{m-1}{2}$	$w_{m-2}^{(k)}$ $w_{m-1}^{(k)}$	$\underline{W}_{\frac{m-1}{2}}^{(k)}$	$\underline{W}_{\frac{m-1}{2}}^{(l)}, \underline{W}_{\frac{m+1}{2}}^{(l)}$	$\frac{m-1}{2}, \frac{m+1}{2}, m+\frac{m-1}{2}, 2m-\frac{m-1}{2}, 2m+\frac{m-1}{2}, 3m-\frac{m-1}{2}...$
$\frac{m+1}{2}$	$w_m^{(k)}$		$\underline{W}_m^{(l)}$	m, 2m, 3m, 4m ...

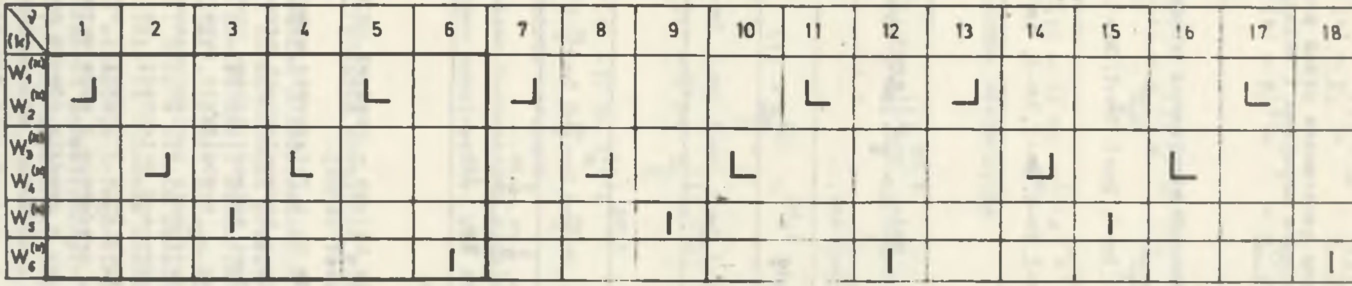
gdy m = l. nieparzysta

ciąg	współrzędne k-osiowe	zespolone współ k-osiowe	składowe symetryczne	rzędy harmonicznych przestrzennych przepływu
1	$w_1^{(k)}$ $w_2^{(k)}$	$\underline{W}_1^{(k)}$	$\underline{W}_1^{(l)}, \underline{W}_{m-1}^{(l)}$	1 m-1, m+1, 2m-1, 2m+1, 3m-1, 3m+1...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\frac{m}{2}-1$	$w_{m-3}^{(k)}$ $w_{m-2}^{(k)}$	$\underline{W}_{\frac{m}{2}-1}$	$\underline{W}_{\frac{m}{2}-1}^{(l)}, \underline{W}_{\frac{m}{2}+1}^{(l)}$	$\frac{m}{2}-1, \frac{m}{2}+1, m+\frac{m}{2}-1, 2m-\frac{m}{2}+1, 3m+\frac{m}{2}-1, 3m-\frac{m}{2}+1...$
$\frac{m}{2}$	$w_{m-1}^{(k)}$		$\underline{W}_{\frac{m}{2}}^{(l)}$	$\frac{m}{2}, \frac{3}{2}m, \frac{5}{2}m, \frac{7}{2}m...$
$\frac{m}{2}+1$	$w_m^{(k)}$		$\underline{W}_m^{(l)}$	m, 2m, 3m, 4m...

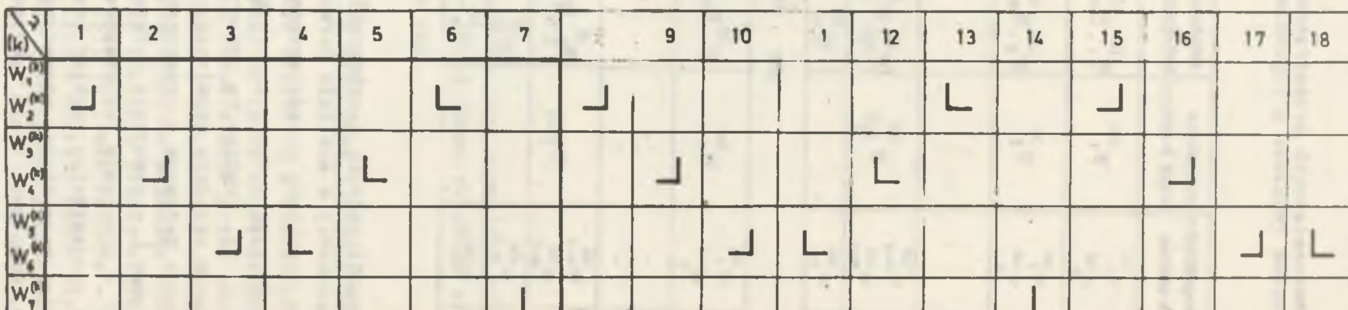
gdy m = l. parzysta

tych współrzędnych k-osiowych), zaś liczba kolumn - rzędowi najwyższej uwzględnianej w analizie harmonicznej przestrzennej.

Dla przykładu przedstawiono tablice dla 6- i 7-fazowego uzwojenia, uwzględniając w obu przypadkach 18 kolejnych harmonicznych przestrzennych (rys. 1, 2). Tablice te odpowiadają modelowi matematycznemu uzwojeń w k-osiowym układzie współrzędnych [3]. Znak ⌋ symbolizuje symetryczne uzwojenie 2-fazowe o prostopadłych i lewostronnie zorientowanych osiach faz, znak ⌊ - uzwojenie 2-fazowe o prawostronnej orientacji osi faz zaś znak | - uzwojenie jednofazowe. Każde z tych 2- i 1-fazowych uzwojeń posiada sinusoidalny rozkład krzywej układu prędowego i może wytwarzać tylko jedną harmoniczną przestrzenną przepływu o rzędzie równym numerowi kolumny. Uzwojenia takie będziemy nazywali uzwojeniami elementarnymi. Odpowiadające sobie fazy uzwojeń elementarnych, zajmujących ten sam wiersz są



Rys. 1. Schemat rozkładu uzwojenia 6-fazowego na uzwojenia elementarne



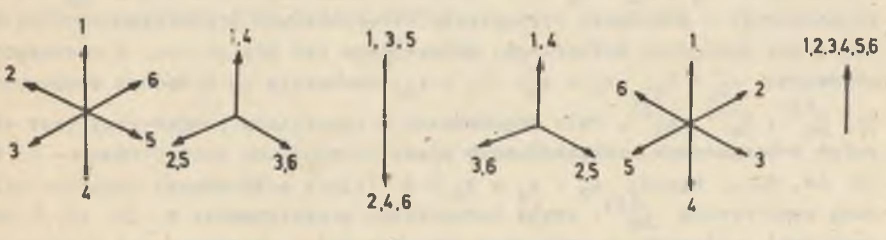
Rys. 2. Schemat rozkładu uzwojenia 7-fazowego na uzwojenia elementarne

szeregowo (galwanicznie) połączone i zasilane kolejnymi współrzędnymi k-osiowymi wektora napięcia. Wszystkie uzwojenia elementarne z danego wiersza tworzą uzwojenie zastępcze dla odpowiedniej składowej rozkładu ortogonalnego (3), (4). Uzwojenia elementarne układają się w obrębie tabeli w cyklicznie powtarzający się charakterystyczny kształt litery V. W przypadku nieparzystej liczby faz wierzchołek litery V jest spłaszczony. Ta regularność w budowie tabel pozwala na ich sporządzanie w sposób mnemotechniczny. Będziemy je nazywać dalej schematami rozkładu uzwojeń na uzwojenia elementarne. Ze schematu rozkładu uzwojenia wielofazowego na uzwojenia elementarne wynika następujący zasadniczy wniosek: wielofazowe uzwojenie symetryczne, (którego poszczególne fazy generują wszystkie harmoniczne przestrzenne przepływu), zasilane kolejnymi składowymi rozkładu ortogonalnego wytwarza pola magnetyczne w szczelinie powietrznej maszyny o rozrzedzonym widmie i różnym rzędzie najniższej harmonicznej przestrzennej. Widmo to jest tym rzadsze, im wyższa jest liczba faza uzwojenia m. Tak więc zarówno w stanie ustalonym jak i nieustalonym, można poprzez odpowiedni dobór składowej napięcia zasilającego uzwojenie wytwarzać w szczelinie powietrznej pola magnetyczne o różnej liczbie par biegunów i w różny sposób odkształcone przez wyższe harmoniczne przestrzenne przepływu.

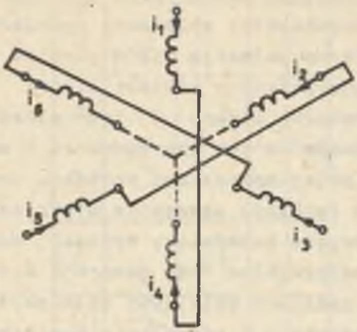
Przedstawione wnioski leżą u podstaw teorii uzwojeń maszyn elektrycznych m.in. w syntetyczny i przejrzysty sposób opisują mechanizm generowania wielobiegunowych pól magnetycznych przez uzwojenia wielofazowe.

4. Przykład

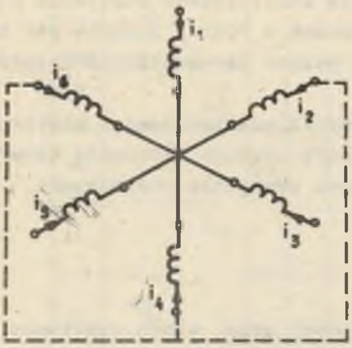
Rozważmy uzwojenie, złożone z 6 jednakowych grup, które traktować będziemy umownie jako uzwojenie 6-fazowe. Zakładamy najogólniejszy przypadek, a mianowicie, że pojedyncza grupa wytwarza wszystkie kolejne harmoniczne przestrzenne przepływu (w rzeczywistości niektóre harmoniczne przestrzenne mogą nie wystąpić na skutek zerowania się współczynnika skrótu lub grupy). Schemat rozkładu uzwojenia 6-fazowego na uzwojenie elementarne przedstawia rys. 1 (rząd najwyższej uwzględnionej harmonicznej przestrzennej wynosi 18), zaś składowe symetryczne 6-fazowe (rys. 3). Uzwoje-



Rys. 3. Składowe symetryczne 6-fazowe



Rys. 4. Uzwojenie 2-biegunowe



Rys. 5. Uzwojenie 4-biegunowe

nie takie, zasilane pierwszą lub piątą składową symetryczną napięcia wytwarza przepływ zawierający harmoniczne przestrzenne 1, 5, 7, 11, 13, 17... Pole magnetyczne w szczelinie powietrznej jest więc polem 2-biegunowym, odkształconym wyższymi harmonicznymi przestrzennymi: 5, 7, 13, 17... W stanie ustalonym pole kołowe wiruje przeciwnie lub zgodnie z ruchem wskazówek zegara w zależności od tego czy uzwojenie jest zasilane pierwszą, czy też piątą składową symetryczną napięcia. Jeśli to samo uzwojenie zasilimy drugą lub czwartą składową symetryczną, w szczelinie powietrznej powstanie pole 4-biegunowe, odkształcone wyższymi harmonicznymi 4, 8, 10, 14, 16,... Uzwojenie, zasilane składową symetryczną trzecią lub szóstą wytwarza pole magnetyczne pulsujące odpowiednio 6-biegunowe (odkształcone przez 3, 9, 15... harmoniczną) lub 12-biegunowe (odkształcone przez 6, 12, 18... harmoniczną). Niezależne fazy uzwojeń można łączyć w węzły i oczka, wykluczając w ten sposób możliwość występowania określonych składowych symetrycznych prądu i napięcia. Połączmy fazy uzwojenia 6-fazowego tak, jak to przedstawiono na rys. 4. Równania węzłów przyjmują postać: $i_1 = -i_4$, $i_2 = -i_5$, $i_3 = -i_6$. Spełniają je prądy składowych symetrycznych: $\underline{I}_1^{(1)}$, $\underline{I}_3^{(1)}$, $\underline{I}_5^{(1)}$. Uzwojenie jest więc uzwojeniem 2-biegunowym, którego rozkład przepływu może być odkształcony wyższymi harmonicznymi - 3, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 17... Węzeł (skojarzenie faz w gwiazdę): $i_2 + i_4 + i_6 = 0$, wyklucza składową symetryczną $\underline{I}_3^{(1)}$ a w konsekwencji - możliwość wystąpienia harmonicznych przestrzennych: 3, 9, 15... Dla uzwojenia 6-fazowego, połączonego tak jak na rys. 5 obowiązują równania: $i_1 = i_4$, $i_2 = i_5$, $i_3 = i_6$. Spełniają je składowe symetryczne: $\underline{I}_2^{(1)}$, $\underline{I}_4^{(1)}$, $\underline{I}_6^{(1)}$. Pole magnetyczne w szczelinie powietrznej jest więc polem 4-biegunowym, odkształconym przez harmoniczne przestrzenne - 4, 8, 10, 14, 16... Węzeł: $i_2 + i_4 + i_6 = 0$ (linia przerywana) wyklucza składową symetryczną $\underline{I}_6^{(1)}$, czyli harmoniczne przestrzenne: 6, 12, 18... Aby umożliwić porównywania widm przepływu uzwojeń o niejednakowej liczbie par biegunów p, rzędy poszczególnych harmonicznych przestrzennych podaje się w odniesieniu do rzędu harmonicznej głównej (pracującej), a więc p-tej:

