SPIS TREŚCI

CONTENTS

Dnia 27.I.1985 r. odszedł od nas po krótkiej a ciężkiej chorobie w pełni sił twórczych i zamierzeń naukowych, w 63 roku życia:

PROF. DR HAB. INŻ. ZYGMUNT NOWOMIEJSKI

Dyrektor Instytutu Podstawowych Problemów Elektrotechniki i Energoelektroniki, Dziekan Wydziału Elektrycznego Politechniki Śląskiej w Gliwicach.

Profesor urodził się w Rybniku. Gdy wybuchła II wojna światowa miał 17 lat i ukończoną I klasę Liceum Matematyczno-Fizycznego w Rybniku. Był ochotnikiem Kampanii Wrześniowej, a losy wojenne rzuciły Go do Anglii, gdzie w 1945 r. zdaje maturę i kończy podchorążówkę wojsk łączności. W październiku 1945 roku rozpoczyna studia na Wydziale Elektrycznym Heriot--Watt College w Edynburgu. W 1948 roku powraca do Ojczyzny i kontynuuje studia na Wydziale Elektrycznym Politechniki Śląskiej. W 1951 roku uzyskuje dyplom inżyniera elektryka, magistra nauk technicznych i od 1.I.1952 zostaje asystentem w Katedrze Podstaw Elektrotechniki u profesora Stanisława Fryzego. Po obronie tez pracy doktorskiej pt. "Układy wielofazowe" otrzymuje stopień doktora nauk technicznych jako dziesiąty doktor promowany przez Radę Wydziału Elektrycznego Politechniki Śląskiej. Po odejściu profesora Fryzego na emeryturę dr inż. Z. Nowomiejski zostaje Kierownikiem Zakładu Elektrotechniki Teoretycznej, a następnie w roku 1963, po uzyskaniu stopnia naukowego dr habilitowanego za monografię habilitacyjną pt. "Moc i energia elektryczna w układach elektrycznych o dowolnych ustalonych przebiegach", zostaje Kierownikiem Katedry Podstaw Elektrotechniki. Po zmianach organizacyjnych na Wydziale obejmuje z dniem 1.III.1966 r. kierownictwo Katedry Elektrotechniki Teoretycznej, od 1.X.1966 r. do 15.IX.1971 r. - Katedry Elektrotechniki Teoretycznej i Ogólnej a następnie Instytutu Podstawowych Problemów Elektrotechniki i Energoelektroniki, którym od 1971 roku kierował aż do śmierci. W 1970 roku otrzymał tytuł profesora nadzwyczajnego.

Bogaty dorobek naukowy profesora Zygmunta Nowomiejskiego obejmuje kilkadziesiąt publikacji oraz skryptów i monografii z dziedziny syntezy i dynamiki układów elektrycznych oraz zastosowań matematyki w teorii obwodów.

Ze szczególnym zaangażowaniem zajmował się Profesor uogólnioną teorią mocy w układach o przebiegach odkształconych,a ostatnio także w układach o dowolnych przebiegach prawieokresowych i przypadkowych.

Profesor Zygmunt Nowomiejski był członkiem prezydium Komitetu Elektrotechniki Teoretycznej Międzynarodowego Stowarzyszenia Uniwersytetów Krajów Socjalistycznych - brał czynny udział w Jego pracach programowych. Był także członkiem:

- Komitetu Elektrotechniki PAN w Warszawie,
- Komitetu Elektrotechniki i Automatyki PAN w Krakowie,

także członkiem Rad Naukowych:

- Instytutu Elektrotechniki Politechniki Rzeszowskiej,
- Instytutu Elektrotechniki Przemysłowej Politechniki Poznańskiej.

Profesor był aktywnym członkiem Stowarzyszenia Elektryków Polskich - posiadał złotą odznakę SEP, a także od powstania Gliwickiego Oddziału - członkiem Polskiego Towarzystwa Elektrotechniki Teoretycznej i Stosowanej, piastując przez dwie kadencje godność przewodniczącego PTETiS.

Z inicjatywy Profesora Nowomiejskiego powstało w 1977 roku coroczne Ogólnopolskie Seminarium z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów - SPETO.

Był Profesor kilkakrotnym laureatem nagród Ministra.

W latach 1965 - 68 profesor Nowomiejski był prodziekanem d/s nauki,a w latach 1968 - 73 oraz od 1982 roku Dziekanem Wydziału Elektrycznego.

Za zasługi dla kraju, Regionu Śląskiego i Uczelni został Profesor uhonorowany:

Krzyżem Oficerskim OOP, Krzyżem Kawalerskim OOP, Złotym Krzyżem Zasługi, Medalem 40-lecia PRL, Złotą Odznaką Zasłużonego w rozwoju woj. Katowickiego oraz Medalem 40-lecia Politechniki Śląskiej.

To wspomnienie,nie oddające w pełni zasług i osiągnięć Profesora, jest wyrazem naszego hołdu dla Człowieka i naukowca, którego darzyliśmy szacunkiem i sympatią,a którego wśród nas brakuje.

Współpracownicy i Wychowankowie

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 98 Nr kol. 859

Zygmunt GARCZARCZYK
Instytut Podstawowych Problemów Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

METODA KONTYNUACJI A DYSKRETNE OBWODY RÓWNOWAŻNE W ANALIZIE NIELINIOWYCH OBWODÓW REZYSTANCYJNYCH

Streszczenie. W artykule rozważa się dwie metody rozwiązywania algebraicznych równań nieliniowych z niewiadomymi potencjałami węzłowymi obwodu elektrycznego zawierającego stałe wymuszenia prądowe i napięciowe oraz liniowe i nieliniowe rezystory.

W obu przypadkach, w oparciu o metodę kontynuacji tworzone są zastępcze liniowe obwody elektryczne odpowiadające rozwiązywanym równaniom algebraicznym. W pierwszej metodzie obwód zmienia się od kroku do kroku metody Newtona-Raphsona, a w drugiej zmienia się wraz z parametrem homotopii zgodnie z bezpośrednią metodą Eulera. Struktury obwodów elektrycznych są stałe, ale ich parametry zmieniają się jak jakobiany funkcji nieliniowych.

1. WSTĘP

Celem rozważań jest przedstawienie sposobu skutecznego rozwiązywania układu równań nieliniowych postaci:

$$f(x) \stackrel{df}{=} Ag(A^tx + E) - AJ = 0 \tag{1}$$

który dla n+1 węzłowego obwodu zawierającego m gałęzi, stanowi układ n równań węzłowych z n niewiadomymi potencjałami węzłowymi x_i, i=1,2...,n. W równaniu tym, A - oznacza zredukowaną macierz incydencji, E - wektor stałych wymuszeń napięciowych, J - wektor stałych wymuszeń prądowych, a $g(u) = \left[g_1(u_1), g_2(u_2), \dots, g_m(u_m)\right]^t$ wektor charakterystyk prądowo-napięciowych rezystorów nieliniowych i liniowych. Przy tym $u = A^tx + E$ oznacza wektor napięć na rezystorach.

Równanie (1) jest rozwiązywane zwykle przy użyciu algorytmu Newtona-Raphsona, co prowadzi do znanej metody iteracyjnej, w której obwód nieliniowy jest przekształcany w obwód liniowy (dyskretny obwód równoważny) rozwiązywany metodą potencjałów węzłowych [1], [2]. W metodzie tej istnieje jednak problem zbieżności, gdyż przybliżenie początkowe $x^{(0)}$ winno być bliskie właściwemu rozwiązaniu x^* równania (1), aby uzyskany ciąg przybliżeń $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$, był zbieżny do x^*. Można wprawdzie w oparciu o twierdzenie Newtona-Raphsona-Kantorowicza ustalić jak bliskie właściwemu rozwiązaniu musi być przybliżenie początkowe, aby zapewnić zbieżność, ale rezultat ten ma głównie znaczenie teoretyczne, gdyż jego wykorzystanie w praktyce nie jest łatwe. Pozostaje więc arbitralny wybór przybliżenia początkowego w oparciu o znajomość charakterystyk elementów nieliniwych, co w praktyce prowadzi do wielokrotnych prób, aż zostanie uzyskane rozwiązanie. Aby pokonać tę trudność stosuje się podejście do rozwiązania równania (1) oparte o znaną w analizie numerycznej metodą kontynuacji [3], [4], co pozwala uzyskać algorytm zbieżny do rozwiązania, dla dowolnego przybliżenia początkowego $x^{(o)}$. Idea ta znalazła już zastosowanie w opracowanych metodach analizy nieliniowych obwodów rezystancyjnych [5 ÷ 11]. Prezentowane w referacie ujęcie zawiera, jak się wydaje, nowe propozycje w tym zakresie.

2. METODA KONTYNUACJI

Idea tej metody polega na tym, że rozważa się rozwiązanie rodziny równań nieliniowych zależnych od parametru

$$H(x,\lambda) = 0 \quad \text{dla} \quad \lambda \in \langle 0, 1\rangle \tag{2}$$

o następujących własnościach:

1) rozwiązanie równania (2) dla wartości początkowej $\lambda_0 = 0$ jest znane lub łatwe do uzyskania, tzn.

$$H(x_0, 0) = 0 \tag{3}$$

2) dla wartości $\lambda_s = 1$ równanie (2) redukuje się do równania (1), a więc

$$H(x, 1) = f(x) = 0 \tag{4}$$

Funkcja H nazywana jest często homotopią.
Jeżeli rozwiązania $x(\lambda)$ równań (2) zależą od λ w sposób ciągły, to opisują one pewną krzywą łączącą punkt $x(0)$ z zerem $x(1)$ funkcji $f(x)$. Rozwiązanie $x=x(\lambda)$ wyznacza się dla ciągu rosnącego wartości $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s=1$.
Jeden z rodzajów metody kontynuacji polega na zastosowaniu szybko zbieżnej metody iteracyjnej (np. metody Newtona-Raphsona) do kolejnych równań [4], [13]:

$$H(x, \lambda_i) = 0 \quad i = 0,1,2,\ldots,s \tag{5}$$

z na ogół dobrym przybliżeniem początkowym $x(\lambda_i)^{(o)}$ zera $x(\lambda_i)$.

Przybliżenie to uzyskuje się z poprzednich wyników

$$x(\lambda_i)^{(o)} = x(\lambda_{i-1}) \tag{6}$$

Drugi rodzaj wynika z faktu, że dla dostatecznie regularnej funkcji H krzywa $x = x(\lambda)$ stanowi rozwiązanie równania różniczkowego [4], [14]:

$$\frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0 \qquad \lambda \in \langle 0, 1\rangle \quad x(0) = x_o \tag{7}$$

które może być rozwiązane jakąś metodą różnicową. Istnieje wiele metod konstruowania równania (2) (np. [11]). W ogólnym przypadku można go zawsze utworzyć przyjmując jako homotopię następujące wyrażenie:

$$H(x, \lambda) \overset{df}{=} \lambda f(x) + (1 - \lambda)f_o(x), \tag{8}$$

gdzie rozwiązanie układu $H(x,0) = f_o(x)$ jest łatwe do uzyskania

lub $$H(x, \lambda) \overset{df}{=} f(x) + (\lambda - 1)f(x_o) \tag{9}$$

Zauważmy, że $H(x,0) = f(x) - f(x_o)$ posiada rozwiązanie $x = x_o$, które może być dowolnie przyjęte.

3. DYSKRETNE OBWODY RÓWNOWAŻNE

Jeżeli każda gałąź rozważanego obwodu zostanie zmodyfikowana tak, że rezystor nieliniowy zostanie zastąpiony równoległym połączeniem rezystora liniowego o konduktancji $(1 - \lambda)G_{k\lambda}$ oraz rezystora nieliniowego o charakterystyce $i_k = \lambda g(u_k)$, to można pokazać [12], że dla $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ równanie węzłowe tego obwodu jest następujące:

$$H(x, \lambda) = \lambda\left\{Ag(A^t x + E) - AJ\right\} + (1-\lambda)\left\{AG_{\lambda} A^t x - A(J - G_{\lambda} E)\right\} = 0 \tag{11}$$

gdzie $G_{\lambda} = \mathrm{diag}\left[G_{1\lambda}, G_{2\lambda}, \dots, G_{m\lambda}\right]$, a więc jest homotopią postaci (8). Przy tym rozwiązanie układu:

$$f_o(x) = AG_{\lambda} A^t x - A(J - G_{\lambda} E) \tag{12}$$

jest szczególnie proste, gdyż jest to układ równań liniowych.

Zastosowanie algorytmu Newtona-Raphsona do układu równań (11) prowadzi do zmodyfikowanej postaci równań węzłowych, tzw. dyskretnego obwodu równoważnego [2]:

$$A\left[\lambda G^{j} + (1-\lambda)G_{\lambda}\right] A^{t}x^{(j+1)} =$$

$$= A\left[J^{(j)} - \lambda G^{(j)}E + (1-\lambda)(J - G_{\lambda} E)\right] \quad \text{dla } \lambda \in \langle 0,1\rangle \tag{13}$$

W równaniu tym $G^{(j)}$ oznacza diagonalną macierz dynamicznych konduktancji rezystorów nieliniowych dla napięć na tych rezystorach w j-tej iteracji.

Ponadto $\quad J^{(j)} \overset{df}{=} \lambda\left[J - J_Q^{(j)} + G^{(j)}U_Q^{(j)}\right]$

$$U_Q^{(j)} \overset{df}{=} A^{t}x^{(j)} + E \qquad J_Q^{(j)} \overset{df}{=} g(U_Q^{(j)})$$

Idea stopniowego przejścia od obwodu liniowego do obwodu nieliniowego zawarta w równaniu (13) była wykorzystana, ale w inny sposób, do analizy obwodów nieliniowych zawierających diody [9].

Inny typ dyskretnego obwodu równoważnego uzyskuje się rozważając dla równania (1) homotopię postaci (9).

Na podstawie równań (9) i (7) otrzymuje się:

$$\frac{dx}{d\lambda} = -\left[J(x)\right]^{-1} f(x_0) \tag{14}$$

gdzie J(x) jest macierzą Jacobiego funkcji f(x).

Stosując bezpośrednią metodę Eulera do równania (14) otrzymuje się

$$x^{(j+1)} = x^{(j)} - h\left[J(x^{(j)})\right]^{-1} f(x_0) \tag{15}$$

gdzie $h = \lambda_j - \lambda_{j-1}, \quad j = 1,2,\ldots,s.$

Ponieważ $J(x^{(j)}) = AG^{(j)}A^{t}$, więc na podstawie równań (1) i (15) można napisać

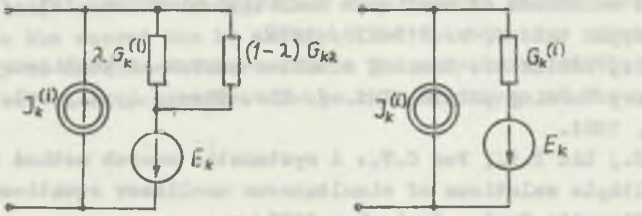
$$AG^{(j)}A^{t}x^{(j+1)} = AG^{(j)}A^{t}x^{(j)}$$

$$- h\left\{Ag(A^{t}x_0 + E) - AJ\right\} \tag{16}$$

by po przekształceniu otrzymać równanie:

$$AG^{(j)}A^{t}x^{(j+1)} = A(J^{(j)} - G^{(j)}E) \tag{17}$$

gdzie $J^{(j)} \stackrel{df}{=} h(J - J_o) + G^{(j)}U_Q^{(j)}$ $\quad J_o \stackrel{df}{=} g(A^t x_o + E)$



$J_k^{(i)} = J - \lambda J_{Q_k}^{(i)} + \lambda G_k^{(i)} U_{Q_k}^{(i)}$ $\qquad J_k^{(i)} = h(J_k - J_{0k}) + G_k^{(i)} U_{Q_k}^{(i)}$

Rys. 1

Struktury gałęzi dyskretnych obwodów równoważnych

The structures of the branches of discrete equivalent networks

Równania (13 i (17) opisują równoważne obwody liniowe o gałęziach przedstawionych na rys. 1.

4. UWAGI KOŃCOWE

Otrzymanie dobrego przybliżenia rozwiązania x(1) opisanymi tu metodami, wymaga przeważnie podzielenia odcinka $<0,1>$ na wiele części punktami λ_i, co determinuje koszt procesu obliczeniowego. Wymagania tych metod mogą być różne. Rozwiązanie równania (13) nie powinno na ogół wymagać zbyt wielu punktów λ_i, ale trzeba pamiętać, że dla uzyskania rozwiązania $x(\lambda_i)$ konieczny jest pewien nakład obliczeniowy związany z algorytmem Newtona-Raphsona. Jednocześnie rozwiązanie równania (17) związane jest wyłącznie z doborem λ_i, ale uzyskanie dostatecznej dokładności i stabilności procesu wymaga, by h było małe. Uzyskane do tej pory wyniki obliczeń dla równania (13) potwierdzają skuteczność tego podejścia do rozwiązywania równania (1), [12] . Można sądzić, że dalsze eksperymenty numeryczne pozwolą ocenić nakład obliczeniowy obu metod.

LITERATURA

[1] Calahan D.A.: Projektowanie układów elektronicznych za pomocą maszyny cyfrowej. WNT, Warszawa 1978.

[2] Chua L.O., Lin P.M.: Komputerowa analiza układów elektronicznych. WNT, Warszawa 1981.

[3] Dahlquist G., Björck A.: Metody numeryczne. PWN, Warszawa 1983.

[4] Ortega J.M., Rheinboldt W.C.: Iterative solutions of nonlinear equations in several variables. Academic Press New York 1970.

[5] Chua L.O., Ushida A.: A switching-parameter algorithm for finding multiple solutions of nonlinear resistive circuits. Int. J. Cir. Theor. Appl. vol. 4, s. 215-239, 1976.

[6] Chua L.O., Ushida A.: Tracing solution curves of nonlinear equations with sharp turning points. Int. J. Cir. Theor. Appl., vol. 13, s. 1-21, 1984.

[7] Chao K.S., Lin D.K., Pan C.T.: A systematic search method for obtaining multiple solutions of simultaneous nonlinear equations. IEEE Trans. Circuits Syst., September 1975.

[8] Chao K.S., Seeks R.: Continuation methods in circuit analysis. Proc. IEEE, August 1977.

[9] Bertsekas D.P.: A new algorithm for solution of resistive networks involving diodes. IEEE Trans. Circuits Syst. October 1976

[10] Ponisch G., Schwetlich H.: Computing turning points of curves implicitly defined by nonlinear equations depending on a parameter. Computing, 26, pp. 107-121, 1981.

[11] Tadeusiewicz M.: Analiza pewnej klasy obwodów rezystancyjnych w przestrzeni m_n. Rozprawy Elektrotechniczne z.2. 1973.

[12] Garczarczyk Z.: Analiza numeryczna pewnej klasy nieliniowych obwodów rezystancyjnych, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z 95, w druku.

[13] Lahaye E.: Sur la resolution des systemes d'equations transcendantes. Bull. Acad. Roy. Belg. Cl. Sci., vol. 5, 805 - 822, 1948.

[14] Davidienko D.F.: Ob odnom nowom metodie czislennowo analiza riesszienija sistem nieliniejnych urawnienij. Doklady Akademij Nauk CCCP, 1953, Tom LXXXVIII, No 4.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Maciej Siwczyński

Wpłynęło do redakcji dn. 15 marca 1985 r.

CONTINUATION METHOD AND DISCRETE EQUIVALENT NETWORKS IN THE ANALYSIS OF THE NONLINEAR RESISTIVE NETWORKS

S u m m a r y

In the paper two methods of solving of the nonlinear elgebraic equations of the network with unknown node voltages are considered. The network contains constant current and voltage sources and linear and nonlinear resistors.

In both cases, basing on the continuation method, supplementary linear circuits corresponding with the algebraic aquations are created. In the first method, circuits change from step to step in the Newton-Raphson method, in the second one it changes like the homotopy parameter correspondingly to the direct Euler method. The structures of the networks are constant but their parameters change like Jacobians of the nonlinear functions.

МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ А ДИСКРЕТНЫЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ЦЕПИ В АПАЛИЗЕ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЦЕПЕЙ

Р е з ю м е

В статье рассматриваются два метода решения нелинейных алгебраических уравнений с неизвестными узловыми напряжениями электрической цепи, которая состоит из постоянных источников тока и напряжения а также из линейных резисторов. В обоих случаях, опираясь на методе продолжения решения по параметру, составляются схемы замещения, соотвествующие решаемым алгебраическим уравнениям. В первом методе цепь изменяется от шага к шагу метода Ньютона - Рафсона. Во втором изменяется вместе с параметром гомотопии, согласио непосредственному методу Эйлера. Схема любой цепи является постояиной но её параметры изменяются как матрицы Якоби нелинейных функций.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA 98 Nr kol. 859

Maciej SIWCZYŃSKI

Instytut Matematyki, Fizyki i Chemii
Wyższej Szkoły Inżynierskiej
w Zielonej Górze

TEORIA MOCY SYGNAŁÓW SPRÓBKOWANYCH

Streszczenie. Celem pracy jest sformułowanie zwartej jednolitej teorii sygnałów wielowymiarowych ciągłych i spróbkowanych oraz związanej z nią teorii mocy. Cel taki można osiągnąć za pomocą odpowiednio mocnych środków matematycznych, jakimi są przemienne algebry Banacha uzupełnione o strukturę przestrzeni Hilberta. Warunki te spełniają splotowe algebry sygnałów wielowymiarowych z iloczynem skalarnym. Wykazano, że przekształcenia Gelfanda takich algebr pokrywają się z wielowymiarowymi przekształceniami Fouriera. W pracy opisano zagadnienie kompensacji mocy biernej, które sprowadzono do zminimalizowania odpowiedniego funkcjonału. W wyniku otrzymano układ równań całkowych Fredholma z niewiadomą odpowiedzią impulsową kompensatora, który po spróbkowaniu sprowadzono do zwykłego układu równań liniowych. Matematycznie podobne rozwiązanie ma problem poszukiwania quasiodwrotności widmowej wielomianu, związany ze stabilizacją filtrów cyfrowych. W dalszej części artykułu podano związek między cepstrum zespolonym a stabilnością układu wielowymiarowego. Podano dwa niezależne algorytmy wyznaczania cepstrum wielowymiarowego, w tym jeden rekurencyjny.

1. WSTĘP

Celem tego opracowania jest jednolita, zwarta teoria sygnałów wielowymiarowych ciągłych i spróbkowanych, okresowych i nieokresowych oraz związana z nią teoria mocy. Można ten cel osiągnąć za pomocą odpowiedniego środka matematycznego, którym jest analiza funkcjonalna a w szczególności teoria zupełnych przemiennych algebr unormowanych - zwanych algebrami Banacha - z pewnymi elementami przestrzeni Hilberta.

Zupełną, przemienną algebrą unormowaną nazywa się przestrzeń Banacha $\mathcal{B}$ zaopatrzoną w mnożenie (*), tj. odwzorowanie kwadratu kartezjańskiego $\mathcal{B}$ w siebie spełniające warunki algebry, tj.: łączność, rozdzielność, jednorodność, ciągłość ($\| x * y \| \leq \|x\| \, \|y\|$), istnienia jedności e, a ponadto przemienność.

W algebrach takich poszczególne elementy można zastąpić pewnymi zespolonowartościowymi funkcjami. Można to zrobić w następujący sposób. Niech Z będzie funkcjonałem liniowo multiplikatywnym $\left[Z(\alpha x + \beta y) = \alpha Z(x) + \beta Z(y),\ Z(x * y) = Z(x)\, Z(y)\right]$, czyli homomorfizmem zespolonym a Δ zbiorem wszystkich możliwych takich funkcjonałów. W ten sposób każdemu elementowi x algebry $\mathcal{B}$ można przyporządkować zespolonowartościową funkcję $\hat{x}$, której dziedziną jest zbiór Δ, według reguły: $\hat{x}(Z) = Z(x)$. Odwzorowanie $x \to \hat{x}$ nazywa się przekształceniem Gelfanda. Jeżeli przekształcenie Gelfanda jest jednoznaczne, to algebra $\mathcal{B}$ – zwana wówczas półprostą – jest izomorficzną, czyli w pełni odpowiednia algebrze zespolonowartościowych funkcji zadanych na Δ ze zwykłym punktowym mnożeniem.

W algebrze istnieje słaba topologia – zwana topologią Gelfanda – według której dwom bliskim w sensie normy elementom algebry odpowiadają dwa bliskie w sensie modułu na Δ przekształcenia Gelfanda. Pozwala to nie tylko na algebraiczne, ale i geometryczne scharakteryzowanie danej algebry przestrzenią zespolonowartościowych funkcji zadanych na Δ.

2. SYGNAŁY

Na gruncie teorii sygnałów wielowymiarowych funkcjonał Z można utożsamić z pewną multiliczbą zespoloną $z \in \mathbb{C}^M$, a zbiór Δ z pewnym zbiorem (obszarem) na hiperpłaszczyźnie $\mathbb{C}^M$. Mnożeniem jest splot $(x * y)(t) = \int_{\mathbb{D}^M} x(t-\vartheta)y(\vartheta)\, d\vartheta$

z normą
$$\|x\| = \int_{\mathbb{D}^M} |x(t)|\, dt \tag{1}$$

gdzie $\mathbb{D}^M$ jest klasą równoważności minimalnych zbiorów $\mathbb{R}^M$, na których funkcje x,y są zadane jednoznacznie. Na przykład dla sygnałów absolutnie sumowalnych $\mathbb{D}^M$ pokrywa się z $\mathbb{R}^M$, a dla sygnałów T – okresowych $\mathbb{D}^M$ jest klasą równoważności hiperkostek $p_i T_i \leqslant t_i < (p_i+1)T_i$, $i = 1,\ldots,M$. Dla sygnałów czasowo dyskretnych następuje próbkowanie za pomocą δ – dystrybucji według odwzorowania:

$$x(t) \to \sum_{n \in \mathbb{Z}^M} x_\tau(n)\, \delta(t-n\tau). \qquad x_\tau(n) = x(n\tau)$$

i wówczas

$$(x_\tau * y_\tau)(n) = \sum_{m \in \mathbb{D}^M} x_\tau(n-m) y_\tau(m)$$

$$\|x_\tau\| = \sum_{m \in \mathbb{D}^M} |x_\tau(m)| \tag*{$(1)_\tau$}$$

Zbiór $\mathbb{R}^M$ zastąpiony zostaje przez $\mathbb{Z}^M$. Całkę (1) można też rozumieć wtedy jako całkę z miarą Diraca.

Jedynym możliwym funkcjonałem liniowo-multiplikatywnym jest wówczas [6]

$$Z(x) = \int_{\mathbb{D}^M} z^t x(t)dt = \hat{x}(z) \qquad z \in \Delta \tag{2}$$

Tym samym wzór (2) definiuje przekształcenie Gelfanda. Zbiór Δ jest różny w zależności od przestrzeni sygnałów i należy go tak dobrać, aby funkcja Z była funkcjonałem. Przekształcenie odwrotne ma postać

$$x(t) = \frac{1}{(2\pi j)^M} \int_{\partial\Delta} z^{-t}\, \hat{x}(z)d\ \ln z \tag{3}$$

Kontur $\partial\Delta$ jest brzegiem zbioru Δ, tj. zbiorem zdefiniowanym jako
$\partial\Delta = \Delta \setminus \mathrm{int}\,\Delta$,
gdzie int Δ jest wnętrzem zbioru Δ, tj. zbiorem punktów, które należą do Δ wraz z pewnym swoim otoczeniem.

Dla przestrzeni sygnałów przyczynowych absolutnie sumowalnych Δ jest jednostkowym polidyskiem:

$$\Delta = \mathbb{K} = \left\{z:\ |z_i| \leq 1, \quad i = 1,\ldots,M\right\}$$

a $\partial\Delta$ jest jednostkowym poliokręgiem:

$$\partial\Delta = \partial\mathbb{K} = \left\{z:\ |z_i| = 1\right\}.$$

Dla sygnałów absolutnie sumowalnych

$$\partial\Delta = \Delta = \partial\mathbb{K}$$

Dla sygnałów czasowo ciągłych T - okresowych zbiór Δ jest przeliczalnie spróbkowanym jednostkowym poliokręgiem

$$\Delta = \partial_T\mathbb{K} = \left\{z:\ z_i^{T_i} = 1\right\} \qquad T_i \text{ - rzeczywiste}$$

Wreszcie dla sygnałów czasowo dyskretnych N - okresowych (N_i - całkowite) zbiór Δ jest skończenie spróbkowanym jednostkowym poliokręgiem

$$\Delta = \partial_N\mathbb{K} = \left\{z:\ z_i^{N_i} = 1\right\}$$

Wspomniane próbkowanie poliokręgów jest równomierne, ale przy obliczaniu całki (3) można wprowadzić próbkowanie nierównomierne.

Próbkowanie równomierne daje

$$d\ln z \to \frac{(2\pi j)^M}{T^I}, \quad I = (1,\ldots,1)$$

a całka (3) przechodzi w sumę

$$x(t) = \frac{1}{T^I}\sum_{\partial_T\mathbb{K}} z^{-t}\,\hat{x}(z) \qquad T_i \text{ - rzeczywisty okres} \tag{3$_T$}$$

dla $t \in \mathbb{R}^M$ (czas ciągły) oraz

$$d\ln z \to \frac{(2\pi j)^M}{N^I}$$

$$x(n) = \frac{1}{N^I}\sum_{\partial_n\mathbb{K}} z^{-n}\,\hat{x}(z) \qquad N_i \text{ - całkowity okres} \tag{3$_N$}$$

dla $n \in \mathbb{Z}^M$ - dla czasu dyskretnego.

Jeżeli xy jest zwykłym punktowym mnożeniem sygnałów, to

$$(xy)^\wedge(z) = \frac{1}{(2\pi j)^M}\int_{\partial\Delta}\hat{x}(z/u)\,\hat{y}(u)\,d\ln u \tag{4}$$

a po spróbkowaniu poliokręgu

$$(xy)^\wedge(z) = \frac{1}{T^I}\sum_{\partial_T\mathbb{K}}\hat{x}(z/u)\,\hat{y}(u) \qquad z \in \partial_T\mathbb{K} \tag{4$_T$}$$

$$(xy)^\wedge(z) = \frac{1}{N^I}\sum_{\partial_N\mathbb{K}}\hat{x}(z/u)\hat{y}(u) \qquad z \in \partial_N\mathbb{K} \tag{4$_N$}$$

Sploty zespolone (4) również pozwalają zachować strukturę przemiennej algebry unormowanej.

Za pomocą związku (4) można wprowadzić iloczyn skalarny:

$$(x,y) = \int_{\mathbb{D}^M} x(t)y(t)dt = (x,y)^\wedge(I) = \frac{1}{(2\pi j)^M}\int_{\partial\Delta} x(I/u)\hat{y}(u)\,d\ln u \tag{5}$$

i normę skalarną

$$|x| = (x,x)^{1/2}$$

W ten sposób zupełne, przemienne algebry unormowane sygnałami wielowymiarowymi zostają uzupełnione o struktury przestrzeni Hilberta.

W następnych trzech punktach zastosowano teorię zupełnych przemiennych algebr unormowanych sygnałów do klasycznej teorii mocy i niektórych zagadnień pokrewnych.

3. KLASYCZNA TEORIA MOCY

Moc czynną P i pozorną S definiują wyrażenia

$$P = (x,y)$$

$$S = |x|\ |y|$$

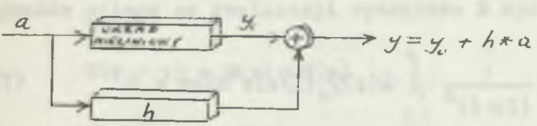
Za pomocą przedstawionych środków matematycznych celowe jest naśladowanie tylko tych pojęć mocy, które zdefiniowane są w sposób mało zależny od wyboru przestrzeni sygnałów. Wśród znanych teorii mocy [1] warunek ten spełnia tylko teoria S. Fryzego, według której moc bierna Q dana jest wzorem

$$Q^2 = S^2 - P^2$$

Istnieje tu problem kompensacji mocy biernej zilustrowany schematem blokowym na rys. 1. Równolegle do układu nieliniowego podłączony jest liniowy, splotowy, bezstratny kompensator z odpowiedzią impulsową h, którego zadaniem jest zminimalizowanie funkcjonału

$$\Phi(h) = (a,a)(y_o+a*h,\ y_o+a*h) - (a,y_o+a*h)(a,y_o+a*h)$$

przy ustalonych sygnałach a, y_o oraz warunku



Rys. 1
Kompensacja mocy biernej
Reactive power compensation

$$(a,\ a*h) = 0$$

Zadanie to jest równoważne zminimalizowaniu funkcjonału

$$F(h) = (a*h + y_o,\ a*h + y_o) \tag{6}$$

Różniczka Frécheta, po odrzuceniu małych wyższego rzędu, ma postać

$$\delta F(h) = F(h+\delta h)-F(h) = 2(a * \delta h,\ a * h) + 2(y_0,\ a * \delta h)$$

Przyrównując różniczkę do zera otrzymuje się

$$(a * \delta h,\ a * h) + (y_0,\ a * \delta h) = 0$$

skąd

$$\frac{1}{(2\pi j)^M} \int\limits_{\partial\Delta} A(z)\, \delta\hat{h}(z)\hat{h}(I/z) d\ln z + \frac{1}{(2\pi j)^M} \int\limits_{\partial\Delta} \hat{a}(z)\delta\hat{h}(z)\hat{y}_0(I/z) d\ln z = 0$$

gdzie

$$A(z) = \hat{a}(z)\ \hat{a}\ (I/z)$$

Podstawiając

$$\delta\hat{h}\ (z) = \int\limits_{\mathbb{D}^M} z^t\ \delta h(t) dt$$

i zmieniając porządek całkowania otrzymuje się

$$\int\limits_{\mathbb{D}^M} \delta h(t) \left[\frac{1}{(2\pi j)^M} \int\limits_{\partial\Delta} A(z)\hat{h}(I/z) z^t d\ln z + \frac{1}{(2\pi j)^M} \int\limits_{\partial\Delta} \hat{a}(z)\hat{y}_0(I/z) z^t d\ln z \right] dt = 0$$

skąd

$$\frac{1}{(2\pi j)^M} \int\limits_{\partial\Delta} A(z)\ \hat{h}(z) z^{-t} d\ln z + \frac{1}{(2\pi j)^M} \int\limits_{\partial\Delta} \hat{a}(z)\hat{y}_0(I/z) z^t d\ln z = 0 \qquad (7)$$

Równanie (7) jest układem równań Fredholma z niewiadomą funkcją $\hat{h}$. Po dyskretyzacji poliokręgu zamieniamy je na zwykły układ równań liniowych.

$$\frac{1}{N^I} \sum_{z \in \partial \mathbb{K}_N} z^{-n}\ A(z)\ \hat{h}(z) + \frac{1}{N^I} \sum_{z \in \partial_N \mathbb{K}} z^n\ \hat{a}(z)\hat{y}_0(I/z) = 0.$$

4. STABILIZACJA CYFROWYCH FILTRÓW WIELOWYMIAROWYCH

Zupełnie podobne jest zagadnienie stabilizacji wielowymiarowego filtru NOI, znane pod nazwą hipotezy Shanksa (Shanks conjecture [2]). Chodzi tu o zastąpienie filtru rekursywnego a^{-1} (odwrotność splotowa filtru SOI) równoważnym widmowo filtrem SOI x tak, aby $x \approx a^{-1}$. Sprowadza się to do poszukiwania quasiodwrotności splotowej elementu a minimalizującej normę elementu $a * x - e$, gdzie e jest jednością splotową, a więc do zminimalizowania funkcjonału

$$F(x) = (a * x - e,\ a * x - e). \tag{8}$$

Funkcjonał (8) ma podobną postać do funkcjonału (6) występującego przy kompensacji mocy biernej, a więc jego zminimalizowanie prowadzi do układu równań Fredholma

$$\frac{1}{(2\pi j)^M} \oint_{\partial K} A(z)\, z^{-n} \hat{x}(z)\, d\ln z = a(o)e(n)$$

który po dyskretyzacji widmowej można zastąpić zwykłym układem równań liniowych

$$\frac{1}{N^I} \sum_{z \in \partial_N K} z^{-n} A(z)\hat{x}(z) = a(o)e(n),$$

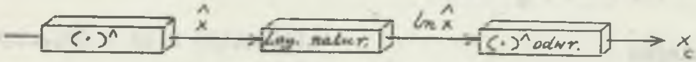
5. HOMOMORFICZNE PRZETWARZANIE SYGNAŁÓW. CEPSTRUM WIELOWYMIAROWE

Niech dane będą dwie przestrzenie sygnałów, w których określono różne operacje mnożenia, odpowiednio (o) i (□). Homomorficzne przetwarzanie sygnałów polega na realizacji operatora H spełniającego warunki

$$H(x \circ y) = H(x) \,\square\, H(y)$$

$$H(x^{\alpha}) = \alpha H(y),$$

gdzie α jest liczbą, a x^{α} oznacza o - potęgę. Jedną z możliwych realizacji jest operator "cepstrum" $(\cdot)_c$ działający zgodnie ze schematem blokowym pokazanym na rys. 2.



Rys. 2′
Definicja cepstrum x_c sygnału x
The definition of a cepstrum x_c of the signal x

Nietrudno wykazać, że cepstrum spełnia warunki homomorfizmu

$$(x * y)_c = x_c + y_c$$

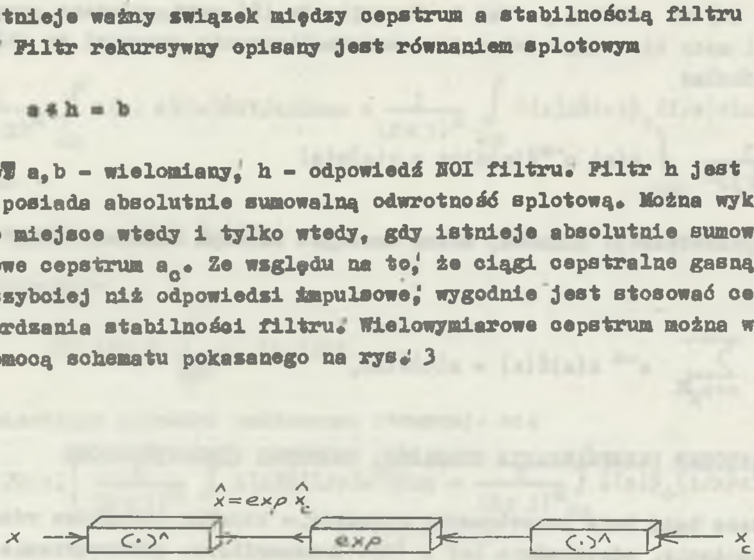
$$(x^{\alpha})_c = \alpha x_c$$

gdzie x^{α} jest α - potęgą splotową.