$$\nu' = \frac{\nu}{p}$$

Porównajmy widma przepływu uzwojeń z rys. 4 i 5. Dla uzwojenia 2-biegunowego, zasilanego składową $\underline{U}_1^{(i)}$ lub $\underline{U}_5^{(i)}$: $\{\nu'\} = \{\nu\} = 1, 5, 7, 10, 11, 13, 17...$ zaś dla uzwojenia 4-biegunowego zasilanego składową $\underline{U}_2^{(i)}$ lub $\underline{U}_4^{(i)}$: $\{\nu\} = 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17...$ Widmo uzwojenia 2-biegunowego jest znacznie rzadsze od widma uzwojenia 4-biegunowego, bowiem nie zawiera parzystych harmonicznych przestrzennych. Takie zróżnicowanie widm jest charakterystyczne dla uzwojeń, posiadających odpowiednio jedną lub dwie strefy fazowe na parę biegunów. Uzwojenia jednowarstwowe z jedną strefą na biegun to uzwojenia z grupami pełnymi, zaś z dwoma strefami na biegun - z grupami dzielonymi. Uzwojenia dwuwarstwowe to zazwyczaj uzwojenia z dwoma strefami fazowymi na parę biegunów. Jeden z wyjątków stanowi uzwojenie silnika 2-biegowego (uzwojenie Dahlandera) przy większej z dwóch możliwych liczb par biegunów.

LITERATURA

[1] Heller B., Hamata V.: Harmonic field effects in induction machines. Academia, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague 1977.

[2] Kluszczyński K.: Przestrzenie aktywne i zerowe macierzy indukcyjności w maszynach asynchronicznych przy uwzględnieniu wyższych harmonicznych przestrzennych pola magnetycznego. Prace X Sympozjum nt.: Metody matematyczne w elektrotechnice, Karpacz 1981.

[3] Kluszczyński K.: Model matematyczny wielofazowej maszyny asynchronicznej. Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej, Elektryka z. 74, Łódź 1983.

[4] Wach P.: Niesymetrie wewnętrzne maszyn indukcyjnych. Zeszyty Naukowe Elektryka z. 19, WSI, Opole 1982.

[5] Zembrzuski J., Kratochwil Z.: Uzwojenia silników indukcyjnych. WNT, Warszawa 1972.

Recenzent: doc. dr inż. Jerzy Hickiewicz

Wpłynęło do redakcji dnia 2 maja 1984 r.

ВЫСШИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ГАРМОНИКИ МАГНИТОДВИЖУЩЕЙ СИЛЫ В АСИНХРОННЫХ МАШИНАХ

Р е з ю м е

В многофазных симметричных обмотках асинхронных машин можно разложить векторы фазных напряжений и токов на составляющие, которые создают определёние ряды пространственных гармоник магнитодвижущей силы. В к-осевой системе координат эти составляющие сооветствуют паром координат или единичным координатам. В установившихся режимах они звязаны с симметричными составляющими. Математическая модель обмотки в к-осевой системе координат, названа схемой разложенния многофазной обмотки на элементарные катушки, непосредственно делает возможным определять спектр гармоник магнитодвижущей силы при разным питании обмотки и разных соединния фаз.

MFF SPACE HARMONICS IN ASYNCHRONOUS MACHINES

S u m m a r y

In polyphase symmetrical windings of asynchronous machines voltage and current vectors can be decomposed into components, generating the definite sequence of MFF space harmonics. These components correspond to the couple and indywidual k-axis coordinates. In steady state orthogonal components refer to symmetrical components. Mathematical model of winding in k-axis coordinate system, so-called the diagram of decomposition of winding into elementary windings allows to obtain the spectrum of MFF harmonics in the case of various phase connections.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 95 Nr kol. 820

Roman MIKSIEWICZ

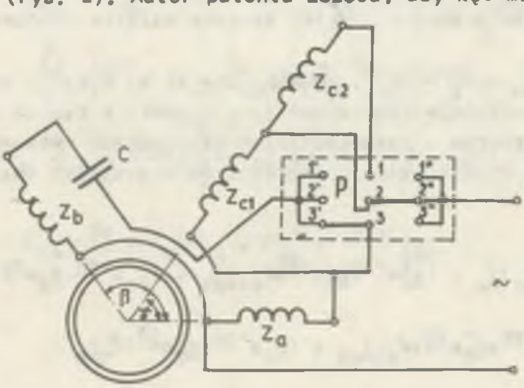
Instytut Maszyn i Urządzeń Elektrycznych
Politechnika Śląska

SILNIK JEDNOFAZOWY O DZIEWIĘCIU UKŁADACH POŁĄCZEŃ UZWOJEŃ STOJANA

Streszczenie. Przeprowadzono analizę i przedstawiono metodę obliczeń obwodu elektromagnetycznego indukcyjnego silnika jednofazowego z kondensatorem pracy umożliwiającym uzyskiwanie dziewięciu różnych charakterystyk mechanicznych. Algorytm obliczeń zweryfikowano pomiarowo na silniku zaprojektowanym w oparciu o przeprowadzoną metodę obliczeń.

1. Wprowadzenie

Silniki indukcyjne jednofazowe z kondensatorem pracy produkcji krajowej posiadają uzwojenia, których osie są przesunięte przestrzennie o kąt elektryczny $\frac{\pi}{2}$. Dotyczy to zarówno silników o uzwojeniach włączonych na stałe (silniki ogólnego zastosowania np. serii SEf), jak również silników o uzwojeniach przełączalnych o dwóch lub trzech prędkościach obrotowych [3]. W pracach [1], [4] omawia się rozwiązania, w których kąt elektryczny między osiami uzwojeń jest różny od $\frac{\pi}{2}$. Daje to lepsze możliwości otrzymania różnych charakterystyk mechanicznych, zwłaszcza w silnikach o przełączalnych uzwojeniach. Wg autora patentu [2] możliwe jest otrzymanie dziewięciu prędkości obrotowych silnika przez zastosowanie tylko dwóch uzwojeń dodatkowych i odpowiednie włączanie tych uzwojeń za pomocą przełącznika P (rys. 1). Autor patentu zaleca, aby kąt między osię fazy

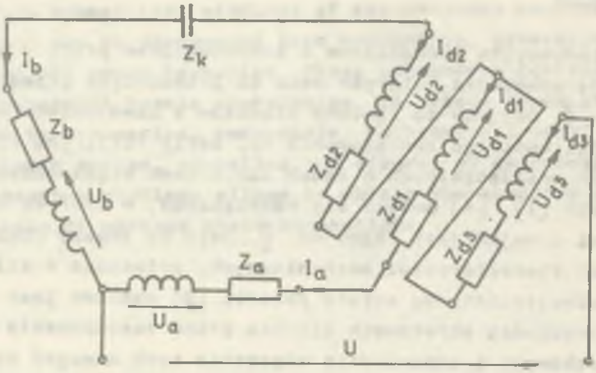


Rys. 1. Układ połączeń silnika o przełączalnych uzwojeniach stojana

głównej i pomocniczej zawierał się w przedziale $15^{\circ}-120^{\circ}$, natomiast kąt między osią fazy głównej, a osią fazy dodatkowej wynosił $20^{\circ}-70^{\circ}$. Celem niniejszej pracy było określenie możliwości uzyskania takiego rozwiązania w oparciu o obwód magnetyczny silnika produkowanego. Należało więc opracować algorytm obliczeń, zaprojektować uzwojenia oraz dokonać weryfikacji pomiarowej.

2. Obliczanie obwodu elektromagnetycznego

Przy opracowywaniu algorytmu obliczeń silnika posłużono się teorią pól wirujących. Przyjęto nienasycony obwód magnetyczny, uwzględniono podstawową harmoniczną przestrzenną, pominięto straty w rdzeniu oraz indukcyjności wzajemne między uzwojeniami związane ze strumieniem rozproszenia. Aby uprościć analizę, zastąpiono rzeczywisty układ połączeń układem równoważnym, pozwalającym na realizację wszystkich układów połączeń uzwojeń silnika rzeczywistego. Schemat takiego układu przedstawia rys. 2.



Rys. 2. Układ połączeń uzwojeń stojana silnika równoważnego

Impedancje $\underline{Z}_i = R_i + jX_{si}$, gdzie: i = a, b, d_1, d_2, d_3 zawierają rezystancje i reaktancje rozproszeń faz. Zgodnie z teorią pól wirujących siły elektromotoryczne w poszczególnych uzwojeniach wytworzone przez pole wirujące zgodnie i przeciwnie pochodzące od wszystkich faz są wyrażone w postaci:

$$\underline{U}_a = (\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)\underline{I}_a + (\underline{Z}_1 e^{-j\gamma}+\underline{Z}_2 e^{j\gamma})\vartheta_{d1}\underline{I}_{d1} + (\underline{Z}_1 e^{-j\gamma}+\underline{Z}_2 e^{j\gamma})\vartheta_{d2}\underline{I}_{d2} +$$

$$+ (\underline{Z}_1 e^{-j\gamma}+\underline{Z}_2 e^{j\gamma})\vartheta_{d3}\underline{I}_{d3} + (\underline{Z}_1 e^{-j\beta}+\underline{Z}_2 e^{j\beta})\vartheta_{b}\underline{I}_{b}$$

$$\underline{U}_b = (\underline{Z}_1 e^{j\beta} + \underline{Z}_2 e^{-j\beta})\vartheta_b \underline{I}_a + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\vartheta_b^2 \underline{I}_b +$$

$$+ (\underline{Z}_1 e^{j(\beta-\gamma)} + \underline{Z}_2 e^{-j(\beta-\gamma)})\vartheta_b \vartheta_{d1} \underline{I}_{d1} +$$

$$+ (\underline{Z}_1 e^{j(\beta-\gamma)} + \underline{Z}_2 e^{-j(\beta-\gamma)})\vartheta_b \vartheta_{d2} \underline{I}_{d2} +$$

$$+ (\underline{Z}_1 e^{j(\beta-\gamma)} + \underline{Z}_2 e^{-j(\beta-\gamma)})\vartheta_b \vartheta_{d3} \underline{I}_{d3}$$

podobnie dla pozostałych uzwojeń,
gdzie:

$$\vartheta_b = \frac{z_b k_{ub}}{z_a k_{ua}}; \quad \vartheta_{d1} = \frac{z_{d1} k_{ud1}}{z_a k_{ua}}; \quad \vartheta_{d2} = \frac{z_{d2} k_{ud2}}{z_a k_{ua}};$$

$\vartheta_{d3} = \dfrac{z_{d3} k_{ud3}}{z_a k_{ua}}$ – przekładnia sprowadzająca uzwojenie danej fazy do fazy odniesienia,

$\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ – impedancje dla składowej zgodnej i przeciwnej.

Korzystając z powyższych wyrażeń oraz równań prądowo-napięciowych obwodu (rys. 2), można wyprowadzić wzory na prądy fazowe:

$$\underline{I}_a = \underline{U} \frac{\underline{Z}_{BB}}{\underline{Z}_{AA}\underline{Z}_{BB} - \underline{Z}_{AB}\underline{Z}_{BA}}$$

$$\underline{I}_b = \underline{U} \frac{\underline{Z}_{BA}}{\underline{Z}_{AA}\underline{Z}_{BB} - \underline{Z}_{AB}\underline{Z}_{BA}}$$

gdzie:

$$\underline{Z}_{AA} = \underline{Z}_a + \underline{Z}_{d1} + \underline{Z}_{d3} + \left[1 + 2(\vartheta_{d1} + \vartheta_{d3})\cos\gamma + (\vartheta_{d1} + \vartheta_{d3})^2\right](\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$$

$$\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{d3} + \left[\vartheta_b e^{-j\beta} + (\vartheta_{d3} - \vartheta_{d2})(1 + \vartheta_{d1} + \vartheta_{d3})e^{-j\gamma} + \right.$$

$$\left. + \vartheta_b(\vartheta_{d1} + \vartheta_{d3})e^{-j(\beta-\gamma)}\right]\underline{Z}_1 + \left[\vartheta_b e^{j\beta} + (\vartheta_{d3} - \vartheta_{d2})\right.$$

$$\left.(1 + \vartheta_{d1} + \vartheta_{d3})e^{j\gamma} + \vartheta_b(\vartheta_{d1} + \vartheta_{d3})e^{j(\beta-\gamma)}\right]\underline{Z}_2$$

$$\underline{Z}_{BA} = \underline{Z}_a + \underline{Z}_{d1} + \Big[1 + 2\vartheta_{d1}\cos\gamma + \vartheta_{d3}e^{-j\gamma} + \vartheta_{d2}e^{j\gamma} -$$

$$- \vartheta_b e^{j\beta} + (\vartheta_{d1} + \vartheta_{d3})(\vartheta_{d1} + \vartheta_{d2} - \vartheta_b e^{j(\beta-\gamma)}\Big]\, \underline{Z}_1 +$$

$$+ \Big[1 + 2\vartheta_{d1}\cos\gamma + \vartheta_{d3}e^{j\gamma} + \vartheta_{d2}e^{-j\gamma} - \vartheta_b e^{j\beta} +$$

$$+ (\vartheta_{d1} + \vartheta_{d3})(\vartheta_{d1} + \vartheta_{d2} - \vartheta_b e^{-j(\beta-\gamma)})\Big]\underline{Z}_2$$

$$\underline{Z}_{BB} = -\underline{Z}_b - \underline{Z}_k - \underline{Z}_{d2} + \Big[2\vartheta_b\vartheta_{d3}\cos(\beta-\gamma) + (\vartheta_{d3}-\vartheta_{d2})(e^{-j\gamma}+\vartheta_{d1}+\vartheta_{d2}) +$$

$$+ \vartheta_b(e^{-j\beta} + \vartheta_{d1}e^{-j(\beta-\gamma)} - \vartheta_{d3}e^{j(\beta-\gamma)}) - \vartheta_b^2\Big]\underline{Z}_1 +$$

$$+ \Big[2\vartheta_b\vartheta_{d2}\cos(\beta-\gamma) + (\vartheta_{d3}-\vartheta_{d2})(e^{j\gamma}+\vartheta_{d1}+\vartheta_{d2}) + \vartheta_b(e^{j\beta}+\vartheta_{d1}e^{j(\beta-\gamma)} -$$

$$- \vartheta_{d3}e^{-j(\beta-\gamma)} - \vartheta_b^2\Big]\underline{Z}_2$$

Prądy składowych zgodnych i przeciwnych:

$$\underline{I}_1 = \Big[1 - e^{-j\gamma}(\vartheta_{d1}+\vartheta_{d3})\Big]\underline{I}_a + \Big[\vartheta_b e^{-j\beta} - (\vartheta_{d2}-\vartheta_{d3})e^{j\gamma}\Big]\underline{I}_b$$

$$\underline{I}_2 = \Big[1 + e^{j\gamma}(\vartheta_{d1}+\vartheta_{d3})\Big]\underline{I}_a + \Big[\vartheta_b e^{j\beta} - (\vartheta_{d2}-\vartheta_{d3})e^{j\gamma}\Big]\underline{I}_b$$

Napięcia składowych zgodnych i przeciwnych:

$$\underline{E}_1 = \underline{I}_1\, \underline{Z}_1$$

$$\underline{E}_2 = \underline{I}_2\, \underline{Z}_2$$

Znając wartości napięć składowych oblicza się indukcję w szczelinie oraz w poszczególnych elementach obwodu magnetycznego. Momenty składowe:

$$M_1 = \frac{p_b}{2\pi f}\, I_1^2\, \mathrm{Re}\left\{\underline{Z}_1\right\}$$

$$M_2 = \frac{p_b}{2\pi f}\, I_2^2\, \mathrm{Re}\left\{\underline{Z}_2\right\}$$

Poszczególnym układom połączeń uzwojeń (rys. 1) odpowiadają następujące położenia przełącznika P, liczby zwojów (przekładnie) i impedancje rozproszeń $\underline{Z}_i$ uzwojeń dodatkowych:

układ 1 - 1-1′ i 1-1″ $\vartheta_{d1} = \vartheta_{c1} + \vartheta_{c2}$, $\vartheta_{d2} = 0$, $\vartheta_{d3} = 0$

$\underline{Z}_{d1} = \underline{Z}_{c1} + \underline{Z}_{c2}$, $\underline{Z}_{d2} = 0$, $\underline{Z}_{d3} = 0$

układ 2 - 1-1′ i 2-2″ $\vartheta_{d1} = \vartheta_{c1}$, $\vartheta_{d2} = \vartheta_{c2}$, $\vartheta_{d3} = 0$

$\underline{Z}_{d1} = \underline{Z}_{c1}$, $\underline{Z}_{d2} = \underline{Z}_{c2}$, $\underline{Z}_{d3} = 0$

układ 3 - 1-1′ i 3-3″ $\vartheta_{d1} = 0$, $\vartheta_{d2} = \vartheta_{c1} + \vartheta_{c2}$, $\vartheta_{d3} = 0$

$\underline{Z}_{d1} = 0$, $\underline{Z}_{d2} = \underline{Z}_{c1} + \underline{Z}_{c2}$, $\underline{Z}_{d3} = 0$

układ 4 - 2-2′ i 1-1″ $\vartheta_{d1} = \vartheta_{c1}$, $\vartheta_{d2} = 0$, $\vartheta_{d3} = \vartheta_{c2}$

$\underline{Z}_{d1} = \underline{Z}_{c1}$, $\underline{Z}_{d2} = 0$, $\underline{Z}_{d3} = \underline{Z}_{c2}$

układ 5 - 2-2′ i 2-2″ $\vartheta_{d1} = \vartheta_{c1}$, $\vartheta_{d2} = 0$, $\vartheta_{d3} = 0$

$\underline{Z}_{d1} = \underline{Z}_{c1}$, $\underline{Z}_{d2} = 0$, $\underline{Z}_{d3} = 0$

układ 6 - 2-2′ i 3-3″ $\vartheta_{d1} = 0$, $\vartheta_{d2} = \vartheta_{c2}$, $\vartheta_{d3} = 0$

$\underline{Z}_{d1} = 0$, $\underline{Z}_{d2} = \underline{Z}_{c2}$, $\underline{Z}_{d3} = 0$

układ 7 - 3-3′ i 1-1″ $\vartheta_{d1} = 0$, $\vartheta_{d2} = 0$, $\vartheta_{d3} = \vartheta_{c1} + \vartheta_{c2}$

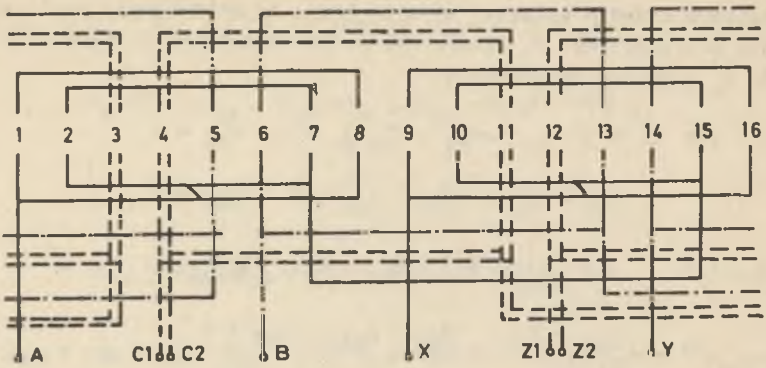
$\underline{Z}_{d1} = 0$, $\underline{Z}_{d2} = 0$, $\underline{Z}_{d3} = \underline{Z}_{c1} + \underline{Z}_{c2}$

układ 8 - 3-3′ i 2-2″ $\vartheta_{d1} = 0$, $\vartheta_{d2} = 0$, $\vartheta_{d3} = \vartheta_{c1}$

$\underline{Z}_{d1} = 0$, $\underline{Z}_{d2} = 0$, $\underline{Z}_{d3} = \underline{Z}_{c1}$

układ 9 - 3-3′ i 3-3″ $\vartheta_{d1} = 0$, $\vartheta_{d2} = 0$, $\vartheta_{d3} = 0$

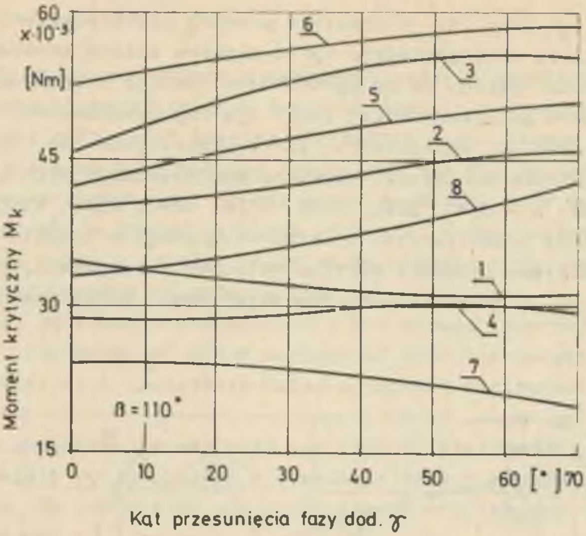
$\underline{Z}_{d1} = 0$, $\underline{Z}_{d2} = 0$, $\underline{Z}_{d3} = 0$.



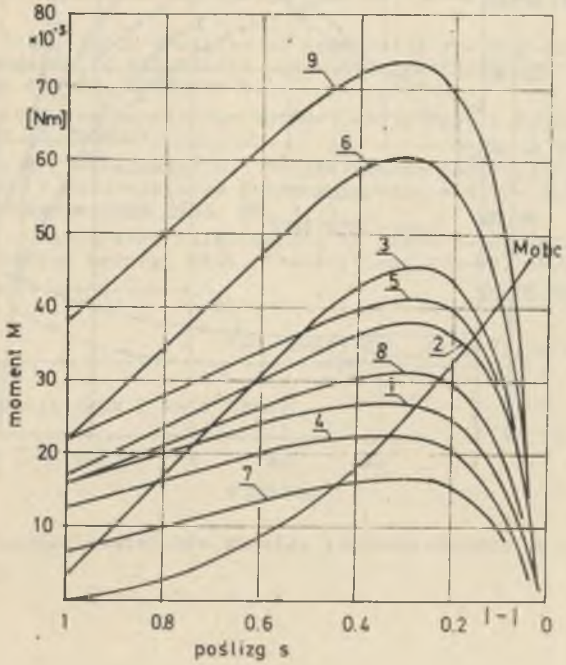
Rys. 3. Schemat uzwojenia stojana $ż_1 = 16$; $2p_b = 2$; $y_a = 7{,}5$; $y_b = 7$; $y_c = 7$

Na podstawie przedstawionych zależności opracowano algorytm i program obliczeń na maszynie cyfrowej umożliwiający zaprojektowanie tego typu silnika. Przyjęto do obliczeń obwód magnetyczny silnika UA-121 produkowanego przez FSMM Silma. Oparcie się o gotowy obwód magnetyczny ogranicza w znacznym stopniu możliwości projektowe, dotyczy to zwłaszcza doboru uzwojenia (rozmieszczenia przestrzennego uzwojeń fazy głównej, pomocniczej i dodatkowych), przy określonej liczbie żłobków stojana. Dla stojana o liczbie żłobków stojana $ż_1 = 16$ zaprojektowano uzwojenie o liczbie biegunów $2p = 2$ (rys. 3), dla którego kąty elektryczne między osiami uzwojeń wynoszą $\beta = 112{,}5^{\circ}$, $\gamma = 67{,}5^{\circ}$. Przy projektowaniu uwzględniono w sposób tradycyjny dla maszyn elektrycznych, nasycenie obwodu magnetycznego oraz straty mechaniczne i straty w rdzeniu.