Istnieje ważny związek między cepstrum a stabilnością filtru rekursywnego. Filtr rekursywny opisany jest równaniem splotowym

$$a * h = b$$

gdzie a, b - wielomiany, h - odpowiedź NOI filtru. Filtr h jest stabilny, gdy a posiada absolutnie sumowalną odwrotność splotową. Można wykazać, że ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje absolutnie sumowalne przyczynowe cepstrum a_c. Ze względu na to, że ciągi cepstralne gasną znacznie szybciej niż odpowiedzi impulsowe, wygodnie jest stosować cepstrum do stwierdzania stabilności filtru. Wielowymiarowe cepstrum można wyznaczać za pomocą schematu pokazanego na rys. 3



Rys. 3

Schemat wyznaczania cepstrum x_c sygnału x

The scheme of calculation of the cepstrum x_c of the signal x

Według tego schematu

$$\hat{x}(z) = \exp \hat{x}(z)$$

skąd po zróżniczkowaniu

$$\hat{x}^{(I)}(z) = \hat{x}(z)\hat{x}_c^{(I)}(z) \tag{9}$$

a stąd kolejno

$$\sum_{n \in Z^M} n^I z^{n-I} x_c(n) = \hat{x}_c^{(I)}(z) = \frac{\hat{x}^{(I)}(z)}{\hat{x}(z)}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^M} z^n \left[n^I x_c(n) \right] = \frac{z^I \hat{x}^{(I)}(z)}{\hat{x}(z)}$$

i wreszcie

$$n^I x_c(n) = \frac{1}{(2\pi j)^M} \int_{\partial \mathbb{K}} z^{-n} \frac{z^I \hat{x}^{(I)}(z)}{\hat{x}(z)} \, d\ln z \tag{10}$$

Nie można skorzystać ze wzoru (10), gdy $n \ngtr 0$, tj. gdy co najmniej jedna składowa multiindeksu n jest równa zero. Ale ze wzoru

$$x_c(n_1, \ldots, n_M) = \frac{1}{(2\pi j)^M} \int_{\partial \mathbb{K}} z_1^{-n_1} \ldots z_M^{-n_M} \hat{x}_c(z_1, \ldots, z_M) \, d\ln z_1 \ldots d\ln z_M$$

wynika, że

$$x_c(0, \ldots, n_k, \ldots, 0) = \frac{1}{2\pi j} \int_{|z_k|=1} z_k^{-n_k} \hat{x}_c(0, \ldots, z_k, \ldots, 0) \, d\ln z_k$$

a ponadto

$$\hat{x}(0, \ldots, z_k, \ldots, 0) = \exp \hat{x}_c(0, \ldots, z_k, \ldots, 0)$$

Zatem wyznaczenie ciągu $x_c(0, \ldots, n_k, \ldots, 0)$ może się odbywać za pomocą wzoru (9) dla 1-D:

$$x_c(0, \ldots, n_k, \ldots, 0) = \frac{1}{2\pi j n_k} \int_{|z_k|=1} z_k^{-n_k} \frac{z_k \dfrac{\partial \hat{x}(0, \ldots, z_k, \ldots, 0)}{\partial z_k}}{\hat{x}(0, \ldots, z_k, \ldots, 0)} \, d\ln z_k$$

a ponieważ zawsze $\hat{x}(0) = x(0)$, więc

$$x_c(0, \ldots, 0) = \ln x(0, \ldots, 0).$$

Podobnie trzeba postąpić w przypadku, gdy dwie współrzędne są niezerowe

$$x_c(0;\dots;n_k;0;\dots;n_l;0;\dots;0) = \frac{1}{(2\pi j)^2 n_k n_l} \int\limits_{|z_k|} \int\limits_{|z_l|=1} z_k^{-n_k} z_l^{-n_l} \frac{z_k z_l \dfrac{\partial^2 \hat{x}(0;\dots;z_k;0;\dots;z_l;0;\dots;0)}{\partial z_k \, \partial z_l}}{\hat{x}(0;\dots;z_k;0;\dots;z_l;0;\dots;0)} \, d\ln z_k \, d\ln z_l$$

Postępując tak dalej można wyznaczyć poszczególne wartości cepstrum x w dowolnym przedziale. W praktyce poliokrąg w całce (10) dyskretyzuje się równomiernie otrzymując

$$x_c(n) \approx \frac{1}{n^I N^I} \sum_{\partial_N^K} z^{-n+I} \frac{\hat{x}^{(I)}(z)}{\hat{x}(z)}$$

Chyba wygodniej jest wyznaczać cepstrum ze wzorów rekurencyjnych. Z równania (9) otrzymuje się

$$z^I \hat{x}^{(I)}(z) = z^I \hat{x}_c^{(I)}(z) \hat{x}(z)$$

skąd

$$n^I x(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^M} m^I x_c(m) x(n-m) = n^I x_c(n) x(o) + \sum_{m \in \mathbb{P}_n} m^I x_c(m) x(n-m)$$

gdzie $\mathbb{P}_n$ jest hiperprostokątem "bez prawego górnego rogu":

$$\mathbb{P}_n = \left\{ m \in \mathbb{Z}_+^M;\ m_i \le n_i;\ m \ne n \right\}$$

Stąd

$$n^I x_c(n) x(o) = n^I x(n) - \sum_{m \in \mathbb{P}_n} m^I x_c(m) x(n-m)$$

Jeżeli $n^I \neq 0$, to

$$x_o(n) = \begin{cases} 0 & n \notin Z_+^M \\ \dfrac{x(n)}{x(0)} - \dfrac{1}{x(0)} \displaystyle\sum_{m \in P_n} \left(\frac{m}{n}\right)^I x_o(m)\, x(n-m) \end{cases}$$

Ciągi jednowymiarowe $x_o(0,\ldots,n_k,\ldots,0)$ wyznacza się rekurencyjnie ze wzoru

$$x_o(0,\ldots,n_k,\ldots,0) = \frac{x(0,\ldots,n_k,\ldots,0)}{x(0,\ldots,0)} - \frac{1}{x(0,\ldots,0)} \sum_{m_k=0}^{n_k-1} \left(\frac{m_k}{n_k}\right)$$

$$x_o(0,\ldots,m_k,\ldots,0)\; x\,(0,\ldots,n_k-m_k,0,\ldots,0)$$

Ciągi dwuwymiarowe $x_o(0,\ldots,n_k,0,\ldots,n_l,0,\ldots,0)$ wyznacza się ze wzorów rekurencyjnych: $x_o(0,\ldots,n_k,0,\ldots,n_l,0,\ldots,0) =$

$$= \frac{x(0,\ldots,n_k,0,\ldots,n_l,0,\ldots,0)}{x(0,\ldots,0)} - \frac{1}{x(0,\ldots,0)} \sum_{m_k,}^{n_k-1} \sum_{m_l=0}^{m_l-1} \left(\frac{m_k m_l}{n_k n_l}\right)$$

$$x_o(0,\ldots,m_k,0,\ldots,m_l,0,\ldots,0)\; x\,(0,\ldots,n_k-m_k,0,\ldots,n_l-m_l,0,\ldots,0)$$

I tak dalej. Stosowanie wzorów rekurencyjnych wymaga pewnego uporządkowania hiperprostokąta P. Porządek taki dla $M=2$ zilustrowano na rys. 4.

Rys. 4

Przykład uporządkowania (2 - D) prostokąta

Example of ordering of a (2-D) rectangle

LITERATURA

[1] Czarnecki L.S.: Interpretacja, identyfikacja i modyfikacja właściwości energetycznych obwodów jednofazowych z przebiegami odkształconymi. Zesz. Nauk. Polit. Śląskiej, Elektryka z. 91, 1984.
[2] Genin Y.V., Kamp Y.G.: Two - Dimensional Stability and Orthogonal Polynomials on the Hypercircle. Proc. IEEE aug. 1977, pp. 873-881.
[3] Oppenheim A.V., Schafer R.W.: Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. WKK, Warszawa 1979.
[4] Pistor P.: Stability Criterion for Recursive Filters. IBM J. Res. Dev. 18 (1): 59-91 (1974)
[5] Ronkin L.I.: Elementy teorii analiticzeskich funkcij mnogich pieriemiennych. Naukowa Dumka, Kijew 1977.
[6] Siwczyński M.: Zastosowania algebr Banacha w teorii sygnałów i układów wielowymiarowych. Zesz. Nauk. Polit. Śląskiej, s.Elektryka z. 81, 1982.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Marian Bogucki

Wpłynęło do redakcji dn. 18 kwietnia 1985 r.

THE POWER THEORY OF SAMPLED DATA SIGNALS

S u m m a r y

The aim of this work is the formulation of compact unified theory of multi-dimensional continuous and sampled data signals and power theory connected with it. Such aim can be achieved by means of respectively powerful mathematical means such as commutative Banach algebras supplemented by Hilbert space structure. These conditions are realized by convolution algebras of multi-dimensional signals with the scalar product. It has been shown that Gelfand conversions of such algebras overlap with multi-dimensional Fourier transformation. The problem of reactive power compensation which was brought to the adequate function operator minimization has been described in this work. Finally, Fredholm integral equations system with the unknown impulsive compensator response was achieved, which after sampling was brought to a simple linear equation system. The problem of looking for the pseudo-reciprocal of spectral polynominal connected with digital filter stabilization has similar mathematical solution. In the further part of the paper the relation between complex cepstrum and stability of multidimensional system was given. Two independent algorithms of determining multidimensional cepstrum, one of them being recurrence were given too.

ТЕОРИЯ МОЩНОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Р е з ю м е

В работе в сжатой однородной форме сформулирована теория непрерывных и дискретных и дискретных многомерных сигналов и связанная с ней теория мощности. Можно это сделать с помощью относительно сильных математических методов как коммутативные Банаховы алгебры со структурой Гильбертового пространства. Эти условия выполняют алгебры многомерных сигналов со свёрткой и скалярным произведением. Доказано, что преобразования Гельфанда этих алгебр совпадают с многомерными преобразованиями фурье.

В статье разработана задача компенсации реактивной мощности которая сведена к минимизации одного функционала. Отсюда получают систему интегральных уравнений Фредхольма с неизвестной импульсной характеристикой компенсатора. Решение этой системы после спектральной дискретизации сводится к решению обыкновенной линейной системы. Показана аналогия между задачей компенсации реактивной мощности а проблемой вычисления почти обратного многомерного многочлена, которая имеет место в теории стабилизации цифровых фильтров.

В последней части работы обращается внимание на связь между комплексным кепстром а устойчивостью многомерного фильтра. Выводится два независимых алгоритма для вычислений многомерных кепстров, в том, один новый - рекурентный.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA 98 Nr kol. 859

Marian PASKO
Lesław TOPÓR-KAMIŃSKI

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

REZYSTANCYJNO-PRZEŁĄCZNIKOWE DWÓJNIKI ELEKTRYCZNE

Streszczenie: W pracy przedstawiono analizę układów elektrycznych złożonych z liniowych rezystancji oraz idealnych przełączników (kluczy). Podano metody sprowadzania takich układów do postaci gałęzi uogólnionych rezystancyjnych i konduktancyjnych. Wykazano, że dowolny układ rezystancyjno-przełącznikowy można sprowadzić do obwodu złożonego z gałęzi uogólnionych przez równoległe i szeregowe łączenie rezystancji oraz stosując znane zasady łączenia kluczy. W pracy podano również boolowską analizę dwójników rezystancyjno- przełącznikowych. Realizacja dwójników rezystancyjno-przełącznikowych pozwala uzyskać układy rezystancyjne o zmiennych parametrach poprzez zmianę funkcji φ sterujących kluczami, a więc układ taki może być uważany za blok wiążący układy analogowe i cyfrowe.

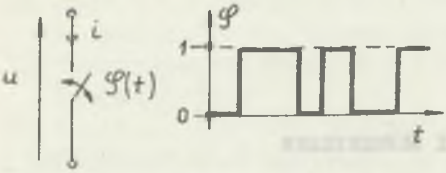
1. WSTĘP

Rozwój współczesnej technologii elementów elektronicznych pozwala nie tylko na kształtowanie różnorodnych nieosiągalnych dotychczas własności układów elektrycznych w trakcie ich produkcji, lecz także zmienianie tych własności w czasie eksploatacji [1] . Uzyskać to można najczęściej poprzez elementy o parametrach sterowanych dodatkowymi sygnałami elektrycznymi kontrolowanymi z zewnątrz lub autonomicznie wewnątrz układu. Z teoretycznego punktu widzenia w opisie działania tego typu układów (równania wiążące prądy i napięcia) muszą wystąpić iloczyny pewnych zmiennych zaciskowych. Niektóre z nich będą nazywane zmiennymi sterującymi.

Opis taki narzuca samoistnie sposób parametryzacji układów elektrycznych poprzez zastosowanie układów mnożących. Układy mnożące są elementami złożonymi oraz kosztownymi, zastosowania ich w większych ilościach w wielu wypadkach wydaje się nieekonomiczne. Znanym powszechnie elementem elektrycznym realizującym uproszczoną funkcję mnożenia jest przełącznik (klucz) stosowany dawniej w postaci mechanicznej. Obecnie jego realizacja praktyczna czysto elektryczna jest wykonywana w różnych postaciach, jako analogowa bramka elektroniczna na tranzystorach polowych. Pozwala ona uzyskać częstotliwości przełączania o kilka rzędów większe niż klucz mechaniczny [5].

2. IDEALNY PRZEŁĄCZNIK ELEKTRYCZNY W OBWODACH REZYSTANCYJNYCH

Przez idealny przełącznik elektryczny (rys. 1) będzie dalej rozumiany element, który może być idealną przerwą lub zwarciem w zależności od wartości sterującej nim funkcji $\varphi(t)$.



Rys. 1

Zakłada się, przy tym, że funkcja ta może przyjmować wartości 0 i 1 odpowiadające rozwarciu i zamknięciu klucza.

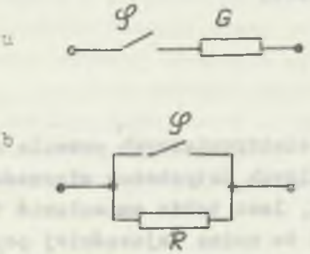
Element taki może być opisany następującymi równaniami:

$$i = \varphi(t)\, u \tag{1}$$

lub:

$$u = \overline{\varphi}(t)\, i \tag{2}$$

gdzie $\overline{\varphi}(t)$ jest negacją logiczną funkcji $\varphi(t)$ odniesioną w stosunku do jej wartości 0, 1. Jak zatem widać, klucz elektryczny powoduje mnożenie prądu i napięcia przez funkcję prostokątną $\varphi(t)$ (lub jej negację), która może być kontrolowana innym sygnałem prądowym lub napięciowym poprzez odpowiedni układ kształtujący. Najprostsze połączenia klucza i elementów rezystancyjnych prowadzą do uzyskania rezystancji zmiennych w czasie (rys. 2).



Rys. 2

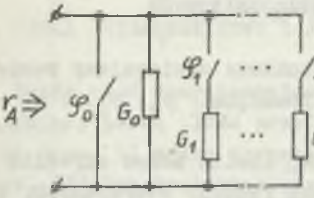
$$g(t) = G\,\varphi(t) \tag{3}$$

$$r(t) = R\,\overline{\varphi}(t) \tag{4}$$

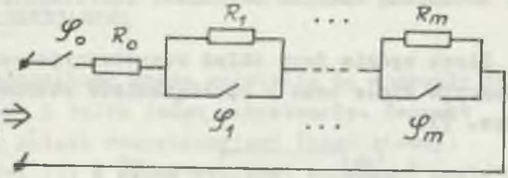
W ogólnym przypadku układy rezystancyjno-przełącznikowe można uważać za złożone z uogólnionych gałęzi rezystancyjnych i konduktancyjnych o strukturach przedstawionych na rys. 3 i 4, opisywanych relacjami:

$$r_A = \frac{\overline{\varphi}_0}{G_0 + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k\, G_k} \tag{5}$$

$$g_B = \frac{\varphi_0}{R_0 + \sum_{k=1}^{n} \overline{\varphi}_k\, R_k} \tag{6}$$

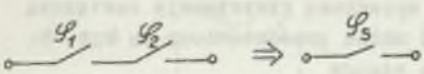


Rys. 3



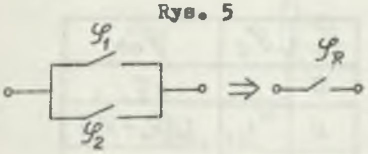
Rys. 4

Dowolny układ rezystancyjno-przełącznikowy można sprowadzić do obwodu złożonego z gałęzi uogólnionych poprzez równoległe i szeregowe łączenie rezystancji oraz stosując znane zasady łączenia kluczy. W najprostszych przypadkach dla połączenia szeregowego i równoległego kluczy φ_1 i φ_2 (rys. 5 i 6) zachodzi:



Rys. 5

$$\varphi_s = \varphi_1 \; \varphi_2 \tag{7}$$



Rys. 6

$$\varphi_R = \varphi_1 \vee \varphi_2 = \overline{\bar{\varphi}_1 \cdot \bar{\varphi}_2} \tag{8}$$

gdzie v jest sumą logiczną funkcji φ_1 i φ_2.

Dla bardziej złożonych kombinacji przełączników należy stosować metody obliczeń znane w teorii automatów [3].

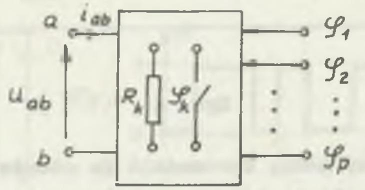
Rezystancja wewnętrzna takiego układu powstaje z rezystancji opisujących pojedyncze gałęzie uogólnione przez działania dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, będzie zatem funkcja typu:

$$r(t) = \frac{\sum_{k=0}^{m} a_k \; \Phi_k}{\sum_{l=0}^{n} b_l \; \Phi_l} \tag{9}$$

gdzie: Φ_k i Φ_l są w ogólności postaciami boolowskimi funkcji φ sterujących kluczami w tym obwodzie oraz ich negacji.

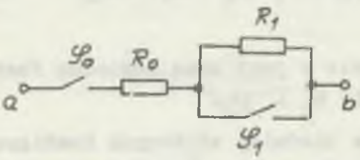
3. BOOLOWSKA ANALIZA DWÓJNIKÓW REZYSTANCYJNO-PRZEŁĄCZNIKOWYCH

Niech będzie dany układ rezystancyjno-przełącznikowy zawierający rezystancyje stałe oraz p przełączników sterowanych funkcjami $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_p$ (rys. 7).



Rys. 7

W każdej chwili można określić wartości funkcji sterujących, a tym samym stan poszczególnych kluczy oraz odpowiadające im wartości rezystancji zastępczych dla dowolnych dwóch wyróżnionych zacisków ab danego układu. Wszystkich możliwych stanów kluczy jest 2^p. Określając dla tych stanów rezystancje zastępcze i tworząc odpowiednią tabelę stanów można na tej podstawie utworzyć wypadkową rezystancję zastępczą $r_{ab}(t)$ postaci (9). Przykładem może być układ przedstawiony na rys. 8. Dla układu tego mamy następującą tabelę stanów



φ_1	φ_0	g_{ab}
0	0	0
0	1	$1/(R_0+R_1)$
1	0	0
1	1	$1/R_0$

Rys. 8

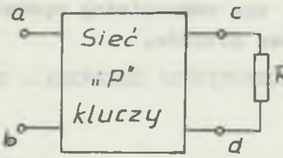
Można zatem określić następującą wartość konduktancji zastępczej:

$$g(t) = \frac{\varphi_0}{R_0 + R_1\overline{\varphi}_1}. \tag{10}$$

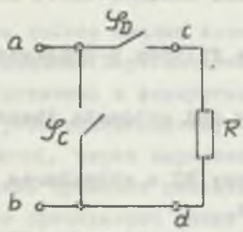
Przedstawiona metoda analizy jest uciążliwa przy większej ilości niezależnych funkcji sterujących φ, prowadzi do obliczeń wielu stałych sieci rezystancyjnych. Podany prosty przykład może służyć jako sprawdzian poprawności określenia wartości g(t) dla gałęzi przedstawionej na rys. 8, która jest uogólnioną gałęzią typu konduktancyjnego g_B przedstawioną na rys. 4 dla wskaźnika k = 1.

4. UKŁAD PRZEŁĄCZNIKOWY Z JEDNĄ REZYSTANCJĄ

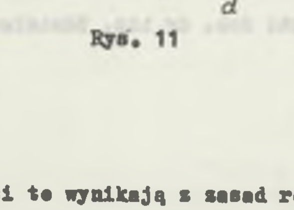
Każdą sieć rezystancyjno-przełącznikową można podzielić na segmenty zawierające pewną ilość przełączników i tylko jedną rezystencję. Segment taki (rys. 9) można sprowadzić do gałęzi rezystancyjnej (uogólnionej) (rys. 10) lub konduktancyjnej (rys. 11) z dwoma kluczami opisanymi zastępczymi funkcjami sterującymi φ_A, φ_B, oraz φ_C i φ_D.



Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11

Wartości tych funkcji można obliczyć zwierając lub rozwierając zaciski ab i cd układu utworzonego z samych przełączników (kluczy).

Układ ten opisany jest relacjami:

$$\varphi_A = \varphi_{ab} \quad \text{dla} \quad R = 0 \tag{11}$$

$$\varphi_B = \varphi_{ad} \quad \text{dla} \quad R_{ab} = \infty \tag{12}$$

$$\varphi_C = \varphi_{ab} \quad \text{dla} \quad R = \infty \tag{13}$$

$$\varphi_D = \varphi_{cd} \quad \text{dla} \quad R_{ab} = 0. \tag{14}$$

Schematy zastępcze przedstawione na rys. 10 i 11 są wzajemnie równoważne, a zależności między opisującymi je funkcjami sterującymi wynoszą:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_A &= \varphi_D \vee \varphi_C \\ \varphi_B &= \varphi_C \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_D &= \varphi_A \\ \varphi_C &= \varphi_A \ \varphi_B \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Zależności te wynikają z zasad rozdzielności połączeń szeregowych i równoległych względem elementów osobliwych [6], [7], jakimi są również idealne przełączniki.

5. UWAGI KOŃCOWE

Realizacja dwójników rezystancyjno-przełącznikowych pozwala uzyskać układy rezystancyjne o zmienianych parametrach poprzez zmianę funkcji φ

sterujących kluczami, przy czym najwygodniejsze wydaje się zastosowanie funkcji okresowych ze zmienianymi współczynnikami wypełnienia [4] . Współczynniki te mogą zależeć od pewnych napięć wewnętrznych układu, przez co układ nabierze cech rezystancyjnego obwodu nieliniowego.

Jeżeli funkcje sterujące będą zmieniane zewnętrznym sygnałem cyfrowym, to sieć przełącznikowo-rezystancyjna może być uważana za blok wiążący układy analogowe z cyfrowymi (np. cyfrowo-analogowy blok mnożący). Rozszerzenie własności przedstawionych układów można dodatkowo uzyskać poprzez wprowadzenie do nich elementów aktywnych, np. wzmacniaczy operacyjnych. Problem ten jest obecnie opracowywany przez autorów.

LITERATURA

[1] Chua L.O.: Theory and Design of Electronic Relays. Proc. IEEE, No. 11, November 1970.

[2] Guzinski A., Matheau I.C.: Projektowanie filtrów R-przełączane. VII KK TO i UE, Kazimierz 1984.

[3] Harrison M.A.: Introduction to switching and automata theory. Mc Graw-Hill Book Company. New York 1965.

[4] Pasko M., Topór-Kamiński L.: Filtr aktywny RC o strukturze równoległej przełączanej. VII SPETO, Ustroń 1984.

[5] Temes G.C., Mitra S.K.: Teoria i projektowanie filtrów. WNT, Warszawa 1978.

[6] Topór-Kamiński L.: Elementy osobliwe i rozszerzenie pojęcia komutacji w obwodach elektrycznych. V SPETO, Ustroń 1981.

[7] Topór-Kamiński L.: Połączenia elementów osobliwych z dwójnikami klasycznymi. VII SPETO, Ustroń 1984.

Recenzent: doc. dr inż. Zdzisław Trzaska

Wpłynęło do redakcji dn. 1 marca 1985 r.

SWITCHED ELECTRIC RESISTANCE ONE-PORTS

S u m m a r y

The analysis of the electric networks built of the linear resistances and the ideal switches has been described. The methods of changing of such networks to the general resistance and conductance branches have been shown. It has been proved that any switched resistive network can be changed into the network composed of the general branches by the series and paralel connection of the resistances and with the use of the known connection rules of the switches. The Boolean analysis of the switched resistance networks has also been given in this work. The resistance networks with the changeable parameters controlled by the φ functions (the control functions of the switches) can be obtain by the means of the switched resistive networks, so such networks can be regarded as the link between the digital and analog networks.

РЕЗИСТИВНО - КЛЮЧЕВЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ДВУХПОЛЮСНИКИ

Р е з ю м е

В статье даётся анализ электрических систем содержащих линейные сопротивления и идеальные переключатели. Описываются способы приведения этих систем к виду резистивных и кондуктивных обобщённых ветвей. Доказывается, что произвольную резистивно-ключевую систему можно свести к цепи содержащей обобщённые ветви, через параллельные и последовательные соединения сопротивлений а также применяя известные соединения переключателей.

В статье представлен также булевый анализ резистивно - ключевых двухполюсников. Реализация этих двухполюсников позваляет получить резистивные системы с переменными параметрами, благодаря изменению управляемых переключателями функций . Такую систему можно считать как блок соединяющий аналоговые и цифровые устройства.

Seria: ELEKTRYKA z.98 Nr kol. 859

Anna LASICZ
Janusz WALCZAK

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

O PEWNYM ZASTOSOWANIU RÓWNAŃ CAŁKOWYCH DO ANALIZY OBWODÓW SLS

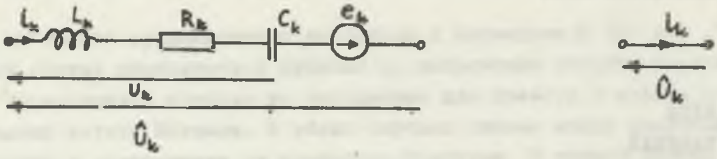
Streszczenie. W artykule opisano pewien sposób analizy czasowej obwodów skupionych, liniowych, stacjonarnych (SLS) za pomocą równań całkowych dla metody prądów cięciw. Wykazano, że obwody o gałęziach będących szeregowym połączeniem rezystorów (R), cewek (L), kondensatorów (C) i dowolnych SEM opisuje macierzowe równanie całkowe Volterry II rodzaju. Pokazano, że obwody, w których gałęzie są dowolną kombinacją połączeń (R,L,C,e) opisuje układ równań całkowych Volterry I i II rodzaju oraz układ równań algebraicznych. Podano postacie jąder równań całkowych dla różnych typów gałęzi. Podano algorytm umożliwiający numeryczne rozwiązywanie równań całkowych i całkowo-algebraicznych oraz porównano efektywność zaproponowanej metody z metodą Rungego - Kutty. Omawiana metoda została zilustrowana przykładem.

1. WPROWADZENIE

Analizę stanów nieustalonych w złożonych obwodach SLS prowadzi się najczęściej poprzez rozwiązywanie układów równań różniczkowych przyporządkowanych tym obwodom. Rozwiązywanie tych równań dla obwodów o dużym wymiarze możliwe jest tylko metodami numerycznymi [1], [2], [3]. Inny równoważny opis obwodów polega na przyporządkowaniu im równań całkowych [4]. Celem pracy jest pokazanie jednego z możliwych sposobów opisu obwodów za pomocą równań całkowych oraz przedstawienie efektywnego algorytmu numerycznego rozwiązywania tych równań.

2. FORMALIZACJA OPISU OBWODÓW ZA POMOCĄ RÓWNAŃ CAŁKOWYCH

Przyjmijmy, że gałąź grafu zorientowanego reprezentuje k-tą gałąź szeregową R, L, C, e (rys. 1a) złożonych obwodów SLS. Takie obwody opisuje układ równań różniczkowo-całkowych i algebraicznych względem współrzędnych gałęziowych i, $\hat{u}$.



Rys. 1 a, b

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{L}\frac{d\mathbf{i}}{dt}(t) + \mathbf{R}\,\mathbf{i}(t) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Gamma}\mathbf{i}(\tau)d\tau + \mathbf{u}_c(t_0) - \mathbf{e}(t) \tag{1}$$

$$\mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} = 0 \qquad \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{e} \tag{2}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{i} = 0 \tag{3}$$

gdzie: $t_0 = t_0^+$

- $\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, \mathbf{i}$ – wektory napięć, prądów gałęziowych,
- $\mathbf{e}$ – wektor sił elektromotorycznych,
- $\mathbf{L}, \mathbf{R}, \mathbf{\Gamma}$ – macierze diagonalne indukcyjności, rezystancji, elastancji,
- $\mathbf{u}_c(t_0)$ – wektor napięć początkowych na kondensatorach,
- $\mathbf{B}$ – fundamentalna macierz oczkowa,
- $\mathbf{A}$ – macierz incydencji

Rozwiązywanie układów równań (1), (2), (3) jest kłopotliwe, z uwagi na jego strukturę (jest to układ równań różniczkowo - całkowych, różniczkowych, algebraicznych), dlatego wygodnie jest zastąpić prądy gałęziowe przez prądy cięciw, korzystając z zależności:

$$\mathbf{i} = \mathbf{B}^t\mathbf{i}_s \tag{4}$$

gdzie: $\mathbf{i}_s$ – wektor prądów oczkowych (cięciw).

Uwzględniając zależność (1) we wzorze (2) otrzymujemy równanie:

$$\mathbf{B}\mathbf{L}\mathbf{B}^t\frac{d\mathbf{i}_s}{d\tau}(t) + \mathbf{B}\mathbf{R}\mathbf{B}^t\mathbf{i}_s(t) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{B}\mathbf{\Gamma}\mathbf{B}^t\mathbf{i}_s(\tau)d\tau = \mathbf{B}\mathbf{e}(t) - \mathbf{B}\mathbf{u}_c(t_0) \tag{5}$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$L_0 = BLB^t$$
$$R_0 = BRB^t$$
$$\Gamma_0 = B\Gamma B^t$$

gdzie: L_0, R_0, Γ_0 - macierze indukcyjności, rezystancji i elastancji oczkowych.

Pomnóżmy obustronnie równanie (5) przez L_0^{-1} (zakładając, że det $L_0 \neq 0$), uzyskamy wtedy zależność:

$$\frac{di_s}{dt}(t) + L_0^{-1}R\, i_s(t) + \int_{t_0}^{t} L_0^{-1}\Gamma_0 i_s(\tau)\, d\tau = L_0^{-1}(Be(t) - Bu_c(t_0)) \tag{6}$$

Po scałkowaniu równania (6) w przedziale (t_0, t) mamy:

$$i_s(t) - i_s(t_0) + \int_{t_0}^{t} L_0^{-1}R_0 i_s(\tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{s} L_0^{-1}\Gamma_0 i_s(\tau)\, d\tau\right] ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t} L_0^{-1}Be(\tau)d\tau - \int_{t_0}^{t} L_0^{-1}Bu_c(t_0)\, d\tau \tag{7}$$

gdzie:

$i_s(t_0) = B^t i(t_0)$

$i(t_0)$ - wektor prądów początkowych w cewkach indukcyjnych.

Skorzystajmy z lematu [4]:

$$\int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{x} f(s)\, ds\right] dx = \int_{t_0}^{t} (t-s)\, f(s) ds \tag{8}$$

otrzymamy wtedy całkowy opis gałęzi obwodu:

$$i_s(t) - \int_{t_0}^{t} -(L_0^{-1}R_0 + L_0^{-1}\Gamma_0(t-\tau))\, i_s(\tau)d\tau = F_0(t) \tag{9}$$

Jest to równanie liniowe Volterry II rodzaju z funkcją wymuszającą $F_0(t)$ daną wzorem:

$$F_0(t) = \int_{t_0}^{t} L_0^{-1}Be(\tau)d\tau - \int_{t_0}^{t} L_0^{-1}Bu_c(t_0)d\tau + i_s(t_0) \tag{10}$$

oraz macierzą jąder:

$$K(t,\tau) = -(L_0^{-1}R_0 + L_0^{-1}\,\Gamma_0(t-\tau)) \tag{11}$$

Można wykazać [4], że istnieje jednoznaczne rozwiązanie równania (9) w klasie funkcji ciągłych na przedziale $[t_0,\ t_1]$, jeśli $K(t,\tau)$ jest funkcją ciągłą w trójkącie określonym nierównościami $t_0 < \tau < t < t_1$, a $F_0(t)$ jest ciągła na $[t_0,\ t_1]$.

3. ALGORYTM ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ CAŁKOWYCH

W celu numerycznego rozwiązania układu równań (9) podzielmy przedział czasu $\langle t_0,\ t\rangle$ na N odcinków o długości Δt i zastąpmy całkę sumą: Mamy więc:

$$i_s(t_i) - \sum_{j=1}^{i} K(t_i,t_j)i_s(t_j)\,\Delta t = F_0(t_i) \tag{12}$$

$$t_i = t_0 + (i-1)\,\Delta t; \quad i = 1,2\ldots N \tag{13}$$

lub

$$(1-K(t_i,t_i)\,\Delta t)i_s(t_i) = F_0(t_i) + \sum_{j=1}^{i-1} K(t_i,t_j)i_s(t_j)\,\Delta t \tag{14}$$

Z postaci jądra (wzór (11)) widać, że dla $t = \tau$ jest ono stałe i równe $-L_0^{-1}R_0$, co bardzo upraszcza obliczenia numeryczne. Wystarczy wtedy tylko raz obliczyć macierz odwrotną do $[1-K(t_i,t_i)\,\Delta t]$ dla rozpatrywanego przedziału czasu $[t_0,t_1]$.

Nie jest to więc iteracyjny sposób rozwiązywania układu równań, a zatem jest on zbieżny. Dokładność rozwiązania zależy natomiast od dokładności obliczania macierzy odwrotnej oraz od przyjętego przyrostu czasu Δt. Przyrost Δt powinien być dobrany tak, by norma wektora Δi była mniejsza od założonego błędu.

4. UOGÓLNIENIE NA GAŁĘZIE ZDEGENEROWANE

Przyjmijmy, że złożony obwód SLS zawiera N1 gałęzi szeregowych R, L, C, e oraz (NG-N1) gałęzi zdegenerowanych. Poprzez gałąź zdegenerowaną rozumiemy gałąź, w której pominięto co najmniej jeden z parametrów R, L, C. Obwody takie opisuje we współrzędnych gałęziowych:

- układ N1 równań całkowych II rodzaju dotyczący gałęzi niezdegenerowanych, z jądrami o postaci:

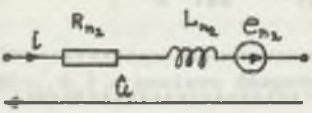
$$K_{n_1,\, n_1}(t,\tau) = -\left(\frac{R_{n_1}}{L_{n_1}} + \frac{1}{L_{n_1} C_{n_1}}(t-\tau)\right) \qquad n_1 = 1,2\ldots N_1 \tag{15}$$

- układ N2 równań całkowych Volterry II rodzaju odnoszący się do gałęzi o postaci przedstawionej na rys. 2

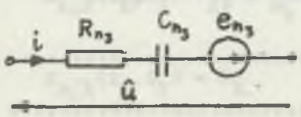
z jądrami:

$$K_{n_2,\, n_2}(t,\tau) = -\frac{R_{n_2}}{L_{n_2}}$$

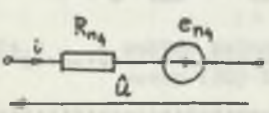
$$n_2 = 1,2\ldots N_2 \tag{16}$$



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

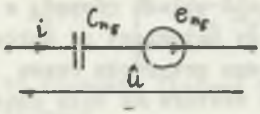
- układ N3 równań Volterry I rodzaju dla gałęzi pokazanych na rys. 3

z jądrami danymi wyrażeniem:

$$K_{n_3, n_3}(t,\tau) = \left(1 + \frac{1}{R_{n_3} C_{n_3}}(t-\tau)\right)$$

$$n_3 = 1,2\ldots N_3 \tag{17}$$

- układ N4 równań Volterry I rodzaju dotyczący gałęzi o postaci przedstawionej na rys. 4.



Rys. 5

z jądrami o postaci

$$K_{n_4,n_4}(t,\tau) = R_{n_4}$$

$$n_4 = 1,2\ldots N_4 \tag{18}$$

- układ N5 równań całkowych Volterry I rodzaju dla gałęzi o postaci przedstawionej na rys. 5

  z jądrami o postaci:

$$K_{n_5,n_5}(t,\tau) = \frac{1}{C_{n_5}}(t-\tau) \qquad n_5 = 1,2\ldots N_5 \tag{19}$$

- układ N6 i N7 równań algebraicznych odnoszący się do gałęzi będących połączeniem cewek i sił elektromotorycznych lub zawierających wyłącznie siły elektromotoryczne.

Obwody rozpatrywane w tym punkcie opisuje następujący układ równań:

$$\begin{array}{l} \\ \\ N_1 \\ \\ N_1+N_2 \\ B^{*} \\ \\ N_1+N_2+ \\ +N_3 \\ \\ N_1+N_2+ \\ +N_3+N_4 \end{array}
\left[\begin{array}{c}
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
i_{n_1} - \int_{t_0}^{t} K_{n_1,n_1}(t,\tau)\, i_{n1}(\tau)d\tau\ L_{n1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
i_{n_2} - \int_{t_0}^{t} K_{n_2,n_2}(t,\tau)\, i_{n_2}(\tau)d\tau\ L_{n2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\int_{t_0}^{t} K_{n_3,n_3}(t,\tau)\, i_{n_3}(\tau)d\tau \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\int_{t_0}^{t} K_{n_4,n_4}(t,\tau)\, i_{n_4}(\tau)d\tau \\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right]
= B^{*}
\left[\begin{array}{c}
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\int_{t_0}^{t} (e_{n1}(\tau) - u_{cn1}(t_o))d\tau + L_{n1} i_{n1}(t_o) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\int_{t_0}^{t} (e_{n2}(\tau).d\tau) + L_{n2} i_{n2}(t_o) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\int_{t_0}^{t} (e_{n3}(\tau) - u_{cn3}(t_o))d\tau \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\int_{t_0}^{t} (e_{n4}(\tau).d\tau) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right] \tag{20}$$

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ \\ N_1+N_2+N_3 \\ +N_4+N_5 \\ \\ \\ N_1+N_2\ldots+ \\ +N_5+N_6 \\ \\ \\ N_1+\ldots \\ \ldots+N_6+N_7
\end{array}
\begin{bmatrix}
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\int\limits_{t_0}^{t} K_{n_5,n_5}(t,\tau) i_{n_5}(\tau)d\tau \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
L_{n6}\, i_{n6}(t) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\int\limits_{t_0}^{t} (e_{n5}(\tau)-u_{cn5}(t_o))\, d\tau \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\int\limits_{t_0}^{t} (e_{n6}(\tau)d\tau) + L_{n6}i_{n6}(t_o) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\int\limits_{t_0}^{t} e_{i7}(\tau)d\tau \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{bmatrix}
$$

Postępując analogicznie jak w punkcie 3 zastępujemy prądy gałęziowe przez prądy strum otrzymując układ równań liniowych:

$$
BM(t_i,t_i)\,\Delta t B^t i_s(t_i) = F(t_i) + \sum_{j=1}^{i-1} BM(t_i,t_j) B^t i_s(t_j)\,\Delta t \tag{21}
$$

gdzie:

$M(t_i,t_i)$ - macierz diagonalna, której elementy określają wzory

$$
N_{k,k}(t_i,t_i) = \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{R_k}{L_k}\right)L_k \qquad \text{dla } k = n_1, n_2+N_1 \tag{22}
$$

$$
N_{k,k}(t_i,t_i) = R_k \qquad \text{dla } k = N_2+N_1+n_3,\ N_1+N_2+N_3+n_4
$$

$$
N_{k,k}(t_i,t_i) = 0 \qquad \text{dla } k > N_1+N_2+N_3+N_4
$$

$F(t_i)$ - wektor kolumnowy, którego wyrazami są elementy prawej strony wzoru (20) dla wartości t_i,

$M(t_i,t_j)$ - macierz diagonalna o elementach określonych wzorami:

$$
\begin{aligned}
&M_{k,k}(t_i,t_j) = -(R_k + \frac{1}{C_k}(t_i-t_j)) && k = 1 \ldots N_1\\
&M_{k,k}(t_i,t_j) = - R_k && k = N_1+n_2\\
&M_{k,k}(t_i,t_j) = - (R_k + \frac{1}{C_k}(t_i-t_j)) && k = N_1+N_2+n_3\\
&M_{k,k}(t_i,t_j) = - R_k && k = N_1+N_2+N_2+n_4\\
&M_{k,k}(t_i,t_j) = - (t_i-t_j)\frac{1}{C_k} && k = N_1+N_2+N_3+N_4+n_5\\
&M_{k,k}(t_i,t_j) = 0 && k > N_1+N_2+N_3+N_4+N_5
\end{aligned}
\tag{23}
$$

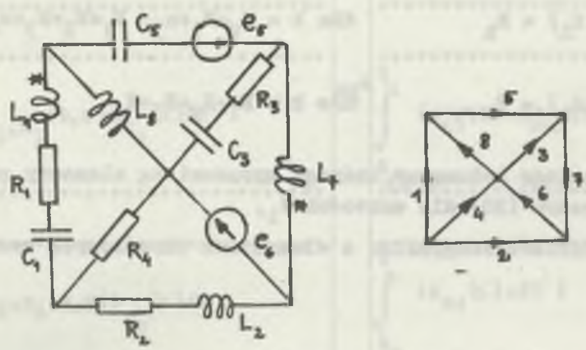
Jeśli w obwodzie wystąpią sprzężenia magnetyczne, wtedy uwzględnia się je w macierzy $M(t_i,t_i)$ (wzór (22)) lub w macierzy $\{1-K(t_i,t_i)\}$ (wzór(14)) Uwagi dotyczące zbieżności i dokładności rozwiązania równania (21) są takie same jak dla równania (14) pod warunkiem, że istnieje macierz odwrotna do macierzy $BM(t_i,t_i)B^t$.