Zmiennymi niezależnymi zadania projektowego były więc dane nawojowe uzwojeń (liczby zwojów i przekroje przewodów) oraz pojemność kondensatora. Projektowanie polegało na takim doborze danych nawojowych, aby uzyskać możliwie maksymalnie duże zróżnicowanie między charakterystykami mechanicznymi silnika, co przy założonej charakterystyce obciążenia daje różne prędkości obrotowe. Ograniczenia dotyczyły: gęstości prądów w poszczególnych uzwojeniach, napięcia na kondensatorze, indukcji w szczelinie stojan-wirnik oraz zapełnienia żłobków stojana. Dla silników ogólnego zastosowania ograniczenia są sprawdzane przy biegu jałowym i obciążeniu znamionowym. W tym przypadku należało sprawdzać ograniczenia dla każdego z układów połączeń oddzielnie, dla poślizgów określonych przecięciem charakterystyk mechanicznych silnika z charakterystykę obciążenia. Dla przebiegu charakterystyk silnika istotne znaczenie ma oprócz danych nawojowych również dobór kątów między osiami uzwojeń. Jak wykazały obliczenia, największe wartości momentów krytycznych uzyskuje się przy $\beta \approx 90^{\circ}$, natomiast poprzez zmianę przesunięcia uzwojeń dodatkowych (kąt γ) uzyskuje się zmianę wartości momentów krytycznych, wzrost bądź zmniejszenie ze

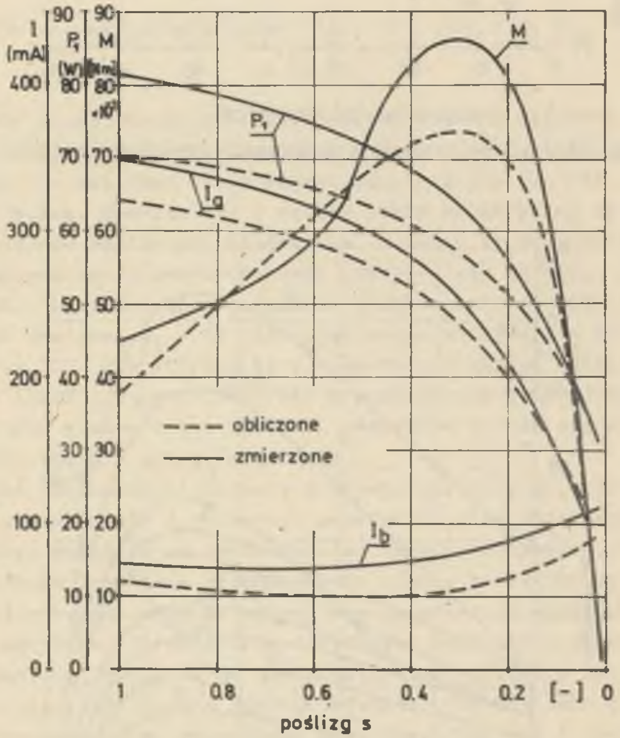


Rys. 4. Momenty krytyczne dla poszczególnych układów przy β = const



Rys. 5. Charakterystyki mechaniczne silnika dla poszczególnych układów połączeń

wzrostem kąta ϑ (rys. 4). W praktyce dowolne przemieszczenie osi uzwojeń nie jest możliwe, mogą zachodzić tylko skokowe zmiany spowodowane użłobkowaniem stojana. Zmiany te są ograniczone również stosunkowo niewielką liczbą żłobków w silnikach małej mocy. Dla zaprojektowanego silnika uzyskano charakterystyki mechaniczne, które przedstawia rys. 5. Przy założonej charakterystyce obciążenia uzyskano dla poszczególnych układów prędkości obrotowe n = 1680, 2010, 2160, 2325, 2490, 2535, 2580, 2700, 2760 obr/min. Badania laboratoryjne silnika wykonanego w oparciu o projekt wykazały zadowalającą zgodność wyników obliczeń z pomiarami. Dla układu połączeń 9 na rys. 6 przedstawiono charakterystyki obliczone i uzyskane z pomiarów.



Rys. 6. Charakterystyki silnika dla układu połączeń 9

3. Wnioski

Stwierdzono, że zastosowanie dodatkowych uzwojeń umożliwia uzyskanie dziewięciu różnych charakterystyk mechanicznych, a w konsekwencji dziewięciu prędkości obrotowych silnika. Wprawdzie przy zmianie tych charakterystyk nie ulega zmianie poślizg krytyczny, ale dla obciążenia typu wentylatorowego przedstawiony sposób zmian prędkości daje zadowalające rezultaty. W praktyce rzadko istnieje potrzeba nastawy dziewięciu prędkości. Eliminując jeden z przełączników można uzyskać trzy grupy, z których każda zawiera trzy różne charakterystyki.

W zależności od rodzaju wentylatora w ten sposób (poprzez zastosowanie odpowiedniego przełączenia) można dostosować charakterystyki silnika do różnych charakterystyk obciążenia celem uzyskania zbliżonych prędkości obrotowych.

Opracowany program obliczeń może być również zastosowany do obliczeń projektowych wielu typów uzwojeń o dowolnych kątach przesunięć między uzwojeniami, w tym również do obliczeń silnika trójfazowego zasilanego z sieci jednofazowej.

LITERATURA

[1] Guru B.S.: Cross-field analysis of asymmetric three-phase induction motors extensions to single-and two-phase machines theoreof. IEEE Transactions PAS-98, 1979, nr 4.

[2] Kohn A.: Perfectionnements aux moteurs monophasés a condensateur 1975, Patent nr 7503024.

[3] Kluszczyński K., Miksiewicz R.: Projektowanie indukcyjnych silników jednofazowych z kondensatorem pracy za pomocą maszyny cyfrowej. Rozprawy Elektrotechniczne 1983, 29, z. 1.

[4] Veinott C.G.: Perforance calculations on L-and T-connected tapped-winding capacitor motors. IEEE, Transactions PAS-96, 1977, nr 4.

Recenzent: doc. dr inż. Jerzy Hickiewicz

Wpłynęło do redakcji dnia 2 maja 1984 r.

ОДНОФАЗНЫЙ ДВИГАТЕЛЬ О ДЕВЯТИ СХЕМАХ
ВКЛЮЧЕНИЯ ОБМОТОК СТАТОРА

Р е з ю м е

Представлен метод расчетов и произведено анализ электромагнитной цепи однофазного индукционного двигателя с рабочим конденсатором. Через соответствующее переключивание обмоток статора этот двигатель делает возможным получение девяти различных механических характеристик. Алгоритм расчетов проверен для двигателя, который был проектирован согласно с разработанным методом расчетов.

SINGLE PHASE CAPACITOR MOTOR WITH NINE
VARIOUS CONNECTIONS OF STATOR WINDINGS

S u m m a r y

The single phase capacitor motor, allowing to obtain nine various torque characteristics has been described. The motor, designed according to presented algorithm of calculation of electromagnetic circuit has been accomplished and tested.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 95 Nr kol. 820

Aleksander FRĘCHOWICZ

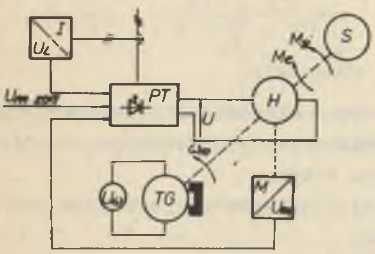
Instytut Elektryfikacji i Automatyzacji Górnictwa
Politechnika Śląska

METODYKA IDENTYFIKACJI PARAMETRÓW MODELU MATEMATYCZNEGO UKŁADU ELEKTROMASZYNOWEGO NA PODSTAWIE JEGO CHARAKTERYSTYKI CZĘSTOTLIWOŚCIOWEJ

Streszczenie. Pomiary i obliczenia parametrów maszyn elektrycznych małej mocy obarczone są znacznym błędem. W artykule, na przykładzie obcowzbudnej hamownicy prądu stałego, przedstawiono metodykę identyfikacji parametrów modelu matematycznego układu elektromaszynowego, na podstawie jego charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej.

1. Wstęp

W artykule przedstawiono metodę identyfikacji parametrów modelu matematycznego układu elektromaszynowego, na przykładzie obcowzbudnej hamownicy prądu stałego, zasilanej przez pełnosterowny wzmacniacz tyrystorowy, przeznaczonej do badań silników indukcyjnych w stanach nieustalonych. Zadaniem hamownicy jest wytworzenie momentu hamującego, regulowanego w trakcie rozruchu badanego silnika indukcyjnego. Schemat ideowy hamownicy przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Schemat ideowy hamownicy wraz z silnikiem badanym

H - hamownica; S - silnik badany; TG - tachoprądnica; PT - przekształtnik tyrystorowy wraz z układami regulacji i sterowania; U_{ω} - miernik prędkości obrotowej; I/U_i - przetwornik prądu; M/U_m - przetwornik momentu

Poprawna synteza układu regulacji hamownicy wymagała wiernego modelu matematycznego. Pomiary i obliczenia parametrów maszyn małej mocy, do których można zaliczyć omawianą hamownicę, obarczone są dużym błędem. Minimalizację tego błędu osiąga się w normalnej praktyce inżynierskiej, przez uzupełnienie podstawowych równań fizycznych maszyny o inne elementy (np. wpływ nasycenia) i szczególnie staranny pomiar parametrów maszyny. W artykule przedstawiono metodykę budowy poprawnego modelu matematycznego układu elektromaszynowego, opartego na podstawowych równaniach fizycznych maszyny prądu stałego, za pomocą obliczeń identyfikacyjnych parametrów modelu. Obliczenia wykonano opierając się na znajomości charakterystyki częstotliwościowej układu.

2. Model matematyczny obwodu twornika harmocnicy

Model matematyczny hamownicy sporządzono wychodząc z podstawowych równań fizycznych obcowzbudnej maszyny prądu stałego 2 , przetworników prądu i wzmacniacza tyrystorowego:

$$M_e(t) = c\Phi I(t) \tag{1}$$

$$E(t) = c\Phi\omega_m(t) \tag{2}$$

$$E(t) - U(t) = R\left[I(t) + T_e \frac{dI(t)}{dt}\right] \tag{3}$$

$$M_s(t) - M_e(t) - M_t(t) = J\frac{d\omega_m(t)}{dt} \tag{4}$$

$$U(t) = C + k_p U_{st}(t) \tag{5}$$

$$U_i(t) = k_i\, I(t) \tag{6}$$

$$M_t(t) = c_t\omega_t \tag{7}$$

W powyższych równaniach użyte symbole oznaczają:

U_{st}, U, U_i – napięcia sterujące wzmacniacza tyrystorowego, wyjściowe wzmacniacza tyrystorowego i wyjściowe przetwornika prądu,
E – napięcie rotacji indukowane w obwodzie twornika hamownicy,
I – prąd twornika hamownicy,
M_e, M_s, M_t – momenty: elektromagnetyczny hamownicy, elektromagnetyczny silnika indukcyjnego, tarcia w łożyskach,
ω_m – prędkość kątowa wirowania zespołu,
R, T_e, $c\Phi$, J, c_t, k_i, k_p – współczynniki stałe.