5. PORÓWNANIE OMÓWIONEJ METODY Z METODĄ RUNGEGO - KUTTY

Przeprowadzono obliczenia rozpływu prądów w obwodach o strukturze przyjętej w pracy metodą równań całkowych i metodą Rungego - Kutty, 4 rzędu (podprogram F4 RUNG biblioteki FSCE). Przeprowadzone eksperymenty pozwalają stwierdzić, że czasy obliczeń tymi metodami są tego samego rzędu.

Przykład 1.

Zapiszmy macierz $N(t_i,t_i)\ \Delta t$, $M(t_i,t_j)$ dla obwodu przedstawionego na rysunku 6a



Rys. 6 a,b

$$M(t_i,t_i) = \begin{bmatrix} L_1+R_1\,\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{17} & 0 \\ 0 & L_2+R_2\,\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3\,\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4\,\Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_8 \end{bmatrix}$$

$$M(t_i,t_j) = \begin{bmatrix} -(R_1+\frac{1}{C_1}(t_i-t_j)) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(R_3+\frac{1}{C_3}(t_i-t_j)) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(t_i-t_j)\frac{1}{C_5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Czas obliczenia prądów w tym obwodzie w przedziale czasowym (0,6) przy $\Delta t = 0{,}3$ wyniósł 9212 ms.

6. PODSUMOWANIE

Opisano sposób analizy (za pomocą równań całkowych dla metody prądów cięciw) obwodów SLS zawierających wyłącznie gałęzie szeregowe R, L, C, e, a następnie uogólniono tę metodę na obwody z gałęziami zdegenerowanymi. Metodę tą można zmodyfikować dla obwodów zawierających siły prądomotoryczne i wszystkie typy źródeł sterowanych. Podobnie można wyprowadzić równania całkowe dla metody potencjałów węzłowych.

LITERATURA

[1] Demidowicz B.P., Maron I.A., Szuwałowa E.J.: Metody numeryczne. cz. I, II. PWN, Warszawa 1965

[2] Chua L.O., Lin P.M.: Computer - aided analysis of electronic circuits. Prentiee Hall, Inc, Engl. Cliffs. N. Jersey, USA 1975.
[3] Michlin S.G., Smolnicki C.L.: Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych. PWN, Warszawa 1970.
[4] Piskorek A.: Równania całkowe. WNT, Warszawa 1972.

Recenzent: doc. dr inż. Zdzisław Trzaska

Wpłynęło do redakcji dn. 15 marca 1985 r.

ON AN APPLICATION OF THE INTEGRAL EQUATIONS TO THE ANALYSIS OF THE SLS CIRCUITS

S u m m a r y

A way of the time - domain analysis of lumped, linear, time - invariant (SLS) circuits has been described using integral equations, in the case of current strings. It has been shown, that the circuits with the branches being the sequential connections of resistors (R), inductors (L), capacitors (C) and arbitray SEM (e) are described by the matrix integral Volterra equation of the second kind. It has been demonstrated, that the circuits with the branches which are arbitrary combination of (R,L,C,e) are described by the system of integral equations of the first and second kind and the system of algebraic equations. The forms of the kernels of the integral equations describing the various types of branches have been given. An algorithm making possible numerical solution of the integral and integral - algebraic equations has been given; the effectiveness of the suggested method has been compared with the method Runge - Kutty. The discussed method has been illustrated by an example.

ОБ НЕКОТОРОМ ПРИМЕНЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К АНАЛЗУ ЦЕПИ С С

Р е з ю м е

В статье представлен некоторый метод временного анализа сосредоточенных линейных стационарных цепей при помощи интегральных уравнений для метода

токов хорд. Показано, что цепи с ветвями, которые являются рядовыми соединениями резисторов, катушек, конденсаторов и произвольных СЭМ, описываются матричными интегральными уравнениями Вольтерры второго рода. Показано, что эти цепи, в которых ветви являются произвольными комбинациями Р, Э описать можно при помощи системы интегральных уравнений Вольтерры первого и второго рода и при помощи системы алгебраических уравнений. Даны виды ядер интегральных уравнений, описывающих разные типы ветвей. Дан алгоритм численного решения интегральных уравнений и интегро- алгебраических уравнений. Показана эффективность этого метода по сравнению с методом Рунге- Кутты. Для представленного метода приведён числовой пример.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 98 Nr. kol.859

Krystyna STEC

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

REALIZACJA WYBRANEGO TYPU LINIOWEJ REZYSTANCJI STEROWANEJ (LRS) Z NIEUZIEMIONYM ZACISKIEM WEJŚCIOWYM

Streszczenie. W praktyce często konieczne jest szeregowe łączenie rezystancji sterowanych. Ma to na przykład miejsce przy modelowaniu charakterystyk nieliniowych [1]. Wszystkie znane dotychczas liniowe rezystancje sterowane mają jeden zacisk uziemiony [1,2,3,4], nie mogą więc być użyte w połączeniach szeregowych. Wcześniejsze próby doprowadziły [1] do nieuziemionej struktury LSR, która nie może jednak być uważana za dwójnik. W pracy uzyskano nieuziemione struktury LSR. Przyjęto założenie, że liniowa rezystancja sterowana musi spełniać dwa warunki:

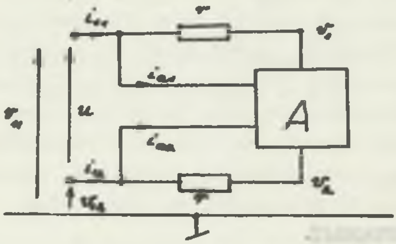
1) warunek dwójnika, tzn. równość prądów obu zacisków,
2) warunek LSR, tzn. $u = i\,k\,r\,V_c$,

gdzie: u - napięcie,
i - prąd,
k - stała,
r - stała rezystancja,
V_c - napięcie sterujące.

Wyprowadzono równania nieuziemionej struktury LSR. Zaproponowano dwie równoważne struktury LSR.

W układach praktycznych, np. przy modelowaniu zadanej charakterystyki nieliniowej [1] niejednokrotnie zachodzi konieczność szeregowego łączenia rezystancji sterowanych. W literaturze, np. [1], [2], [3], [4] spotyka się prawie wyłącznie rezystancje z uziemionym zaciskiem wejściowym, które nie mogą być łączone szeregowo. Nieliczne [1] proponowane rozwiązania prowadzą do rezystancji, które trudno uważać za dwójniki.

W pracy tej wyprowadzono zależności, jakie spełniać winny układy LRS o założonej strukturze ogólnej oraz przedstawiono dwa możliwe rozwiązania problemu. Do rozważań przyjęto dwójnik o strukturze pokazanej na rys. 1, gdzie A jest układem złożonym z rezystancji, wzmacniaczy operacyjnych i układu mnożącego. Założono, że rezystancje wejściowe układu A są znacznie większe od r tak, że prądy i_{a1} i i_{a2} są pomijalnie małe, tzn. możemy przyjąć $i_{a1} = i_{a2} = 0$.



Rys. 1
Ogólna struktura LRS
The general VCLR structure

Układ pokazany na rys. 1 musi spełniać równocześnie dwa równania:
ogólne równanie dwójnika

$$i_{11} = -i_{12} = i, \tag{1}$$

równania LRS

$$u = ir(t) = ikrV_c \tag{2}$$

gdzie:
V_c – napięcie sterujące,
k – stała,
u – $V_{11} - V_{12}$.

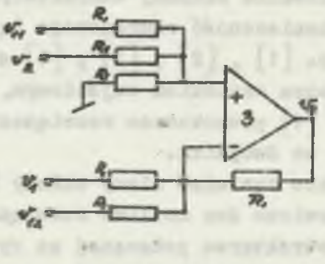
W zależności (1) wynika, że:

$$V_{11} - V_1 = V_2 - V_{12}. \tag{3}$$

Wprowadzamy napięcie pomocnicze V_3 liniowo zależne od prądu wejściowego dwójnika

$$V_3 = r(i_{11} - i_{12}) = 2ir = V_{11} - V_1 - V_{12} + V_2. \tag{4}$$

Równanie to realizuje układ pokazany na rys. 2.



Rys. 2
Realizacja wyrażenia (4)
The realization of the equation (4)

Na podstawie wyrażeń (2), (3) i (4) otrzymujemy następujące zależności

$$u = 2k_1rV_ci = V_1 - V_2 + V_3$$

gdzie:
$k_1 = \frac{k}{2}$ zostaje przyjęte jako stała układu mnożącego z napięciami wejściowymi V_3 i V_c i napięciem wyjściowym $k_1 V_3 V_c$.

$$V_1 - V_2 = k_1 V_3 V_c - V_3 \tag{5}$$

$$V_1 + V_2 = V_{11} + V_{12} \tag{6}$$

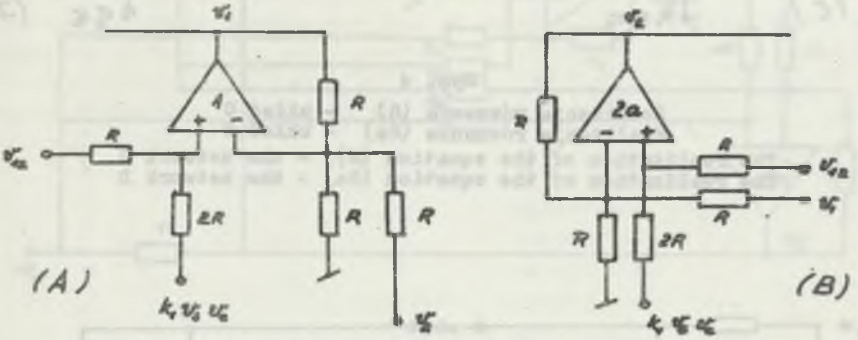
Dodając równania (5) i (6) otrzymamy:

$$V_1 = 2V_{12} - V_2 + k_1 V_3 V_c \tag{7}$$

lub

$$V_2 = 2V_{12} - V_1 + k_1 V_3 V_c \tag{7a}$$

Równania (7) i (7a) realizują układy pokazane na rys. 3



Rys. 3

Realizacja równania (7) - układ A
Realizacja równania (7a) - układ B
The realization of the equation (7) - the network A
The realization of the equation (7a) - the network B

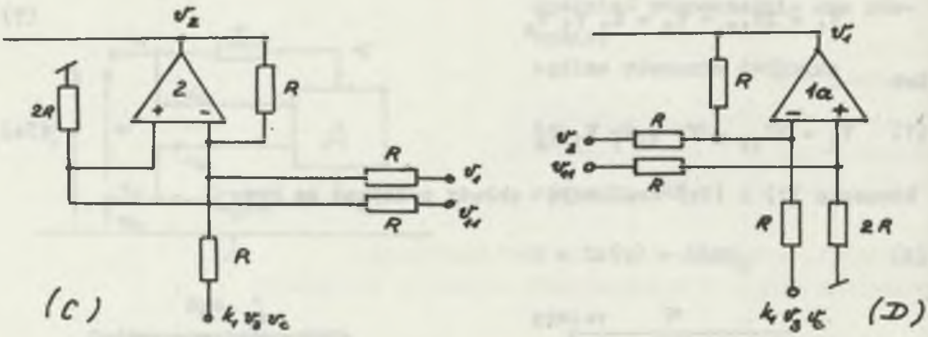
Odejmując równania (5) i (6) otrzymamy:

$$V_2 = 2V_{11} - V_1 - k_1 V_3 V_c \tag{8}$$

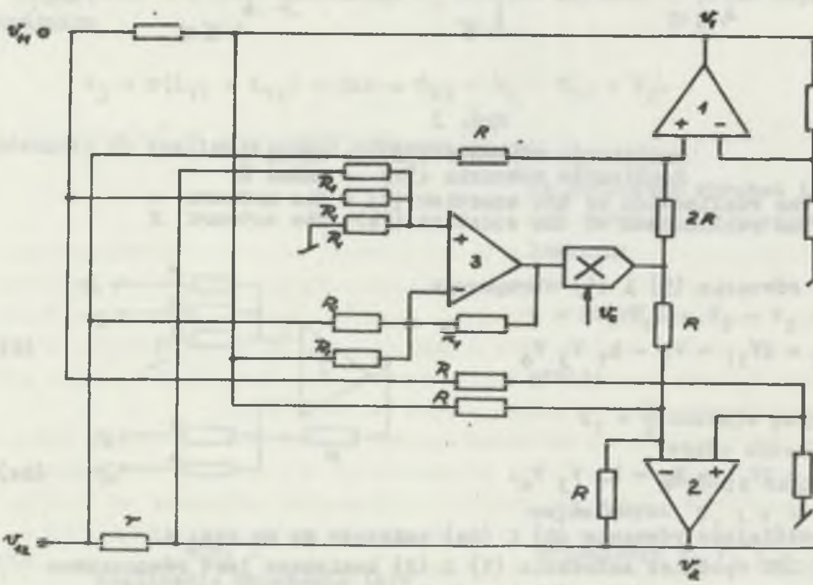
lub

$$V_1 = 2V_{12} - V_2 - k_1 V_3 V_c. \tag{8a}$$

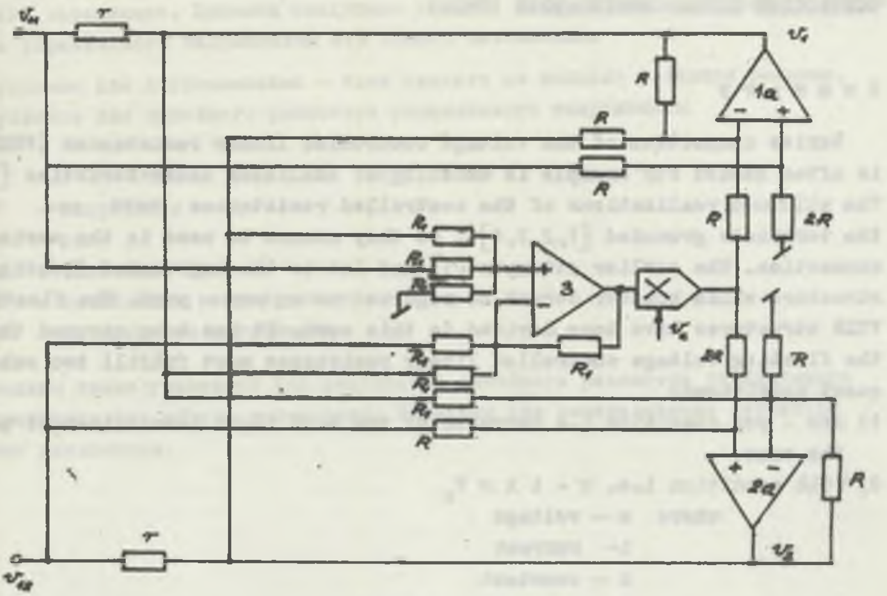
Układy spełniające równania (8) i (8a) pokazane są na rys. 4.
Aby układ LRS spełniał założenia (1) i (2) konieczne jest równoczesne spełnienia zależności (7) i (8) lub (7a) i (8a).
Ostateczna realizacja LRS powstanie przez złożenie układu z rys. 2, układu mnożącego oraz układów (A) i (C) - rys. 5 lub (B) i (D) - rys. 6.



Rys. 4
Realizacja równania (8) - układ C
Realizacja równania (8a) - układ D
The realization of the equation (8) - the network C
The realization of the equation (8a) - the network D



Rys. 5
Układ LRS odpowiadający równaniom (7) i (8)
The VCLR structure for the equations (7) and (8)



Rys. 6

Układ LRS odpowiadający równaniom (7a) i (8a)
The VCLR structure for the equations (7a) and (8a)

LITERATURA

[1] Huertas J.L., Acha J.I., Gago A.: Design of general voltage or current controlled resistances and their application to the synthesis of nonlinear networks. IEEE Trans on Circuits and Systems Vol. Cas - 27, No 2, February 1980.

[2] Goras L.: The x - Controlled scalor and its application to network synthesis. IEEE Trans on Circuit and Systems, Vol. CAS - 26, No 4, April 1979.

[3] Malik N.R., Jacson G.L., Kim Y.S.: Theory and application of resistor, linear controlled resistor, linear controlled conductor networks. IEEE Trans on Circuit and Systems Vol. CAS - 23, April 1976.

[4] Topór-Kamiński L.: Konwertor mocowy sterowany. Zeszyty Naukowe, Politechnika Śląska, Elektryka Nr 60, 1978.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Maciej Siwczyński

Wpłynęło do redakcji dn. 2 marca 1985 r.

REALIZATION OF SOME FLOATING VOLTAGE CONTROLLED LINEAR RESISTANCES (VCLR)

S u m m a r y

Series connection of the voltage controlled linear resistances (VCRL) is often needed for example in modeling of nonlinear characteristics [1]. The all known realizations of the controlled resistances have one of the terminals grounded [1,2,3,4], so they cannot be used in the series connection. The earlier attempts [1] had led to the ungrounded floating structure which however cannot be regarded as an one - port. The floating VCLR structures have been derived in this work. It has been assumed that the floating voltage controlled linear resistance must fulfill two subsequent conditions:

1) one - por condition i.e currents of the both input terminals must be the same,
2) VCLR condition i.e. $u = i\,k\,r\,V_c$

where u - voltage
i - current
k - constant
r - constant resistance
V_c - control voltage

The equations of the floating VCLR have been derived. The two alternative VCLR structures have been proposed.

РЕАЛИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТОРОВ УПРАВЛЯЕМЫХ НАПРЯЖЕНИЕМ БЕЗ ОБЩЕГО ЗАЗЕМЛЕНИЯ

Р е з ю м е

Последовательное соединение линейных управляемых резисторов часто является необходимым, на пример для формирования нелинейных характеристик I.
Все известные управляемые резистанции имеют один из полюсов звземлённый 1,2,3,4 так, что не могут быть соединёнными последовательно.

Только одно испытание было сделано до сих пор I, но полученный управляемый резистор без общего заземления совсем не был двухполюсником.

В настоящей работе выведены линейные резисторы управляемые напряжением без общего заземления. Приняты следующие условия для реализации линейного резистора управляемого напряжением без общего заземления:

1) условие для двухполюсника - токи каждого из полюсов является равными,
2) условие для линейного резистора управляемого напряжением

где

- напряжение
- ток

к - константа

- постоянное сопротивление
- управляющее напряжние

Выведены также уравнения для реализации линейного резистора управляемого напряжением без общего заземления. Показаны две эквивалентные структуры таких резисторов.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 98 Nr kol. 859

Bernard BARON
Jan ULMAN
Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

ZASTOSOWANIE METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH DO ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ CAŁKOWYCH I RODZAJU POLA LINII PRZESYŁOWYCH

Streszczenie. W pracy sprowadzono zewnętrzne zagadnienie brzegowe Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a do równania całkowego I rodzaju. Rozwiązanie zagadnienia poszukiwano w postaci potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej. Płaszczyznę ziemi uwzględniono poprzez zastosowanie metody obrazów elektrycznych. Zastosowana metoda umożliwia obliczenie pola w nieograniczonej przestrzeni poprzez rozwiązywanie równań całkowych na granicach podziału ośrodków. Przeprowadzono algebraizację równania całkowego I rodzaju z zastosowaniem funkcji sklejanych stopnia 1 dla dwuwymiarowego modelu linii przesyłowych o dowolnych konfiguracjach. Dokonano podziału konturów przewodników na elementy i dla każdego z nich wybrano odpowiednią funkcję aproksymującą gęstość powierzchniową ładunku. Wykonując następnie całkowanie po każdym z elementów i sumując otrzymane wyniki uzyskano "operację przybliżoną" do numerycznego określenia rozkładu gęstości ładunków na powierzchni przewodników oraz potencjału pola w dowolnym punkcie na zewnątrz przewodników. W celu zwiększenia dokładności obliczeń zastosowano funkcje sklejane do aproksymacji funkcji gęstości ładunków na poszczególnych elementach podziału konturów przewodników. W pracy przeprowadzono dyskusję poprawności sformułowanego zagadnienia Dirichleta. Wykazano jednoznaczność rozwiązania postawionego problemu. Podano także metodę wyznaczania wektora natężenia pola elektrycznego. Uwzględniono tutaj zarówno obszar na zewnątrz przewodników, jak też na ich powierzchni. Określono algorytm obliczania składowych wektora natężenia pola w oparciu o wyznaczony wcześniej rozkład powierzchniowy gęstości ładunków. Przedstawiony w pracy algorytm przetestowano na przykładzie przewodnika o zadanym potencjale. Określony w ten sposób rozkład natężenia pola na powierzchni przewodnika porównano z rozwiązaniem dokładnym danym wzorem analitycznym. Opracowany algorytm zastosowano do obliczeń rozkładu pola linii 400 kV.

1. WSTĘP

Dwuwymiarowy model pola elektrycznego można stosować w przypadku rozpatrywania układów przewodów prowadzonych równolegle względem siebie oraz przy założeniu, że odległości między przewodami są dostatecznie małe w porównaniu z ich długością.

Model ten jest często stosowany przy analizie i syntezie pola elektrycznego linii przesyłowych w warstwie przy powierzchni ziemi. Między innymi posługiwano się nim w pracach [2] , [3] . Badanie pola w dowolnym punkcie na zewnątrz przewodów, jak również na ich powierzchniach wymaga precyzyjniejszego aparatu matematycznego. Obecnie dużo uwagi zwraca się na rozwiązywanie pól elektrycznych quasi - statycznych metodą równań całkowych. Szerokie zastosowanie tej metody podyktowane jest wieloma zaletami, z których zasadnicza polega na możliwości obliczenia pola w nieograniczonej przestrzeni poprzez rozwiązywanie równań całkowych na granicach podziału ośrodków. W obliczeniach numerycznych wystarczy więc dyskretyzować tylko powierzchnie ciał, a nie całą przestrzeń, co znacząco ułatwia nie tylko stawianie zadań, lecz także ich rozwiązywanie.

Najczęściej metodę równań całkowych stosuje się w obliczeniach pól elektrycznych quasi - statycznych generowanych przez naładowane przewodniki. Za najbardziej naturalne z fizykalnego punktu widzenia jest rozwiązywanie tego typu zadań poprzez sprowadzenie ich do równań całkowych I rodzaju [14] o jądrach logarytmicznych. Podyktowane jest to przyjęciem rozwiązań zagadnień dwuwymiarowych w postaci potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej. Jak wiadomo, równanie całkowe I rodzaju należy do równań źle uwarunkowanych [19] . Z tego powodu do rozwiązywania tych równań stosuje się specjalne metody regularyzacji [19] , które wymagają większej pamięci EMC.

W dalszej części pracy opracowane będą ogólne algorytmy rozwiązywania zewnętrznego problemu Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a metodą równań całkowych I rodzaju.

2. SPROWADZENIE ZEWNĘTRZNEGO ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO DIRICHLETA DLA DWUWYMIAROWEGO RÓWNANIA LAPLACE'A DO RÓWNANIA CAŁKOWEGO PIERWSZEGO RODZAJU

Poszukiwanie rozwiązania tego problemu będzie prowadzone w postaci potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej. Niech na płaszczyźnie R^2 dany jest układ $D_i (i=1,2,...N_p)$ rozłącznych obszarów ograniczonych jednospójnych, których brzegi $C^{(i)}$ są krzywymi zamkniętymi klasy C^1_6 . Poszukuje się rozwiązania $V(X)$ zewnętrznego zagadnienia Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a.

$$\Delta V(X) = 0 \qquad \text{dla } X \in R^2 - \bigcup_{i=1}^{N_p} \bar{D}_i \tag{2.1}$$

z warunkami brzegowymi

$$V(X) = V_i \quad \text{dla} \quad X \in C^{(i)}, \quad i = 1,2,...N_p \tag{2.2}$$

znikającego w nieskończoności, w postaci potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej [14] .

$$V(X) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{N_p}\oint_{C^{(k)}} \sigma^{(k)}(Y)\ln\left[\frac{1}{|XY|}\right] dl_Y = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\int_C \sigma(Y)\ln\left[\frac{1}{|XY|}\right] dl_Y \qquad (2.3)$$

gdzie:

$$C = C^{(1)} \cup C^{(2)} \cup \dots \cup C^{(N_p)}.$$

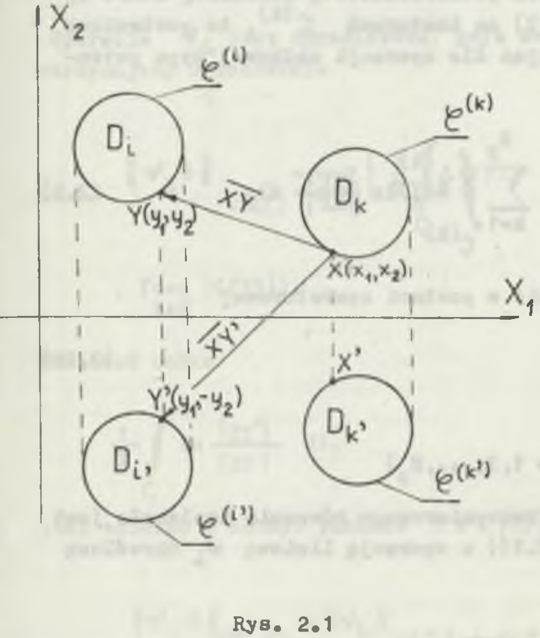
Aby jednak potencjał określony wzorem (2.3) znikał w nieskończoności potrzeba i wystarcza aby

$$\int_C \sigma(X)\, dl_x = \sum_{k=1}^{N_p}\oint_{C^{(k)}} \sigma^{(k)}(X)\, dl_x = 0. \qquad (2.4)$$

Mając na uwadze zastosowanie dwuwymiarowego modelu pola elektrycznego do badania pola linii trójfazowych zakłada się dalej, że rozłączne obszary D_i znajdują się w półpłaszczyźnie $X_2 > 0$ (rys. 2.1).

Warunki brzegowe (2.2) pozostają bez zmian, natomiast dla $X_2=0$ otrzymuje się potencjał $V(x_1,x_2)$ równy zeru

$$V(x_1,0) = 0 \qquad (2.5)$$



Rys. 2.1

Odbicie zwierciadlane obszarów D_i w osi X_1

The mirror reflection of the D_i region in the X_1 axis

Rozwiązanie tak postawionego zagadnienia Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a można otrzymać stosując metodę obrazów elektrycznych względem prostej $X_2=0$ [10]. Polega ona na uwzględnieniu warunku brzegowego (2.5) przez wprowadzenie układu $D_{i'}$ obszarów ($i'=1,2,\dots N_p$), będących odbiciem zwierciadlanym obszarów D_i ($i=1,2,\dots N_p$) względem osi X_1, na których funkcje $\sigma^{(i')}(Y')$ wynoszą

$$\sigma^{(i')}(Y') = -\sigma^{(i)}(Y)$$

$$Y = Y(y_1,y_2),\quad Y'=Y'(y_1,-y_2) \qquad (2.6)$$

W takim przypadku rozwiązanie zewnętrznego zagadnienia Dirichleta można poszukiwać w postaci

$$V(X) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\int_C \sigma(Y)\ln\frac{|XY'|}{|XY|}\,dl_Y = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\sum_{k=1}^{N_p}\int_{C^{(k)}}\sigma^{(k)}(y_1,y_2)\ln\frac{\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2+x_2)^2}}{\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}}\,dl_Y \tag{2.7}$$

W rozpatrywanym przypadku należy tak określić funkcję $\sigma(Y)$ na brzegu C, aby potencjał V(X) spełniał warunki brzegowe (2.2) i (2.5), a na to potrzeba by spełniony był następujący układ równań całkowych I rodzaju

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N_p}\int_{C^{(k)}}\sigma^{(k)}(y_1,y_2)\ln\frac{\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2+x_2)^2}}{\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}}\,dl_Y = 2\,\varepsilon_o V_l,\quad X(x_1,x_2)\in C^{(l)}$$

$$l = 1,2,\ldots N_p \tag{2.8}$$

Jeżeli znamy prawo rozkładu gęstości powierzchniowej ładunków, które by zapewniało spełnienie warunków (2.2) na konturach $C^{(k)}$, to postawione zadanie byłoby rozwiązane. Przyjmując dla operacji całkowej typu potencjału logarytmicznego oznaczenie

$$\vartheta_L\,\sigma = \frac{1}{\pi}\int_C \sigma(Y)\ln\frac{|XY'|}{|XY|}\,dl_Y = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N_p}\oint_{C^{(k)}}\sigma^{(k)}(Y)\ln\frac{|XY'|}{|XY|}\,dl_Y \tag{2.9}$$

można układ równań (2.8) przedstawić w postaci operatorowej

$$\vartheta_L\,\sigma = W \tag{2.10}$$

gdzie:

$$W = 2\,\varepsilon_o V_l \quad \text{dla} \quad X\in C^{(l)}\ (l = 1,2,\ldots,N_p)$$

Problem zewnętrzny Dirichleta dla dwuwymiarowego równania Laplace'a jest równoważny rozwiązaniu równania (2.10) z operacją liniową ϑ_L określoną wzorem (2.9).

2.1. POPRAWNOŚĆ SFORMUŁOWANEGO ZAGADNIENIA

Mając na uwadze, że rozpatrywane pole elektryczne quasi- statyczne jest sinusoidalnie zmienne, należy dziedzinę i przeciwdziedzinę operatora ϑ_L rozpatrywać w przestrzeniach zespolonych funkcji punktu na konturze C, np. w przestrzeni funkcji całkowalnych z modułem $L_1^*(C)$ lub z kwadratem modułu $L_2^*(C)$. Jądro operatora całkowego ϑ_L(2.9) ma słabą osobliwość w przypadku, gdy punkty X i Y pokrywają się. Jeżeli jako dziedzinę operatora ϑ_L przyjąć przestrzeń $L_1^*(C)$;$(\sigma \in L_1^*(C))$, to jak wiadomo z teorii potencjału logarytmicznego [13] operator ten przyjmuje wartości z przestrzeni funkcji ciągłych $C^*(C)$ na konturach $C = C^{(1)} \cup C^{(2)} \cup \ldots \cup C^{(N_p)}$. Przestrzenie $L_1^*(C)$ i $C^*(C)$ są przestrzeniami Banacha o normach

$$\|\sigma\|_{L^*(C)} = \int_C |\sigma(Y)|\,dl_Y = \sum_{i=1}^{N_p} \oint_{C^{(i)}} |\sigma^{(i)}(Y)|\,dl_Y \tag{2.11}$$

$$\|V\|_{C^*(C)} = \max_{X\in C} |V(X)| = \max_i \max_{X\in C^{(i)}} |V_i(X)| . \tag{2.12}$$

Operacja ϑ_L jest ograniczona, gdyż uwzględniając wzory (2.12) i (2.9) otrzymujemy oszacowanie

$$\|\vartheta_L\sigma\|_{C^*(C)} = \max_{X\in C} \left| \frac{1}{\pi}\int_C \sigma(Y)\ln\frac{|XY'|}{|XY|}\,dl_Y \right| \leqslant \left(\max_{X\in C} \frac{1}{\pi}\int_C \ln\frac{|XY'|}{|XY|}\,dl_Y\right) \cdot \left(\max_{Y\in C}|\sigma(Y)|\right). \tag{2.13}$$

Ponieważ całka

$$\frac{1}{\pi}\int_C \ln\frac{|XY'|}{|XY|}\,dl_Y$$

jest zbieżna w każdym punkcie $X \in C$ [13], więc otrzymujemy

$$\|\vartheta_L\sigma\|_{C^*(C)} \leqslant \|\vartheta_L\|_{C(C)\to C(C)} \|\sigma\|_{C^*(C)} \tag{2.14}$$

gdzie norma operacji ϑ_L [12] wyraża się wzorem

$$\|\vartheta_L\|_{C^*(C)\to C^*(C)} = \sup\left\{\|\vartheta_L 6\|_{C^*(C)} : \|6\|_{C^*(C)} = 1\right\} = \max_{X\in C}$$

$$\left[\frac{1}{\pi}\int_C \ln\frac{|XY'|}{|XY|}\, dl_Y\right]. \tag{2.15}$$

Tak więc operacja ϑ_L jest operacją ograniczoną z $C^*(C)$ w $C^*(C)$, a jako taka jest ciągła [1].
Operacja ϑ_L jest również ograniczona z $L_1^*(C)$ w $L_1^*(C)$, gdyż

$$\|\vartheta_L 6\|_{L_1^*(C)} = \int_C \left|\frac{1}{\pi}\int_C 6(Y)\ln\frac{|XY'|}{|XY|}\, dl_Y\right| dl_X \leqslant (\max_{Y\in C}\frac{1}{\pi}\int_C \ln\frac{|XY'|}{|XY|}\, dl_X).$$

$$.(\int_C |6(Y)|\, dl_Y). \tag{2.16}$$

Ponieważ całka

$$\frac{1}{\pi}\int_C \ln\frac{|XY'|}{|XY|}\, dl_X$$

jest zbieżna w każdym punkcie $Y\in C$ [13], więc uwzględniając wzór (2.16) otrzymuje się

$$\|\vartheta_L 6\|_{L_1^*(C)} \leqslant \|\vartheta\|_{L_1^*(C)\to L_1^*(C)} \|6\|_{L_1^*(C)} \tag{2.17}$$

gdzie

$$\|\vartheta_L\|_{L_1^*(C)\to L_1^*(C)} = \sup\left\{\|\vartheta_L 6\|_{L_1^*(C)} : \|6\|_{L_1^*(C)} = 1\right\} = \max_{Y\in C}\left[\frac{1}{\pi}\int_C \ln\frac{|XY'|}{|XY|}\, dl_X\right]$$

(2.18)

Teoria równania operatorowego (2.10) jak również metody przybliżonego rozwiązania tego równania podana jest najogólniej w przestrzeni L_2. W celu zbadania operacji ϑ_L wziętej jako operacja z $L_2^*(C)$ w $L_2^*(C)$ można skorzystać z twierdzenia Risza o interpolacji [12]. Stwierdza ono, że jeżeli liniowa operacja ϑ_L jest równocześnie operacją ograniczoną z $C^*(C)$ w $C^*(C)$ oraz z $L_1^*(C)$ w $L_1^*(C)$, to jest również operacją ograniczoną z $L_2^*(C)$ w $L_2^*(C)$ oraz

$$\|\vartheta_L\|_{L_2^*(C)\to L_2^*(C)} \leq (\|\vartheta_L\|_{C^*(C)\to C^*(C)})^{\frac{1}{2}} (\|\vartheta_L\|_{L_1^*(C)\to L_1^*(C)})^{\frac{1}{2}} \quad (2.19)$$

Ponieważ jądro operacji ϑ_L jest rzeczywiste i symetryczne, tj. (rys. 2.1)

$$\ln\frac{|XY'|}{|XY|} = \ln\frac{|YX'|}{|YX|} \quad (2.20)$$

więc uwzględniając wzory (2.15), (2,18) i (2.20) w nierówności (2.19) otrzymuje się

$$\|\vartheta_L\|_{L_2^*(C)\to L_2(C)} \leq \max_{X\in C}\int_C \ln\frac{|XY'|}{|XY|}\, dl_Y = \|\vartheta_L\|_{L_1^*(C)\to L_1^*(C)} =$$

$$= \|\vartheta_L\|_{C^*(C)\to C^*(C)} \quad (2.21)$$

Operacja ϑ_L zdefiniowana wzorem (2.9) spełnia warunek [13]

$$\vartheta_L\sigma = 0 \Leftrightarrow \sigma = 0 \quad (2.22)$$

Warunek (2.22) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby operacja liniowa ϑ_L była odwracalna [1]. Z warunku (2.22) wynika jednoznaczność rozwiązania równania (2.10).

2.2. APROSKSYMACJA OPERATORA TYPU POTENCJAŁU LOGARYTMICZNEGO WARSTWY POJEDYNCZEJ

W praktycznych realizacjach zamiast równania (2.10) rozwiązuje się równanie

$$\vartheta_{LP}\sigma = W$$

gdzie ϑ_{LP} jest operacją "bliską" operacji ϑ_L (w sensie normy w $L_2^*(\mathbf{C})$) i w metodach numerycznych powstaje w wyniku dyskretyzacji operacji całkowej ϑ_L.
Najogólniej rzecz biorąc wyraża się ona w postaci

$$\vartheta_{LP}\,\sigma = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N} c_i^{(k)}(X)\,\sigma^{(k)}(Y_i^{(k)}) \tag{2.24}$$

gdzie tzw. funkcje kształtu $c_i^{(k)}(X)$ dla danego jądra operacji ϑ_L zależą od wyboru formuły przybliżonego całkowania, a więc od wyboru funkcji aproksymującej funkcję $\sigma^{(k)}(X)$ na $\mathbf{C}^{(k)}$, jak również od sposobu aproksymacji dowolnych konturów $\mathbf{C}^{(k)}$.

W konstrukcji operatora "bliskiego" należy przede wszystkim dokonać podziału konturów $\mathbf{C}^{(k)}$ na elementy $\mathbf{C}_i^{(k)}$ i dla każdego z nich wybrać odpowiednią funkcję aproksymującą $\sigma_i^{(k)}(X)$. Wykonując następnie całkowanie po każdym z elementów $\mathbf{C}_i^{(k)}$ i sumując otrzymane wyniki otrzymujemy operację przybliżoną w postaci (2.24). Zwiększenie dokładności obliczeń funkcji kształtu $c_i^{(k)}(X)$ może być osiągnięte przez zastosowanie tzw. funkcji sklejanych do aproksymacji funkcji gęstości ładunków $\sigma_i^{(k)}(X)$ na elementach $\mathbf{C}_i^{(k)}$ podziału konturów $\mathbf{C}^{(k)}$ [6].