Uwzględniając ponadto, że maszyna indukcyjna pracuje na stabilnej części charakterystyki mechanicznej opisanej równaniem:

$$M_s = B_1 + B_2\omega_m, \tag{8}$$

transmitancję operatorową obwodu twornika hamownicy można zapisać w postaci:

$$\frac{U_i(p)}{U_{st}(p)} = k_i k_p \frac{\frac{1}{R}\left(1 + p\frac{J}{c_t + B_2}\right)}{\frac{c^2\Phi^2}{R(c_t + B_2)} + 1 + p\left(T_e + \frac{J}{c_t + B_2}\right) + p^2\frac{JT_e}{c_t + B_2}} \tag{9}$$

Stosując podstawienia:

$$T = \frac{J}{c_t + B_2}$$

$$k = \frac{k_i k_p (c_t + B_2)}{c^2\Phi^2 + R(c_t + B_2)} \tag{10}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{R(c_t + B_2) + c^2\Phi^2}{J\,R\,T_e}}$$

$$d = \frac{J + T_e(c_t + B_2)}{2\,J\,T_e\omega_o}$$

Otrzymuje się prostą postać transmitancji operatorowej:

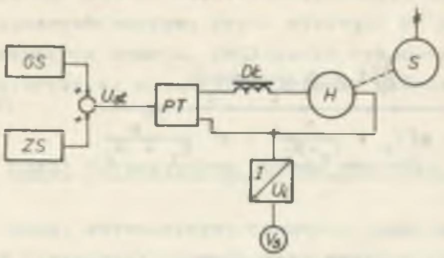
$$\frac{U_i(p)}{U_{st}(p)} = \frac{k(1 + pT)}{1 + p\frac{2d}{\omega_o} + p^2\frac{1}{\omega_o^2}}$$

Na tej podstawie wyprowadzono wyrażenie określające charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową obwodu twornika hamownicy [1]:

$$L_h(\omega) = 20\ \lg k + 10\ \lg(1 + \omega^2 T^2) + \\ + 40\ \lg\omega_o - 10\ \lg\left[(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + (2d\omega_o\omega)^2\right] \tag{11}$$

3. Identyfikacja parametrów modelu matematycznego obwodu twornika hamownicy

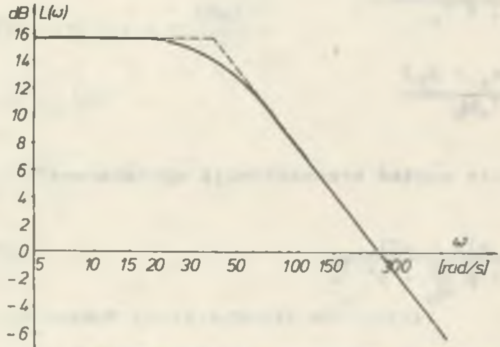
Obliczenia identyfikacyjne parametrów równania (9) przeprowadzono opierając się na znajomości charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej obwodu twornika hamownicy [1]. Schemat układu pomiarowego przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Schemat układu pomiarowego do wyznaczania charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej hamownicy

GS - generator napięcia sinusoidalnego; ZS - zasilacz stabilizowany; Dł - dławik; Vs - woltomierz selektywny

Silnik indukcyjny załączono bez obciążenia momentem hamującym. Po dojściu do prędkości podsynchronicznej ustalono wartość prądu hamującego, wysterowując wzmacniacz tyrystorowy napięciem z zasilacza ZS. Następnie, za pomocą generatora napięcia sinusoidalnego doprowadzono do oscylacji prądu hamującego wokół zadanej wartości średniej. Amplitudę drgań prądu hamownicy zmierzono woltomierzem selektywnym dostrojonym do częstotliwości drgań generatora. Otrzymaną w ten sposób charakterystykę przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa wirującej hamownicy

Przyjmując, że przedstawiona na rys. 3 charakterystyka opisana jest zależnością (11), stwierdzić można, że jest ona funkcją pulsacji ω i czterech parametrów: T, k, ω_o i d lub uwzględniając zależności (9), jest funkcją pulsacji ω i sześciu parametrów: R, J, c_t i B_2, T_e, $c^2\Phi^2$, $k_i k_p$. W pracy przeprowadzono identyfikację sześciu parametrów fizycznych.

Na podstawie pomierzonej charakterystyki (rys. 3) utworzono wektor wartości rzeczywistych $\left[E_r(\omega)\right]$, który obejmuje trzydzieści sześć kolejnych wartości pomierzonej funkcji $L_{hr}(\omega)$ dla trzydziestu sześciu wartości pulsacji ω.

$$\left[E_r(\omega)\right] = \begin{bmatrix} L_{hr}(\omega_1) \\ L_{hr}(\omega_2) \\ \cdots\cdots \\ L_{hr}(\omega_{36}) \end{bmatrix} \tag{12}$$

Dla przyjętych parametrów identyfikowanych: R_i, J_i, $(c_t + B_2)_i$, T_{ei}, $(c^2\Phi^2)_i$, $(k_i k_p)_i$ i trzydziestu sześciu wartości pulsacji ω (tych samych co w wektorze $\left[E_r(\omega)\right]$), obliczono z zależności (11) trzydzieści sześć wartości funkcji $L_h(\omega)$ i utworzono z nich wektor wartości obliczonych $\left[E(\omega)\right]$:

$$\left[E(\omega)\right] = \begin{bmatrix} L_h\left[\omega_1, R_i, J_i, (c_t+B_2)_i, T_{ei}, (c^2\Phi^2)_i, (k_i k_p)_i\right] \\ L_h\left[\omega_2, R_i, J_i, (c_t+B_2)_i, T_{ei}, (c^2\Phi^2)_i, (k_i k_p)_i\right] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_h\left[\omega_{36}, R_i, J_i, (c_t+B_2)_i, T_{ei}, (c^2\Phi^2)_i, (k_i k_p)_i\right] \end{bmatrix} \tag{13}$$

Korzystając za wzorów (12) i (13), obliczono odległość euklidesową między wektorami $\left[E_r(\omega)\right]$ i $\left[E(\omega)\right]$, jako:

$$d^2(E_r, E) = \left[E_r(\omega) - E(\omega)\right]^T \left[E_r(\omega) - E(\omega)\right] \tag{14}$$

Odległość (14) minimalizowano za pomocą maszyny cyfrowej posługując się algorytmem optymalizacyjnym Hooke'a - Jeevesa [4]. Wartość parametrów, dla których odległość (14) osiąga minimum są wartościami szukanymi parametrów modelu matematycznego.

Przeprowadzając obliczenia identyfikacyjna stwierdzono, że obliczone parametry transmitancji obwodu twornika zależą od doboru punktu startowego. Każdy, obliczony w ten sposób zestaw obliczonych parametrów, prowadzi do podobnej charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej, a zatem do zbliżonych własności dynamicznych hamownicy. Właściwość ta stwarza szansę doboru takich parametrów równań (1) - (6), które nie tylko umożliwią zbudowanie poprawnego modelu dynamicznego układu, (symulacja cyfrowa rozruchu zespołu wirującego oraz stany przejściowe zespołu zatrzymanego i wysterowanego, przy współpracy z różnymi typami silników indukcyjnych), ale również zapewnią odpowiednie własności statyczne hamownicy. Spośród sześciu wymienionych parametrów trzy (stałe czasowa T_e, tangens kąta nachylenia części stabilnej charakterystyki mechanicznej B_2 oraz stała hamownicy $c\Phi$) powinny mieć wartość zgodną z rzeczywistą. Próby ustalenia tych trzech parametrów i przeprowadzenia obliczeń identyfikacyjnych za pomocą pozostałych trzech parametrów - nie dawały poprawnego rozwiązania. Również obliczenia umożliwiające drobną korektę trzech parametrów przy zasadniczej zmianie trzech pozostałych - dawały wynik negatywny (wydłużenie czasu obliczeń, charakterystyka otrzymana przy pomocy parametrów obliczonych odbiegała od charakterystyki rzeczywistej). Poprawne wyniki otrzymano dopiero przy założeniu dowolnych zmian czterech parametrów: R, J, k_1k_p oraz $c^2\Phi^2$ i minimalnych zmian współczynników T_e oraz (c_t+B_2). Rozrzut punktów charakterystyki pomierzonej i obliczonej za pomocą parametrów otrzymanych z obliczeń identyfikacyjnych był mniejszy od 0,3 dB. Jako parametry punktu startowego przyjęto rzeczywiste, fizykalne parametry hamownicy.

4. Wyniki obliczeń identyfikacyjnych i symulacyjnych hamownicy

W tabeli 1 zestawiono parametry punktu startowego obliczeń identyfikacyjnych i wartości obliczone tych parametrów. Obliczenia przeprowadzone zostały dla hamownicy wielkości mechanicznej "2B" o danych znamionowych U_n = 220 V, I_n = 4 A, n_n = 3000 obr/min.

Tabela 1

P a r a m e t r		Punkt startowy	Obliczona wartość
R	- rezystancja obwodu twornika	4,3 Ω	5,5 Ω
J	- moment bezwładności mas wirujących	0,0067 kgm^2	0,0062 kgm^2
c_t+B_2	- nachylenie charakterystyki silnika badanego	0,255 Nms	0,2587 Nms
$c^2\Phi^2$	- kwadrat stałego współczynnika	$0{,}64\left(\frac{Nm}{A}\right)^2$	$0{,}43\left(\frac{Nm}{A}\right)^2$
T_e	- elektromagnetyczna stała czasowa	0,0309 s	0,0325 s
k_1k_p	- współczynnik wzmocnienia	45	43,3

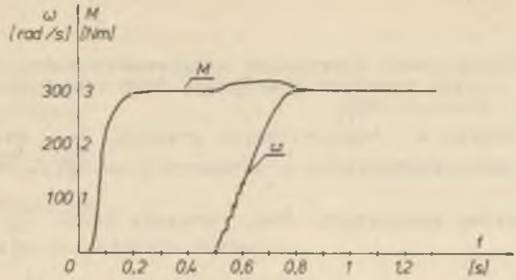
Przyjęcie w modelu matematycznym stałego współczynnika maszyny $c\Phi = \sqrt{c^2\Phi^2} = \sqrt{0{,}43} = 0{,}65$ prowadziłoby do błędnej zależności momentu elektromagnetycznego w funkcji prądu hamownicy. Aby tego uniknąć równania modelu hamownicy (1) i (2) przedstawione w postaci:

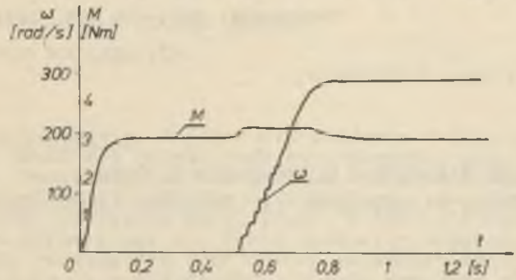
$$M_e(t) = A_1 I(t) \tag{1a}$$

$$E(t) = A_2 \omega_m(t) \tag{2a}$$

Przyjmując: $A_1 = 0{,}8\ \frac{Nm}{A}$ (zgodnie z wartością pomierzoną parametru) otrzymano:

$$A_2 = \frac{0{,}43}{0{,}8} = 0{,}54\ \text{Vs}.$$





Rys. 4. Moment hamujący i prędkość kątowa hamownicy w cyklu pracy a) wielkości obliczone, b) oscylogram przebiegów

Dzięki temu zabiegowi uzyskano poprawne własności dynamiczne modelu ($A_1A_2 = c^2\Phi^2$), a także zgodny z rzeczywistością stosunek momentu elektromagnetycznego do prądu:

$$\frac{M_e(t)}{I(t)} = 0{,}8\ \frac{Nm}{A}.$$

Wyniki obliczeń identyfikacyjnych użyte zostały w programie symulacyjnym do obliczeń cyklu pracy hamownicy. Pełny program symulacji oprócz równań (1) - (6) obejmował równania momentu silnika badanego [3] oraz symulację cyklu hamownicy obejmującego narastanie momentu hamującego zatrzymanego zespołu i rozruch silnika obciążonego momentem hamującym. Na rys. 4 przedstawiono wyniki obliczeń i oscylogram rzeczywistych przebiegów momentu i prędkości obrotowej hamownicy.

LITERATURA

[1] Fręchowicz A.: Właściwości dynamiczne elektromaszynowej hamownicy prądu stałego o stałym momencie hamującym. Rozprawa doktorska. Politechnika Śląska, Gliwice 1983.

[2] Gogolewski Z., Gabryś W.: Maszyny prądu stałego. PWT, Warszawa 1960.

[3] Kopyłow J.P.: Elektromechaniczne przetworniki energii. PWN, Warszawa 1978.

[4] Węgrzyn S.: Podstawy automatyki. PWN, Warszawa 1972.

Recenzent: doc. dr inż. Jerzy Hickiewicz

Wpłynęło do redakcji dnia 2.V.1984 r.

МЕТОДИКА ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОМАШИННОЙ СИСТЕМЫ, НА ОСНОВАНИИ ЕЕ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Р е з ю м е

Измерения и исчисления параметров электрических машин малой мощности обременены значительной ошибкой. В статье на примере тормоза постоянного тока независимого возбуждения, представлена методика идентификации параметров математической модели электромашинной системы, на основании её амплитудно-частотной характеристики.