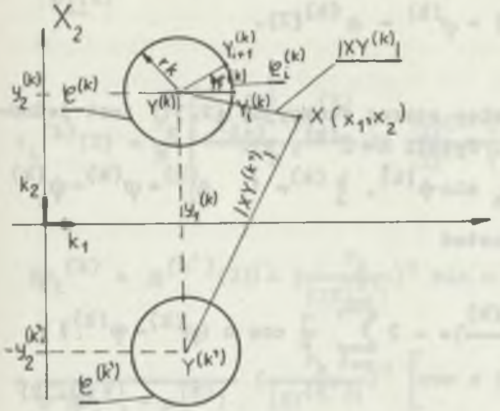
2.2.1. Aproksymacja potencjału logarytmicznego warstwy pojedynczej zadanego na dowolnych okręgach

Niech zadane są promienie r_k oraz ich środki o współrzędnych $y_1^{(k)}$, $y_2^{(k)}$ $(k=1,2,\ldots N_p)$, wówczas zbiór punktów należących do łuku $\mathbf{C}_i^{(k)}$ łączącego punkty $Y_i^{(k)}, Y_{i+1}^{(k)} \in \mathbf{C}^{(k)}$ zgodnie z oznaczeniami przyjętymi na rys. 2.2. wyraża się wzorem

$$\mathbf{C}_i^{(k)} = \left\{ (y_1,y_2):\ y_1 = y_1^{(k)} + r_k\cos\varphi^{(k)};\ y_2 = y_2^{(k)} + r_k\sin\varphi^{(k)};\quad \varphi_i^{(k)} \le \varphi^{(k)} \le \varphi_{i+1}^{(k)} \right\} \tag{2.25}$$

Funkcję gęstości ładunków będzie się aproksymować funkcją sklejaną stopnia pierwszego interpolującą dane wartości $\sigma_i^{(k)}$ w punktach podziału $Y_i^{(k)}$ okręgu $\mathbf{C}^{(k)}$, tj. w postaci

$$
\sigma_i^{(k)}(y_1,y_2) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_i^{(k)}\varphi_{i+1}^{(k)} - \sigma_{i+1}^{(k)}\varphi_i^{(k)}}{\varphi_{i+1}^{(k)} - \varphi_i^{(k)}} + \dfrac{\sigma_{i+1}^{(k)} - \sigma_i^{(k)}}{\varphi_{i+1}^{(k)} - \varphi_i^{(k)}}\varphi^{(k)} & \text{dla } (y_1,y_2) \in C_i^{(k)} \\ 0 & \text{dla } (y_1,y_2) \notin C_i^{(k)} \end{cases} \tag{2.26}
$$



Rys. 2

Kontur $C^{(k)}$ wraz z odbiciem zwierciadlanym

Contour $C^{(k)}$ with ist mirror reflection

Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami otrzymuje się:

$$
\ln \frac{|XY'|}{|XY|}\Bigg|_{Y \in C_i^{(k)}} = \ln \frac{|XY^{(k')}|}{|XY^{(k)}|} + \frac{1}{2}\ln\left|1 - 2\frac{r_k}{|XY^{(k')}|}\cos\left[\varphi^{(k)} + \alpha^{(k')}(X)\right] + \left(\frac{r_k}{|XY^{(k')}|}\right)^2\right| - \frac{1}{2}\ln\left|1 - 2\frac{r_k}{|XY^{(k)}|}\cos\left[\varphi^{(k)} - \alpha^{(k)}(X)\right] + \left(\frac{r_k}{|XY^{(k)}|}\right)^2\right| \tag{2.27}
$$

gdzie

$$
|XY^{(k)}| = \sqrt{(x_1-y_1^{(k)})^2 + (x_2-y_2^{(k)})^2}; \quad |XY^{(k')}| = \sqrt{(x_1-x_1^{(k)})^2 + (x_2+y_2^{(k)})^2} \tag{2.28}
$$

$$
\cos\alpha^{(k)}(X) = \frac{x_1-y_1^{(k)}}{|XY^{(k)}|}; \quad \sin\alpha^{(k)}(X) = \frac{x_2-x_2^{(k)}}{|XY^{(k)}|} \tag{2.29}
$$

$$
\cos\alpha^{(k')}(X) = \frac{x_1-y_1^{(k)}}{|XY^{(k')}|}; \quad \sin\alpha^{(k')}(X) = \frac{x_2+y_2^{(k)}}{|XY^{(k')}|} \tag{2.30}
$$

Funkcje logarytmiczne [8] występujące we wzorze (2.27) są rozwijalne w następujący szereg funkcyjny

$$\ln\left|1-2\xi^{(k)}\cos\beta^{(k)}+(\xi^{(k)})^2\right| = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\xi^{(k)})^n\cos n\beta^{(k)} \qquad (2.31)$$

gdzie

$$\xi^{(k)}(X) = \frac{r_k}{|XY^{(k)}|}, \quad \beta^{(k)}(X) = \varphi^{(k)} - \alpha^{(k)}(X).$$

Jeżeli $X \notin C^{(k)}$, to $0 \leqslant \xi^{(k)} < 1$ a więc szereg funkcyjny (2.31) jest jednostajnie zbieżny ze względu na $\beta^{(k)}$. Jeżeli $X \in C^{(k)}$, tj.
$x_1 = y_1^{(k)} + r_k\cos\psi^{(k)}$, $x_2 = y_2^{(k)} + r_k\sin\psi^{(k)}$, $\xi^{(k)} = 1$, $\beta^{(k)} = \varphi^{(k)} - \psi^{(k)}$
i wtedy równanie (2.31) przyjmuje postać

$$\ln 2\left|1-\cos\beta^{(k)}\right| = 2\ln\left(2\sin\frac{\varphi^{(k)}-\psi^{(k)}}{2}\right) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos n\left(\varphi^{(k)}-\psi^{(k)}\right) \qquad (2.32)$$

przy czym szereg (2.32) jest zbieżny poza punktami $\varphi^{(k)} = \psi^{(k)}$ oraz $\varphi^{(k)} = \psi^{(k)} + 2\pi$ $(\psi^{(k)} < \varphi^{(k)} < 2\pi + \psi^{(k)})$.
Zgodnie z wzorami (2.27) i (2.31) słabo osobliwe jądro operacji (2.9) można dla $Y \in C^{(k)}$ przedstawić w postaci następującego szeregu ze względu na zmienną $\varphi^{(k)}$

$$\ln\frac{|XY'|}{|XY|}\Bigg|_{Y\in C^{(k)}} = \ln\frac{|XY^{(k')}|}{|XY^{(k)}|} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r_k}{|XY^{(k)}|}\right)^n\cos n\left[\varphi^{(k)} - \alpha^{(k)}(X)\right] +$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r_k}{|XY^{(k')}|}\right)^n\cos\left[\varphi^{(k)} + \alpha^{(k')}(X)\right]. \qquad (2.33)$$

Uwzględniając wzory (2.33) oraz (2.26) we wzorze (2.9) otrzymuje się

$$\vartheta_L \sigma = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} \int_{\varphi_i^{(k)}}^{\varphi_{i+1}^{(k)}} \sigma_i^{(k)}(Y) \ln \frac{|XY'|}{|XY|} dl_Y \tag{2.34}$$

gdzie:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\varphi_i^{(k)}}^{\varphi_{i+1}^{(k)}} \sigma_i^{(k)}(Y) \ln \frac{|XY'|}{|XY|} dl_Y = a_i^{(k)}(X)\, \sigma_i^{(k)} + b_{i+1}^{(k)}(X)\, \sigma_{i+1}^{(k)} \tag{2.35}$$

$$a_i^{(k)}(X) = \frac{r_k}{\pi} \left\{ \frac{\varphi_{i+1}^{(k)} - \varphi_i^{(k)}}{2} \ln \frac{|XY^{(k')}|}{|XY^{(k)}|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[\left(\frac{r_k}{|XY^{(k')}|}\right)^n \sin n \right.\right.$$

$$\left. (\varphi_i^{(k)} + \alpha^{(k')}(X)) - \left(\frac{r_k}{|XY^{(k)}|}\right)^n \sin n (\varphi_i^{(k)} - \alpha^{(k)}(X)) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{n^3(\varphi_{i+1}^{(k)} - \varphi_i^{(k)})} \left(\frac{r_k}{|XY^{(k')}|}\right)^n \left[\cos n (\varphi_{i+1}^{(k)} + \alpha^{(k')}(X)) - \cos n \right.$$

$$\left. (\varphi_i^{(k)} + \alpha^{(k')}(X)) \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(\varphi_{i+1}^{(k)} - \varphi_i^{(k)})} \left(\frac{r_k}{|XY^{(k)}|}\right)^n \left[\cos n (\varphi_{i+1}^{(k)} - \right.$$

$$\left.\left. - \alpha^{(k)}(X)) - \cos n (\varphi_i^{(k)} - \alpha^{(k)}(X)) \right] \right\} \tag{2.36}$$

$$b_{i+1}^{(k)}(X) = \frac{r_k}{\pi} \left\{ \frac{\varphi_{i+1}^{(k)} - \varphi_i^{(k)}}{2} \ln \frac{|XY^{(k')}|}{|XY^{(k)}|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[\left(\frac{r_k}{|XY^{(k)}|}\right)^n \sin n (\varphi_{i+1}^{(k)} - \right.\right.$$

$$- \alpha^{(k)}(X)) - \left(\frac{r_k}{|XY^{(k')}|}\right)^n \sin n \left(\varphi_{i+1}^{(k)} + \alpha^{(k')}(X)\right)\Big] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(\varphi_{i+1}^{(k)} - \varphi_i^{(k)})} \left(\frac{r_k}{|XY^{(k)}|}\right)^n \cdot$$

$$\cdot \left[\cos n\,(\varphi_{i+1}^{(k)} - \alpha^{(k)}(X)) - \cos n\,(\varphi_i^{(k)} - \alpha^{(k)}(X)\right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(\varphi_{i+1}^{(k)} - \varphi_i^{(k)})}$$

$$\left(\frac{r_k}{|XY^{(k')}|}\right)^n \cdot \left[\cos n\,(\varphi_{i+1}^{(k)} + \alpha^{(k')}(X)) - \cos n\,(\varphi_i^{(k)} + \alpha^{(k')}(X))\right]\Bigg\} . \quad (2.37)$$

Podstawiając (2.35) do wzoru (2.34) oraz porządkując sumę po "i" ze względu na zmienne węzłowe $\sigma_i^{(k)}$ otrzymuje się ostateczny wzór na operację przybliżoną dla operacji $\mathcal{V}_L$ w postaci

$$\mathcal{V}_{LP}\sigma = \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{N_k} c_i^{(k)}(X)\, \sigma_i^{(k)} \quad (2.38)$$

gdzie:

$$c_i^{(k)}(X) = \frac{r_k}{\pi} \left\{ \frac{\varphi_{i+1}^{(k)} - \varphi_{i-1}^{(k)}}{2} \ln \frac{|XY^{(k')}|}{|XY^{(k)}|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(\frac{r_k}{|XY^{(k)}|}\right)^n \cdot \right.$$

$$\left[\frac{\cos n(\varphi_i^{(k)} - \alpha^{(k)}(X)) - \cos n(\varphi_{i-1}^{(k)} - \alpha^{(k)}(X))}{\varphi_i^{(k)} - \varphi_{i-1}^{(k)}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos n(\varphi_{i+1}^{(k)} - \alpha^{(k)}(X)) - \cos n(\varphi_i^{(k)} - \alpha^{(k)}(X))}{\varphi_{i+1}^{(k)} - \varphi_i^{(k)}} \right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left(\frac{r_k}{|XY^{(k')}|}\right)^n \left[- \frac{\cos n(\varphi_i^{(k)} + \alpha^{(k')}(X)) - \cos n(\varphi_{i-1}^{(k)} + \alpha^{(k')}(X))}{\varphi_i^{(k)} - \varphi_{i-1}^{(k)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos n\left(\varphi_{i+1}^{(k)}+\alpha^{(k)}(X)\right)-\cos n\left(\varphi_i^{(k)}+\alpha^{(k')}(X)\right)}{\varphi_{i+1}^{(k)}-\varphi_i^{(k)}}\right]\Bigg| \tag{2.39}$$

Łatwo zauważyć, że tzw. funkcje kształtu $C_i^{(k)}(X)$ są dane przez jednostajnie zbieżne szeregi funkcyjne (2.39) niezależnie od położenia punktu X. W ten sposób otrzymano ogólną procedurę obliczenia potencjału logarytmicznego $V_{LP}\,\sigma$ zadanego na rozłącznych okręgach $C^{(k)}$, w której wystarczy podać współrzędne $Y^{(k)}$ środków okręgów oraz ich kąty podziału $\varphi_i^{(k)}$ wraz z odpowiadającymi im zmiennymi węzłowymi aby, zgodnie z wzorami (2.38) i (2.39), otrzymać potencjał logarytmiczny warstwy pojedynczej w dowolnym punkcie półpłaszczyzny $X_2 \geqslant 0$.

3. OBLICZENIE ROZKŁADU WEKTORA NATĘŻENIA POLA ELEKTRYCZNEGO W UJĘCIU DWUWYMIAROWYM

Przybliżone rozwiązanie V(X) w dowolnym punkcie na zewnątrz przewodników (wzór 2,38) przedstawia się w postaci

$$V(X) = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{N_p}\sum_{i=1}^{N_k} C_i^{(k)}(X)\,\sigma_i^{(k)}. \tag{3.1}$$

Niezależnie od sposobu przybliżonego rozwiązania potencjału V(X) natężenie pola elektrycznego w obszarze zewnętrznym przewodników określa się wzorem:

$$\vec{E}(X) = -\operatorname{grad} V = -\frac{1}{2\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{N_p}\sum_{i=1}^{N_k}\sigma_i^{(k)}\operatorname{grad}_X C_i^{(k)}(X). \tag{3.2}$$

Jeżeli potencjały poszczególnych przewodników są zadane w postaci zespolonej, co odpowiada rzeczywistym przebiegom sinusoidalnie zmiennym o tych samych pulsacjach lecz różnych fazach początkowych, to również gęstości węzłowe $\sigma_i^{(k)}$ będące rozwiązaniem układu równań (2.8) są zespolone, a zgodnie z wzorem (3.2) składowe E_{x_1} i E_{x_2} wektora $\vec{E}(X)$ są również zespolone

$$\vec{E}(X) = \vec{k}_1 E_{x_1}(X) + \vec{k}_2 E_{x_2}(X). \tag{3.3}$$

Jak pokazano w pracy [2] w takim przypadku, ogólnie rzecz biorąc, w dziedzinie czasowej wektor $\vec{E}(X,t) = \vec{k}_1 E_{x_1}(X,t) + \vec{k}_2 E_{x_2}(X,t)$ zakreśla w ciągu okresu T elipsę. Składowe wektora natężenia pola elektrycznego w kierunku półosi dużej i małej tej elipsy wynoszą odpowiednio

$$E_a(X) = \frac{1}{\sqrt{2}} \max_{t\in(0,T]} |\vec{E}(X,t)| = |E_1(X)| + |E_2(X)| \tag{3.4}$$

$$E_b(X) = \frac{1}{\sqrt{2}} \min_{t\in(0,T]} |\vec{E}(X,t)| = \big||E_1(X)| - |E_2(X)|\big| \tag{3.5}$$

gdzie:

$$E_1(X) = |E_1(X)|\, e^{j\alpha_1(X)} = \frac{1}{2}\left[E_{x_1}(X) + jE_{x_2}(X)\right]$$

$$E_2(X) = |E_2(X)|\, e^{j\alpha_2(X)} = \frac{1}{2}\left[E^*_{x_1}(X) + jE^*_{x_2}(X)\right].$$

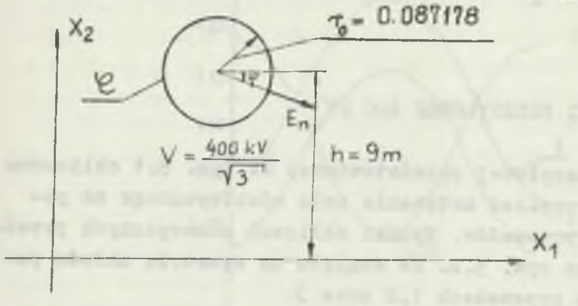
Jeśli we wzorze (3.2) dokonać przejścia granicznego zmierzając z punktem X do powierzchni dowolnego przewodnika $C^{(k)}$, to otrzymuje się składową normalną wektora natężenia pola w danym punkcie Y_i^k jego konturu. Jeżeli prototypem rozwiązania zewnętrznego problemu Dirichleta jest potencjał logarytmiczny warstwy pojedynczej (2.7), to przejście graniczne jest równoważne znajomości gęstości powierzchniowej ładunków

$$\sigma_i^{(k)} = \varepsilon_0 E_n(Y_i^{(k)})$$

4. PRZYKŁAD TESTUJĄCY

Przedstawiony w pracy algorytm wykorzystano do znalezienia rozkładu natężenia pola elektrycznego na powierzchni przewodnika (rys. 4.1) o potencjale $V = \frac{400\ \text{kV}}{\sqrt{3}}$.

Obliczenie zrealizowano dla podziału konturu przewodnika na $N_k = 8$, 16 oraz 32 łuki. Wartości obliczonych w ten sposób składowych E_n na powierzchni przewodnika porównano (tabela 1) z rozwiązaniem dokładnym danym wzorem analitycznym (4.1).



Rys. 4.1

Przewodnik umieszczony nad powierzchnią ziemi

The conductor above the earth surface

$$E_n = \frac{\sigma(\varphi)}{\varepsilon_0} = \frac{V\sqrt{\frac{h^2}{r_o^2} - 1}}{\text{Arsh}\sqrt{\frac{h^2}{r_o^2} - 1}} \cdot \frac{1}{h + r_o \sin\varphi} \tag{4.1}$$

gdzie:

$$\text{Arsh}\, y = \ln\left| y + \sqrt{y^2 + 1}\right|$$

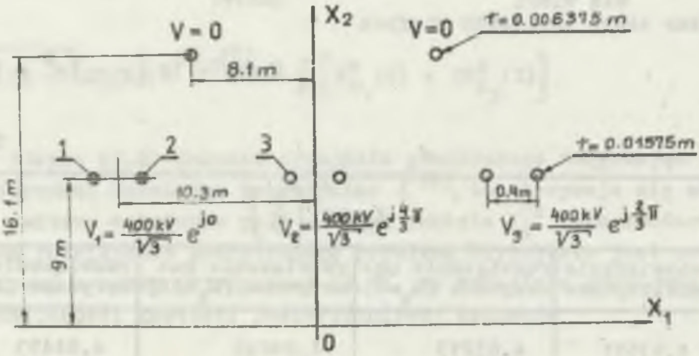
Tabela 1

φ	$E_n x10^5 \left[\frac{V}{m}\right]$			
	rozwiązanie analityczne	rozwiązanie numeryczne (N_k=8)	rozwiązanie numeryczne (N_k=16)	rozwiązanie numeryczne (N_k=32)
$\frac{\pi}{4}$	4,93591	4,85213	4,84846	4,84493
$\frac{\pi}{2}$	4,92204	4,84066	4,83771	4,83456
$\frac{3}{4}\pi$	4,93591	4,85213	4,84846	4,84493
π	4,96972	4,88078	4,87507	4,87052
$\frac{5}{4}\pi$	5,00399	4,91063	4,90245	4,89677
$\frac{3}{2}\pi$	5,01833	4,92340	4,91406	4,90787
$\frac{7}{4}\pi$	5,00399	4,91063	4,90245	4,89677
0	4,96972	4,88078	4,87507	4,87052

Błąd rozwiązania numerycznego nie przekracza 2 %, a współczynniki uwarunkowania macierzy układu równań aproksymującego układu równań (2.8) wynoszą dla podziału konturu C na N_k = 8, 16 oraz 32 łuki odpowiednio: 127, 518 oraz 1679.

5. PRZYKŁAD TRÓJFAZOWEJ LINII PRZESYŁOWEJ 400 kV

Dla trójfazowej linii przesyłowej przedstawionej na rys. 5.1 obliczono w oparciu o podany algorytm rozkład natężenia pola elektrycznego na powierzchniach poszczególnych przewodów. Wyniki obliczeń numerycznych przedstawiono w formie wykresów na rys. 5.2. Ze względu na symetrię układu podano rozkład składowej E_n na przewodach 1,2 oraz 3.

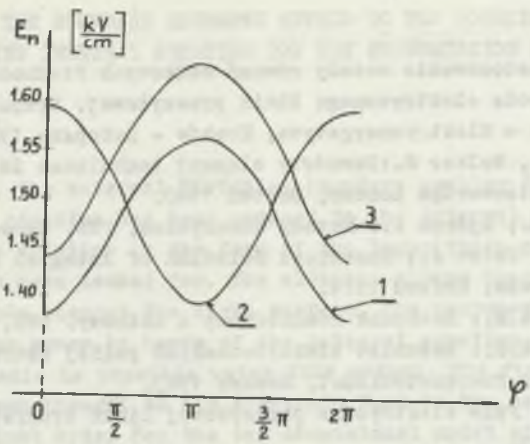


Rys. 5.1
The 3-phase transmission line 400 kV
Linia przesyłowa trójfazowa 400 kV

1, 2, 3, - powierzchnie przewodów, dla których określono rozkład składowej E_n; V_1, V_2, V_3 - potencjały poszczególnych faz

1, 2, 3 - the conductor surfaces with the distribution of the E_n compound determined; V_1, V_2, V_3 - phase potentials

Obliczenia przeprowadzono dla podziału konturów $C^{(k)}$ (k=1,...8) przewodów na N_k = 16 łuków.



Rys. 5.2

Rozkład natężenia składowej E_n na powierzchniach przewodników 1, 2 oraz 3

The distribution of the field strenght compound E_n on the surfaces of the conductors 1, 2, 3

6. ZAKOŃCZENIE

Opracowany algorytm umożliwia obliczanie rozkładów natężenia pola na powierzchniach przewodów linii przesyłowych, jak również w dowolnym punkcie zewnętrznym. W zależności od przyjętego sposobu aproksymacji funkcji σ na konturach $C^{(k)}$ przewodników otrzymujemy do rozwiązania układ równań algebranicznych o odpowiednim rozmiarze. Macierz otrzymanego układu równań jest macierzą gęstą i o współczynniku uwarunkowania powiększającym się wraz ze wzrostem jej wymiarów. Przeprowadzone przez autorów liczne przykłady numeryczne dla linii 400 kV, jak również 700 kV pokazały, że pomimo zastosowania dyskretyzacji prowadzącej do otrzymania układów równań o wymiarach 150 x 150 otrzymano błędy nie przekraczające 3 ÷ 4 % w stosunku do wyników pomiarowych.

LITERATURA

[1] Alexiewicz A.: Analiza funkcjonalna. PWN, Warszawa 1969.

[2] Baron B.: Pole elektryczne linii przesyłowych trójfazowych najwyższych napięć. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 73, 1980.

[3] Baron B.: Synteza pola elektrycznego linii trójfazowej. Intern. Symp. Theoretische Elektr. Sept. 1983, Ilmenau.

[4] Baron B.: Zastosowanie metody równań całkowych Fredholma I rodzaju do badania pola elektrycznego linii przesyłowej. Sympozjum Metody Matematyczne w Elektroenergetyce, Kraków - Zakopane 1983, 115-125.
[5] Brebbia C.A., Walker S.:Bonudary element techniques in Engineering-Newnes - Butterworths London, Boston 1980.
[6] Dahlaquist G., Björck A.: Metody numeryczne, PWN, Warszawa 1983.
[7] Delves L.M., Wolsh J.: Numerical Solution of integral equations. Clarendon Press, Oxford 1974.
[8] Fichtenholz G.M.: Rachunek różniczkowy i całkowy. PWN, Warszawa 1978.
[9] Koleczickij E.S.: Rasczjet elektriczeskich poliej ustrojstw wysokowo naprjażenija. Energoatomizdat, Moskwa 1983.
[10] Konorski B.: Pole elektryczne przesyłowej linii trójfazowej. PWN, Warszawa 1970.
[11] Krakowski M.: Elektrotechnika teoretyczna. PWN, Warszawa 1967.
[12] Krejn S.G.: Analiza funkcjonalna. PWN, Warszawa 1967.
[13] Krzyżański M.: Równania różniczkowe cząstkowe rzędu II. PWN, Warszawa 1959.
[14] Sastry S.S.: Numerical solution of Fredholm integral equations with a logarithmic singulurity. Int. J. Num-Meth. Engng., 10 (1976), 1202 - 1207.
[15] Sikora R.: Teoria pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1977.
[16] Sikora R., Pałka R.: Synthesis of one - and two dimensional electrostatic field. Arch. f. Elektr. 64, 1981, 105 - 108.
[17] Sikora R.: Wybrane zagadnienia z teorii pola elektromagnetycznego. PAN-O, Poznań, Seria: Elektrotechn. i Elektronika - Tom IX, PWN, Warszawa - Poznań 1984.
[18] Ulman J.: Komputerowa analiza pola elektrycznego trójfazowych linii przesyłowych najwyższych napięć. Praca doktorska - Gliwice 1983.
[19] Zimny P.: Zastosowanie metody równań całkowych i elementów skończonych do obliczania quasi - stacjonarnego pola elektromagnetycznego w ośrodkach przewodzących. Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej Elektryka Nr 50. Gdańsk 1980.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Stanisław Krzemiński

Wpłynęło do redakcji dnia 1 marca 1985 r.

APPLICATION OF THE BOUNDARY ELEMENTS METHOD TO THE SOLUTION OF THE FIRST KIND INTEGRAL EQUATION FOR THE TRANSMISSION LINE

S u m m a r y

In the work, the external Dirichlet boundary problem for the two dimensional Laplace equation has been reduced to the integral equation of the first kind. The solution in the form of the logarithmic potential of the singlelayer has been looked for. The electric mirror image method has been used to take into account the earth surface. The computation of the field in the boundless space by means of the integral equation solution on the bounds of the media is possible using this method. The first kind integral equation has been brought to its algebraic form by the use of spline functions of the first order for the two dimensional model of transmission lines with different cofingurations. The division of the conductor contours into elements has been done. The function for the approximation of the surface charge density has been found for each element. The approximation of the numerical calculation of the charge density distribution on the conductor surface and of the field potential outiside the conductor has been found as the sum of the integration results for all elements. The spline functions have been used for the approximation of the charge density on the individual elements of the conductor division to obtain the greater accuracy. The discussion of the correctness of the formulated Direchlet problem has been carried out. The explicit character of the obtained solution has been proved. The method of the determination of field strenght vector and the calculation algorithm of the field strenght vector components with the use of the charge density distribution has been given. The outside space and the surface of the conductor has been respected. The algorithm has been used (as an example) for the conductor with the known potential. The result has been compared with that obtained by means of accurate analytical expression. The algoritm has then been used for 400 kV line.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КРАЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ I - го РОДА ПЛОЩАДИ ПЕРЕСЫЛЬНЫХ ЛИНИЙ

Р е з ю м е

В работе сведено внешнюю краевую проблему Дирихле для двухмерного уравнения Лапласа к интегральному уравнению I-го рода. Найдено решение проблемы в

виде логарифмического потенциала простого слоя. Плоскость Земли учтена через применение метода электрических образов. Применение делает возможным вычислить поле в бесконечном пространстве, решая интегральные уравнения на границе разделения сердцевин.

В работе приведена алгебрвизация интегрального уравнения I -го род с применеием склеенных функций I-ой степени для двухмерного образца пересыльных линий с длинными конфигурациями. Произведено разделение контуров проводников на элементы и для каждого из них избрана соответствующая функция приближающая поверхностную плотность зарядов. Интегрируя по каждому элементу и складывая эти результаты получена приблизительная операция для определения расположения плотности зарядов на поверхности проводников и потенциала поля в произвольной точке вне проводника используя компьютер. Для получения большей точности вычислений применены склеенные функции аппроксимирующие функции плотности зарядов на элементах контуров проводников.

В работе проведена дискуссия над правильностью сформулированной проблемы Дирихле и доказано, что решение этой проблемы однозначно. Представлен также метод определения вектора напряжения электрического поля. Учтено также как пространство вне так и на поверхности проводников. Определён алгоритм вычисления составляющих вектора напряжения используя определённое раньше распределение поверхностной плотности зарядов. Представлен в работе алгоритм был перетестован на примере проводника с известным потенциалом. Определённое таким образом распределение напряжения поля на поверхности проводника сравнено с аналитической формулой. Разработанный алгоритм был использован к вычислению распределения поля линий 400 кВ.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 98 Nr kol. 859

Janusz WALCZAK

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

O PUNKTACH OSOBLIWYCH LINII SIŁ POLA ELEKTROSTATYCZNEGO

Streszczenie. W artykule przeprowadzono jakościową analizę rozwiązań równań linii sił pola elektrostatycznego w otoczeniu punktów osobliwych pola. W pierwszym etapie analizy określono warunki, jakie muszą spełniać wartości własne macierzy stabilności układu równań pierwszego liniowego przybliżenia dla równań linii sił pola. W dalszej części artykułu przeanalizowano własności trajektorii równań linii sił pola w otoczeniu punktów krytycznych niezdegenerowanych oraz w otoczeniu punktów krytycznych zdegenerowanych, w których macierz stabilności układu równań linii sił pola posiada jedną wartość własną równą zeru. Stwierdzono, że te punkty osobliwe mają charakter punktów siodłowych i że prawie wszystkie linie sił są krzywymi siodłowymi.

1. WSTĘP

Analiza topologiczna rozwiązań równań linii sił pól potencjalnych w otoczeniu punktów krytycznych stanowi ważne zagadnienie z uwagi na duże znaczenie pojęciowe "rurki sił" w teorii pola. Analiza ta przeprowadzona jest z reguły dla konkretnie przyjętych modeli układów polowych. Rozważania przeprowadzone w niniejszej pracy nie wymagają żadnej konkretyzacji geometrii układów polowych.

Przyjmijmy, że w obszarze ograniczonym $D \in R^3$ zadana jest funkcja harmoniczna V. Równanie linii sił pola elektrostatycznego w tym obszarze opisuje układ równań:

$$\frac{dx_k}{dt}(t) = E_k(x) \quad k = 1,2,3 \quad x = (x_1,x_2,x_3) \quad x \in D \tag{1}$$

gdzie:

E_k - składowe wektora natężenia pola elektrostatycznego określone wzorem:

$$E_k = \frac{\partial}{\partial x_k} V \quad k = 1,2,3 \tag{2}$$

Punkty krytyczne funkcji harmonicznych (tzn. punkty, w których grad V = 0) są punktami osobliwymi układu równań (1). Istotne jest więc zbadanie struktury zbioru punktów krytycznych funkcji V w obszarze D oraz zbadanie zachowania się trajektorii układu równań (1) w otoczeniu punktów krytycznych.

2. STRUKTURA ZBIORU PUNKTÓW KRYTYCZNYCH FUNKCJI HARMONICZNEJ

W pracy [1, s. 262] wykazano, że zbiory punktów krytycznych funkcji harmonicznej nie mogą być regularnymi płatami powierzchniowymi. W pracach [2, 3] wykazano, że zbiór punktów krytycznych funkcji harmonicznej w ograniczonym obszarze $D \in R^3$ można przedstawić w postaci:

$$N = \left(\bigcup_{i=1}^{m} N_i^{(1)}\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} N_i^{(2)}\right) \tag{3}$$

gdzie:

$$N \;:\left\{x \in D:\ \mathrm{grad}\ V(x) = 0\right\} \tag{4}$$

$$N_i^{(1)}:\left\{x \in D:\ \mathrm{grad}\ V(x) = 0 \cap H(x) \neq 0\right\} \tag{5}$$

$$N_i^{(2)}:\left\{x \in D:\ \mathrm{grad}\ V(x) = 0 \cap H(x) = 0\right\} \tag{6}$$

H(x) - hesjan funkcji V w punkcie $x \in D$.

W pracy [3] wykazano ponadto, że zbiór $\bigcup_{i=1}^{n} N_i^{(2)}$ rozpada się na cztery składowe:

$$\bigcup_{i=1}^{n} N_i^{(2)} = \bigcup_{i=1}^{n_1} M_i \cup \bigcup_{i=1}^{n_2} S_i \cup \bigcup_{i=1}^{n_3} R_i \cup \bigcup_{i=1}^{n_4} T_i \tag{7}$$

gdzie:

$$M_i \;:\;\left\{x \in D\ :\ \mathrm{grad}\ V(x) = 0 \cap H(x) = 0\right\}\ ;\ \dim M_i = 1 \tag{8}$$

przy czym:

$$\bigwedge_{i,k} M_i \cap M_k = \emptyset \tag{9}$$

$$S_i : \left\{ x \in D : \text{grad } V(x) = 0 \cap H(x) = 0 \right\} ; \dim S_i = 1 \tag{10}$$

$$\bigvee_{i,k,l,\dots,m} S_i \cap S_k \cap S_l \cap \dots \cap S_m = \Lambda ; \dim \Lambda = 0 \tag{11}$$

$$i + k + l + \dots + m = 2n \quad n \in N$$

$$R_i : \left\{ x \in D : \text{grad } V(x) = 0 \cap H(x) = 0 \right\} ; \dim R_i = 0 \tag{12}$$

$$T_i : \left\{ x \in D : \text{grad } V(x) = 0 \cap H(x) \equiv 0 \right\} ; \dim T_i = 0 \vee \dim T_i = 1. \tag{13}$$

Zbiory krytyczne określone wzorem (5) są zbiorami Morse'a (niezdegenerowanymi), więc [4, s. 21] są one punktami izolowanymi.

Na podstawie powyższych wzorów można stwierdzić, że w obszarze ograniczonym $D \in R^3$ funkcja harmoniczna posiada skończoną liczbę:

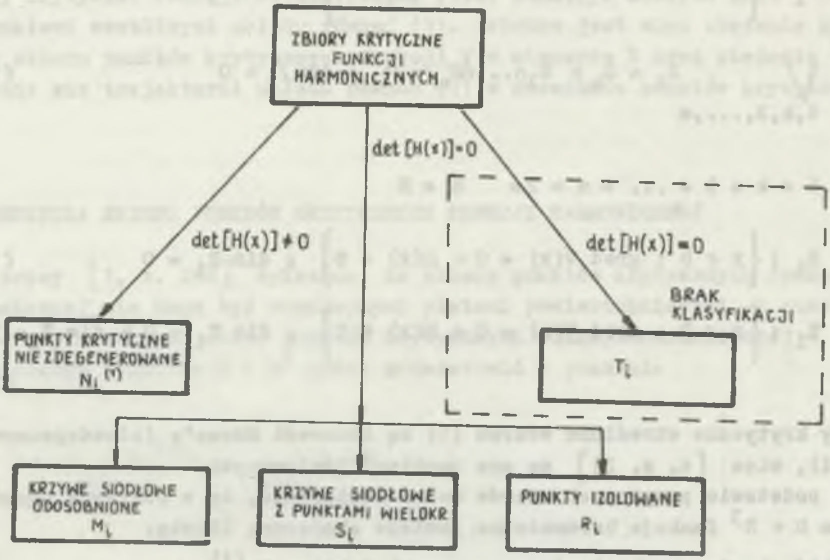
- punktów krytycznych niezdegenerowanych (zbiory $N_i^{(1)}$),
- krzywych odosobnionych (zbiory M_i),
- krzywych z punktami wielokrotnymi (zbiory S_i),
- izolowanych punktów osobliwych zdegenerowanych (zbiory R_i),
- zbiorów krytycznych silnie zdegenerowanych (zbiory T_i).

Ponadto wykazano [3], że zbiory M_i, S_i są krzywymi analitycznymi o kształcie krzywych siodłowych. Dla funkcji harmonicznych w postaci ogólnej analiza struktury zbiorów T_i (wzór (13)) do chwili obecnej nie została przeprowadzona [5,6] z wyjątkiem pewnych szczególnych przypadków [7]. Przypadkiem tym zajmować się nie będziemy. Strukturę zbiorów krytycznych funkcji harmonicznych przedstawiono na rys. 1.

3. ANALIZA WARTOŚCI WŁASNYCH MACIERZY STABILNOŚCI UKŁADU RÓWNAŃ LINII SIŁ POLA

Dla układu równań (1) w punkcie osobliwym x_0 rozpatrzmy przyporządkowany mu układ równań pierwszego liniowego przybliżenia:

$$\frac{dx}{dt}(t) = Hx \tag{14}$$



Rys. 1

Struktura zbiorów krytycznych funkcji harmonicznych
The structure of critical sets for harmonic functions

gdzie:

H - macierz stabilności (hesjan funkcji V w punkcie x_0).

Równanie charakterystyczne macierzy H po rozpisaniu przyjmie postać:

$$\det\left[H-\lambda I\right] = \lambda^3-\lambda^2\,\Delta V+\lambda\left\{V_{x_3x_3}(V_{x_1x_1}+V_{x_2x_2})+V_{x_1x_1}\,V_{x_2x_3}-V_{x_1x_3}^2-V_{x_2x_3}^2-V_{x_1x_2}^2\right\}-\det\left[H\right]=0 \tag{15}$$

gdzie:

$$V_{x_ix_j}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)_{x_0}$$

$$\Delta V=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}$$

Po prostych przekształceniach wzór (15) przyjmie postać:

$$\det\left[H-\lambda I\right] = \lambda^3 - \lambda^2\,\Delta V - \frac{1}{2}\lambda\left[V^2_{x_1x_1} + V^2_{x_2x_2} + V^2_{x_3x_3} + 2V^2_{x_1x_2} + 2V^2_{x_1x_3} + 2V^2_{x_2x_3}\right] -$$

$$\det\left[H\right] = 0 \tag{16}$$

oraz

$$\det\left[H-\lambda I\right] = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) = \lambda^3 - \lambda^2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) +$$

$$+\lambda\left\{\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2) + \lambda_1\lambda_2\right\} - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0. \tag{17}$$

Ponieważ $\Delta V\big|_{x\in D} = 0$, to z porównania wzorów (16), (17) uzyskujemy:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \tag{18}$$

Wykorzystując wzór (18) łatwo można wykazać tożsamość

$$\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2) + \lambda_1\lambda_2 = -\frac{1}{2}\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2\right). \tag{19}$$

Porównując wzory (16), (17), (19) uzyskamy:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = V^2_{x_1x_1} + V^2_{x_2x_2} + V^2_{x_3x_3} + 2V^2_{x_1x_2} + 2V^2_{x_1x_3} + 2V^2_{x_2x_3} \tag{20}$$

$$\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3 = \det\left[H\right]. \tag{21}$$

Z symetrii macierzy H oraz ze wzorów (18), (20), (21) wynikają następujące wnioski:

- wartości własne macierzy H są rzeczywiste,
- wartości własne macierzy H są różne od zera, gdy det H $\neq 0$,
- wartości własne macierzy H posiadają różne znaki lub wszystkie są równe zeru,
- macierz H może posiadać pojedynczą wartość własną równą zeru lub wszystkie jej wartości własne są równe zeru,
- jeśli wszystkie wartości własne macierzy H są równe zeru, to $\det\left[H\right] = 0$.

W zależności od położenia wartości własnych macierzy stabilności H na osi Re λ analiza zachowania się trajektorii układu równań (14) w otoczeniu punktu osobliwego sprowadza się do zbadania następujących przypadków:

1. Punkty krytyczne niezdegenerowane - det $[H] \neq 0$
   1.1. Wszystkie wartości własne macierzy stabilności są różne,
   1.2. Dwie wartości własne macierzy stabilności są równe i tego samego znaku, trzecia wartość własna jest przeciwnego znaku.
2. Punkty krytyczne zdegenerowane - det $[H] = 0$ (jedna z wartości własnych macierzy H jest równa zeru, pozostałe są równe co do modułu i mają różne znaki).
   2.1. Punkty krytyczne izolowane,
   2.2. Punkty krytyczne nieizolowane.
3. Punkty krytyczne "silnie zdegenerowane" - det $[H] \equiv 0$ (wszystkie wartości własne macierzy stabilności są równe zeru).

W pracy ograniczono się do analizy przypadków 1,2.

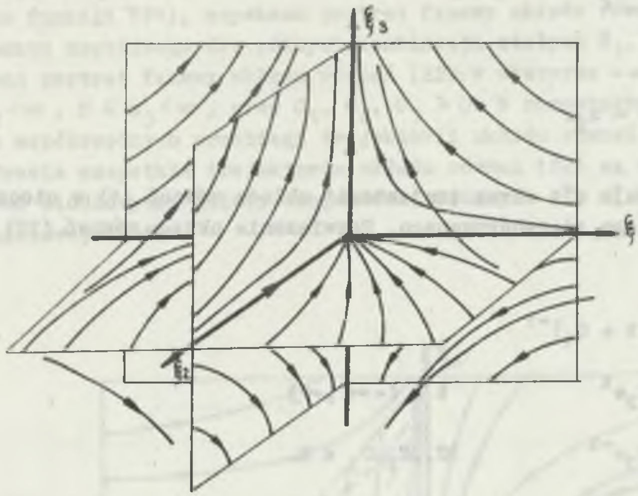
4. ANALIZA LINII SIŁ POLA W OTOCZENIU PUNKTU KRYTYCZNEGO NIEZDEGENEROWANEGO. RÓŻNE WARTOŚCI WŁASNE MACIERZY STABILNOŚCI

Jeżeli wartości własne macierzy stabilności są różne od zera i mają różne znaki, to zgodnie z klasyfikacją Niemyckiego ([8], s. 88 do 129) obraz trajektorii układu równań (14) w otoczeniu punktu osobliwego nosi nazwę uogólnionego siodła.

Niech k (k=1 lub k=2) oznacza liczbę ujemnych wartości własnych macierzy stabilności, wtedy istnieje zbiór trajektorii będacych O^+ krzywymi, które wypełniają płaszczyznę k-wymiarową oraz zbiór trajektorii będących O^--krzywymi wypełniających prostopadłą do powyższej płaszczyznę 3-k wymiarową. Wszystkie pozostałe trajektorie są krzywymi siodłowymi. Obraz uogólnionego siodła dla przypadku $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 > 0$ pokazano na rys. 2.

5. ANALIZA LINII SIŁ POLA W OTOCZENIU PUNKTU KRYTYCZNEGO NIEZDEGENEROWANEGO. DWIE WARTOŚCI WŁASNE MACIERZY STABILNOŚCI SĄ SOBIE RÓWNE

Niewielka modyfikacja dowodu twierdzenia opisującego własności trajektorii układu równań pierwszego liniowego przybliżenia dla układu (1) ([8], s.101) w wypadku, gdy dwie wartości własne macierzy stabilności są sobie równe, pozwala stwierdzić, że obraz trajektorii linii sił pola w otoczeniu punktu osobliwego będzie podobny jak w punkcie 4. Siodło uogólnione ulegnie degeneracji polegającej na tym, że O^+ lub O^- krzywe wypełniające płaszczyznę k-wymiarową będą liniami prostymi.



Rys. 2
Siodło uogólnione dla równania (14) w postaci kanonicznej
The generalized saddle for Eq.(14) in the canonical form

Należy zauważyć, że w przypadku różnych od zera wartości własnych macierzy stabilności, trajektorie układu równań (14) są dyfeomorficznie równoważne trajektoriom układu równań (1) [9] .

6. ANALIZA LINII SIŁ W OTOCZENIU PUNKTU KRYTYCZNEGO ZDEGENEROWANEGO - IZOLOWANEGO

Niech x = (0,0,0) będzie punktem krytycznym zdegenerowanym izolowanym, w którym $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_2 = -\lambda_3 = \lambda$. Układ równań (1) w otoczeniu punktu krytycznego zdegenerowanego w przypadku jednej zerowej wartości własnej można zapisać ([10], s. 237) w postaci:

$$\frac{dx_1}{dt}(t) = x_1^2 + \varepsilon$$

$$\frac{dx_2}{dt}(t) = x_2 \qquad \mathcal{E} \in R \tag{22}$$

$$\frac{dx_3}{dt}(t) = -x_3.$$

Dla $\mathcal{E} = 0$ uzyskuje się obraz trajektorii układu równań (1) w otoczeniu punktu krytycznego zdegenerowanego. Rozwiązania układu równań (22) są określone wzorami:

$$x_1(t) = (t + C_1)^{-1}$$

$$x_2(t) = C_2e^t \qquad t \in (-\infty, \infty) \tag{23}$$

$$x_3(t) = C_3e^{-t} \qquad C_1, C_2, C_3 \in R.$$

Wprowadzamy funkcję:

$$r(t) = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)} \tag{24}$$

Jeżeli:

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = 0$$

$$\lim_{t\to-\infty} r(t) = 0 \tag{25}$$

to trajektorię układu równań (21) o własności (25) nazywamy 0^+ (0^-) krzywą ([8], s. 91).

Jeżeli:

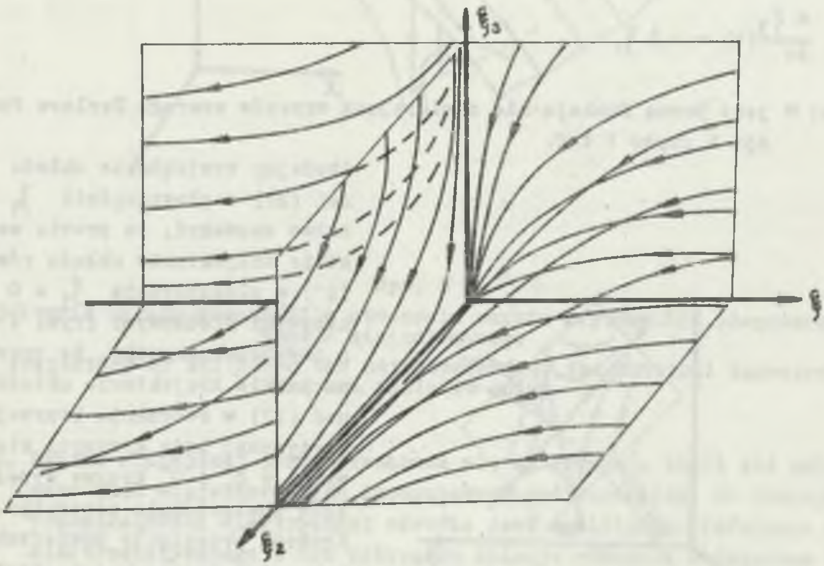
$$\min_{t \in (0,T)} r(t) = k$$

$$k > 0, \; T \in R \tag{26}$$

$$\min_{t \in (0,-T)} r(t) = +k$$

to trajektorię o powyższej własności nazywamy krzywą siodłową.

Analizując wartości graniczne funkcji (23), (24) oraz warunek istnienia minimum funkcji (24), uzyskano portret fazowy układu równań (22) w otoczeniu punktu osobliwego dla różnych kombinacji stałych C_1, C_2, C_3. Na rys. 3 pokazano portret fazowy układu równań (22) w obszarze $-\infty < x_1 < \infty$, $0 \leqslant x_2 < \infty$, $0 \leqslant x_3 < \infty$, przy $C_1, C_2, C_3 \geqslant 0$. W pozostałych ćwiartkach układu współrzędnych przebiegi trajektorii układu równań (22) będą podobne. Prawie wszystkie trajektorie układu równań (22) są zdegenerowanymi krzywymi siodłowymi. Zbiory trajektorii będących O^+, O^- krzywymi są miary objętościowej zero.



Rys. 3

Trajektorie układu równań (22) w otoczeniu punktu krytycznego zdegenerowanego $x = 0,0,0$

The trajectory of E_q. (22) in the neighborhood of the critical degenerate point $x = 0,0,0$

7. ANALIZA LINII SIŁ POLA W OTOCZENIU PUNKTU KRYTYCZNEGO ZDEGENEROWANEGO NIEIZOLOWANEGO

Załóżmy, że krzywa gładka będąca nieizolowanym punktem krytycznym jest niezdegenerowanym zbiorem bifurkacyjnym, tzn. nie ulega rozpadowi na osobliwości prostszego typu przy małej zmianie parametrów pola wektorowego

E_k (k=1,2,3). Przyjmijmy ponadto, że ten nieizolowany punkt krytyczny odpowiada wartości własnej $\lambda_1 = 0$. W dowolnym punkcie x_0 zbioru krytycznego wprowadźmy lokalny układ współrzędnych ξ_1, ξ_2, ξ_3 tak, by w punkcie x_0 oś ξ_1 układu współrzędnych była styczna do krzywej krytycznej. W dostatecznie małym otoczeniu punktu x_0 układ równań (14) przyjmie postać:

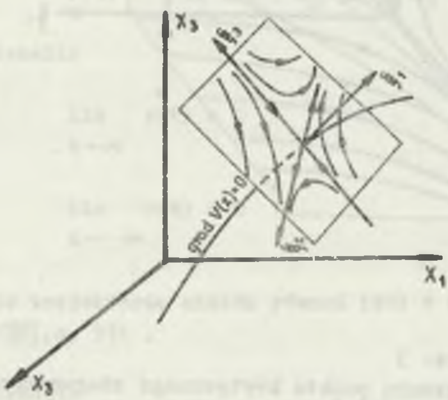
$$\frac{d\xi_1}{dt}(t) = \Theta(\xi_1)$$

$$\frac{d\xi_2}{dt}(t) = \lambda \xi_2 \tag{27}$$

$$\frac{d\xi_3}{dt}(t) = -\lambda \xi_3$$

gdzie: Θ jest pewną funkcją nie zawierającą wyrazów szeregu Taylora funkcji V rzędu 1 i 2.

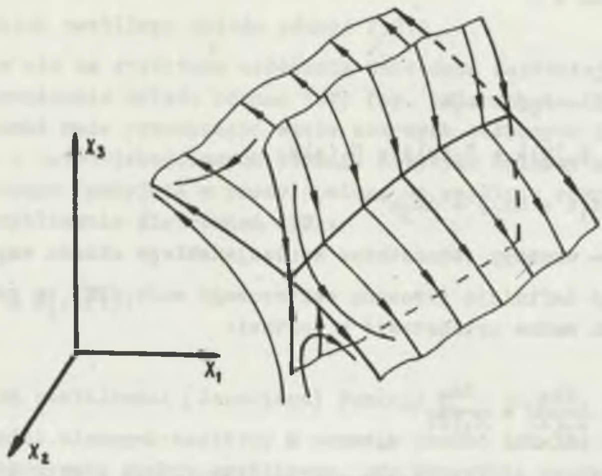
Zbadajmy trajektorie układu równań (27) w płaszczyźnie $\xi_1 = 0$, łatwo zauważyć, że prawie wszystkie trajektorie układu równań (27) w płaszczyźnie $\xi_1 = 0$ są krzywymi siodłowymi (rys. 4). Z powyższego wynika, że prawie wszystkie trajektorie układu równań (27) w otoczeniu krzywej krytycznej będą krzywymi siodłowymi, a 0^+ i 0^- krzywe wypełniać będą powierzchnie separatysa. Krawędź przecięcia powierzchni separatysa tworzy krzywą krytyczną pola (rys. 5).



Rys. 4
Trajektorie układu równań (27) w płaszczyźnie prostopadłej do krzywej krytycznej
The trajectory of Eq. (27) in the plane perpendicular to critical curve

8. PODSUMOWANIE

1. W pracy przeanalizowano portrety fazowe trajektorii układu równań linii pola elektrostatycznego w otoczeniu punktów krytycznych niezdegenerowanych i zdegenerowanych przy założeniu, że pojedyncza wartość własna macierzy stabilności układu równań (1) jest równa zeru. Wykazano, że prawie wszystkie trajektorie układu równań (1) w otoczeniu badanych punktów krytycznych są typu siodłowego.



Rys. 5
Trajektorie układu równań (27) w otoczeniu punktu krytycznego zdegenerowanego - nieizolowanego
The trajectory of Eq. (27) in the neighborhood of the critical degenerate and non isolated point

2. Wyniki niniejszej pracy przenoszą się na równania linii sił pola w ośrodkach niejednorodnych izotropowych pod warunkiem, że funkcja przenikalności elektrycznej ośrodka jest analityczna (równania pola elektrostatycznego w tym przypadku opisuje równanie eliptyczne z operatorem Laplace'a w części głównej, którego rozwiązania są funkcjami analitycznymi, co powoduje, że struktura zbiorów krytycznych jest taka sama jak dla funkcji harmonicznych (punkt 3)).
3. Wyniki niniejszej pracy przenoszą się również na równanie linii sił pola w ośrodkach niejednorodnych izotropowych pod warunkiem dostatecznej gładkości funkcji przenikalności elektrycznej ośrodka. W tym przypadku należy jednak założyć, że struktura zbiorów krytycznych potencjału pola jest taka sama jak dla funkcji harmonicznych.

9. UZUPEŁNIENIE

Linią sił pola wektorowego E nazywamy krzywą, do której styczna w każdym punkcie jest zgodnie skierowana z wektorem pola w tym punkcie.

Z powyższej definicji wynika, że w każdym punkcie x linii sił jest spełniona zależność:

$$\mathbf{E}(x)\mathbf{X}\, d\mathbf{L} = 0 \tag{28}$$

gdzie:

$$x = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{E}(x) = E_1(x)\mathbf{i} + E_2(x)\mathbf{j} + E_3(x)\mathbf{k}$$

$$d\mathbf{L} = dx_1\mathbf{i} + dx_2\mathbf{j} + dx_3\mathbf{k}$$

i,**j**,**k** - wersory jednostkowe kartezjańskiego układu współrzędnych.

Wykorzystując definicję iloczynu wektorowego wzór (28) po prostych przekształceniach można przedstawić w postaci:

$$\frac{dx_1}{E_1(x)} = \frac{dx_2}{E_2(x)} = \frac{dx_3}{E_3(x)} \tag{29}$$

Wprowadźmy parametryzację zmiennych przestrzennych $x_k (k = 1,2,3)$, tzn. załóżmy, że:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t) \\ x_1 &= x_2(t) \qquad t \in R^t \\ x_3 &= x_3(t). \end{aligned} \tag{30}$$

Składając funkcje $E_k(x)$ z funkcjami określonymi wzorem (30) równanie (29) można zapisać w postaci:

$$\frac{dx_1(t)}{E_1(x(t))} = \frac{dx_2(t)}{E_2(x(t))} = \frac{dx_3(t)}{E_3(x(t))} = dt \tag{31}$$

która jest równoważna postaci normalnej Cauchy'ego dla równania (31):

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt}(t) &= E_1(x(t)) \\ \frac{dx_2}{dt}(t) &= E_2(x(t)) \\ \frac{dx_3}{dt}(t) &= E_3(x(t)). \end{aligned} \tag{32}$$

Punkt x, w którym równocześnie:

$$E_1(x(t)) = E_2(x(t)) = E_3(x(t)) = 0 \qquad (33)$$

nazywamy punktem osobliwym układu równań (32).

W punkcie tym nie są spełnione założenia twierdzeń zapewniających jednoznaczność rozwiązania układu równań (32) (np. twierdzenia Picarda), zatem przez taki punkt może przechodzić wiele krzywych całkowych (linii sił pola). Jedna z metod jakościowych badania krzywych całkowych w otoczeniu punktu osobliwego (przyjęta w pracy) polega na analizie równań pierwszego liniowego przybliżenia dla równań (32):

$$\frac{dx_k}{dt}(t) = H_k(x(t)) \qquad (34)$$

gdzie:

H - macierz stabilności (Jacobiego) funkcji E_k w punkcie x.

Analiza wartości własnych macierzy H pozwala zbadać lokalne własności linii sił w otoczeniu punktu osobliwego, gdy wszystkie wartości własne tej macierzy są różne od zera. Punkty osobliwe, w których wszystkie wartości własne macierzy stabilności są niezerowe, są izolowane i noszą nazwę punktów Morse'a (niezdegenerowanych). Teoria jakościowa badania rozwiązań równań różniczkowych w otoczeniu punktów osobliwych jest w chwili obecnej najbardziej rozwinięta dla punktów Morse'a. Dla punktów krytycznych zdegenerowanych, tzn. takich, w których przynajmniej jedna wartość własna macierzy stabilności jest równa zeru, metody analizy trajektorii w otoczeniu punktu osobliwego znajdują się obecnie w fazie badań, np. nie rozwiązany ostatecznie do chwili obecnej problem centrum - ognisko na płaszczyźnie. Zagadnienie istnienia postaci kanonicznej w jakiej należy przedstawić układ równań (32) w otoczeniu punktu osobliwego zdegenerowanego jest w chwili obecnej tylko częściowo rozwiązane (w przypadku równań analizowanych w pracy postać taka istnieje) i wiąże się ściśle z teorią osobliwości odwzorowań i z teorią birfurkacji [5,6,10].

Istnieje wiele układów fizycznych, w których doświadczalnie stwierdzono istnienie punktów osobliwych. Do najprostszych należą typowe układy elektrostatyczne typu kula - kula, walec - walec itp. naładowane jednoimiennie. Portrety fazowe linii sił pola w otoczeniu punktów osobliwych podano w literaturze [11,12]. Wiele bardziej złożonych portretów fazowych linii sił pola podano w klasycznej literaturze dotyczącej teorii katastrof i to nie tylko dla pól elektrycznych i magnetycznych, ale również dla tzw. pól prądu w mechanice cieczy, optyce, teorii promieniowania, termodynamice przemian fazowych, fizyce laserów, biologii i socjologii [13].

LITERATURA

[1] Kellog O.D.: Foundations of Potential Theory. Springer-Verlag. Berlin 1968.
[2] Janušauskas A.J.: O nul'ach gradienta garmoničeskoj funkcii. DAN SSSR T. 158. No 3 1954, s. 547-549.
[3] Janušauskas A.J.: O nul'ach gradienta i nul'ach gessiana garmonieeskoj funkcii. Sib. mat. žurn. TX. No 3 1969 r. s. 685-691.
[4] Morse M., Cairns S.: Critical Point Theory in Global Analysis and Differential Topology. Acad Press N. York and London 1969.
[5] Arnol'd, V.I., Varčenko A.N., Gusein-Zad'e S.M.: Osobennosti differenciruemych otobraženij. Nauka. Moskva 1982.
[6] Gilmore R.: Catastrophe Theory for Scientists and Engineers. J. Wiley. N. York 1981.
[7] Janušauskas A.J.: Nekotorye voprosy raspredelenia kritičeskich polinomov trech peremennych. Diff. uravn. TXI. No 1. 1975, s. 170-175.
[8] Nemyckij V.V., Stepanov V.V.: Kačestvennaja teoria differencial'nych uravnenij. Moskva 1947 OGIZ.
[9] Grobman D.M.: Topologičeskaja i asimptičeskaja ravnosil'nost'sistem differencial'nych uravnenij. DAN SSSR. T. 108 1961, s. 746-747.
[10] Arnold W.I.: Teoria równań różniczkowych. PWN,Warszawa 1983.
[11] Goworkow W.A.: Pola elektryczne i magnetyczne. WNT,Warszawa 1962.
[12] Fano R.M., Ch L.J., Adler R.B.: Electromagnetic Fields, Energy and Forces. J.Wiley. N.York and London 1963.
[13] Poston T., Steward I.: Catastrophe Theory and its applications. Pitman. London 1978.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Stanisław Krzemiński

Wpłynęło do redakcji dn. 2 maja 1985 r.

ON THE SINGULAR POINTS OF THE LINES OF FORCES OF THE ELECTROSTATIC FIELD

S u m m a r y

The paper deals with a quantitative analysis of the solution of equations for the lines of force of an electrostatic field in the vicinity of singular points of the field.

In the first stage of the analysis the conditions are determined which must be met by the eigenvalues of the matrix of the stability of a set of equations of first linear approximation in the case of equations of the lines of the field.

The further part of the paper contains an analysis of the properties of the trajectories of equations for the lines of forces of the electrostatic field in the vicinity of critical nondegenerate points as well as in the vicinity of critical degenerate points, in which the matrix of stability of the set of equations for the lines of forces of the electrostatic field has one eigenvalue which is equal to zero.

It has been found that these singular points have the character of saddle points and that almost all the lines of forces are saddle curves.

ОБ ОСОБЫХ ТОЧКАХ ЛИНИИ СИЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Р е з ю м е

В статье представлен качественный анализ решений уравнений сил электростатического поля в окрестности особых точек поля. В первои части анализа определены условия какие должны выполнять корни характеристического управнения матрицы устойчивости системы уравнений первого приближения для системы уравнений линии сил поля. В дальнейщей части работы исследованы свойства интегральных кривых уравнений линии сил поля в окрестности критических невыражденных точек и в окрестности критических выржденных точек, в которых матрица устойчивости системы уравнений линии сил поля обладаеть одним корнем характеристического уравнения равным нулю. Констатировано, что эти особые точки имеют характер седловых точек и что почти все линии сил это седловые кривые.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 98 Nr kol.859

Ewelina LITWINOWICZ

Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

ANALIZA POWIERZCHNI REGRESJI APROKSYMUJĄCEJ ZALEŻNOŚĆ WSPÓŁCZYNNIKA STRATNOŚCI DIELEKTRYCZNEJ W FUNKCJI ROZPATRYWANYCH ZMIENNYCH

Streszczenie. W artykule przeprowadzono analizę postaci kononicznej równania regresji funkcji tg δ, w zależności od temperatury i zawartości żywicy w nośniku, płyt warstwowych papierowo-fenolowych w celu oszacowania charakteru osiągniętego punktu stacjonarnego zadanej funkcji.

1. WSTĘP

W pracy [1] przedstawiono szczegółowo zastosowanie analizy regresji i wariancji do badania własności dielektrycznych płyt warstwowych papierowo-fenolowych. W oparciu o zaplanowany eksperyment czynnikowy typu 4^3 zbadano wpływ trzech zmiennych niezależnych: ϑ - temperatury prasowania, τ - czasu prasowania, a- wagowej zawartości żywicy w nośniku na współczynnik strat dielektrycznych tg δ. Zgodnie z przyjętym planem badań czynnikowych wyprodukowano płyty papierowo-fenolowe. Gotowe płyty poddano klimatyzacji i badaniom atestacyjnym zgodnie z PN-73/E-29080. Wyniki pomiarów współczynnika strat dielektrycznych tgδ = f(ϑ,a,τ) wykonane przy częstotliwości 50 Hz posłużyły do opisu powierzchni odpowiedzi tg δ odpowiednimi wielomianami regresyjnymi, które omówiono również w pracy [2].

2. SPROWADZENIE WIELOMIANU APROKSYMUJĄCEGO tg δ DO POSTACI KANONICZNEJ

Jak wiadomo [3],[4] wielką zaletą analizy regresji jest możliwość prognozowania wartości funkcji odpowiedzi w tych punktach przestrzeni, w których eksperyment nie był przeprowadzony.

Zadanie to bardzo ułatwia postać kanoniczna wielomianu regresyjnego aproksymującego rozpatrywaną powierzchnię.

Jeżeli wielomian aproksymujący jest np. funkcją drugiego stopnia o dwóch zmiennych:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{12}x_1x_2 \quad (1)$$

to w postaci kanonicznej równanie (1) możemy przedstawić jako funkcję nowych zmiennych ξ_1 oraz ξ_2:

$$Y = c_1 + k_1\xi_1^2 + k_2\xi_2^2 \quad (2)$$

Równanie (2) opisuje powierzchnię regresji (1) w układzie przesuniętym i obróconym o pewien kąt względem poprzednich osi. Początek nowego układu współrzędnych przyjmuje się w punkcie stacjonarnym funkcji odpowiedzi.

W rozpatrywanym przypadku związek między współczynnikiem stratności dielektrycznej tg δ, a zmiennymi niezależnymi ϑ, a, τ, w badanym zakresie zmienności tych parametrów, najlepiej opisuje niepełny wielomian drugiego stopnia o dwóch zmiennych niezależnych, tj. temperaturze prasowania i wagowej zawartości żywicy w nośniku [2].
Ma on postać:

$$\mathrm{tg}\,\delta = f_1(\vartheta, a) = b_1\vartheta + b_2a + b_{11}\vartheta^2 + b_{12}\vartheta a \quad (3)$$

gdzie:

$b_1 = -29,025.10^{-5}$; $b_2 = 92,610.10^{-5}$;

$b_{11} = 0,298.10^{-5}$; $b_{12} = -0,696.10^{-5}$.

Równanie (3) możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$f_1(\vartheta, a) = W^Tb + W^TAW \quad (4)$$

gdzie:

$W^T = [\vartheta, a]$; $b^T = [b_1, b_2]$,

$$A = \begin{bmatrix} b_{11} & \frac{1}{2}b_{12} \\ \frac{1}{2}b_{21} & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{oraz } b_{12} = b_{21}.$$

Wartości własne macierzy A obliczono rozwiązując równanie charakterystyczne (5):

$$\det\,[A - \lambda I] = 0 \quad (5)$$

gdzie:

λ - wartości własne macierzy,

I - macierz jednostkowa

$$\det\left[A - \lambda I\right] = \begin{bmatrix} 0{,}298-\lambda & -0{,}348 \\ -0{,}348 & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad (5a)$$

Równanie charakterystyczne (5) ma dwa pierwiastki rzeczywiste

$$\lambda_1 = 0{,}5275, \qquad \lambda_2 = -0{,}2295,$$

zaś wektory własne przyporządkowane wartościom własnym λ_1 i λ_2 przy przyjęciu zmiennej wyjściowej $\vartheta = 100$ wynoszą odpowiednio:

$$u_1 = (0{,}8347, \ -0{,}5506)$$

$$u_2 = (0{,}5506, \ \ 0{,}8347)$$

ostatecznie równanie (3) w postaci kanonicznej przyjmie postać:

$$F_1(\xi_1, \xi_2) = c_1 + k_1\xi_1^2 + k_2\xi_2^2 \qquad (6)$$

lub

$$F_1(\xi_1, \xi_2) = c_1 + (m\xi_1 + n\xi_2)(m\xi_1 - n\xi_2) \qquad (7)$$

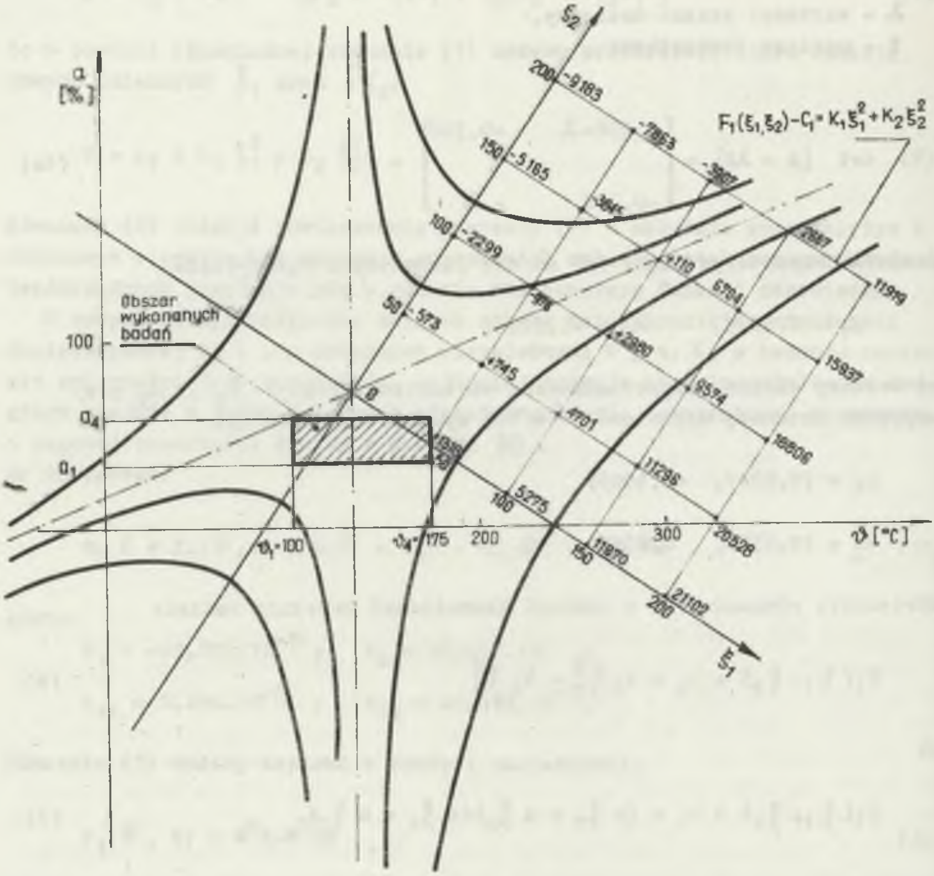
gdzie:

$c_1 = 1414$, $k_1 = m^2 = 0{,}5275$, $k_2 = -n^2 = -0{,}2295$

zaś ξ_1 oraz ξ_2 wyrażone poprzez zmienne początkowe:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0{,}8347\vartheta - 0{,}5506\, a - 71{,}2934 \\ \xi_2 &= 0{,}5506\vartheta + 0{,}8347\, a - 133{,}5706. \end{aligned} \qquad (8)$$

Ponieważ $k_1 . k_2 < 0$, więc funkcja $F_1(\xi_1, \xi_2)$ jest paraboloidą hiperboliczną, a punkt $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ jest jej punktem siodłowym i na prostych $m\xi_1 + n\xi_2 = 0$ oraz $m\xi_1 - n\xi_2 = 0$ funkcja F_1 jest stała i równa stałej c_1.



Rys. 1

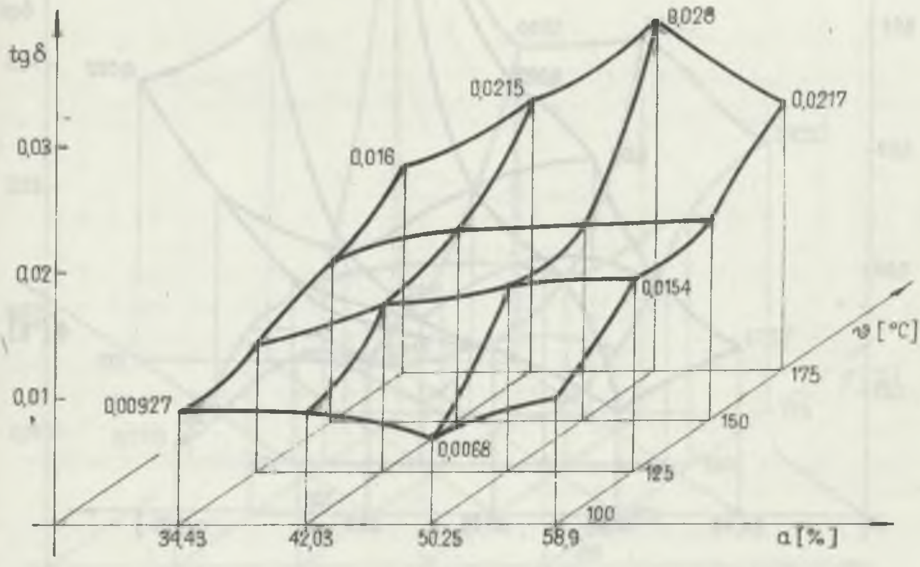
Wykres warstwic funkcji F_1 dla powierzchni regresji $f_1(\vartheta, a) = \mathrm{tg}\,\delta$ z zaznaczonym obszarem wykonanych badań

The function F_1 conteur line for regression surface $f_1(\vartheta, a)$ $\mathrm{tg}\,\delta$ with marked investigation area

Z równania (6) wynika, że dla $|\xi_2|$ = const wzrost $|\xi_1|$ powoduje wzrost funkcji $F_1(\xi_1, \xi_2)$ i odwrotnie dla $|\xi_1|$ = const wzrost $|\xi_2|$ powoduje malenie funkcji $F_1(\xi_1, \xi_2)$, a co za tym idzie kolejne kroki w celu minimalizacji badanej funkcji $\mathrm{tg}\,\delta = f_1(\vartheta, a)$ powinniśmy wykonywać na prostej $\xi_1 = 0$.

3. UWAGI KOŃCOWE

Graficznym obrazem omawianego równania (3) w postaci kanonicznej (6) jest rys. 1 przedstawiający przykładowe warstwice stałej wartości funkcji regresji w układzie nowych zmiennych ξ_1 oraz ξ_2 i zmiennych podstawowych ϑ oraz a. Na rys. 1 zaznaczono obszar przeprowadzonych badań we współrzędnych pierwotnych.



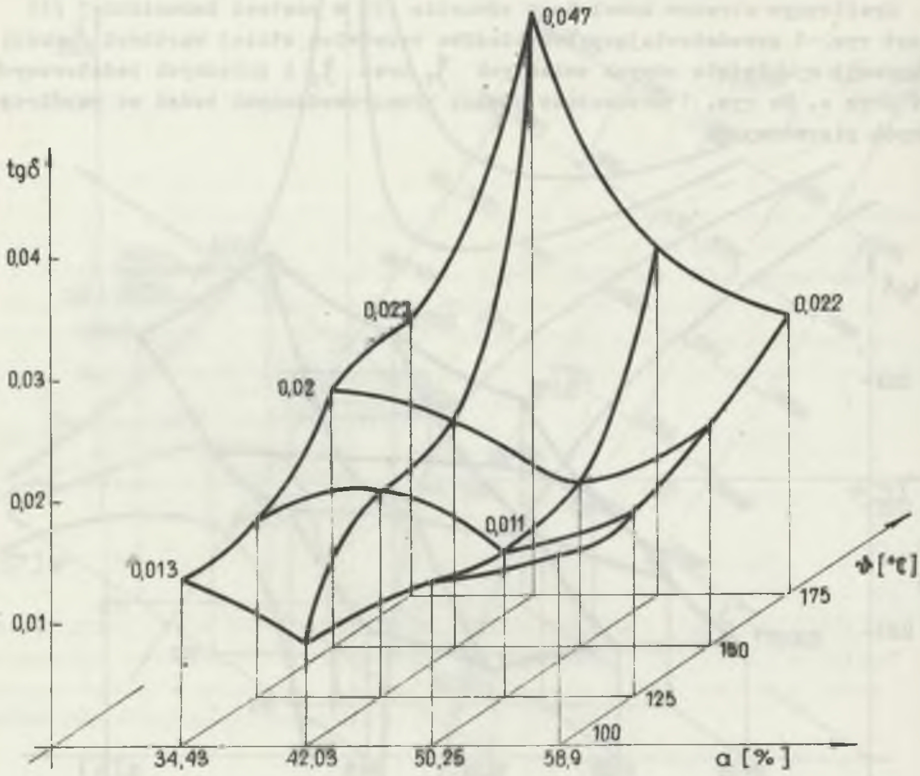
Rys. 2

Powierzchnia tg δ w badanym obszarze przestrzeni czynnikowej (dla τ_1 = 30 min)

Surface tg δ in investigated area of factor space (for τ_1 = 30 min)

Można łatwo zauważyć, że w przypadku, gdy temperatura prasowania będzie mieściła się w dolnych granicach temperatury prasowania płyt papierowo-fenolowych, tzn. 100 - 130°C, zaś wagowa zawartość żywicy w nośniku w granicach 30 - 50 % znajdujemy się na tej części paraboloidy hiperobolicznej, po której przemieszczając się otrzymujemy malenie wartości stratności dielektrycznej tg δ.

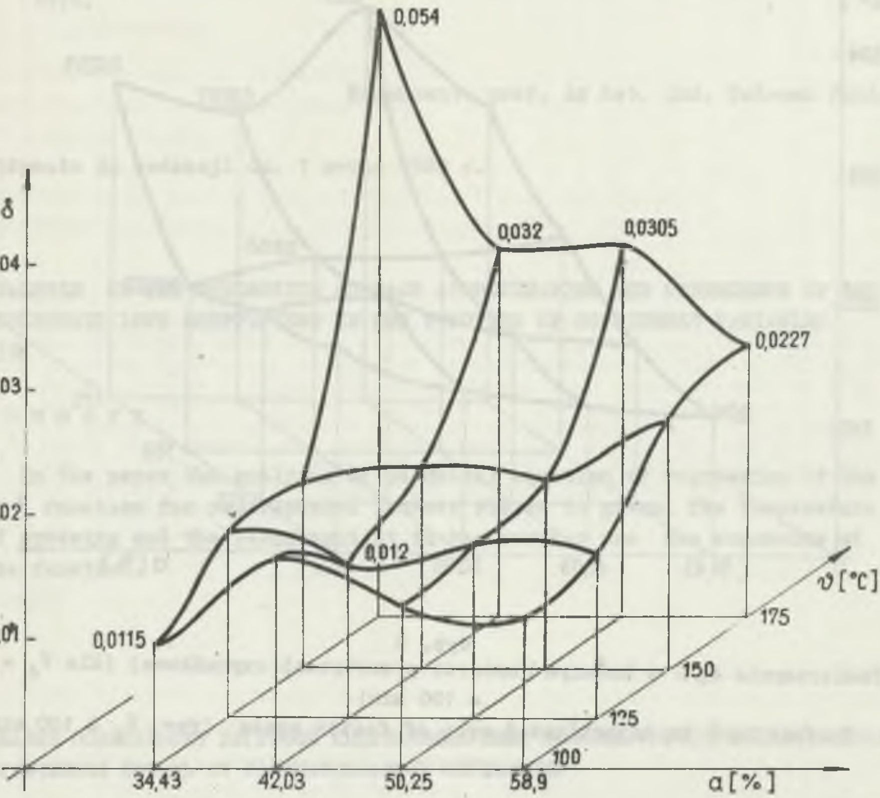
Analiza kanoniczna przyjętego równania regresji (3) potwierdza wszystkie spostrzeżenia szczegółowe, jakie wykazały badania atestacyjne [1] przeprowadzone na próbkach otrzymanych w wyniku zaplanowanego eksperymentu czynnikowego (rys. 2,3,4,5) oraz wyniki doświadczeń i wieloletnia praktyka innych eksperymentatorów [5], [6].