METHODOLOGY OF PARAMETERS IDENTIFICATION IN A MATHEMATICAL MODEL OF THE ELECTRICAL MACHINES SYSTEM, ON THE BASIS OF ITS FREQUENCY CHARACTERISTICS

S u m m a r y

In the measurements and calculations concerning the parameters of low-power electric machines there often appear considerable errors. The paper, taking as an example dynamometer of direct current, shows the methodology of parameters identification in a mathematical model of the electrical machines system, on the basis of its amplitude- frequency characteristics.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 95 Nr kol. 820

Maciej SIWCZYŃSKI

Politechnika Śląska

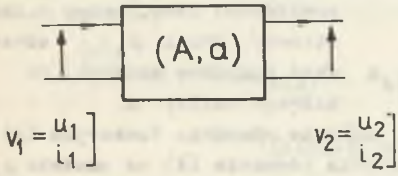
Zuzanna SIWCZYŃSKA

Wyższa Szkoła Inżynierska w Opolu

RÓWNANIA FUNKCYJNE W TEORII UKŁADÓW O PARAMETRACH ROZŁOŻONYCH

Streszczenie. W pracy sformułowano teorię niejednorodnych liniowych obwodów o parametrach rozłożonych z użyciem równań funkcyjnych. Podano ogólne rozwiązania równania funkcyjnego obwodu. Następnie rozpatrzono obwody kawałkami różniczkowalne, kawałkami jednorodne, kawałkami analityczne. W tych przypadkach równanie funkcyjne sprowadzono do równań całkowych obowiązujących na kawałkach. Podano rozwiązanie tych równań całkowych metodą perturbacyjną, metodą kolejnych przybliżeń i metodą szeregów potęgowych. Zaproponowano też metodę faktoryzacji równania funkcyjnego.

1. Czwórniki skupione



Rys. 1. Czwórnik skupiony

Na rysunku 1 pokazano czwórnik skupiony, w którym wektor napięcie - prąd v_1 jest związany z wektorem napięcie - prąd v_2 odwzorowaniem afinicznym (A,a):

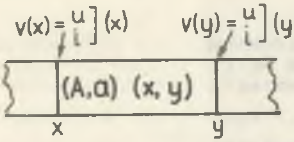
$$v_1 = (A,a)v_2 = Av_2 + a \tag{1}$$

Odwzorowanie to składa się z macierzy łańcuchowej A i wektora źródeł a. Czwórnik nie zawierający źródeł autonomicznych ma zerowy wektor źródeł i będzie nazywany bezźródłowym. Jednostkowe odwzorowanie afiniczne ma postać (I,Θ), gdzie I jest macierzą jednostkową. Złożenie odwzorowań afinicznych, odpowiadające kaskadzie czwórników, odbywa się według wzoru:

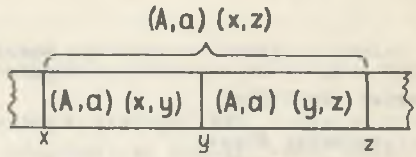
$$(A_1,a_1) \circ (A_2,a_2) = (A_1A_2,\ A_1a_2 + a_1) \tag{2}$$

2. Równania funkcyjne linii

W pokazanym na rys. 2 odcinku linii operator afiniczny wiążący napięcie i prąd w miejscu x z napięciem i prądem w miejscu y zależy od pary (x,y), $0 \leq x \leq y \leq 1$:



Rys. 2. Odcinek linii



Rys. 3. Dwa przylegające odcinki

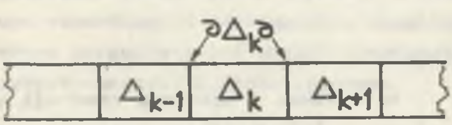
$$v(x) = (A,a)(x,y)v(y) = A(x,y)v(y) + a(x,y). \tag{3}$$

Kaskada widoczna na rys. 3 prowadzi bezpośrednio do równania funkcyjnego, w którym niewiadomą jest operator afiniczny odcinka linii zawartego między przekrojami x,y:

$$(A,a)(x,z) = (A,a)(x,y) \circ (A,a)(y,z), \tag{4}$$

gdzie $x \leqslant y \leqslant z$.

Sformułujemy podstawową własność równania (4). W tym celu dokonamy tzw. <u>regularnego podziału</u> linii dzieląc ją na skończony ciąg rozłącznych, przylegających do siebie otwartych odcinków Δ_k, $k = 1,2,\ldots$ (rys. 4). Symbolami $\partial\Delta_k$, $\Delta_k\partial$, $\partial\Delta_k\partial$ oznaczymy brzegi odcinka Δ_k odpowiednio: lewy, prawy i obustronny. Przez $\Delta_{k(x)}$ oznaczać będziemy odcinek, do którego należy x.



Rys. 4. Regularny podział linii

Niech $x,y,z \in \Delta_k$ i niech $(A,a)_k(x,y)$ spełnia równanie funkcyjne (4) - powiemy też, że funkcja $(A,a)_k(x,y)$ spełnia równanie (4) na odcinku Δ_k. Wówczas funkcja

$$(A,a)(x,y) = (A,a)_{k(x)}(x, \Delta_{k(x)}\partial) \circ (A,a)_{[k(x)+1]}(\partial\Delta_{[k(x)+1]}\partial) \circ \ldots$$

$$\circ (A,a)_{[k(y)-1]}(\partial\Delta_{[k(y)-1]}) \circ (A,a)_{k(y)}(\partial\Delta_{k(y)}, y) \tag{5}$$

jest rozwiązaniem równania (4).

Założenie operatorów afinicznych dane wzorem (2) rozbija równanie (4) na dwa równania funkcyjne

$$A(x,z) = A(x,y)\, A(y,z) \tag{6a}$$

$$a(x,z) = A(x,y)\, a(y,z) + a(x,y). \tag{6b}$$

Widać, że równanie (6a) jest niezależne od (6b). Dlatego równanie (6a) odgrywać będzie dalej rolę zasadniczą.

Ze względów praktycznych dużą rolę odgrywają <u>linie kawałkami różniczkowalne</u>, tj. takie dla których istnieją regularne podziały na odcinki Δ_k, na których funkcje $(A,a)_k(x,y)$ są różniczkowalne. Różniczkując wówczas równania (6) na odcinku Δ_k podług z w punkcie $z = y$ otrzymamy:

$$A'_{k,y}(x,y) = A_k(x,y)H_k(y) \tag{7a}$$

$$a'_{k,y}(x,y) = A_k(x,y)h_k(y) \tag{7b}$$

gdzie

$$H_k(y) = A'_{k,z}(y,y), \quad h_k = a'_{k,z}(y,y) \tag{8a,b}$$

są tzw. <u>tworzącymi</u> macierzy $A_k(x,y)$ i źródła $a_k(x,y)$, będziemy też mówili: tworzącymi na odcinku Δ_k. Tworzące reprezentują rozkłady parametrów i źródeł autonomicznych wzdłuż linii, dlatego uważamy je za znane w procesie analizy obwodu. Funkcje $A_k(x,y)$, $a_k(x,y)$ można wyznaczyć przez rozwiązanie równań różniczkowych (7) przy warunkach początkowych

$$A_k(x,x) = I, \quad a_k(x,x) = \Theta \tag{9a,b}$$

Rozwiązanie równania funkcyjnego (4) dla funkcji kawałkami różniczkowalnych ma postać:

$$\begin{aligned}(A,a)(x,y) = {} & (A,a)_{k(x)}(x, \Delta_{k(x)}^{\partial}) \circ (A,a)(\Delta_{k(x)}^{\partial}, \Delta_{k(x)}^{\partial}) \circ \\ & \circ (A,a)_{[k(x)+1]}({}^{\partial}\Delta_{[k(x)+1]}^{\partial}) \circ (A,a)(\Delta_{[k(x)+1]}^{\partial}, \Delta_{[k(x)+1]}^{\partial}) \circ \quad \ldots \\ & \ldots \circ (A,a)_{[k(y)-1]}({}^{\partial}\Delta_{[k(y)-1]}^{\partial}) \circ (A,a)(\Delta_{[k(y)-1]}^{\partial}\,\Delta_{[k(y)-1]}^{\partial}) \circ \\ & \circ (A,a)_{k(y)}({}^{\partial}\Delta_{k(y)}, y)\end{aligned} \tag{10}$$

Powróćmy do równań (7a,b) dla odcinka Δ_k. Jeżeli znajdziemy rozwiązanie równania (7a), to rozwiązanie równania (7b) można określić wzorem

$$a_k(x,y) = \int_x^y A_k(x,\xi)\, h_k(\xi) d\xi. \tag{11}$$

Odcinek Δ_k nazwiemy <u>wzajemnym</u>, jeżeli nie zawiera on rozłożonych źródeł sterowanych, tj. gdy macierz $H_k(y)$ ma strukturę

$$H_k(y) = \begin{bmatrix} 0 & Z_k \\ Y_k & 0 \end{bmatrix}(y) \tag{12}$$

gdzie Z_k i Y_k to impedancja podłużna i admitancja poprzeczna odcinka na jednostkę długości. Źródła sterowane rozłożone zapełniają miejsca zerowe w macierzy (12). Z tożsamości Jakobiego dla równania (7a) wynika, że dla odcinka wzajemnego

$$\left|A_k(x,y)\right| = e^{\int_x^y tr\left[H_k(\xi)\right]d\xi} = 1 \tag{13}$$

3. Linie z nieznaczną niejednorodnością

Rozważmy odcinek linii, na którym istnieje tworząca $H + \varepsilon F(x)$, gdzie H jest stałą macierzową, a ε małym parametrem. Równanie różniczkowe (7a) na tym odcinku przyjmuje postać:

$$A'_y(x,y) = A(x,y)\left[H + \varepsilon F(y)\right]. \tag{14}$$

Równanie to doprowadzimy do równania całkowego Volterry:

$$A(x,y) = e^{(y-x)H} + \varepsilon \int_0^{y-x} A(x,x+\xi)\ F(x+\xi)e^{(y-x-\xi)H}d\xi \tag{15}$$

Stosując metodę perturbacyjną poszukujemy rozwiązania równania (15) w postaci szeregu potęgowego parametru:

$$A(x,y) = \left[I + \varepsilon A_1(x,y) + \varepsilon^2 A_2(x,y) + \ldots\right] e^{(y-x)H} \tag{16}$$

Podstawiając funkcję (16) do równania (15) łatwo otrzymuje się formuły rekurencyjne dla macierzy $A_n(x,y)$:

$$A_{n+1}(x,y) = \int_0^{y-x} A_n(x,x+\xi)e^{H\xi}F(x+\xi)e^{-\xi H}d\xi, \tag{17}$$

$$A_0(x,y) \equiv I.$$

Poszczególnych funkcji $A_n(x,y)$ będziemy poszukiwać w postaci szeregów

$$A_n(x,y) = (y-x)^n \sum_{m=0}^{\infty} (y-x)^m A_{nm}(x) \tag{18}$$

W tym celu rozwinięto w szereg potęgowy funkcję

$$\begin{aligned} F(x+\xi) &= F_0(x) + \xi F_1(x) + \xi^2 F_2(x) + \dots \\ F_n(x) &= \frac{1}{n!}\left[F^{(n)}(x+\xi)\right]_{\xi=0} \end{aligned} \tag{19}$$

Korzystając ze wzoru Bakera - Campbella - Hausdorffa [2]

$$e^A B e^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2}[A,[A,B]] + \frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]] + \dots$$

gdzie

$$[A,B] = AB - BA$$

jest komutatorem macierzy, mamy kolejne rozwinięcia:

$$\begin{aligned} e^{\xi H}F_0(x)e^{-\xi H} &= F_0(x) + \xi[H,F_0(x)] + \frac{1}{2}\xi^2[H,[H,F_0(x)]] + \\ &+ \frac{1}{3!}\xi^3[H,[H,[H,F_0(x)]]] + \dots \\ e^{\xi H}\xi F_1(x)e^{-\xi H} &= \xi F_1(x) + \xi^2[H,F_1(x)] + \frac{1}{2}\xi^3[H,[H,F_1(x)]] + \\ &+ \frac{1}{3!}\xi^4[H,[H,[H,F_1(x)]]] + \dots \\ e^{\xi H}\xi^2 F_2(x)e^{-\xi H} &= \xi^2 F_2(x) + \xi^3[H,F_2(x)] + \frac{1}{2}\xi^4[H,[H,F_2(x)]] + \\ &+ \frac{1}{3!}\xi^5[H,[H,[H,F_2(x)]]] + \dots \\ \dots \qquad & \qquad \dots \end{aligned}$$