Rys. 3

Powierzchnia tg δ w badanym obszarze przestrzeni czynnikowej (dla τ_2 = = 60 min)

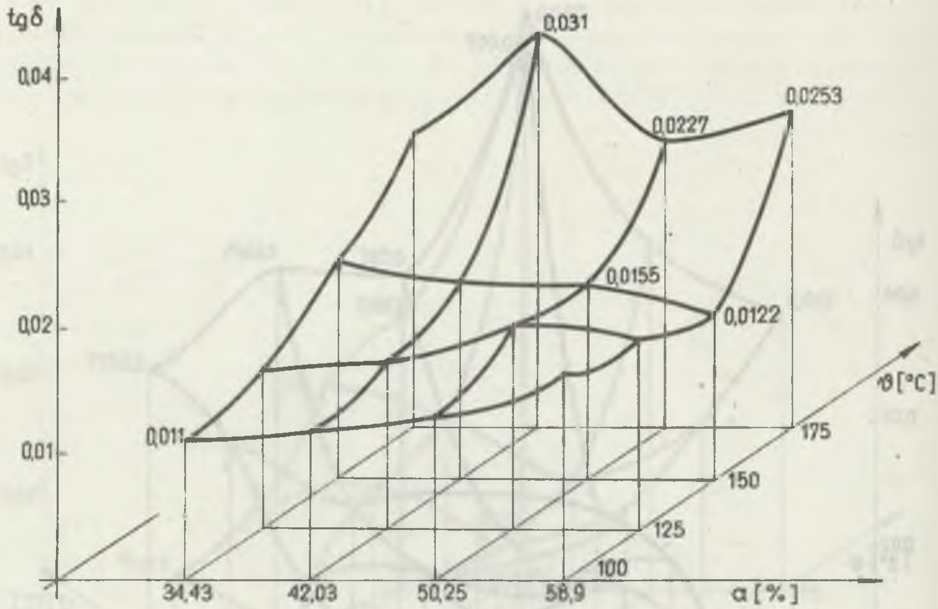
Surface tg δ in investigated area of factor space (for τ_2 = 60 min)



Rys. 4

Powierzchnia tg δ w badanym obszarze przestrzeni czynnikowej (dla $\tilde{\tau}_3$ = = 90 min)

Surface tg δ in investigated area of factor space (for $\tilde{\tau}_3$ = 120 min)



Rys. 5
Powierzchnia tg δ w badanym obszarze przestrzeni czynnikowej (dla $\tilde{\tau}_4$ = = 120 min)
Surface tg δ in investigated area of factor space (for $\tilde{\tau}_4$ = 120 min)

LITERATURA

[1] Litwinowicz E.: Wpływ niektórych parametrów technologicznych na własności dielektryczne płyt papierowo-fenolowych. Praca doktorska. Politechnika Śl., Gliwice 1982.
[2] Litwinowicz E.: Zastosowanie analizy regresji do badania własności dielektrycznych płyt papierowo-fenolowych, Zeszyty Naukowe Politechniki Śl., s. Elektryka Nr 86, Gliwice 1984.
[3] Nalimow W.W., Czernowa N.A: Statystyczne metody planowania doświadczeń ekstremalnych. WNT, Warszawa 1967.
[4] Mańczak K.: Technika planowania eksperymentu. WNT, Warszawa 1976.
[5] Sulima T., Dobraczyński A., Chudzyński S.: Tworzywa sztuczne w elektrotechnice, PWT, Warszawa 1960.

[6] Badania ocenowe żywicy toluenowo-formaldehydowej modyfikowanej fenolem w zastosowaniu do płyt elektroizolacyjnych. ZTS "ERG", Gliwice, 1976.

Recenzent: prof. dr hab. inż. Tadeusz Sulima

Wpłynęło do redakcji dn. 1 marca 1985 r.

ANALYSIS OF THE REGRESSION SURFACE APPROXIMATING THE DEPENDENCE OF THE DIELECTRIC LOSS COEFFICIENT IN THE FUNCTION OF CONSIDERED VARIABLES

S u m m a r y

In the paper the analysis of canonical equation of regression of the $tg\,\delta$ function for paper-phenol laminar plates is given. The temperature of pressing and the resin content in the carrier are the arguments of the function.

АНАЛИЗ ПОВЕРХНОСТИ РЕГРЕССИ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ ЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОТЕРЬ ОТ РАССМАТРИВАЕМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Р е з ю м е

В статье представлен анализ канонического уравнения регрессии функции в зависимости от температуры а также содержания смолы в носителе слоистых бумажно-феноловых пластин.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 98 Nr kol. 859

Eweline LITWINOWICZ
Instytut Podstawowych Problemów
Elektrotechniki i Energoelektroniki
Politechniki Śląskiej

PRZEBIEGI ZMIAN tg δ W TRAKCIE PRASOWANIA PŁYT PAPIEROWO-FENOLOWYCH REJESTROWANE MIERNIKIEM POMIARÓW CIĄGŁYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono wyniki badań przebiegów zmian współczynnika stratności dielektrycznej płyt warstwowych papierowo-fenolowych. Pomiary wykonywano prototypowym miernikiem współczynnika stratności i pojemności. Miernik ten jest przystosowany do badania materiałów elektroizolacyjnych w trakcie procesu prasowania. Uzyskane wyniki porównano z badaniami atestacyjnymi. Proces prasowania płyt odbywał się zgodnie z ustalonym planem dla dwóch temperatur prasowania $\vartheta = 125^{\circ}C$, $\vartheta = 150^{\circ}C$ dla czterech różnych zawartości żywicy w nośniku w przedziale 34 % - 59 %. Badania wykonywano w skali półtechnicznej.

1. WSTĘP

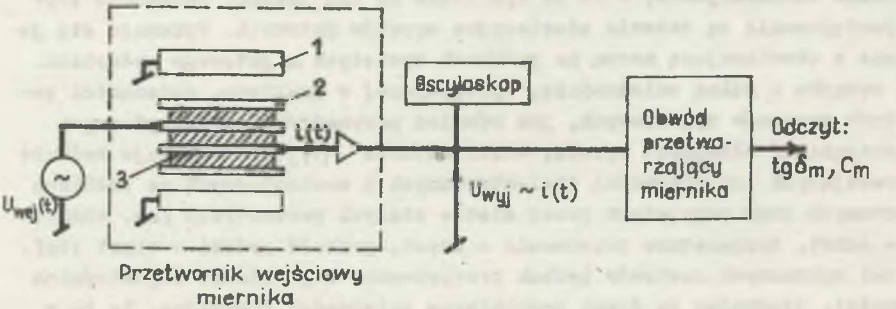
O jakości wyrobów z tworzyw termoutwardzalnych decydują, poza surowcami wyjściowymi, parametry technologiczne. Aby ocenić wpływ tych parametrów na własności dielektryczne, a co za tym idzie na ich jakość, normalnym trybem postępowania są badania atestacyjne wyrobów gotowych. Wykonuje się je zgodnie z obowiązującą normą na próbkach wyciętych z gotowego materiału.

W związku z silną zależnością, występującej w praktyce, zmienności parametrów surowców wyjściowych, jak również parametrów technologicznych wytwarzania na własności wyrobu, wielu autorów [1], [2] wykonuje badania interesujących ich własności dielektrycznych i mechanicznych na próbkach prasowanych przy przyjętych przez siebie stałych parametrach (np. ciśnienie = const, temperatura prasowania = const, grubość próbki = const itp). Dla tak wykonanych zestawów próbek przeprowadza się badania odpowiednich własności, uzyskując tą drogą poszukiwane zależności funkcyjne. Są to w przeważającym stopniu badania w skali laboratoryjnej. Inne podejście prezentują prace [4], [5], [6] wykazujące efektywność statystycznego planowania eksperymentu, przy badaniach własności dielektrycznych wyrobów prasowanych oraz możliwości jakie planowany eksperyment stwarza dla prognozowania własności dielektrycznych tych wyrobów w szerszym, niż badany, zakresie zmienności parametrów technologicznych. Wspomniane prace opisują badania wykonywane w skali półtechnicznej.

Niemniej interesujące są, przedstawione w niniejszej pracy, obrazy zmienności tg δ uzyskane na podstawie ciągłych pomiarów wartości współczynnika stratności dielektrycznej wykonywane w trakcie procesu formowania płyt. Pomiary były przeprowadzone prototypowym miernikiem tg δ i C, który został wykonany w Instytucie Metrologii Elektrycznej i Elektronicznej Politechniki Śląskiej [7] .

2. SPOSÓB WYKONANIA BADAŃ

Wszystkie badania, których wyniki przedstawiono poniżej zostały wykonane miernikiem pomiarów ciągłych specjalnie przystosowanym do pomiarów współczynnika stratności w trakcie procesu prasowania. Rolę elektrod pomiarowych spełniały blachy przekładkowe (rys. 1). Prasowano równocześnie trzy płyty. Prasowano płyty papierowo-fenolowe grubości 3 mm każda o wymiarach 400 x 500 mm. Półprodukt otrzymano w skali technicznej stosując pojedynczą szarżę standardowej żywicy rezolowej oraz papier elektroizolacyjny do nasyceń o masie jednostkowej 80 g/m^2. Wykonano cztery partie półproduktu dla założonych czterech różnych wagowych zawartości żywicy (s) w nośniku. Pozostałe parametry powlekania utrzymano stałe. Prasowanie półproduktu wykonano w skali półtechnicznej w prasie hydraulicznej 2,45 MN przy stałym ciśnieniu jednostkowym dla wszystkich płyt p = 7,85 MN/m^2 dla dwóch temperatur prasowania $\vartheta = 125^{\circ}C$ i $\vartheta = 150^{\circ}C$.



Rys. 1

Schemat układu pomiarowego, (1-półka grzewcza, 2-blacha przekładkowa-elektroda, 3-prasowana płyta)

The meter circuit scheme (1-heating press shelf, 2-electrode, 3-the pressed plate)

Zastosowany do pomiarów współczynnika stratności tgδ miernik pomiarów ciągłych wyposażono dodatkowo w oscyloskop obserwując odpowiedź prądową obiektu badanego przy zadanym wymuszeniu sinusoidalnym napięcia wejściowego. Uzyskano w ten sposób dodatkową informację o zachowaniu się prasowanego materiału - jako dielektryku - w całym zakresie zmienności temperatury wsadu, tzn. przez czas podgrzewania do wymaganej eksperymentem temperatury prasowania ϑ = const. przez cały czas utwardzania w tej temperaturze i w czasie chłodzenia. Mimo znacznego zakresu pomiarowego miernika (tgδ = 0,01 $\div$ 13,4) nie można było wykonać pomiarów w kilku punktach. Dotyczyło to próbek utwardzanych w temperaturze 125°C i 150°C przy a = 50% oraz a = 59 % w czasie odpowiadającym maksimum krzywej tgδ . Przebiegi tg δ = $f(a)\big|_{\vartheta = \mathrm{const}}$ w różnych momentach czasu prasowania przedstawiają rys. 2,3 i 4 zaś rys. 5 przedstawia wartości tgδ uzyskane z atestacji tych próbek zgodnie z obowiązującą normą.

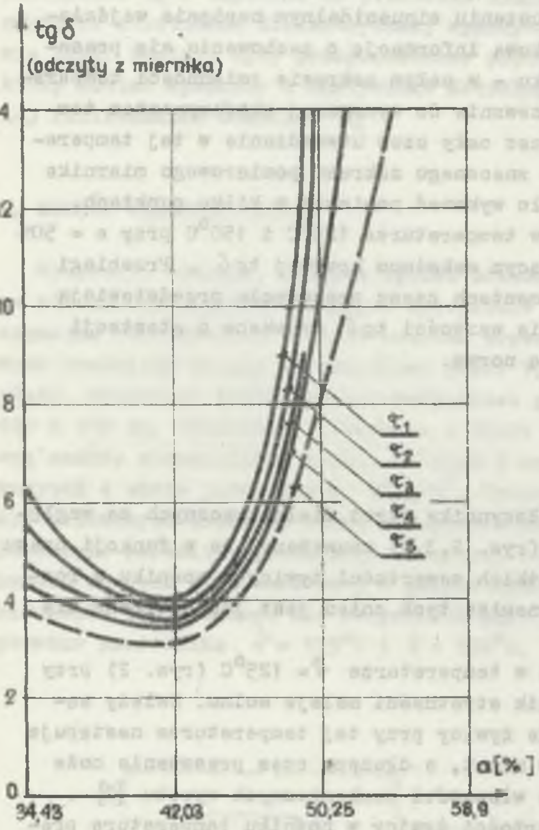
3. WYNIKI BADAŃ I WNIOSKI

Analizując zachowanie się współczynnika strat dielektrycznych ze względu na zawartość żywicy w nośniku (rys. 2,3,4) zauważamy, że w funkcji czasu utwardzania tgδ maleje dla wszystkich zawartości żywicy w nośniku w rozpatrywanym interwale czasowym. Dynamika tych zmian jest jednak różna dla różnych ϑ oraz a.

W przypadku próbek prasowanych w temperaturze ϑ = 125°C (rys. 2) przy a = 34 % oraz a = 42 % współczynnik stratności maleje wolno. Należy sądzić, że główny proces utwardzania żywicy przy tej temperaturze następuje w stosunkowo krótkim czasie 30,40 minut, a dłuższy czas prasowania może wpłynąć już tylko na podniesienie własności mechanicznych wyrobu [2] . Wynika z tego, że dla małych zawartości żywicy w nośniku temperatura prasowania ϑ = 125°C była wystarczająca, a przedłużenie czasu prasowanie nie wpłynęło istotnie na zmianę wartości tg δ . Główną rolę dla wyników końcowych odgrywają tu przede wszystkim parametry samego nośnika, bo proces polikondensacji przebiegał sprawnie i powstające produkty uboczne łatwo dyfundowały z próbki.

Należy zauważyć w tym miejscu, że krzywe z rysunków 2 i 3 wykreślono na podstawie wyników uzyskanych z miernika pomiarów ciągłych z tych prób, których efektem finalnym był materiał o dobrych, zgodnych z normą, własnościach dielektrycznych i mechanicznych.

Analizując nadal wykresy z rys. 2 dla a = 50% oraz a = 59 % przy ϑ =125°C współczynnik tgδ był bardzo duży i po czasie prasowania 60 minut był jeszcze znacznie wyższy niż dla próbek o zawartości żywicy a = 34 $\div$ 42 %. Główną przyczyną tego faktu jest zbyt krótki czas utwardzania w tej temperaturze dla tak dużych zawartości żywicy. W jednej z prób zaobserwowano np. że dopiero w 90 minucie prasowania tgδ spadł do 4,2 przy ϑ = 125°C i a = 50 %.

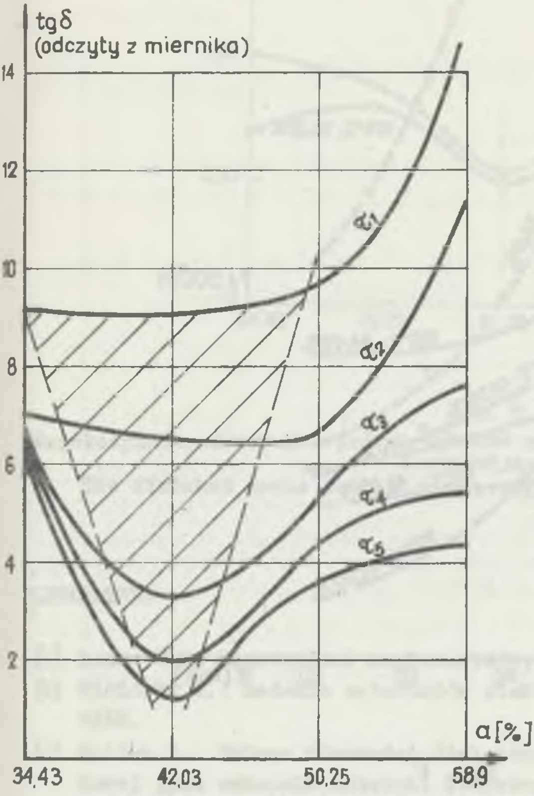


Rys. 2
Obraz zmienności tg δ w funkcji zawartości żywicy w nośniku dla ϑ = 125°C, f = 500 Hz
([illegible] min, τ_2=30 min, τ_3=40min, τ_4=50min, τ_5 = 60 min)

The tg δ variation in the function of resin content in the carrier ϑ = 125°C f=500 Hz (τ_1=20 min, τ_2=30 min, τ_3=40min τ_4= 50 min, τ_5=60 min)

Inny jest obraz zmienności tg δ próbek utwardzanych w temperaturze 150°C (rys.3). Gdy dla a = 34 % spadek tg δ po 30 minucie prasowania był już nieznaczny, podobnie jak przy ϑ = 125°C (rys. 2 i 4), to dla a = 42 % zmiany wartości tg δ w rozpatrywanych interwałach czasowych były bardzo duże, zaś początek stabilizacji procesu utwardzania obserwowano dopiero po 40 – 50 minutach prasowania. Równocześnie jednak uzyskano najniższe wartości tg δ w porównaniu z innymi próbkami [rys. 3 i 4]. W miarę wzrostu wagowej zawartości żywicy, decydującą rolę w procesie utwardzania zaczyna odgrywać temperatura prasowania. Dla wyższych poziomów żywicy w nośniku a = 50 – 60 % już po 20 minucie prasowania w temperaturze 150°C tg δ był dużo niższy niż przy ϑ = 125°C i obserwowano jego szybszy spadek. Ekstrapolując przebiegi z rys. 4 dla a = 50 % przy 150°C można przewidywać, że główny proces utwardzania dobiega końca, gdy tymczasem przy ϑ = 125°C stwierdzenie takie byłoby nieprawdziwe.x) Innymi słowy dla wyższych zawartości żywicy w nośniku wymagane są wyższe temperatury prasowania. Początkowo, dużo większa wartość tg δ przy 150°C jest spowodowana mniejszą lepkością żywicy. Następnie ob-

x) Przyjęto zgodnie z pracą [3] , że "miarą czasu koniecznego do zakończenia procesu utwardzania może być tylko czas, począwszy od którego następują małe zmiany stratności..."



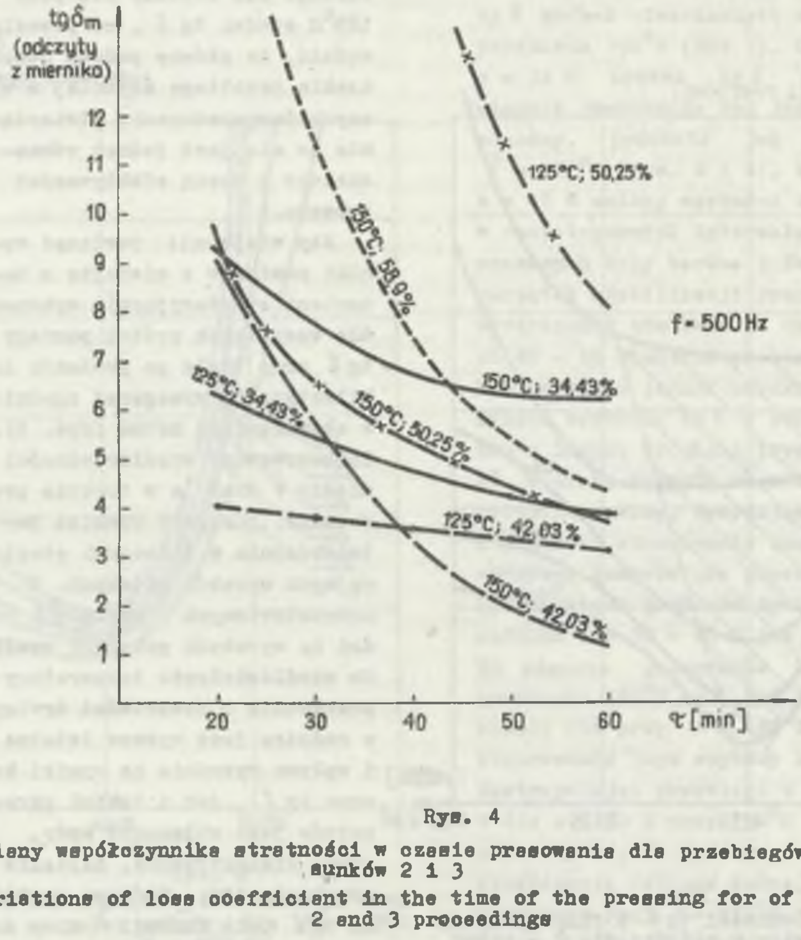
Rys. 3
Obraz zmienności tg δ w funkcji zawartości żywicy w nośniku dla ϑ = 150°C, f = 500 Hz
(τ_1=20 min, τ_2=30 min, τ_3=40 min, τ_4=50 min, τ_5=60 min)

The tg δ variation in the function of resin content in the carrier ϑ = 150°C, f = 500 Hz
(τ_1=20 min, τ_2=30 min, τ_3=40 min, τ_4=50 min, τ_5=60 min)

serwuje się szybszy niż przy 125°C spadek tg δ , co pozwala sądzić, że główny proces utwardzania przebiega szybciej w wyższych temperaturach. Stwierdzenie to nie jest jednak równoznaczne z oceną efektywności procesu.

Aby wzajemnie powiązać wyniki pomiarów z miernika z badaniami atestacyjnymi, wykonano dla wszystkich próbek pomiary tg δ przy 50 Hz po poddaniu ich klimatyzacji wymaganej zgodnie z obowiązującą normą (rys. 5). Zaobserwowane współzależności między ϑ oraz a w trakcie prasowania, znalazły również potwierdzenie w badaniach atestacyjnych wyrobów gotowych. Z przedstawionych w pracy [5] badań na wyrobach gotowych wynika, że współdziałanie temperatury prasowania i zawartości żywicy w nośniku jest wysoce istotne i wpływa wyraźnie na wyniki końcowe tg δ , jak i takich parametrów jak: chłonność wody, stała dielektryczna, napięcie przebicia itp. Końcowe wartości tg δ jako funkcji ϑ oraz a były najmniejsze przy temperaturze prasowania w przedziale 125 - 130°C oraz przy zawartości żywicy średnio 40 % [5], [6].

Omówione powyżej, pierwsze badania wykonane miernikiem pomiarów ciągłych wykazały, że przebiegi zmian tg δ w trakcie prasowania odwzorowują w sposób właściwy procesy polikondensacji zachodzące w prasowanych materiałach [4] . Obserwacja tych przebiegów pozwala na przeanalizowanie zachowania się materiału przy różnych kombinacjach parametrów prasowania i tym samym umożliwia wyciągnięcie wniosków



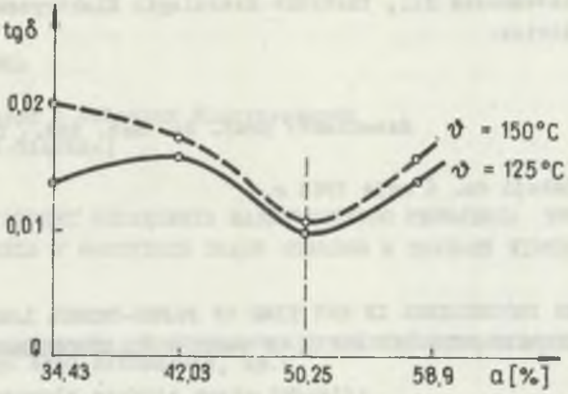
Rys. 4

Zmiany współczynnika stratności w czasie prasowania dla przebiegów z rysunków 2 i 3

Variations of loss coefficient in the time of the pressing for of the fig. 2 and 3 proceedings

co do istotności wpływu tych lub innych parametrów. Jednakże jak stwierdzono, porównując wyniki badań z miernika z wynikami atestów, sama obserwacja przebiegów nie pozwala na natychmiastowe podejmowanie decyzji co do kierunku optymalizacji procesu.

Pozytywne wyniki uzyskane na tym etapie zachęcają do przeprowadzenia dalszych badań a zwłaszcza badań, które umożliwiłyby zastosowanie miernika do bieżącej optymalizacji procesu, co przyniosłoby w praktyce niewątpliwie korzyści ekonomiczne.



Rys. 5

Współczynnik stratności próbek wyrobów gotowych atestowanych zgodnie z obowiązującą normą

The finished goods test pieces attested according to the standard

LITERATURA

[1] Renne W.T: Elektryczne kondensatory, Gosenergoizdat, Leningrad 1959,

[2] Siciński Z.: Badanie materiałów elektroizolacyjnych. WNT, Warszawa 1968.

[3] Sulima T.: Zmiany własności dielektrycznych utwardzonej żywicy epoksydowej jako wskaźnik kinetyki utwardzania jej bezwodnikiem ftalowym, Przegląd Elektrotechniczny, z. 8, 1963.

[4] Litwinowicz E.: Zmiany współczynnika stratności w funkcji czasu prasowania płyt warstwowych. Zeszyty Nauk. Pol. Śl. s. Elektryka. Nr 64, 1979.

[5] Litwinowicz E.: Zastosowanie analizy regresji do badania własności dielektrycznych płyt papierowo-fenolowych, Zeszyty Nauk. Politechniki Śl., s.Elektryka, Nr 86, 1984.

[6] Litwinowicz E.: Analiza powierzchni regresji aproksymującej zależność współczynnika stratności dielektrycznej w funkcji rozpatrywanych zmiennych, Zeszyty Nauk. Polit. Śl., s. Elektryka, Nr 98, 1986.

[7] Miernik współczynika stratności i pojemności 1/1976. Instrukcja techniczna. Politechnika Śl., Instytut Metrologii Elektrycznej i Elektronicznej, Gliwice.

Recenzent: prof. dr hab. inż. Tadeusz Sulima

Wpłynęło do redakcji dn. 6 maja 1985 r.

THE tg δ CHANGES PROCEEDINGS IN THE TIME OF PAPER-PHENOL LAMINAR PLATES PRESSING, REGISTRATED WITH THE METER OF CONTINUOUS MEASUREMENTS

S u m m a r y

The results of the proceedings of dielectric los coefficient in paper-phenol laminar plates investigations are presented in the paper. The prototypical meter of the loss coefficient and capacity has been used. This meter has been adapted for dielectric material investigation during the pressing process. The results have been compared to the attest investigations. The pressing process has passed for two pressing temperatures $\vartheta = 125^{o}C$ and $\vartheta = 150^{o}C$ and for four different resin contents in the carrier, between 34 % and 59 %. The investigations has been carried out in the half-technological scale.

РЕЗУЛЬТАТЫ НЕПРЕРЫВНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ БУМАЖНО - ФЕНОЛОВЫХ ПЛАСТИН ВО ВРЕМЯ ПРЕССОВАНИЯ

Р е з ю м е

В статье представлены результаты измерения коэффициента диэлектрической потери бумажно-феноловых слонстых пластин. Измерения производились прибором приспособленным к непрерывному измерению во время прессования. Полученные результаты сопоставлены с результатами аттестационных исследований. Прессовка производилась в температурных условиях $\vartheta = 125^{o}C$, $\vartheta = 150^{o}C$ для содержания смолы в носителе 34% - 59%.

Seria: ELEKTRYKA z. 98 Nr kol. 859

Tadeusz GLINKA

Instytut Maszyn i Urządzeń Elektrycznych
Politechniki Śląskiej

MODEL MATEMATYCZNY SPRZĘŻENIA MAGNETYCZNEGO UZWOJENIA TWORNIKA Z UZWOJENIEM WZBUDZENIA W MASZYNACH PRĄDU STAŁEGO W STANACH NIEUSTALONYCH

Streszczenie. W eksploatacji silników prądu stałego występują różnego typu zaburzenia, np.:

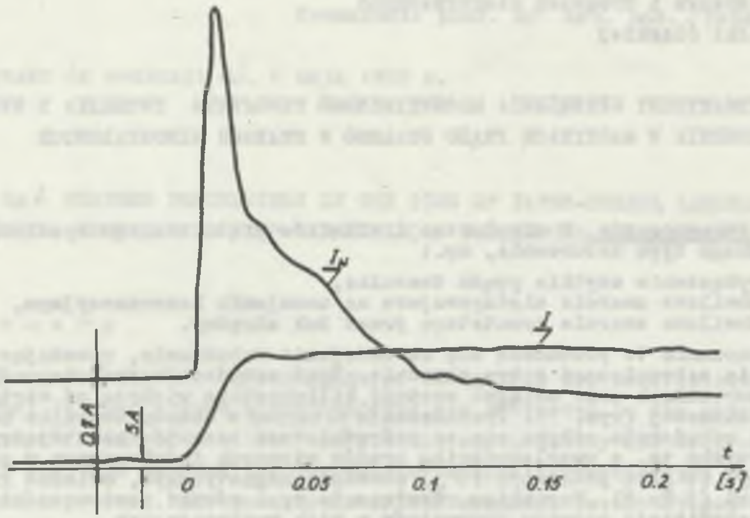
- wyłączenie szybkie prądu twornika,
- chwilowe zwarcie międzyzwojowe na uzwojeniu kompensacyjnym,
- chwilowe zwarcie komutatora przez łuk okrężny.

Zaburzenia te przenoszą się na uzwojenie wzbudzenia, powodując działanie zabezpieczeń w tym obwodzie. Prąd wzbudzenia przy tego typu zaburzeniach może osiągać wartość kilkakrotnie większą od wartości znamionowej (rys. 1). Przenoszenie zaburzeń z obwodu twornika na obwód wzbudzenia odbywa się za pośrednictwem zezwojów komutujących. Zjawisko to, z uwzględnieniem prądów wirowych indukowanych w poprzecznym (ϕ_k) i podłużnym (ϕ_w) obwodzie magnetycznym, opisano równaniami (3 do 8). Warunkiem rozwiązania tych równań jest wcześniejsza identyfikacja szeregu parametrów w nich występujących.

1. ODDZIAŁYWANIE PRĄDU TWORNIKA NA PRĄD WZBUDZENIA W STANACH NIEUSTALONYCH

W czasie różnego typu zaburzeń występujących w eksploatacji silników prądu stałego obserwuje się równoczesne działanie zabezpieczeń silnika w obowodzie twornika i obwodzie wzbudzenia. Zabezpieczenie w obwodzie wzbudzenia nastawiane jest z reguły na wartość prądu równą 1,5 prądu znamionowego, a zabezpieczenie w obwodzie twornika na wartość prądu równą 2,5 prądu znamionowego. Nie w każdym przypadku, w sposób jednoznaczny, można ustalić czy pierwotną przyczyną zadziałania zabezpieczeń było zaburzenie prądu twornika czy też prądu wzbudzenia. Jeśli zaburzenie wystąpiło w obwodzie wzbudzenia silnika, to wyłączenie prądu wzbudzenia spowoduje zanik strumienia wzbudzenia i w konsekwencji przy stałym napięciu zasilania wystąpi nagły wzrost prądu twornika, który uruchomia zabezpieczenie nadmiarowe prądu twornika. W przypadku odwrotnym, gdy pierwszy reaguje wyłącznik szybki prądu twornika w wyniku wzrostu prądu obciążenia dochodzi również do zaburzenia prądu wzbudzenia, powodując znaczną zmianę jego wartości, co w konsekwencji uruchamia działanie zabezpieczeń w tym obwodzie.

Badania eksperymentalne wykazały, że, np. przy skokowym zwarciu komutatora przez łuk okrężny, maksymalna wartość prądu w obwodzie wzbudzenia może osiągnąć wartość kilka razy większą od prądu znamionowego - rys. 1.



Rys. 1

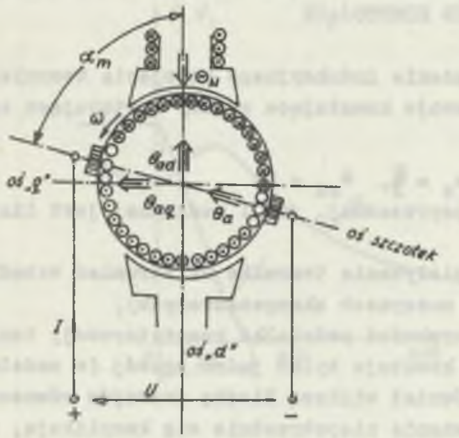
Przebieg prądu w uzwojeniu wzbudzenia I_w przy zwarciu twornika A1 - A2 w czasie t = 0. Przebiegi zarejestrowano dla maszyny prądu stałego o danych znamionowych: 7,5 kW, 220 V, 39,2 A, 1450 obr/min, I_{wN} = 0,7 A, przy znamionowej prędkości obrotowej

Diagram of the field current I_w after the sudden short-circuit of the armature winding A1 - A2 in the initial moment t = 0. The curwes have been recording by normal speed on the 7,5 kW, 220 V, 39,2 A, 1450 r.p.m. I_{wN} = 0,7 A direct current machine

Z oscylogramu widać, że prąd wzbudzenia po zwarciu twornika narasta bardzo szybko do wartości około 5 I_{wN}, natomiast zanika znacznie wolniej. Wpływ zaburzenia prądu twornika na prąd wzbudzenia nie ma prostego schematu działania, gdyż w uzwojeniu wzbudzenia nie indukuje się napięcie rotacji.

W przenoszeniu zaburzeń z obwodu twornika na obwód wzbudzenia pośredniczą dwa zjawiska:

- sprzężenie indukcyjne uzwojenia twornika z uzwojeniem wzbudzenia, występujące, gdy szczotki nie leżą w osi neutralnej,
- przepływ zezwojów komutujących przy komutacji nieliniowej, a taki charakter ma komutacja w stanach zaburzeniowych.



Rys. 2

Rozkład przepływu twornika Θ_a na przepływy składowe Θ_{aq} i Θ_{ad} przy szczotkach wysuniętych z osi neutralnej $\alpha_e < \pi/2$

The distribution of the magneto- motive force Θ_a on the components m.m.f. Θ_{aq} and Θ_{ad} while the brushes have been displaced from the neutral position $\alpha_e < \pi/2$

Sprzężenie indukcyjne uzwojenia twornika z uzwojeniem wzbudzenia zależy od kąta α_m między osią szczotek a osią biegunów głównych (rys. 2). Przy kącie elektrycznym $\alpha_e = p\ \alpha_m = \frac{\pi}{2}$ sprzężenie to teoretycznie nie występuje. W praktyce stan $\alpha_e = \frac{\pi}{2}$ jest trudny do uzyskania z uwagi na użłobkowanie wirnika oraz tolerancje w wykonaniu elementów silnika, a także dokładność ich montażu [1] . Przy pracy silnikowej składowa wzdłużna przepływu twornika

$$\Theta_{ad} = \Theta_a \cos \alpha_e. \tag{1}$$

Jeśli kąt $\alpha_e < \frac{\pi}{2}$, to przepływ Θ_{ad} będzie osłabiał przepływ wzbudzenia Θ_w (rys. 2), natomiast jeśli $\alpha_e > \frac{\pi}{2}$, to przepływ Θ_{ad} będzie wzmacniał przepływ Θ_w.

Przy szybkiej zmianie prądu twornika $\frac{di}{dt}$ występuje także szybka zmiana przepływu składowego $\frac{d\Theta_{ad}}{dt}$ sprzężonego z uzwojeniem wzbudzenia. Pochodna $\frac{d\Theta_{ad}}{dt}$ wymusza zmianę prądu wzbudzenia.

Komutacja prądu w stanach zaburzeniowych jest zawsze nieliniowa, a przy komutacji nieliniowej występuje składowa wzdłużna przepływu zezwojów komutujących Θ_z [2] . Przepływ Θ_z podobnie jak przepływ Θ_{ad} jest sprzężony indukcyjnie z przepływem wzbudzenia Θ_w. Zaburzenia w pracy silników prądu stałego pojawiają się w sposób nagły, np. zadziałanie wyłączników szybkich wyłączających nadmierną wartość prądu twornika lub też zwarcie na jednym z uzwojeń itp. Jeśli przed zaburzeniem komutacja w maszynie była liniowa lub zbliżona do liniowej, to po wystąpieniu zaburzenia komutacja staje się silnie nieliniowa. Mamy zatem do czynienia z nagłym pojawieniem się przepływu Θ_z, także pochodna $\frac{d\Theta_z}{dt}$, która oddziałuje na prąd wzbudzenia będzie mieć również dużą wartość.

2. MODEL MATEMATYCZNY SPRZĘŻENIA INDUKCYJNEGO UZWOJENIA TWORNIKA Z UZWOJENIEM WZBUDZENIA POPRZEZ ZEZWOJE KOMUTUJĄCE

Tworząc model matematyczny sprzężenia indukcyjnego uzwojenia twornika z uzwojeniem wzbudzenia poprzez zezwoje komutujące zróbmy następujące założenia upraszczające:

- szczotki leżą w osi neutralnej $\alpha_e = \frac{\pi}{2}$, $\Theta_{sd} = 0$,
- obwód magnetyczny zarówno w osi poprzecznej, jak i wzdłużnej jest liniowy,
- pomija się nasyceniowy wpływ oddziaływania twornika na strumień wzbudzenia (założenie spełnione tylko w maszynach skompensowanych),
- szerokość szczotki jest równa szerokości podziałki komutatorowej, tzn. że pod każdym mostem szczotkowym komutuje tylko jeden zezwój (w modelu matematycznym można uwzględnić również większą liczbę zezwojów równocześnie komutujących, lecz wówczas równanie niepotrzebnie się komplikują, co utrudnia śledzenie zjawiska od strony fizykalnej),
- w stanach zaburzeniowych rozkład indukcji w strefie komutacyjnej jest równomierny [3] ,
- w stanach zaburzeniowych rozkład indukcji w szczelinie bieguna głównego jest nierównomierny, podobnie jak w litym pieńku bieguna głównego [3] ,
- prędkość wirowania wirnika jest stała, założenie to jest spełnione, gdyż jak widać z rys. 1 zaburzenia trwają bardzo krótko (około 0,01 do 0,05 s), stąd w tym czasie wirnik, z uwagi na bezwładność mechaniczną, praktycznie nie zmieni swojej prędkości kątowej.

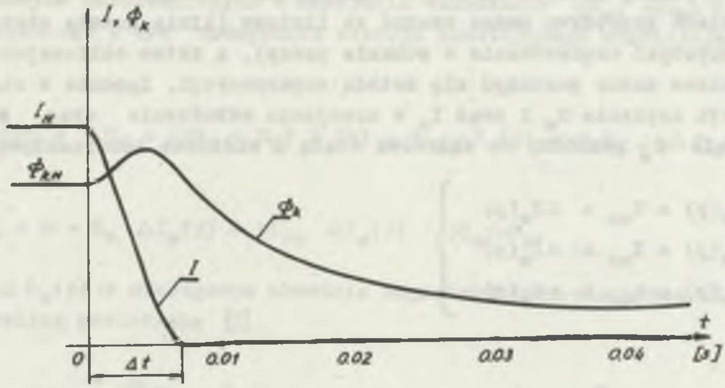
Załóżmy również rodzaj zaburzenia, np. działanie wyłącznika szybkiego, który wyłącza nadmierną wartość prądu twornika. Taki rodzaj zaburzenia występuje często w czasie pracy silników walcowniczych. Rozpatrzmy zjawisko wzbudzania przepływu Θ_z przy tego typu zaburzeniu.

Wyłączenie prądu twornika następuje prawie skokowo

$$i(t) = I_0 \left[1 - \mathbb{1}(t)\right] \tag{2}$$

za tak szybkimi zmianami prądu nie nadążają zmiany strumienia Φ_k w strefie komutacyjnej (rys. 3). Korzystając z równań transmitancji poprzecznego obwodu magnetycznego, a więc szeregowego obwodu magnetycznego o dużej szczelinie powietrznej z blokiem litym [3] , równanie indukcji w strefie komutacyjnej można zapisać w postaci operatorowej [4] :

$$B_k(p) = \frac{\Phi_k(p)}{b_1 l_1} = B_{ko} \left[1 - \frac{k_1}{1 + \sqrt{pT_1}} - \frac{k_2}{1 + \sqrt{pT_2}}\right] \tag{3}$$



Rys. 3

Przebieg czasowy strumienia w strefie komutacyjnej Φ_k przy wyłączeniu prądu twornika. Oscylogram zarejestrowany dla maszyny prądu stałego o danych znamionowych: 220V, 77A, 1450 obr/min

The temporal variation of the flux in the commutation plane after a cutting of the armature current. The oscillogram has been recorded on the 220 V, 71 A, 1450 r.p.m. direct current machine

gdzie:

B_{ko} - wartość indukcji w szczelinie bieguna pomocniczego przed wyłączeniem prądu,

b_1, l_1 - wymiary nabiegunnika bieguna pomocniczego,

$k_1 - k_2 = 1$ - parametry zależne od przepływów twornika i biegunów pomocniczych oraz przewodności drogi magnetycznej strumieni w strefie komutacyjnej [4],

T_1, T_2 - elektromagnetyczne stałe czasowe obwodów prądów wirowych wzbudzonych w elementach stojana (T_1) i elementach wirnika (T_2).