Po zsumowaniu powyższych wzorów otrzymujemy rozwinięcie

$$e^{\xi H}F(x+\xi)e^{-\xi H} = Q_0(x) + \xi Q_1(x) + \xi^2 Q_2(x) + \dots \tag{20}$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
Q_o(x) &= F_o(x)\\
Q_1(x) &= [H, F_o(x)] + F_1(x)\\
Q_2(x) &= \tfrac{1}{2}[H,[H,F_o(x)]] + [H,F_1(x)] + F_2(x)\\
Q_3(x) &= \tfrac{1}{3!}[H,[H,[H,F_o(x)]]] + \tfrac{1}{2}[H,[H,F_1(x)]] + [H,F_2(x)] + F_3(x)\\
&\dots \qquad \dots
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Zanim skorzystamy ze wzoru (17), trzeba wymnożyć szeregi (18) i (20):

$$
\begin{aligned}
&A_n(x,x+\xi)e^{\xi H}F(x+\xi)e^{-\xi H} =\\
&= \xi^n \sum_{m=0}^{\infty} \xi^m A_{nm}(x)\left[Q_o(x) + \xi Q_1(x) + \xi^2 Q_2(x) + \dots\right] =\\
&= \xi^n A_{no}(x)Q_o(x) + \xi^{n+1}\left[A_{n1}(x)Q_o(x) + A_{no}(x)Q_1(x)\right] +\\
&+ \xi^{n+2}\left[A_{n2}(x)Q_o(x) + A_{n1}(x)Q_1(x) + A_{no}(x)Q_2(x)\right] + \dots
\end{aligned}
$$

Wzór (17) daje

$$
\begin{aligned}
A_{n+1}(x,y) = (y-x)^{n+1}\Big\{ &\frac{1}{n+1} A_{no}(x)\, Q_o(x) +\\
&+ (y-x)\frac{1}{n+2}\left[A_{n1}(x)\, Q_o(x) + A_{no}(x)\, Q_1(x)\right] +\\
&+ (y-x)^2 \frac{1}{n+3}\left[A_{n2}(x)\, Q_o(x) + A_{n1}(x)\, Q_1(x) +\right.\\
&\left. + A_{no}(x)\, Q_2(x)\right] + \dots \Big\}
\end{aligned}
$$

Stąd łatwo określić wzór rekurencyjny dla macierzy - współczynników szeregu (18):

$$
A_{n+1,m}(x) = \frac{1}{n+1+m} \sum_{p=0}^{m} A_{n,m-p}(x)\, Q_p(x), \tag{22}
$$

przy czym

$$
A_{oo}(x) = I, \quad A_{om}(x) \equiv \Theta, \quad \text{dla} \quad m > 0.
$$

4. Linie kawałkami analityczne

Linią kawałkami analityczną nazywamy linię, dla której istnieje podział regularny taki, że na poszczególnych odcinkach tego podziału istnieje tworząca rozwijalna w odpowiednio zbieżne szeregi potęg przyrostów argumentu x. Weźmy pod uwagę odcinek Δ linii, na którym istnieje tworząca $H + F(x)$, gdzie H jest macierzą niezależną od x.

Równanie (7a) ma w tym przypadku postać:

$$A'_y(x,y) = A(x,y)\left[H + F(y)\right] \tag{23}$$

Równanie (23) łatwo doprowadzić do równania całkowego Volterry:

$$A(x,y) = e^{(y-x)H} + \int_0^{y-x} A(x,x+\xi)\ F(x+\xi)\ e^{(y-x-\xi)H} d\xi \tag{24}$$

Rozważmy równanie (24) z punktu widzenia zasady odwzorowań zwężających. Niech $\mathcal{B}$ będzie takim ciągłym operatorem przekształcającym przestrzeń metryczną $\mathcal{R}$ w siebie, że pewna jego potęga $\mathcal{D} = \mathcal{B}^n$ jest zwężeniem, wówczas równanie

$$x = \mathcal{B}(x)$$

ma w $\mathcal{R}$ jednoznaczne rozwiązanie. Istotnie, niech x będzie punktem stałym operatora $\mathcal{D}$, tj. $\mathcal{D}(x) = x$.

Wtedy

$$\mathcal{B}\ (x) = \mathcal{B}\left[\mathcal{D}^k(x)\right] = \mathcal{D}^k\left[\mathcal{B}\ (x)\right] = \mathcal{D}^k(x_0) \rightarrow x, \quad (k \rightarrow \infty)$$

ponieważ operator $\mathcal{D}$ jest zwężeniem i dlatego ciąg

$$\mathcal{D}(x_0),\ \mathcal{D}^2(x_0),\ \mathcal{D}^3(x_0), \ldots$$

dla dowolnego $x_0 \in \mathcal{R}$ dąży do punktu stałego x operatora $\mathcal{D}$. Zatem $\mathcal{B}(x) = x$. Ten punkt stały jest jedyny, gdyż dowolny punkt stały względem $\mathcal{B}$ jest stały również względem operatora zwężającego $\mathcal{B}^n$, dla którego punkt stały może być tylko jeden. Niech

$$\left[\mathcal{B}(A)\right]\ (x,y) = e^{(y-x)H} + \int_0^{y-x} A(x,x+\xi)\ F(x+\xi)\ e^{(y-x-\xi)H} d\xi \tag{25}$$

Jest to więc operator równania (24). Zbadamy istnienie i jednoznacznośc rozwiązania równania (24) w przedziale: $x, y \in \Delta$.

Metrykę wprowadzimy następująco:

$$\rho(A_1,A_2) = \max_{x,y\in\Delta} \|A_1(x,y) - A_2(x,y)\|$$

gdzie $\|\cdot\|$ jest zwykłą normą macierzy $A = [a_{ij}]$, $i,j = 1,\ldots,N$

$$\|A\| = \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|.$$

Wykażemy, że pewna potęga operatora (25) jest zwężeniem:

$$\|[\mathcal{B}(A_1)](x,y) - [\mathcal{B}(A_2)](x,y)\| =$$

$$= \left\| \int_0^{y-x} [A_1(x,x+\xi) - A_2(x,x+\xi)] F(x+\xi) e^{(y-x-\xi)H} d\xi \right\| \le$$

$$\le \mu(y-x) \max_{x,y\in\Delta} \|A_1(x,y) - A_2(x,y)\| = \mu(y-x)\,\rho(A_1,A_2),$$

gdzie

$$\mu = \max_{x,y\in\Delta} \|F(x)e^{(y-x)H}\|.$$

Stąd

$$\left\|[\mathcal{B}^2(A_1)](x,y) - [\mathcal{B}^2(A_2)](x,y)\right\| \le \mu^2 \frac{(y-x)^2}{2} \rho(A_1,A_2)$$

$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$

$$\left\|[\mathcal{B}^n(A_1)](x,y) - [\mathcal{B}^n(A_2)](x,y)\right\| \le \mu^n \frac{(y-x)^n}{n!} \rho(A_1,A_2)$$

Zatem:

$$\rho\left[\mathcal{B}^n(A_1), \mathcal{B}^n(A_2)\right] \le \frac{(\mu|\Delta|)^n}{n!} \rho(A_1,A_2)$$

gdzie $|\Delta|$ oznacza długość odcinka Δ. Wynika stąd, że zawsze można wybrać na tyle duże n, aby

$$\frac{(\mu|\Delta|)^n}{n!} < 1,$$

Czyli $\mathcal{B}^n$ jest zwężeniem i równanie (24) posiada jednoznaczne rozwiązanie, które jest granicą ciągu danego wzorem:

$$A_{n+1}(x,y) = e^{(y-x)H} + \int_0^{y-x} A_n(x,x+\xi)\ F(x+\xi)\ e^{(y-x-\xi)H}d\xi \tag{26}$$

W celu dalszej analizy równania (24) wprowadzimy pojęcie szeregu absolutnie δ - zbieżnego. Szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n A_n, \tag{27}$$

gdzie A_n są stałymi macierzami, nazywamy absolutnie δ - zbieżnym, jeżeli istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla każdego $|x| < \delta$ szereg liczbowy

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x|^n \|A_n\| \tag{28}$$

jest zbieżny. Szczególnym przypadkiem jest szereg absolutnie zbieżny, dla którego przy wszystkich x szereg (28) jest zbieżny. Łatwo przekonać się, że szeregi

$$e^{xA},\ \cos(xA),\ \sin(xA)$$

są przykładami szeregów absolutnie zbieżnych. Oczywiście wielomian

$$A_0 + xA_1 + \ldots + x^n A_n,$$

jest szeregiem absolutnie zbieżnym. Niech szeregi

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n A_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n B_n$$

będą absolutnie δ - zbieżne. Zbadajmy iloczyn sum częściowych:

$$\sum_{n=0}^{N} x^n A_n \sum_{m=0}^{N} x^m B_m = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} x^{n+m} A_n B_m = \sum_{n=0}^{2N} x^n C_n,$$

gdzie

$$C_n = \sum_{p=0}^{n} A_{n-p} B_p.$$

Zachodzi nierówność

$$\sum_{n=0}^{2N} |x|^n \|C_n\| = \sum_{n=0}^{2N} |x|^n \Big\|\sum_{p=0}^{n} A_{n-p}B_p\Big\| \leqslant \sum_{n=0}^{2N} |x|^n \sum_{p=0}^{n} \|A_{n-p}B_p\| \leqslant$$

$$\sum_{n=0}^{2N} |x|^n \sum_{p=0}^{n} \|A_{n-p}\| \|B_p\| = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} |x|^{n+m} \|A_n\| \|B_m\| =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} |x|^n \|A_n\| \sum_{m=0}^{N} |x|^m \|B_m\|,$$

z której wynika, że iloczyn absolutnie δ - zbieżnych szeregów również jest absolutnie δ - zbieżny.

Załóżmy teraz, że macierz $F(x+\xi)$ rozkłada się w absolutnie δ - zbieżny szereg (19). Szereg ten pomnożony przez absolutnie zbieżny szereg funkcji $e^{(y-x-\xi)H}$ daje w wyniku szereg absolutnie δ - zbieżny. Przyjmując $A_0(x,x+\xi) \equiv I$ i całkując otrzymamy $A_1(x,y)$ w postaci absolutnie δ - zbieżnego szeregu potęg $(y-x)$. Z drugiej strony łatwo zauważyć, że operator (25) przekształca absolutnie δ - zbieżny szereg potęg $(y-x)$ w absolutnie δ - zbieżny szereg tych potęg. Na zasadzie indukcji wynika więc ze wzoru (26), że równanie (24) ma jednoznaczne absolutnie - zbieżne rozwiązanie. Przyjmując

$$A_0(x,y) = e^{(y-x)H}$$

i stosując iteracje (26) otrzymamy

$$A_1(x,y) = e^{(y-x)H} + \int_0^{y-x} e^{\xi H} F(x+\xi) e^{(y-x-\xi)H} d\xi =$$

$$= \left[I + (y-x)P_{11}(x) + (y-x)^2 P_{12}(x) + \ldots \right] e^{(y-x)H} =$$

$$= P_1(x,y)\, e^{(y-x)H},$$

gdzie $P_1(x,y)$ jest absolutnie δ - zbieżnym szeregiem potęg $(y-x)$. Podstawiając do wzoru (26)

$$A_n(x,y) = P_n(x,y)\, e^{(y-x)H},$$

gdzie $P_n(x,y)$ jest absolutnie δ - zbieżnym szeregiem potęg $(y-x)$ i $P_n(x,x) \equiv I$, otrzymamy

$$A_{n+1}(x,y) = P_{n+1}(x,y)\, e^{(y-x)H},$$

gdzie $P_{n+1}(x,y)$ też jest absolutnie δ - zbieżny i $P_{n+1}(x,x) \equiv I$. Zatem jedynym rozwiązaniem równania (24) jest funkcja

$$A(x,y) = \left[P_o(x) + (y-x)P_1(x) + (y-x)^2P_2(x) + \ldots\right] e^{(y-x)H}, \qquad (29)$$

$P_o(x) \equiv I$, gdzie szereg w nawiasie kwadratowym jest absolutnie δ - zbieżny. Równanie (24) przepiszemy w formie

$$A(x,y)e^{(x-y)H} = I + \int_0^{y-x} A(x,x+\xi)\, F(x+\xi)\, e^{-\xi H} d\xi. \qquad (30)$$