Pod wpływem pola magnetycznego $B_k(p)$ w zezwojach komutujących indukuje się napięcie rotacji

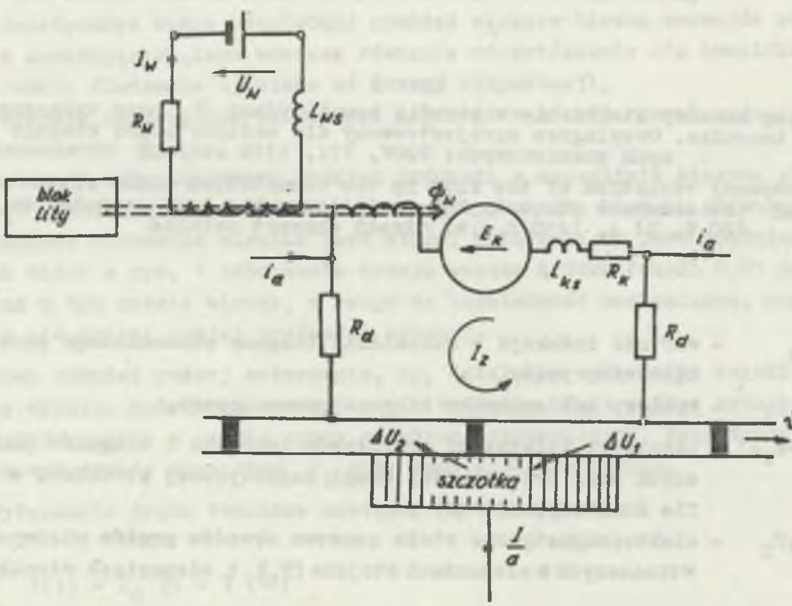
$$E_k(p) = 2\, l_1\, \vartheta\, B_k(p) \tag{4}$$

gdzie:

ϑ = const jest prędkością obwodową wirnika.

Napięcie $E_k(p)$ wymusza, w zwartych przez szczotki zezwojach, przepływ prądu $I_z(p)$, którego przepływ Θ_z oddziałuje na uzwojenie wzbudzenia. Obliczenia prądu $I_z(p)$ oraz zmian prądu w uzwojeniu wzbudzenia $\Delta I_w(p)$ pod wpływem opisanego zaburzenia, można przeprowadzić w oparciu o schemat zastępczy podany na rys. 4. Obwód magnetyczny wzbudzenia przy niewielkich zaburzeniach przepływu można uważać za liniowy (linia prosta styczna do charakterystyki magnesowania w punkcie pracy), a zatem obliczając składowe zaburzeniowe można posłużyć się metodą superpozycji. Zgodnie z zasadą superpozycji napięcie U_w i prąd I_w w uzwojeniu wzbudzenia oraz strumień wzbudzenia Φ_w rozłóżmy na składową stałą i składową zaburzeniową

$$\left.\begin{aligned} U_w(p) &= U_{wo} + \Delta U_w(p) \\ i_w(p) &= I_{wo} + \Delta I_w(p) \\ \Phi_w(p) &= \Phi_{wo} + \Delta\Phi_w(p) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$



Rys. 4

Schemat zastępczy sprzężeń indukcyjnych zezwoju komutującego z uzwojeniem wzbudzenia i blokiem litym stojana

The equivalent circuit of the inductive linkage of the commutator winding section, field winding and the stator solid iron

Przy czym

$$\Delta U_w(p) = 0$$

Dla składowych zaburzeniowych w uzwojeniu wzbudzenia ΔU_w, ΔI_w, $\Delta \Phi_w$ oraz sprzężonego z tym uzwojeniem zezwoju komutującego obowiązują równania:

$$E_k(p) = \Delta U_1 + \Delta U_2 + (2R_d + R_k)\, I_z(p) + pL_{ks}\, I_z(p) + p\, Z_z \cdot \Delta \Phi_w(p) \quad (6)$$

$$\Delta U_w = 0 = R_w\, \Delta I_w(p) + pL_{ws}\, \Delta I_w(p) - pZ_w \Delta \Phi_w. \quad (7)$$

Strumień $\Delta \Phi_w(p)$ w szeregowym obwodzie magnetycznym z elementem litym i małą szczeliną powietrzną [3]

$$\Delta \Phi_w(p) = \frac{\Lambda_{wo}}{\sqrt{1 + p\,T_o}} \left[Z_z I_z(p) - Z_w\, \Delta I_w(p)\right] \quad (8)$$

przy czym

- ΔU_1, ΔU_2 – spadek napięcia na nabiegającej i zbiegającej krawędzi szczotki,
- L_{ks}, L_{ws} – indukcyjności rozproszeń zezwojów komutujących i uzwojenia wzbudzenia,
- Z_z, Z_w – liczba zwojów w zezwoju komutującym i na dwóch cewkach uzwojenia wzbudzenia,
- T_o – elektromagnetyczna stała czasowa obwodu prądów wirowych indukowanych w bloku litym sprzężonych ze strumieniem $\Delta \Phi_w(p)$.

Przy założonym zaburzeniu, jak wynika z rys. 3 i 2, komutacja będzie mieć charakter silnie przyspieszony, a więc kierunek działania przepływu Θ_z będzie skierowany przeciwnie do przepływu wzbudzenia, stąd wynika, że kierunek prądu zaburzeniowego ΔI_w będzie zgodny z prądem I_{wo}, z tego też względu w równaniach (7 i 8) jest znak (–). Analizowany przypadek zaburzenia od strony jakościowej będzie miał przebieg podobny do przypadku przedstawionego na rys. 1, natomiast od strony ilościowej maksymalna wartość prądu zaburzeniowego ΔI_w może wynosić od kilku do kilkudziesięciu procent prądu I_{wo}. W maszynach nieskompensowanych na wartość prądu ΔI_w wpływa także składowa nasyceniowa przepływu twornika. Składowa ta, przy nagłych spadkach prądu twornika, jest ujemna, tzn. powoduje zmniejszenie prądu wzbudzenia.

Równanie (6) jest, mimo poczynionych założeń, równaniem nieliniowym, gdyż ΔU_1 i ΔU_2 są związane z charakterystyką napięciowo-prądową szczotki:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta U_1(t) = f(j_1) \\ &\Delta U_2(t) = f(j_2) \\ &\text{przy czym} \\ &j_1 = \frac{I_z(t)T_k}{S_{sz}(T_k - t)} \\ &j_2 = \frac{I_z(t)T_k}{S_{sz}t} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

gdzie:

S_{sz} – oznacza powierzchnię szczotki,

T_k – czas komutacji zezwoju.

Stąd cały układ równań (6 – 8) jest układem nieliniowym. Linearyzując te równania założmy [5] :

$$\Delta U_1 + \Delta U_2 = \text{const} \tag{10}$$

Otrzymamy w ten sposób zestaw równań liniowych (3 do 8), które tworzą model matematyczny sprzężenia indukcyjnego zezwoju komutującego z uzwojeniem wzbudzenia. Parametrami tego modelu są:

B_{ko}, k_1, k_2, T_o, T_1, T_2, l_i, $\Delta U_1 + \Delta U_2$, R_d, R_k, R_w, L_{ks}, L_{ws}, Z_z, Z_w, Λ_{wo}.

Nie wszystkie z tych parametrów można w sposób prosty wyznaczyć, to jest obliczyć lub pomierzyć, a identyfikacja tych parametrów jest warunkiem koniecznym do obliczenia zaburzenia prądu wzbudzenia ΔI_w.

Przy transformacjach odwrotnych prądu wzbudzenia $\Delta I_w(t) = \mathcal{L}^{-1}\Delta I_w(p)$ oraz $I_z(t) = \mathcal{L}^{-1} I_z(p)$, aby pozbyć się dosyć uciążliwych do transformacji wyrażeń $\frac{1}{1+\sqrt{pT}}$ i $\frac{1}{\sqrt{1+pT}}$, można zastąpić je następującymi aproksymacjami, jak to przedstawiono w pracy [3] :

$$\frac{1}{1+\sqrt{pT}} \approx \sum_{i=1}^{4} \frac{c_i}{1 + A_i\, pT} \tag{11}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+pT}} \approx \sum_{i=1}^{4} \frac{F_i}{1+E_i\,pT} \tag{12}$$

Przy czym

$A_1 = 0,05$ $C_1 = 0,32$

$A_2 = 1,25$ $C_2 = 0,4$

$A_3 = 17$ $C_3 = 0,2$

$A_4 = 300$ $C_4 = 0,08$

$E_1 = 0,0095$ $F_1 = 0,18$

$E_2 = 0,11$ $F_2 = 0,18$

$E_3 = 0,48$ $F_3 = 0,29$

$E_4 = 0,93$ $F_4 = 0,35$

Przypadek zaburzenia przedstawiony na rys. 1, to jest zwarcie komutatora, np. przez łuk okrężny (częsty przypadek ruchowy), nie spełnia założeń liniowości obwodu magnetycznego. Analiza takiego przypadku może być tylko szacunkowa. Przy zwarciu na komutatorze w uzwojeniu biegunów pomocniczych płynie prąd zwarcia wymuszony napięciem zasilania, w uzwojeniu twornika płynie prąd zwarcia wymuszony własnym napięciem rotacji. Zmienił się zatem charakter pracy maszyny z silnikowego na prądnicowy, zmienił się także kierunek przepływu prądu, lecz tylko w uzwojeniu twornika. Strumień w strefie komutacyjnej jest wzbudzony przez sumę przepływów twornika i biegunów pomocniczych, gdyż przepływy te nie kompensują się, lecz dodają. Komutacja staje się bardzo silnie opóźniona, stąd przepływ zezwojów komutujących osłabia przepływ wzbudzenia. Strumień wzbudzenia nie może się zmienić skokowo, nagłe pojawienie się przepływu zezwojów komutujących wymusza zatem zmianę przepływu wzbudzenia. Jak już powiedziano wcześniej, na zmianę prądu wzbudzenia ma też wpływ składowa nasyceniowa przepływu oddziaływania twornika, która jest także ujemna, a przy zwarciu będzie mieć bardzo dużą wartość szczególnie w maszynach nieskompensowanych.

3. PODSUMOWANIE

W silnikach prądu stałego różnego typu zaburzenia w obwodzie twornika, takie jak, np. zadziałanie wyłącznika szybkiego wyzwalane nadmierną wartością prądu twornika lub łuk okrężny na komutatorze, względnie chwilowe zwarcie na uzwojeniu kompensacyjnym i inne, przenoszą się na uzwojenie wzbudzenia, powodując w konsekwencji zadziałanie zabezpieczeń zainstalowanych w tym obwodzie. Z punktu widzenia ochrony silnika przed uszkodzeniem, równoczesne działanie zabezpieczeń w obwodzie twornika i obwodzie wzbudzenia stanowi rezerwę dla zabezpieczenia obwodu twornika i wyłącza takie zaburzenia, których nie jest w stanie wyłączyć zabezpieczenie w obwodzie twornika, na przykład przy ogniu okrężnym na komutatorze (zwarcie łukowe komutatora) zabezpieczenie w obwodzie twornika odłącza silnik od zasilania, nie gasi jednak łuku na komutatorze, który może palić się jeszcze długo przy wzbudzonym i wirującym silniku. Dopiero zabezpieczenie w obwodzie wzbudzenia gasi pole wzbudzenia, co prowadzi do zgaszenia łuku. Zmniejsza to skutki awarii silnika.

W przenoszeniu zaburzeń z obwodu twornika na obwód wzbudzenia pośredniczą zezwoje komutujące. Model matematyczny przechodzenia tych zaburzeń nie był w literaturze dotychczas omawiany. W rozdziale 2 przedstawiono komplet równań opisujących to zjawisko z uwzględnieniem prądów wirowych indukowanych w elementach litych.

LITERATURA

[1] Glinka T: Ustawienie szczotek w strefie neutralnej w maszynach prądu stałego. Wiadomości Elektrotechniczne nr 11-12, 1983.

[2] Glinka T: Własności komutacyjne maszyn prądu stałego przy pulsującym bądź szybko zmieniającym się prądzie twornika. Zeszyty Naukowe Pol. Śląskiej ELEKTRYKA z. 44, Gliwice, 1974.

[3] Glinka T: Analiza równania permeancji szeregowego obwodu magnetycznego ze szczeliną powietrzną przy uwzględnieniu prądów wirowych indukowanych w rdzeniu. Archiwum Elektrotechniki z. 4, 1979.

[4] Paszek W., Glinka T.: Zastosowanie maszyny analogowej do określenia obszaru bezoskrowej komutacji maszyn prądu stałego ze wzbudzeniem obcym przy nieustalonym prądzie twornika. Archiwum Elektrotechniki z. 4, 1970.

[5] Wjegnjer O.G.: Tjeorja i praktika komutacji maszin postojannogo toka. Gosnjergoizdat. Moskwa 1961.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Piotr Wach

Wpłynęło do redakcji dn. 15 marca 1985 r.

MATHEMATICAL MODEL OF THE MAGNETIC LINKAGE OF ARMATURE AND EXCITATION WINDINGS IN TRANSIENT STATES OF DC MACHINES

S u m m a r y

During the work of the DC motors various perturbation occur, such as:

- sudden opening of the armature circuit
- momentary turn-to-turn short-circuit in the compensating windings
- instantanous commutator short-circuit over the electric arc.

These perturbations pass into the field windings and consequently cause the action of this circuit protection. The exciting current during these perturbations can be several times greater than its rating value(Fig. 1). The perturbations pass from the armature to the field circuit through the magnetic linkage of the coils. The phenomenon in compliance with the eddy currents in direct-axis Φ_d and quadrature - axis Φ_q has been described by the equations 3-to 8. The perequisite of the solution of these equations is the earlier determination of several parameters appearing in them.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАГНИТНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ОБМОТКИ ЯКОРЯ С ОБМОТКОЙ ВОЗБУЖДЕНИЯ В МАШИНАХ ПОСТОЯННОГО ТОКА В НЕУСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМАХ

Р е з ю м е

Во время работы двигателей постоянного тока происходят различного рода возмущения, напр.:

- быстрое отключение тока якоря,
- кратковременные межвитковые короткие замыкания компенсационной обмотки,
- кратковременные короткие замыкания коллектора по окружающей дуге.

Возмущения эти передаются на обмотку возбуждения и приводят к срабатыванию защиты в этой цепи. При такого рода возмущениях ток возбуждения может достигать значение в несколько раз превышающее номинальное (рис. 1) .

Возмущения с цепи якоря на цепь возбуждения передаются через коммутирующую секцию обмотки якоря. Явление это, с учетом вихревых токов, индуцируемых в поперечной (ϕ_x) и продольной (Φ_b) магнитной цепи, описано уравнениями (3 до 8) . Условием решения этих уравнений является предварительная идентификация ряда выступающих в них параметров.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 98 Nr kol. 859

Krzysztof KLUSZCZYŃSKI

Instytut Maszyn i Urządzeń Elektrycznych
Politechniki Śląskiej

WPŁYW MOMENTÓW PASOŻYTNICZYCH NA ROZRUCH INDUKCYJNEGO SILNIKA KLATKOWEGO

Streszczenie. Omówiono nową metodę wyznaczania momentów pasożytniczych w silnikach indukcyjnych, bazującą na modelu matematycznym maszyny we współrzędnych k-osiowych. Scharakteryzowano mechanizmy generowania tych momentów i przedstawiono tabelę, określającą prędkości synchroniczne oraz okresy charakterystyk kątowych momentów synchronicznych I rzędu. Jako przykład rozważono silnik klatkowy, w którym pasożytnicze momenty synchroniczne są wytworzone przez harmoniczne żłobkowe przepływu. Wyznaczono momenty synchroniczne oraz prawdopodobieństwo ich synchronizacji w trakcie rozruchu w oparciu o uproszczoną metodę analityczną, zaproponowaną przez B. Hellera i V. Hamatę. W celu weryfikacji tej metody przeprowadzono symulację rozruchu silnika na EMC przy różnych początkowych położeniach wirnika i przy różnych momentach obciążenia maszyny. Omówiono wpływ momentów pasożytniczych na przebiegi nieustalone prędkości obrotowej, momentu elektromagnetycznego oraz prądu silnika.

1. WPROWADZENIE

Własności eksploatacyjne indukcyjnych maszyn klatkowych w istotny sposób zależą od wyższych harmonicznych przestrzennych przepływu, wytwarzanych przez uzwojenie stojana i wirnika. O tym, jakie harmoniczne przestrzenne przepływu powstają w maszynie i jakie wartości przyjmują ich amplitudy, decyduje w pierwszym rzędzie liczba żłobków stojana Z_1, liczba żłobków wirnika Z_2 oraz typ uzwojenia stojana (liczba stref, współczynniki uzwojeń dla poszczególnych harmonicznych itd). Ponadto wpływ na amplitudy mają takie cechy konstrukcyjne, jak: otwarcie żłobków, skos żłobków wirnika, izolacja prętów wirnika itp. Wyższe harmoniczne przestrzenne są przyczyną drgań, hałasów magnetycznych oraz strat dodatkowych. W wyniku elektromagnetycznego współdziałania wyższych harmonicznych przestrzennych powstają w maszynie pasożytnicze momenty elektromagnetyczne, zniekształcające charakterystykę mechaniczną, związaną z główną harmoniczną przestrzenną. W interpretacji fizycznej z pasożytniczymi momentami można związać umyślone, fikcyjne maszyny asynchroniczne i synchroniczne, zwane dalej maszynami elementarnymi. Elementarne maszyny asynchroniczne wytwarzają pasożytnicze momenty asynchroniczne o różnych prędkościach idealnego biegu jałowego, zaś elementarne maszyny synchroniczne-pasożytnicze momenty synchroniczne o różnych prędkościach synchronicznych (przy prędkościach różnych od synchronicznej mają one charakter momentów przemiennych o wartości średniej zero). Momenty synchroniczne powstają przy zatrzymanym wirniku ($\omega = 0$) oraz przy prędkościach wirnika, określonych wzorem:

$$\omega = \pm \frac{2\omega_0}{c\,\dot{Z}_2}.$$

gdzie: ω_0 – częstotliwość napięcia zasilającego, c – dodatnia liczba całkowita.

Różnym elementarnym maszynom synchronicznym mogą odpowiadać te same prędkości synchroniczne. Wartość momentu synchronicznego jest uzależniona od kąta elektrycznego zawartego pomiędzy przepływem stojana i wirnika („twornika" i „wzbudzenia") elementarnej maszyny synchronicznej. „Wzbudnicę" elementarnej maszyny synchronicznej stanowi uzwojenie stojana lub wirnika innej maszyny elementarnej. Zmiana położenia osi przepływu uzwojenia, pełniącego rolę uzwojenia wzbudzenia, następuje w wyniku chwilowego przyśpieszenia wirnika, a więc poprzez zmianę kąta mechanicznego, zawartego pomiędzy osią fazy odniesienia stojana i osią fazy odniesienia wirnika w chwili dojścia maszyny do stanu ustalonego (w chwili zaistnienia stanu ustalonego). Względem tego kąta moment synchroniczny elementarnej maszyny synchronicznej wyraża się wzorem:

$$M_s = M_{mx} \sin c\,\dot{Z}_2(\vartheta - \vartheta_0) \tag{1}$$

gdzie: ϑ_0 – kąt mechaniczny, przy którym moment synchroniczny elementarnej maszyny synchronicznej przyjmuje wartość zero.

Charakterystyka kątowa momentu synchronicznego dowolnej elementarnej maszyny synchronicznej opisana wzorem (1) jest funkcją sinusoidalną o okresie $\frac{2\pi}{c\dot{Z}_2}$. Podziałka żłobkowa wirnika jest najmniejszą wspólną wielokrotnością okresów wszystkich charakterystyk kątowych. Elementarne maszyny synchroniczne o wspólnej prędkości synchronicznej posiadają charakterystyki kątowe momentów o takim samym okresie $\frac{2\pi}{c\dot{Z}_2}$, lecz o różnych wartościach kąta ϑ_0. Przy określaniu amplitudy wypadkowego momentu synchronicznego dla danej prędkości należy więc uwzględnić ich wzajemne przesunięcie. W praktyce często wyznaczenie amplitudy wypadkowego momentu synchronicznego zastępuje się oszacowaniem jej wartości od góry poprzez zsumowanie amplitud momentów poszczególnych elementarnych maszyn synchronicznych. Na charakterystyce mechanicznej maszyny indukcyjnej, uwzględniającej momenty asynchroniczne, momenty synchroniczne zaznacza się jako piki o długości odpowiadającej podwójnej amplitudzie momentu synchronicznego.

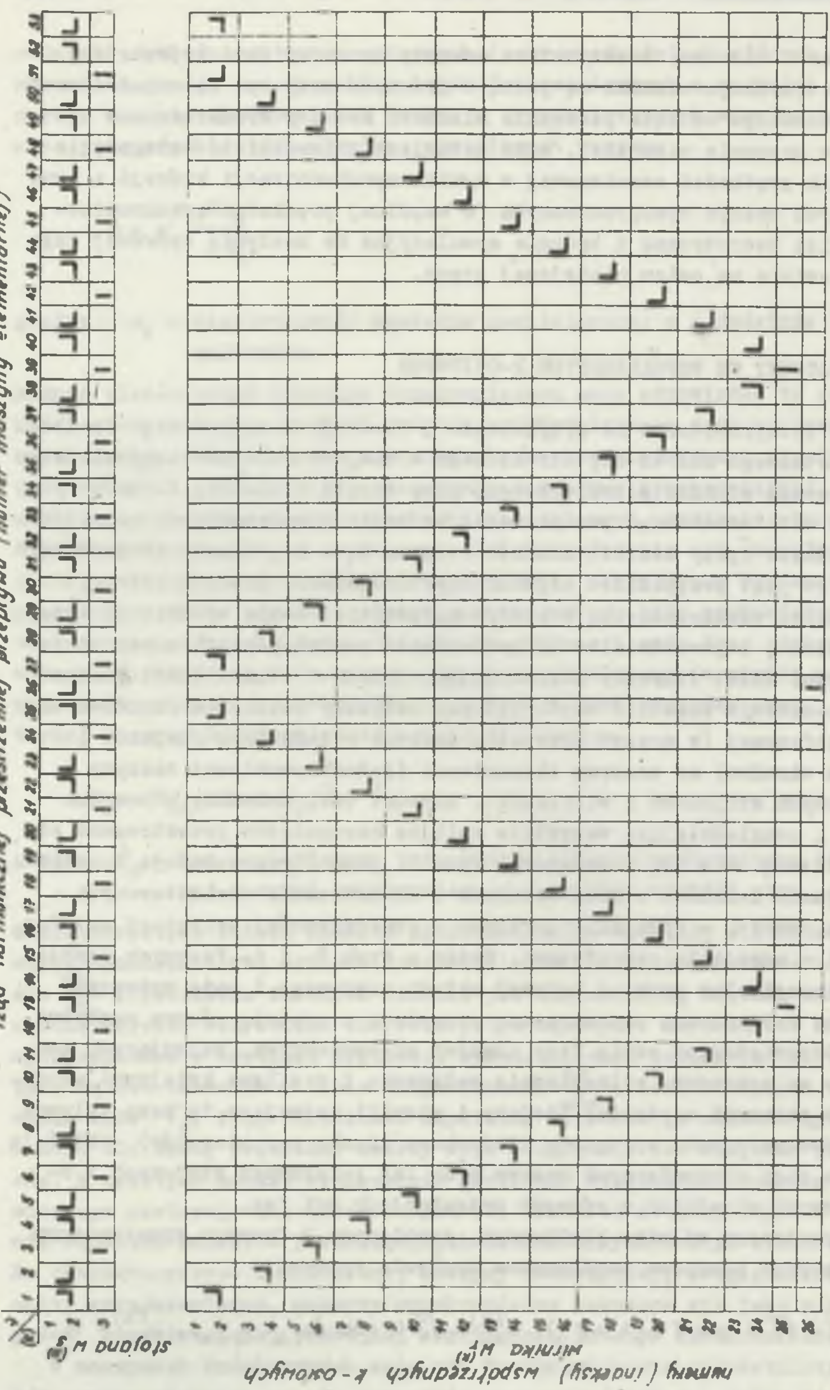
W maszynach indukcyjnych dąży się do ograniczenia pasożytniczych momentów synchronicznych przede wszystkim poprzez odpowiedni dobór liczby żłobków stojana i wirnika. Pasożytnicze momenty synchroniczne pojawiające się przy zatrzymanym wirniku są jedną z głównych przyczyn zależności momentu rozruchowego od kąta położenia wirnika. Momenty synchroniczne występujące w maszynie wirującej, mogą natomiast uniemożliwić osiągnięcie przez silnik prędkości znamionowej w wyniku synchronizacji którejś z grup elementarnych maszyn synchronicznych (o wspólnej prędkości synchronicznej). Analiza teoretyczna i badania symulacyjne na maszynie cyfrowej tego właśnie zjawiska są celem niniejszej pracy.

2. MODEL MASZYNY WE WSPÓŁRZĘDNYCH k-OSIOWYCH

Analizę przeprowadzono na przykładzie 3-fazowego 2-biegunowego (p=1) silnika klatkowego Skf 63-2B, dla którego w miejsce rzeczywistego siedemnastożłobkowego wirnika zaprojektowano nowy wirnik o liczbie żłobków $\dot{Z}_2 = 26$, w celu sztucznego powiększenia wartości pasożytniczych momentów synchronicznych (przy liczbie żłobków stojana $\dot{Z}_1 = 24$, liczba żłobków wirnika $\dot{Z}_2 = 26$ jest przypadkiem najniekorzystniejszym). Analizę oparto o k-osiowy układ współrzędnych, w którym najprościej można wyodrębnić maszyny elementarne, odpowiedzialne za generowanie poszczególnych momentów pasożytniczych. Model fizyczny odpowiadający układowi równań różniczkowych maszyny w k-osiowym układzie współrzędnych nazywamy schematem rozkładu maszyny wielofazowej (w naszym przypadku maszyny o 3-fazowym stojanie i 26-fazowym wirniku) na maszyny elementarne (jednoharmoniczne maszyny o 2-i 1-fazowych stojanach i wirnikach). Schemat ten, omówiony w pracach [3] i [4], uwzględniający wszystkie kolejne harmoniczne przestrzenne sił do harmonicznej $\Omega = 53$, przedstawia rys. 1. Znak ⅃ reprezentuje symetryczne uzwojenie 2-fazowe o prostopadłych i lewostronnie zorientowanych osiach faz, znak L - uzwojenie 2-fazowe o prawostronnej orientacj osi faz, zaś znak | - uzwojenie jednofazowe. Każde z tych 2- i 1- fazowych uzwojeń posiada sinusoidalny rozkład krzywej okładu prądowego i może wytwarzać tylko jedną harmoniczną przestrzenną przepływu o rzędzie równym numerowi kolumny. Odpowiadające sobie fazy uzwojeń elementarnych, zajmujących ten sam wiersz są szeregowo galwanicznie połączone i zasilane kolejnymi współrzędnymi k-osiowymi napięcia. Stojany i wirniki zajmujące tą samą kolumnę są elektromagnetycznie sprzężone (jednakowa liczba par biegunów). Składają się one na ciąg elementarnych maszyn o 2- lub 1-fazowych stojanach i 2- lub 1-fazowych wirnikach o różnych orientacjach osi faz.

Dla rozważanego silnika klatkowego, zasilanego 3-fazowym symetrycznym układem napięć k-osiowe współrzędne napięcia wynoszą:

$$u_{s1}^{(k)} = \sqrt{3}\,U\cos(\omega_o t + \gamma_o),\quad u_{s2}^{(k)} = \sqrt{3}\,U\sin(\omega_o t + \gamma_o),\quad u_{s3}^{(k)} = 0,$$



Rys. 1
Schemat rozkładu maszyny o trójfazowym stojanie i 26-żłobkowym wirniku na maszyny elementarne
The diagram of a decomposition of the polyphase machine into elementary machines

zaś wszystkie współrzędne k-osiowe napięcia wirnika zerują się:

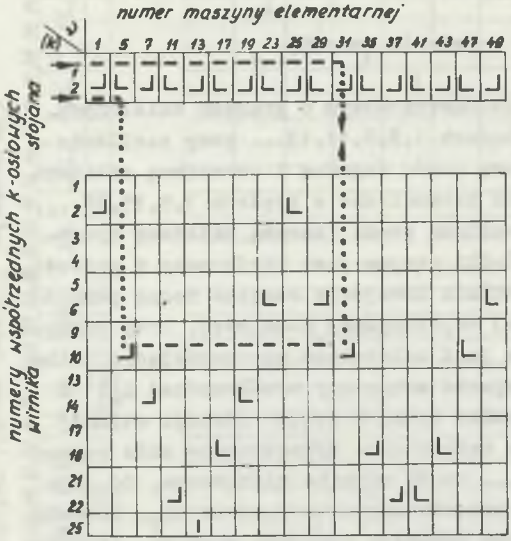
$$u_{r1}^{(k)} = u_{r2}^{(k)} = \ldots\ldots = u_{r26}^{(k)} = 0 \text{ (wirnik zwarty)}.$$

Uzwojenie stojana jest uzwojeniem jednowarstwowym o grupach dzielonych. Jego okład zawiera harmoniczne o rzędach 1,5,7,11,13... przy zasileniu pierwszą i drugą współrzędną k-osiową prądu (zgodną i przeciwną składową symetryczną w stanie ustalonym) oraz harmoniczne o rzędach 3,9,15,21.... przy zasilaniu 3-cią współrzędną k-osiową prądu (zerową składową symetryczną w stanie ustalonym) [4] . Jeśli stojan jest skojarzony w gwiazdę, wówczas: $i_{s3}^{(k)} = 0$ i na schemacie rozkładu uzwojenie stojana można pominąć drugi wiersz, odpowiadający trzeciej współrzędnej k-osiowej. Przy połączeniu faz w trójkąt, takie pominięcie jest założeniem upraszczającym, albowiem w zamkniętym trójkącie mogą pojawić się prądy współrzędnej $i_{s3}^{(k)}$ o częstotliwości różnej od częstotliwości sieci w wyniku reakcji wtórnej (ogólnie - wielokrotnej) stojana na harmoniczne przestrzenne pola magnetycznego wirnika o rzędach 3,9,15.... Co do wirnika klatkowego, to jego przepływ nie zawiera harmonicznych przestrzennych o rzędach $c\check{Z}_2$. Pozwala to na zrezygnowanie z 12-tego wiersza schematu rozkładu wirnika, odpowiadającego 26-tej współrzędnej k-osiowej wirnika.

Poprzez opuszczenie odpowiednich kolumn i wierszy w schemacie z rys. 1 otrzymujemy zredukowany schemat rozkładu maszyny, przedstawiony na rys. 2, odpowiadający maszynie o fazach skojarzonych w gwiazdę. Posługiwanie się tym schematem przy analizie maszyny o fazach skojarzonych w trójkąt jest przybliżeniem i wymaga dodatkowego założenia upraszczającego o nieuwzględnianiu prądów fazowych $i_{s3}^{(k)}$, cyrkulujących w zamkniętym trójkącie i momentów pasożytniczych, związanych z tymi prądami.

3. PASOŻYTNICZE MOMENTY SYNCHRONICZNE

Na schemacie rozkładu maszyny wielofazowej na maszyny elementarne, można w przejrzysty sposób przedstawić mechanizmy generowania moementów synchronicznych poprzez uwidocznienie "dróg", na których dochodzi do powstawania przepływów twornika i wzbudzenie w poszczególnych elementarnych maszynach synchronicznych. Odcinki "dróg", wyróżnione linią przerywaną odpowiadają połączeniom galwanicznym, zaś linią kropkowaną - sprzężeniom elektromagnetycznym. Przykładowo na rys. 2 zaznaczono jedną z możliwych "dróg" powstania pasożytniczego momentu synchroniczbego I rzędu w 31-szej maszynie elementarnej. 31-szy stojan elementarny (twornik maszyny synchronicznej) jest zasilany bezpośrednio prądem sieci. 31-szy wirnik elementarny (uzwojenie wzbudzenia maszyny synchronicznej) jest zasilany prądem z 5-tego wirnika elementarnego (wzbudnica). W 5-tym wirniku elementarnym (wzbudnicy) siłę elektromotoryczną indukuje prąd sieci, przepływający przez



Rys. 2

Mechanizm generowania pasożytniczych momentów synchronicznych I rzędu
A principle of a generation of the parasitic synchronous torques of a first order

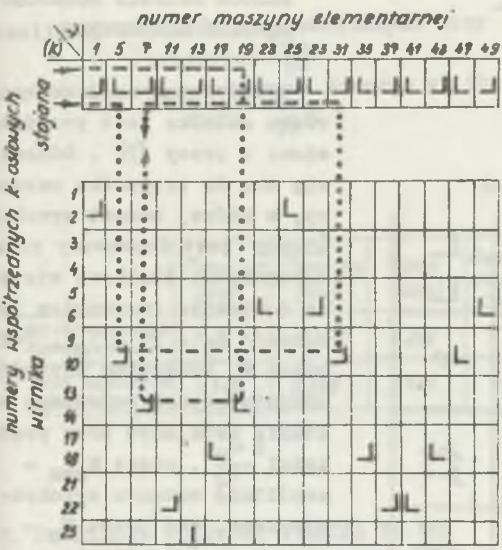
5-ty stojan elementarny. Moment ten oznaczamy jako $M_{s5,31}$ (ogólnie $M_{s\vartheta,\varrho}$). Pierwszy indeks wskazuje na uzwojenie wirnika, pełniące rolę wzbudnicy, zaś drugi - na maszynę elementarną, w której powstaje moment synchroniczny. Jeszcze zwięźlej: pierwszy indeks ϑ jest numerem maszyny wzbudzającej, zaś drugi ϱ - maszyny synchronicznej. Na podstawie orientacji osi faz w maszynie wzbudzającej i maszynie synchronicznej można bez trudności w oparciu o tab. 1 określić prędkość synchroniczną, a więc i okres charakterystyki kątowej momentu. Na rys. 3 przedstawiono jeden z możliwych mechanizmów powstania pasożytniczego momentu synchronicznego II rzędu w 7-mej maszynie elementarnej. Momenty synchroniczne II rzędu są wynikiem współdziałania prądów reakcji wtórnej stojana (prądy o częstotliwości różnej od częstotliwości sieci) oraz prądów wirnika o częstotliwości poślizgu s_ϑ (gdzie: $s_\vartheta = \frac{\omega_0 - \vartheta\omega}{\omega_0}$, ϑ - numer wirnika elementarnego). Momenty synchroniczne II rzędu są znacznie mniejsze od momentów synchronicznych I rzędu. Uwzględnianie kolejnych odbić prądów (reakcji wielokrotnych) prowadzi do ujawniania pasożytniczych momentów synchronicznych coraz to wyższych rzędów, których znaczenie (z technicznego punktu widzenia) jest jednak pomijalnie małe. Przy ograniczeniu liczby wyższych harmonicznych przestrzennych w rozważanej maszynie do $\Omega = 53$ (rys.2), momenty synchroniczne I rzędu powstaną wyłącznie przy prędkości $\frac{2\omega_0}{25}$ (c=1) oraz przy prędkości $-\frac{2\omega_0}{52}$ (c=2). Zasadniczy wpływ na rozruch silnika będzie miał pasożytniczy moment synchroniczny przy prędkości $\frac{2\omega_0}{25}$, który jest sumą następujących składników:

$$M_s = M_{s1,25} + M_{s25,1} + M_{s5,31} + M_{s31,5} + M_{s11,37} + M_{s37,11} + M_{s17,43} + M_{s43,17} +$$

$$+ M_{s23,49} + M_{s49,23} + \ldots \tag{2}$$

Spośród składników sumy (2) dominującą rolę odgrywa pierwszy składnik, związany z harmonicznymi przestrzennymi przepływu o największych amplitudach: pierwsze harmoniczne jest harmoniczną główną, zaś 25-ta harmoniczne - harmoniczną żłobkową zarówno stojana, jak i wirnika. Uzasadnia to przyjęcie do dalszych rozważań modelu, uwzględniającego wyłącznie 1-szą i 25-tą harmoniczną przepływu, a tym samym pominięcie we wzorze (2) składników momentu, związanych z harmonicznymi strefowymi (pasmowymi):

$$M_s \approx M_{s1,25} + M_{s25,1}. \qquad (3)$$



Rys. 3

Mechanizm generowania pasożytniczych momentów synchronicznych II rzędu
A principle of a generation of the parasitic synchronous torques of a second order

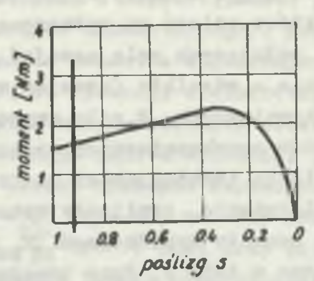
Charakterystykę asynchronicznego momentu elektromagnetycznego przedstawia rys. 4. Pasożytniczy moment asynchroniczny, związany z 25-tą harmoniczną przestrzenną jest pomijalnie mały. Momenty synchroniczne obliczono w oparciu o uproszczoną metodę, która polega na wyznaczeniu prądów poszczególnych wirników elementarnych, pełniących rolę uzwojeń wzbudzenia i zasileniu nimi - jako prądami wzbudzenia - wirników (uzwojeń wzbudzenia) odpowiednich elementarnych maszyn synchronicznych. W celu uwypuklenia zagadnień, związanych z sumowaniem momentów synchronicznych, wyznaczono wpierw oba momenty $M_{s1,25}$ i $M_{s25,1}$ przy pominięciu indukcyjności rozproszenia różnicowego, a następnie przy jej uwzględnieniu. Amplitudy momentów składowych $M_{smx1,25}$, $M_{smx25,1}$, amplitudy momentu wypadkowego $|M_{smx}$ i sumy amplitud ($M_{smx1,25} + M_{smx25,1}$) zestawiono w tab. 2. Przy uwzględnieniu indukcyjności rozproszenia różnicowego suma amplitud momentów składowych jest praktycznie równa amplitudzie momentu wypadkowego. Przy nieuwzględnieniu - oszacowanie takie jest obarczone dość znacznym błędem. W celu pełniejszego wyeksponowania wpływu pasożytniczych momentów synchronicznych na przebieg rozruchu silnika, przyjęto do dalszych rozważań model matematyczny maszyny bez indukcyjności rozproszenia różnicowego.