Będziemy wyznaczać niewiadome macierze $P_1(x)$, $P_2(x)$,... bezpośrednio, wstawiając funkcję (29) do równania (30):

$$(y-x)\, P_1(x) + (y-x)^2\, P_2(x) + \ldots =$$

$$= \int_0^{y-x} \left[P_o(x) + \xi P_1(x) + \xi^2 P_2(x) + \ldots\right] e^{\xi H}\, F(x+\xi) e^{-\xi H} d\xi. \qquad (31)$$

Rozwijamy w szereg potęgowy funkcję

$$e^{\xi H} F(x+\xi) e^{-\xi H} = Q_o(x) + \xi Q_1(x) + \xi^2 Q_2(x) + \ldots$$

przy czym macierze $Q_o(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$,... wyznaczamy za pomocą wzorów (19) i (21). Wymnożenie szeregów daje:

$$\left[P_o(x) + \xi P_1(x) + \xi^2 P_2(x) + \ldots\right]\left[Q_o(x) + \xi Q_1(x) + \xi^2 Q_2(x) + \ldots\right] =$$

$$= P_o(x)Q_o(x) + \xi\left[P_1(x)Q_o(x) + P_o(x)Q_1(x)\right] +$$

$$+ \xi^2\left[P_2(x)Q_o(x) + P_1(x)Q_1(x) + P_o(x)Q_2(x)\right] + \ldots \qquad (32)$$

Wstawiając szereg (32) do równania (31) i całkując otrzymamy

$$(y-x)P_1(x) + (y-x)^2P_2(x) + (y-x)^3P_3(x) + \ldots$$

$$= (y-x)P_o(x)Q_o(x) + (y-x)^2 \frac{1}{2}\left[P_1(x)Q_o(x) + P_o(x)Q_1(x)\right] +$$

$$+ (y-x)^3 \frac{1}{3}\left[P_2(x)Q_o(x) + P_1(x)Q_1(x) + P_o(x)Q_2(x)\right] + \ldots,$$

a stąd wynikają wzory rekurencyjne:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= P_o(x)Q_o(x) \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}\left[P_1(x)Q_o(x) + P_o(x)Q_1(x)\right] \\ P_3(x) &= \frac{1}{3}\left[P_2(x)Q_o(x) + P_1(x)Q_1(x) + P_o(x)Q_2(x)\right] \\ &\ldots \qquad\qquad \ldots \\ P_n(x) &= \frac{1}{m}\sum_{m=0}^{n-1} P_{n-1-m}(x)Q_m(x) \\ &\ldots \qquad\qquad \ldots \end{aligned} \tag{33}$$

Jeżeli funkcja $F(x+\xi)$ w równaniu (24) rozwija się w absolutnie δ - zbieżny szereg potęg ξ, to równanie to ma jedyne rozwiązanie (29), gdzie szereg w nawiasie kwadratowym jest absolutnie zbieżny. Wniosek ten ma znaczenie wówczas, gdy $F(x+\xi)$ jest wielomianem.

5. Faktoryzacja rozwiązania [6]

W tym rozdziale otrzymamy macierz $A(x,y)$ w postaci iloczynu wielomianów i funkcji wykładniczych. Zapiszmy równanie (7a) w postaci

$$A' = AH_o, \tag{34}$$

gdzie

$$H_o(y) = H(y)$$

jest tworzącą odcinka linii, symbol A' oznacza $A'_y(x,y)$.
Podstawmy w równaniu (34):

$$A(x,y) = A_{d1}(x,y)A_o(x,y),$$

co zapiszemy krótko

$$A = A_{d1}A_o. \tag{35}$$

Otrzymamy równanie

$$A'_{d1} = A_{d1}H_1, \tag{36}$$

gdzie

$$H_1 = (A_oH_o - A'_o)A_o^{-1}. \tag{37}$$

Macierz A_{d1} nazwiemy macierzą linii resztkowej. Linia resztkowa spełnia równanie (36) z tworzącą $H_1(x,y)$ zadaną wzorem (37). Macierz linii resztkowej powinna być możliwie bliska macierzy jednostkowej, co ma miejsce gdy tworząca $H_1(x,y)$ jest równa macierzy zerowej, czyli gdy spełnione jest równanie:

$$A'_o = A_oH_o \tag{38}$$

Ponieważ macierz resztkowa A_{d1} spełnia równanie (36) o takiej samej strukturze co równanie (34), można więc z macierzą A_{d1} postąpić tak samo jak z macierzą A. Kontynuując ten proces dalej uzyskuje się ciąg równań:

$$A = A_{d1}A_o$$

$$\boxed{A'_o = A_oH_o}$$

$$A_{d1} = A_{d1}H_1, \qquad H_1 = (A_oH_o - A'_o)A_o^{-1}$$

$$A_{d1} = A_{d2}A_1$$

$$\boxed{A'_1 = A_1H_1}$$

$$A'_{d2} = A_{d2}H_1, \qquad H_2 = (A_1H_1 - A'_1)A_1^{-1}$$

$$A_{d2} = A_{d3}A_2$$

$$\boxed{A'_2 = A_2H_2}$$

$$A'_{d3} = A_{d3}H_3, \qquad H_3 = (A_2H_2 - A'_2)A_2^{-1}$$

$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$

$$A_{dn} = A_{d,n+1}A_n$$

$$\boxed{A'_n = A_nH_n}$$

$$A'_{d,n+1} + A_{d,n+1}H_{n+1}, \qquad H_{n+1} = (A_nH_n - A'_n)A_n^{-1}$$

Proces ten jest prowadzony w kierunku uzyskania najmniejszej co do normy macierzy tworzącej H_n. Stąd otrzymujemy

$$A = A_{d1}A_o = A_{d2}A_1A_o = A_{d3}A_2A_1A_o = \ldots = A_{d,n+1}A_nA_{n-1}\ldots A_1A_o$$

W powyższym ciągu równań najważniejsze są te, które ujęto w ramki. W praktyce proces zaczynamy od wyboru funkcji $A_o(x,y)$, a następnie obliczamy $H_1(x,y)$ przyjmując $H_o(y) = H(y)$. Potem wyznaczamy $A_1(x,y)$, a stąd $H_2(x,y)$. Postępując tak dalej w kierunku wyznaczonym przez strzałki dochodzimy do pewnej tworzącej $H_{n+1}(x,y)$, która powinna być mała co do normy. Każde z równań ujętych w ramki można zastąpić równaniem całkowym Volterry, dlatego proces rozwiązywania równania (34) może być sprowadzony do następującej procedury:
Wybieramy funkcję $A_o(x,y)$,
wyznaczamy rekurencyjnie

$$H_n(x,y) = \left[(A_{n-1}H_{n-1} - A'_{n-1})A^{-1}_{n-1}\right](x,y), \tag{39}$$

$$A_n(x,y) = I + \int_0^{y-x} A_n(x,x+\xi)\, H_n(x,x+\xi)d\xi, \tag{40}$$

zapisujemy rozwiązanie w formie iloczynu

$$A(x,y) = \left[A_{d,m+1}A_mA_{m-1}\ldots A_1A_o\right](x,y)$$
$$\approx \left[A_mA_{m-1}\ldots A_1A_o\right](x,y). \tag{41}$$

Jeżeli tworząca $H_n(x,y)$ rozwija się w szereg

$$H_n(x,y) = Q_{no}(x) + (y-x)Q_{n-1}(x) + (y-x)^2\, Q_{n2}(x) + \ldots.$$

to funkcji $A_n(x,y)$ będziemy poszukiwać w formie szeregu:

$$A_n(x,y) = I + (y-x)P_{n1}(x) + (y-x)^2P_{n2}(x) + \ldots$$

a macierze $P_{ni}(x)$ wyznaczymy ze wzorów (33):

$$P_{n1}(x) = Q_{no}(x)$$
$$P_{n2}(x) = \frac{1}{2}\left[P_{n1}(x)Q_{no}(x) + Q_{n1}(x)\right]$$
$$\ldots \qquad \ldots$$

We wzorze (39) zachodzi konieczność odwrócenia macierzy $A_n(x,y)$. Można to zrobić wykorzystując wzór

$$(I + X)^{-1} = I - X + X^2 - X^3 + \ldots$$

słuszny przy $\|X\| < 1$. W tym przypadku za X przyjmujemy część szeregu funkcji $A_n(x,y)$, tj.:

$$(y-x)P_{n1}(x) + \ldots$$

Dzięki temu otrzymamy macierz $A_n^{-1}(x,y)$ w postaci szeregu potęg $(y-x)$. Uwzględniając obcięty szereg

$$I - X + \ldots + (-1)^N X^N$$

popełniamy błąd, który można określić z równości

$$(I + X)\ I - X + \ldots + (-1)^N X^N = I + (-1)^N X^{N+1}$$

Jeżeli przyjąć

$$A_{n-1}(x,y)\ e^{(y-x)E_{n-1}(x)}, \tag{42}$$

to

$$H_n(x,y) = e^{(y-x)E_{n-1}(x)} \left[H_{n-1}(x,y) - E_{n-1}(x)\right] e^{(x-y)E_{n-1}(x)}$$

co pokrywa się z wynikiem otrzymanym w rozdziale 6. Macierze współczynniki rozkładu funkcji $H_n(x,y)$ w szereg uzyskujemy ze wzorów (21). Jeżeli natomiast

$$H_n(x,y) = Q_{no}(x) + (y-x)Q_{n1}(x) + \ldots + (y-x)^N\, Q_{nN}(x),$$

$$A_n(x,y) = I + (y-x)P_{n1}(x) + \ldots + (y-x)^M\, P_{nM}(x), \tag{43}$$

to

$$H_{n+1}(x,y) = \Big[P_{n1}(x) + (y-x)2P_{n2}(x) + \ldots + (y-x)^{n+M}(N+M+1)P_{n,N+M+1}(x) -$$

$$- P_{n1}(x) - (y-x)2P_{n2}(x) - \ldots - (y-x)^{M-1}MP_{nM}(x)\Big]A_n^{-1}(x,y) =$$

$$= \Big[(y-x)^M(M+1)P_{n,M+1}(x) + \ldots + (y-x)^{N+M}(N+M+1)P_{n,N+M+1}(x)\Big]A_n^{-1}(x,y)$$

Stosując na przemian funkcje (42) i (43) otrzymamy funkcję $A(x,y)$ w postaci naprzemiennego iloczynu wielomianów potęg $(y-x)$ i macierzy wykładniczych argumentu $(y-x)$.

LITERATURA

[1] Bellman R.: Introduction to Matrix Analysis. McGraw-Hill 1960.

[2] Brockett R.: Lie algebras and Lie groups in control theory. Proc. of the NATO Advanced study institute held at London, August 27 - September 7, 1973, Dordrecht - Boston, D. Reidel Publishing Company, 1973, pp. 43-82.

[3] Kołmogorow A.N., Fomin S.W.: Elementy teorii funkcij i funkcjonalnowo analiza. Nauka, Moskwa 1976.

[4] Lankaster P.: Theory of Matrices, Academic Press 1969.

[5] Redheffer R.M.: Novel uses of functional equations, J. Rational Mech. Anal. 3 1954, pp. 271-279.

[6] Siwczyńska Z.: Iteracyjne metody rozwiązywania liniowych niejednorodnych obwodów o parametrach rozłożonych. Praca doktorska, Politechnika Śląska, Gliwice 1982.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Р е з ю м е

В работе разработана теория неоднородных линейных цепей с распределёнными параметрами с применением функциональных уравнений. Найдено общее решение функционального уравнения цепи. Далее рассмотрены кусочно-регулярные цепи, кусочно-однородные и кусочно-аналитические цепи. В этих случаях функциональные уравнения сведены к кусочно-интегрируемым уравнениям. Найдено решение этих интегральных уравнений методом малого параметра, интерационным методом и методов степенных рядов. Предложен также метод факторизации решения функционального уравнения.

FUNCTIONAL EQUATIONS IN THE THEORY OF THE SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

S u m m a r y

The theory of nonhomogenous systems with distributed parameters by the means of functional equations was formulated. The general solution of circuit functional equations was given. Piecewise differentiable, piecewise homogenous, and piecewise analytic circuits were examined. The functional equations of this cases are reduced to integral equations suitable for the pieces. The solution of the integral equations with the use of perturbation method, step by step method and power series method is given. The factorization of functional equation solution is proposed.