Tabela 1

Prędkości synchroniczne dla pasożytniczych momentów I rzędu
Synchronous speeds for parasitic torques of a first order

maszyna synchroniczna

ρ / ν (maszyna wzbudzająca)				
	0	$\frac{2\omega_0}{\rho+\nu}$	$-\frac{2\omega_0}{\rho-\nu}$	0
	$\frac{2\omega_0}{\rho+\nu}$	0	0	$-\frac{2\omega_0}{\rho-\nu}$
	$\frac{2\omega_0}{\rho-\nu}$	0	0	$-\frac{2\omega_0}{\rho+\nu}$
	0	$\frac{2\omega_0}{\rho-\nu}$	$-\frac{2\omega_0}{\rho+\nu}$	0



Rys. 4

Charakterystyka momentu silnika
The torque - speed curve of the motor

4. UPROSZCZONA ANALITYCZNA METODA BADANIA ROZRUCHU SILNIKA KLATKOWEGO

Uproszczona analiza rozruchu silnika jest przedstawiona w pracy [2] . Odnosi się ona do przypadku maszyny, w której moment synchroniczny jest formowany przez harmoniczne żłobkowe stojana i wirnika (warunkiem jest równość $\dot{Z}_1 + 2p = \dot{Z}_2$). Jeśli przez M_a oznaczymy wartość momentu asynchronicznego w stanie ustalonym przy prędkości $\frac{2\omega_0}{Z_2}$, przez M_{amx} - amplitudę momentu synchronicznego, zaś przez M_o - moment obciążenia, to warunek konieczny synchronizacji momentu pasożytniczego (silnik nie osiągnie prędkości znamionowej) określa nierówność: $M_{amx} > M_a - M_o$. Nie jest to jednak warunek wystarczający, ponieważ w pewnych przypadkach silnik może "wyrwać się" spod działania momentu synchronicznego pod wpływem sił bezwładności. Zjawisko to zostało przeanalizowane w pracy [2] w oparciu o szereg założeń upraszczających. W interpretacji fizycznej rozwiązanie równania różniczkowego ruchu sprowadza się do określenia przedziału kątów ϑ , przy których w wyniku "zaburzenia zewnętrznego" o wartości $M_a - M_o$ nie następuje wypadnięcie z synchronizmu (utrata stabilności) elementarnej maszyny synchronicznej,

Tabela 2

Amplitudy momentów synchronicznych przy prędkości $\frac{2\omega_0}{25}$

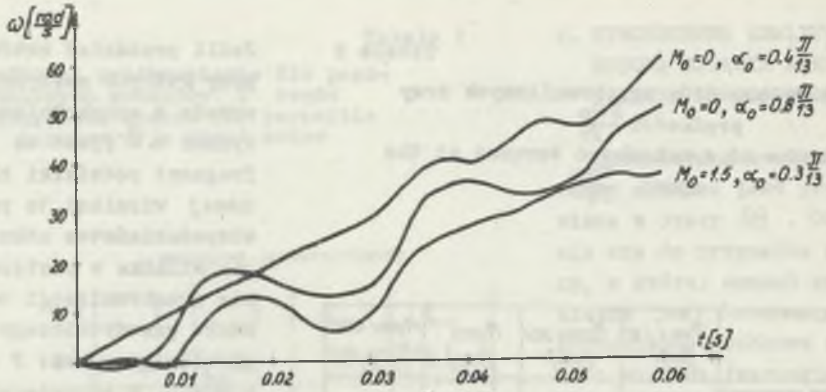
Amplitudes of synchronous torques at the speed $\frac{2\omega_0}{25}$

	$M_{smx\,1.25}$ [Nm]	$M_{smx\,25.1}$ [Nm]	M_{smx} [Nm]	$M_{smx\,1.25}+M_{smx\,25.1}$ [Nm]
bez ind. rozproszenia różnicowego	2.65	2.407	4.296	5.057
z ind. rozproszenia różnicowego	1.747	0.008	1.755	1.755

Jeśli przedział kątów, przy których maszyna nie wypada z synchronizmu wynosi $\Delta\vartheta$ (jest to fragment podziałki żłobkowej wirnika), to prawdopodobieństwo utknięcia silnika w następstwie synchronizacji momentu pasożytniczego określa stosunek: $P = \frac{\Delta\vartheta}{2\pi}\dot{z}_2$. W rozważanym przypadku przy założeniu, że $M_o = 0$, prawdopodobieństwo to wyniosło 0,46.

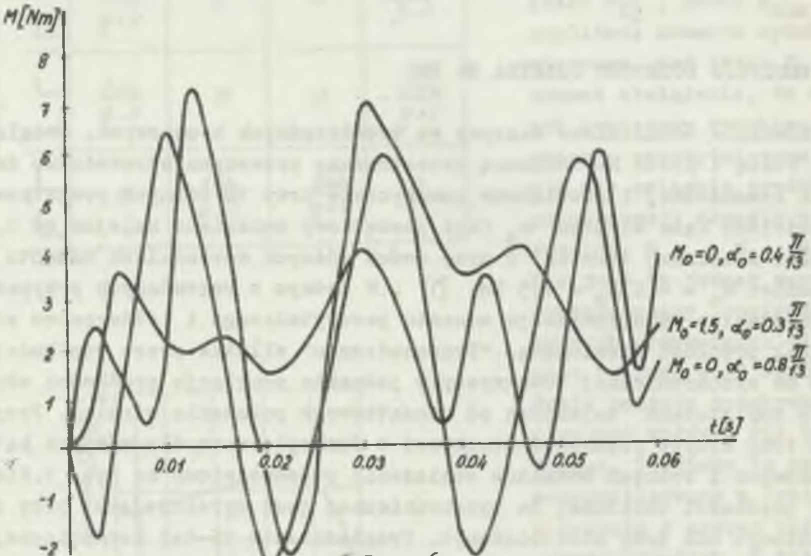
5. SYMULACJA ROZRUCHU SILNIKA NA EMC

Równanie różniczkowe maszyny we współrzędnych k-osiowych, uwzględniające 1-szą i 25-tą harmoniczną przestrzenną przepływu sprowadzono do postaci kanonicznej i rozwiązano numerycznie przy 10 różnych początkowych wartościach kąta wirnika α_o (kąt początkowy zmieniano kolejno od 0,1 podziałki żłobkowej wirnika) i przy dwóch różnych wartościach momentu obciążenia: $M_o = 0$ i $M_o = 1,5$ Nm, [1] . W żadnym z rozważanych przypadków nie nastąpiła synchronizacja momentu pasożytniczego i każdorazowo silnik osiągał prędkość znamionową. "Przechodzeniu" silnika przez prędkości zbliżone do synchronicznej towarzyszyły jednakże oscylacje prędkości obrotowej o amplitudach zależnych od początkowego położenia wirnika. Przykładowo trzy krzywe prędkości obrotowej w funkcji czasu dla różnych kątów początkowych i różnych momentów obciążenia przedstawiono na rys. 5. Siodło przy prędkości zbliżonej do synchronicznej jest wyraźniejsze przy silniku obciążonym niż przy nieobciążonym. Uwzględnienie 25-tej harmonicznej przepływu wywiera istotny wpływ na przebieg czasowy momentu elektromagnetycznego i prądu stojana podczas rozruchu silnika. Szczytowa wartość momentu elektromagnetycznego oraz czas jej pojawienia stają się zależne od początkowego położenia wirnika. Szczytowa wartość momentu, która dla modelu z harmoniczną główną wynosiła ok. 4 Nm, wzrosła - w najbardziej niekorzystnym przypadku - do ok. 8 Nm (rys. 6). Wpływ ten tłumaczy rys. 7. Moment elektromagnetyczny przy uwzględnieniu 1-szej i 25-tej harmonicznej można przedstawić w postaci sumy dwóch składników: $M_{e(1)}$ i $M_{e(25)}$, związanych odpowiednio z kątem α i 25α . Moment elektromagnetyczny $M_{e(1)}$ jest praktycznie identyczny z momentem elektromagnetycznym otrzymanym dla modelu



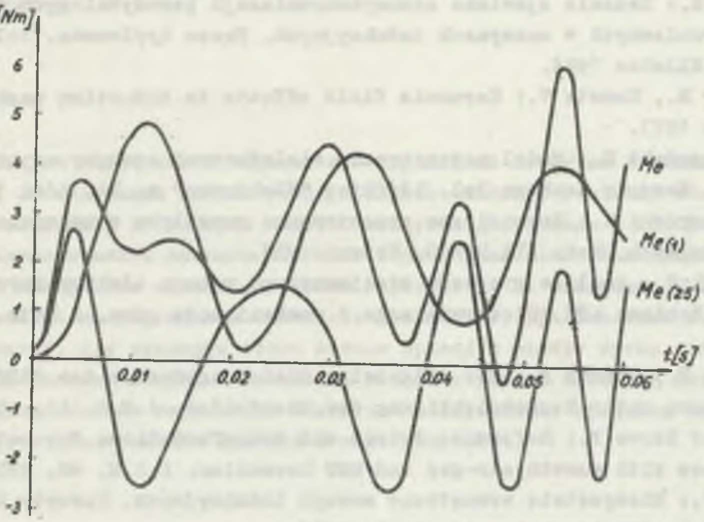
Rys. 5

Przebiegi prędkości obrotowej w funkcji czasu przy rozruchu silnika przy różnych wartościach kąta początkowego wirnika
Time functions of a speed during the start of a motor with the various initial positions of a rotor



Rys. 6

Przebiegi momentu elektromagnetycznego w funkcji czasu przy rozruchu silnika przy różnych wartościach kąta początkowego wirnika
Time functions of an electromagnetic torque during the start of a motor with the various initial positions of a rotor



Rys. 7

Przebiegi momentów składowych i momentu wypadkowego
Time functions of the components of the torque and the resultant torque

z harmoniczną główną. Przy uwzględnieniu 25-tej harmonicznej pojawia się składowa $M_{e(25)}$, która w zależności od przypadkowej wartości kąta α_0 w różny sposób sumuje się ze składową $M_{e(1)}$. Przy niektórych wartościach kąta α_0 w miejsce pierwszego maksimum momentu pojawia się nawet moment o ujemnej wartości.

6. WNIOSKI

Wyższe harmoniczne przestrzenne przepływu i związane z nimi pasożytnicze momenty synchroniczne wywierają niekorzystny wpływ na rozruch silników indukcyjnych (wydłużają czas rozruchu, powodują oscylację prędkości obrotowej, są przyczyną "siodeł" przy prędkości, zbliżonej do synchronicznej). W istotny sposób powiększają wartości szczytowe momentu elektromagnetycznego i prądu łączeniowego. W silnikach o prawidłowo dobranej liczbie żłobków stojana i wirnika opisane efekty wystąpią w odpowiednio mniejszej skali.

LITERATURA

[1] Cyroń M.: Badanie zjawiska samosynchronizacji pasożytniczych momentów synchronicznych w maszynach indukcyjnych. Praca dyplomowa. Pol. Śląska - Gliwice 1984.

[2] Heller B., Hamata V.: Harmonic field effects in induction machines. Praque 1977.

[3] Kluszczyński K.: Model matematyczny wielofazowej maszyny asynchronicznej, Zeszyty Naukowe Pol. Łódźkiej "Elektryka" z. 74, Łódź 1983.

[4] Kluszczyński K.: Harmoniczne przestrzenne przepływu w maszynach asynchronicznych. Mat. VII SPETO, Ustroń 1984.

[5] Sobczyk T.: Analiza procesów stacjonarnych maszyn elektrycznych. Zeszyty Naukowe AGH "Elektryfikacja i mechanizacja górn. i hutn." z. 97, Kraków.

[6] Taegen F., Hammes E.: Das allgemeine Gleichungssystem des Käfigläufermotors unter Berücksichtigung der Oberfelder. A.f.E. 55, 1972.

[7] Van der Merwe F.: Reference frames and transformations for rotating machines with smooth air-gap and MMF harmonics. A.f.E. 60, 1978.

[8] Wach P.: Niesymetrie wewnętrzne maszyn indukcyjnych. Zeszyty Naukowe WSI Opole "Elektryka" z.19, Opole 1982.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Piotr Wach

Wpłynęło do redakcji dn. 7 maja 1985 r.

THE INFLUENCE OF PARASITIC TORQUES FOR THE STARTING OF INDUCTION SQUIRREL-CAGE MOTOR

S u m m a r y

The new method of calculation of parasitic torques in induction motors basing on the model of machine in k-axis coordinates, was presented. As an example the squirrel-cage motor with the synchronous torques, generated by the magnetomotive force step harmonics, was considered. The synchronous torques and the probability of their synchronization during the starting were calculated, basing on the simplified analitical method, proposed by B.Heller and V. Hamata. In the purpose of verification, the simulation of starting was realised on the computer for the various initial positions of the rotor and for the various torques of the load. The influence of parasitic torques for the transient states of velocity, electromagnetic torque and current of a motor was considered.

ВЛИЯНИЕ ПАРАЗИТНЫХ МОМЕНТОВ НА ПУСК АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ С КОРОТКОЗАМКНУТЫМ РОТОРОМ

Р е з ю м е

Оговорен новый метод определения паразитных моментов в асинхронных двигателях, использующий математическую модель машины в к-осевой системе координат. Как пример рассмотрен короткозамкнутый двигатель, в котором паразитные синхронные моменты вызваны пазовыми гармониками магнитодвижущей силы. Определены синхронные моменты, а также вероятность их синхронизации вовремя пуска опираясь на упрощенном аналитическом методе, предложенным Б. Геллером и В. Гаматой. Для проверки этого метода проведен расчёт пуска двигателя на ЭВМ для разных начальных положений ротора и разных моментов нагрузки машины. Обсуждено влияние паразитных моментов на переходные процессы скорости вращения, электромагнитного момента и тока двигателя.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 98 Nr kol. 859

Henryk URZĘDNICZOK

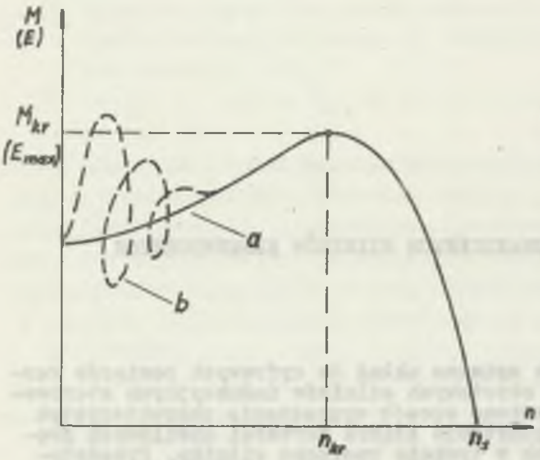
Instytut Metrologii Elektrycznej
i Elektronicznej
Politechniki Śląskiej

CYFROWY POMIAR CHARAKTERYSTYK MECHANICZNYCH SILNIKÓW ELEKTRYCZNYCH INDUKCYJNYCH

Streszczenie. W artykule opisano układ do cyfrowych pomiarów wartości chwilowych prędkości obrotowych silników indukcyjnych sterowany minikomputerem. Przedstawiono sposób wyznaczenia charakterystyk mechanicznych silników na podstawie zbioru wartości chwilowych prędkości obrotowych mierzonych w trakcie rozruchu silnika. Przedstawiono analizę błędów pomiaru prędkości, określono maksymalny błąd wyznaczenia momentu mechanicznego oraz określono optymalną wartość czasu uśrednienia w zależności od parametrów silnika. Podano przykładowe wartości błędów maksymalnych, bezwzględnych dla wybranych wartości czasu uśredniania.

1. WPROWADZENIE

Charakterystyka mechaniczna jest to zależność momentu mechanicznego na wale silnika od prędkości obrotowej zmieniającej się od zera do prędkości synchronicznej. Rozróżnia się charakterystyki mechaniczne: statyczną i dynamiczną. Charakterystykę statyczną (krzywa a, rys. 1) wyznacza się w elektromagnetycznym i mechanicznym stanie ustalonym, natomiast na przebieg charakterystyki dynamicznej (krzywa b, rys. 1) mają wpływ elektromechaniczne procesy przejściowe. Szczególnym przypadkiem charakterystyki mechanicznej jest charakterystyka rozruchowa, która dostatecznie wiernie pokrywa się z charakterystyką statyczną, o ile podczas rozruchu ograniczy się wpływ stanów przejściowych. W tym celu sprzęga się z wałem silnika duże masy wirujące oraz przeprowadza się rozruch z nawrotu. Przy takim sposobie rozruchu procesy przejściowe wytłumiają się w zakresie ujemnych prędkości obrotowych. Norma PN-72/E-04272 zaleca pomiar charakterystyki mechanicznej silników poprzez pomiar charakterystyki rozruchowej.



Rys. 1

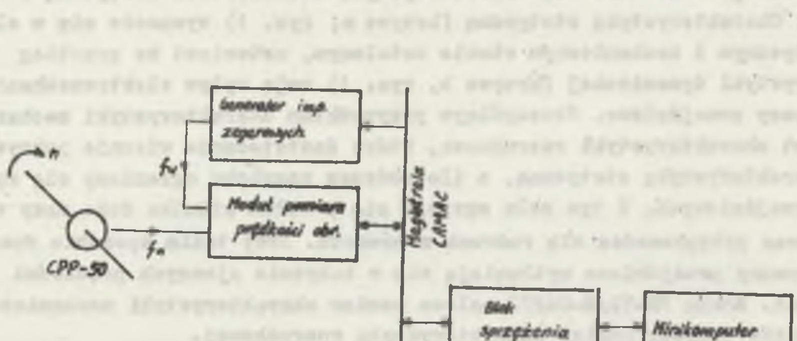
Przykładowe charakterystyki mechaniczne silnika indukcyjnego - statyczne (krzywe a) i dynamiczne (krzywa b)

Exemplary torque-speed characteristics of asynchronous motors - statical (curve a) and dynamical (curve b)

2. OPIS UKŁADU POMIAROWEGO

W komputerowym systemie badań silników indukcyjnych [2] zastosowano wyznaczenie charakterystyki rozruchowej przy użyciu toru przetwarzania przedstawionego na rys. 2. Zasadniczym układem tego toru jest moduł CAMAC (rys. 3) przetwarzający sygnały z przetwornika obrotowo - impulsowego na liczby proporcjonalne do chwilowych wartości prędkości obrotowej silnika.

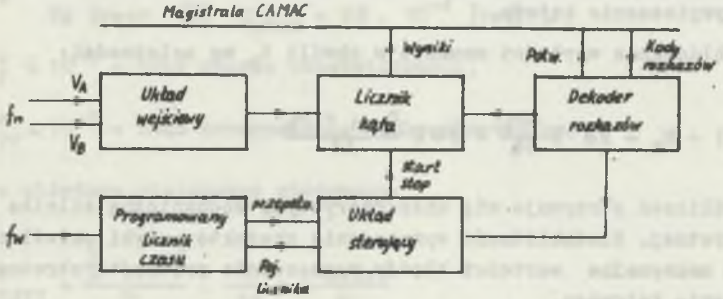
Przetwornik obrotowo - impulsowy CPP-50, przystosowany do celów pomiaru prędkości chwilowej [1], wytwarza na wyjściu dwa napięcia sinusoidalne zmienne V_A i V_B o częstotliwości f proporcjonalnej do prędkości obrotowej n wału silnika. Napięcia te są przesunięte w fazie o $\pm \frac{\pi}{2}$ w zależności od kierunku obrotów.



Rys. 2

Struktura toru pomiaru prędkości obrotowej w komputerowym systemie badania silników elektrycznych

Structure of measurement circuit of the rotational speed in computer controlled system of the electric motors testing



Rys. 3
Schemat blokowy modułu prędkości obrotowej
The block diagram of module rotational speed

W układzie wejściowym napięcia V_A i V_B są przekształcane na ciąg impulsów prostokątnych o częstotliwości f. Na podstawie przesunięcia fazowego napięć V_A i V_B wyznaczany jest bit znaku kierunku obrotów. Impulsy zliczone są w liczniku kąta (każdemu impulsowi odpowieda jednostkowa wartość drogi kątowej wału) o stałej pojemności 10^4 w czasie Δt. Czas Δt jest odmierzony przez licznik czasu o pojemności ustawionej rozkazami CAMAC, który zlicza impulsy z generatora częstotliwości wzorcowej. Stan licznika kąta po każdym odcinku czasu Δt jest liczbą proporcjonalną do drogi kątowej $\Delta\alpha$ wału silnika w czasie Δt. Liczby te wraz z bitem znaku są przesyłane do pamięci minikomputera. Zatem po zakończeniu pomiarów (z chwilą ustalenia się prędkości obrotowej) w pamięci znajduje się ciąg liczb reprezentujących drogę kątową wału silnika między kolejnymi chwilami $t_j = \Delta t. j$ ($j = 1,2 \ldots\ldots N$). Na tej podstawie, przez różniczkowanie numeryczne wyznacza się wartości chwilowe prędkości obrotowej $n(t_k)$ w chwilach t_k wg zależności:

$$n(t_k) = n_k = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \qquad (1)$$

gdzie:

$$t_k = \Delta t(j + \frac{1}{2})$$

Moment mechaniczny na wale silnika związany jest z prędkością obrotową równaniem:

$$M = J\,E = 2\pi J\,\frac{dn}{dt} \qquad (2)$$

gdzie:

J - stały moment bezwładności mas wirujących,

E - przyspieszenie kątowe.

Przyjęto obliczanie wartości momentu w chwili t_k wg zależności:

$$M(t_k) = M_k = 2\pi\, J \frac{\Delta n_k}{\Delta t} = 2\pi J \frac{n_{k+1} - n_k}{\Delta t} \qquad (3)$$

W wyniku obliczeń otrzymuje się charakterystykę mechaniczną silnika w postaci dyskretnej. Niedokładność wyznaczania charakterystyki określona jest przez maksymalne wartości błędów wyznaczania prędkości obrotowej i przyspieszenia kątowego.

3. KLASYFIKACJA BŁĘDÓW WYZNACZANIA CHARAKTERYSTYKI M = f(n)

Wyznaczanie charakterystyki silnika odbywa się w dwóch etapach: w pierwszym przetwarza się na bieżąco kolejne odcinki drogi kątowej wału silnika na liczby rejestrowane w pamięci komputera, w drugim na podstawie ciągu liczb wyznacza się dla poszczególnych punktów charakterystyki wartości prędkości obrotowej i momentu wg zależności (1) i (3).

Liczby reprezentujące odcinki drogi kątowej obarczone są błędem będącym wypadkowym błędem poszczególnych ogniw toru przetwarzania- błąd przetwarzania. Obliczone na podstawie tych liczb wartości prędkości obrotowej i momentu lub przyspieszenia wg wzorów (1) i (3) jest źródłem dodatkowego błędu - błędu uśredniania. Błąd przetwarzania obejmuje błędy związane z niedokładnym przeniesieniem ruchu obrotowego wału silnika na wałek przetwornika obrotowo - impulsowego oraz błędy instrumentalne, których przyczyną jest ograniczona dokładność poszczególnych ogniw toru przetwarzania. Błąd przetwarzania można wyrazić zależnością:

- dla prędkości obrotowej

$$\delta^{o}_{nprz} = \delta^{o}_{w} + \delta^{o}_{z} + \delta^{o}_{p} + \delta^{o}_{P} + \delta^{o}_{pr}$$

gdzie:

δ^{o}_{w} - względny błąd dyskretyzacji czasu pomijany ze względu na bardzo małe wartości czasu propagacji sygnałów w układzie - rzędu 20 ns - w stosunku do czasu Δt,

$\delta^{o}_{z} = \dfrac{1}{N\,\Delta t\, n}$ - względny błąd dyskretyzacji kąta

N - stała przetwornika obrotowo - impulsowego,

δ_p^o - graniczny błąd położenia przetwornika obrotowo-impulsowego. Wg pracy [4] $\delta_{pmax} = 2\pi \cdot 10^{-4}$ [rad] ,

$\delta_p^o \leqslant 10^{-5}$ - błąd wzorca częstotliwości,

$\delta_{pr}^o \leqslant 10^{-5}$ - błąd przeniesienia ruchu obrotowego.

Pomijając składowe nieistotne otrzymano:

$$\delta_{nprz}^o = \frac{\frac{1}{N} + 10^{-4}}{n} \cdot \frac{1}{\Delta t} = \frac{\delta_{n\,prz}}{n}$$

- w oparciu o zależność (3) dla przyspieszenia kątowego:

$$\delta_{Eprz}^o = \frac{2(\frac{1}{N} + 10^{-4})}{E} \cdot \frac{1}{(\Delta t)^2} = \frac{\delta_{Eprz}}{E} \tag{5}$$

Zależność (5) została przestawiona na rys. 5
Dla rozpatrywanego sposobu wyznaczenia charakterystyki mechanicznej można wyróżnić dwie składowe błędu uśredniania. Jedną jest błąd powstający na skutek tego, że liczbę zawartą w liczniku kąta traktuje się jako proporcjonalną do chwilowej wartości prędkości obrotowej, a w rzeczywistości jest ona proporcjonalna do średniej prędkości obrotowej za okres Δt. Interpretacja graficzna tego błędu przedstawiona jest na rys. 4. Drugą składową błędu uśredniania jest błąd różniczkowania numerycznego, którym obarczone są wyniki obliczeń przyspieszenia kątowego. Błąd różniczkowania można zdefiniować jako różnicę między rzeczywistą wartością chwilową przyspieszenie, a wartością wyznaczoną wg zależności (3) przy założeniu, że dane są dokładne wartości prędkości obrotowej w chwilach t_k. Błąd uśredniania dla przyspieszenia kątowego zależy od przyjętego algorytmu różniczkowania numerycznego, wartości czasu Δt oraz od charakteru zmienności przyspieszenia w czasie, czyli od krzywizny charakterystyki rozruchowej. Określenie analityczne tego błędu jest trudne, jednakże można oszacować jego maksymalną wartość odpowiadającą obszarowi charakterystyki $M = f(n)$ o największym zakrzywieniu, czyli jej wierzchołkowi - punkt (M_{kr}, n_{kr}) na rys. 1. Dla szerokiej klasy silników indukcyjnych można aproksymować ten obszar charakterystyki wielomianem o stałych zależnych od parametrów silnika (E_{max} i T_r lub odpowiednio P_n i n_s) oraz wyznaczyć na tej podstawie maksymalny błąd uśredniania [3] . Uzyskano w ten sposób empiryczną zależność błędu uśredniania od parametrów silnika i czasu zliczania impulsów kąta:

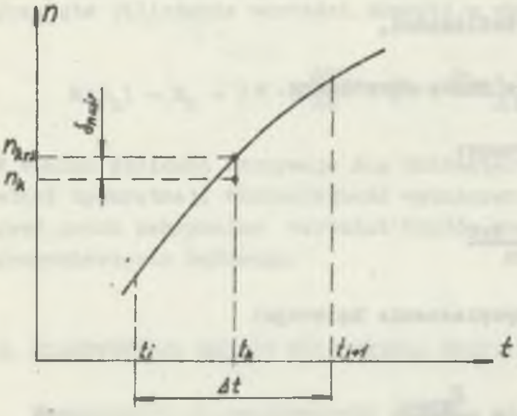
$$\delta_{Euśr} = 6,5 \cdot \frac{E_{max}}{T_r}(\Delta t)^2 \quad (6)$$

gdzie:

E_{max} [rad/s^2] - przyspieszenie kątowe odpowiadające wierzchołkowi charakterystyki,

T_r [s] - czas rozruchu (od n = 0 do n = n_s)

Δt [s] - czas zliczania impulsów kąta.



Rys. 4

Interpretacja graficzna błędu uśredniania dla prędkości obrotowej
Graphical interpretation of the averaging error for rotational speed

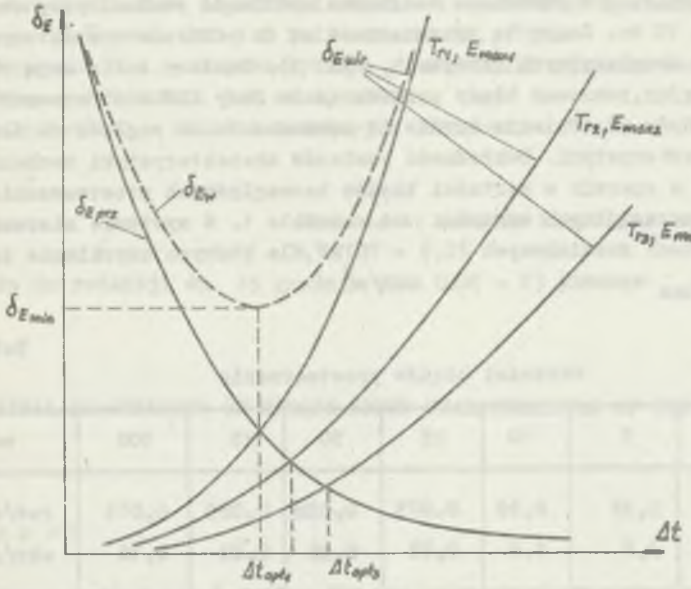
Zależność tę przedstawiono na rys. 5 w postaci rodziny krzywych dla parametórw E_{max} i T_r. Celem pomiaru jest wyznaczenie charakterystyki M = f(n) w zakresie n = 0 do n = n_s, jednakże zapewnienie jednakowej dokładności we wszystkich punktach nie jest możliwe, ponieważ błąd uśredniania zależy od jej krzywizny. Maksymalna dokładność pożądana jest dla obszaru wierzchołka charakterystyki, tj. w pobliżu momentu krytycznego, gdyż parametr ten oraz odpowiadający mu poślizg krytyczny są parametrami charakterystycznymi dla silnika i wchodzą do zależności opisujących jego pracę w układach napędowych. Przeprowadzone oszacowanie błędów pozwalają na minimalizację błędu wypadkowego w tym obszarze charakterystyki poprzez wyznaczenie optymalnego czasu zliczania impulsów Δt (rys. 5).

W oparciu o zależności (5) i (6) można określić analitycznie optymalną wartość Δt:

$$\Delta t_{opt} = 0,07 \cdot \sqrt[4]{\frac{T_r^2}{E_{max}}},$$

lub w przybliżeniu po wprowadzeniu jako parametrów P_n i n_s:

$$\Delta t_{opt} \cong 0,59\, n_s \cdot \sqrt[4]{\frac{J^3\, n_s}{P_n^3}}$$



Rys. 5

Zależność błędów przyspieszenia kątowego od czasu zliczenia impulsów kąta
Dependence of angular acceleration error on the time of counting of the angular pulses

gdzie:

P_n [W] - moc znamionowa silnika,

n_s [obr/s] - prędkość synchroniczna,

J [N m^2] - wypadkowy moment bezwładności wału silnika i hamownicy.

4. UWAGI KOŃCOWE

W oparciu o przytoczone wyżej zależności, uwzględniając zakres mocy badanych silników (0,5 - 70 kW), przy założeniu, że błąd maksymalny wypadkowy wyznaczenia momentu mechanicznego nie powinien być większy niż 1 %, ustalono następujące wartości czasów zliczenia impulsów:

Δt = (25 ; 50 ; 75 ; 100) ms.

Spośród tych czasów, znając parametry silnika, wybierany jest czas optymalny. W systemie pomiarowym stworzono dodatkowo możliwość pomiaru przy czasach $\Delta t = 5$ ms i 10 ms. Czasy te przeznaczone są do pomiarów charakterystyk rozruchowych oscylacyjnych (krzywa b, rys. 1). Pomiary takie mają charakter orientacyjny, ponieważ błędy przetwarzania przy krótkich czasach są znaczne, a błędy uśredniania trudne do oszacowania ze względu na złożony kształt charakterystyki. Dokładność pomiarów charakterystyki mechanicznej można ocenić w oparciu o wartości błędów bezwzględnych przetwarzania wyliczone dla poszczególnych wartości Δt - tabela 1. W systemie mierzone są silniki o mocach znamionowych (0,5 - 70)kW, dla których uzyskiwane przyspieszenia E_{max} wynoszą (5 - 500) rad/s^2

Tabela 1

Wartości błędów przetwarzania

Czas Δt	5	10	25	50	75	100	ms
$\delta_{prz\ n}$	0,38 3,6	0,19 1,8	0,075 0,72	0,038 0,36	0,025 0,24	0,019 0,18	rad/s obr/min
$\delta_{prz\ E}$	24	6	0,96	0,24	0,11	0,06	rad/s^2

Wartości błędów uśredniania dla obszaru wierzchołka charakterystyki są przy optymalnych czasach Δt porównywalne z błędami przetwarzania (warunek optymalizacji doboru Δt). Poza obszarem wierzchołka wartość tego błędu jest mniejsza (mniejsza krzywizna charakterystyki). Istnieje możliwość budowy urządzenia do pomiaru charakterystyki mechanicznej, stosując tzw. sposób stałego kąta, tzn. mierząc czas przyrostu drogi kątowej wału silnika o stałą wartość. Sposób ten nie zapewnia większej dokładności pomiaru [3], jest natomiast kłopotliwy technicznie, ponieważ wymaga rozbudowy układu elektronicznego.

LITERATURA

[1] Jakubiec J.: Przystosowanie przetwornika CPP-50 do pomiarów chwilowej prędkości obrotowej. PAK nr 3, 1980.

[2] Marcyniuk A., Grzesik S., Dykla Z.: Komputerowa instalacja do automatycznego badania silników elektrycznych. PAK nr 11, 1979.

[3] Urzędniczok H.: Opracowanie zagadnienia pomiaru charakterystyki rozruchowej silników asynchronicznych w komputerowym systemie badań. Praca dyplomowa. IME i E Politechniki Śl., 1980.
[4] Markiewicz M.: Analogowo-cyfrowe przetworniki optyczne serii CPP produkowane przez PZO. PAK nr 1, 1972.
[5] PN-72/E-04272 - Silniki indukcyjne 3-fazowe.

Recenzent: doc. dr hab. inż. Michał Szyper

Wpłynęło do redakcji dn. 15 grudnia 1984 r.

THE DIGITAL MEASUREMENT OF TORQUE-SPEED CHARACTERISTIC OF THE ASYNCHRONOUS MOTORS

S u m m a r y

A computer controlled system for measurement of an actual value of a rotational speed of the electric motors was described in this paper. The method of determination of the torque-speed chracteristic of the motors on the base of collection of actual values of rotational speed measured during starting the motors was presented. The error analysis of the rotational speed measurement was presented. The greatest error of determination of the torque moment and the best possible value of averaging time depend on the parameters of the motors has been fixed. A few exemplary values of greatest absolute error was published.

ЦИФРОВОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК МЕХАНИЧЕСКИХ ИНДУКЦИОННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ДВИГАТЕЛЕЙ

Р е з ю м е

В статье описана система цифрового измерения мгновенного значения скорости вращения ассинхронных двигателей, вычислительной машиной. Представлен метод определения кривой момента двигателей на основе множества мгновенных значений скорости вращения, измеренных во время пуска двигателя. Дан анализ погрешности измерения скорости, определена максимальная погрешность вычисления механического момента а также оптимальное значение времени осреднения в зависимости от парамеров двигателя. Даны примерные значения максимальной абсолютной погрешности для некоторых значений времени осреднения.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 98 Nr kol. 859

Zbigniew RACZYŃSKI

Instytut Elektryfikacji
i Automatyzacji Górnictwa
Politechniki Śląskiej

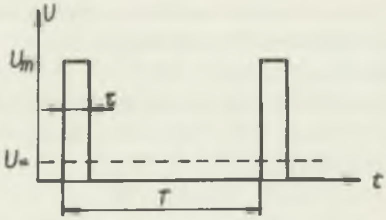
ANALIZA ZJAWISK TERMOKINETYCZNYCH ZACHODZĄCYCH W TENSOMETRZE ZASILANYM NAPIĘCIEM IMPULSOWYM

Streszczenie. W artykule przedstawiono metodę różnicową analizy pola temperatur w stanie cieplnie nieustalonym tensometru zasilanego napięciem impulsowym. W metodzie tej model cieplny tensometru odwzorowano w postaci analogu elektrycznego dwuwymiarowej siatki skupionych rezystancji i pojemności cieplnych. Przedstawiono wyniki obliczeń numerycznych cyklicznie nagrzewanego i chłodzonego tensometru dla różnych wartości stosunku okresu napięcia impulsowego do cieplnej stałej czasowej tensometru. Posłużyło to do weryfikacji dokładności wzorów przedstawionych w literaturze, a opisujących proces nagrzewania i chłodzenia drutów tensometru zasilanego napięciem impulsowym o małej częstotliwości impulsowania. Niska częstotliwość impulsowego napięcia zasilającego pozwala znacznie zwiększyć amplitudę impulsów, a tym samym czułość, przy zachowaniu dużej dokładności przetwarzania. Uzyskane wyniki obliczeń numerycznych potwierdziły celowość stosowania dokładniejszej analizy do rozwiązywania zagadnień cieplnych tensometru zasilanego napięciem impulsowym o okresie impulsowania wielokrotnie większym, niż cieplna stała czasowa tensometru.

1. WPROWADZENIE

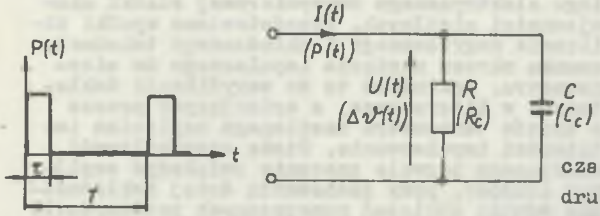
Znaczny wzrost czułości przetwornika tensometrycznego można uzyskać stosując zasilanie impulsowe. Wykorzystuje się tu możliwość zwiększenia mocy chwilowej impulsów prądowych zasilających mostek tensometryczny tak, żeby jednak średnia moc za okres impulsowania nie przekroczyła mocy dopuszczalnej. Przy impulsowym zasilaniu amplituda impulsów może być wielokrotnie większa, niż przy zasilaniu ciągłym (rys. 1) i w takim samym stosunku wzrośnie czułość napięciowa (chwilowa) przetwornika tensometrycznego.

Wiele publikacji [2, 4, 8] poświęconych jest zagadnieniu termokinetycznych stanów nieustalonych w tensometrze zasilanym impulsowo. Uproszczona analiza cieplnych procesów dynamicznych zachodzących w tensometrze nagrzewanym impulsem prądowym prowadzi do prostego analogu elektrycznego w postaci obwodu RC (rys. 2), dla którego wzory na przyrosty temperatur drutów tensometru są następujące [2]



Rys. 1

Przebieg napięcia impulsowego
Course of the pulses voltage



Rys. 2

Dwójnik RC
Two-terminal network RC

$$\Delta\vartheta_{max} = \vartheta_m \frac{1 - \exp(-\beta\gamma)}{1 - \exp(-\beta)} \quad (1)$$

$$\Delta\vartheta_{min} = \Delta\vartheta_{max} \exp\left[-\beta(1-\gamma)\right], \quad (2)$$

gdzie:

$\beta = \frac{T}{T_c}$ - stosunek okresu impulsu do cieplnej stałej czasowej tensometru,

$\gamma = \frac{\tau}{T}$ - współczynnik wypełnienia impulsu,

ϑ_m - ustalona temperatura drutów tensometru przy działaniu stałej mocy P_m.

Zakładając jednakową dopuszczalną temperaturę nagrzewania drutów tensometru przy zasilaniu napięciem stałym i impulsowym, otrzymuje się wzór (3) określający krotność dopuszczalnej amplitudy napięcia impulsowego w stosunku do dopuszczalnego napięcia stałego

$$N \overset{def}{=} \frac{U_{mdop}}{U_=} = \sqrt{\frac{1 - \exp(-\beta)}{1 - \exp(-\beta\gamma)}}. \quad (3)$$

Warto zauważyć, że przy $T \ll T_c$ (tzn. $\beta \ll 1$), krotność napięcia wynikająca z wzoru (3) wynosi

$$N = \sqrt{\frac{T}{\tau}}. \quad (4)$$

Z analizy wzoru (3) wynika, że w zakresie zasilania impulsowego o $\beta < 1$ zwiększenie czułości wymaga znacznego skrócenia czasu τ trwania impulsu, a więc do warunków, w których pogarsza się dokładność przetwarzania ze względu na elektryczne zjawiska nieustalone. Na przykład dla tensometru typu LP 21-10/600 f-my Hottinger naklejonego na podłożu dobrze przewodzącym ciepło cieplna stała czasowa T_c wynosi ok. 3,6 ms [6] . Dziesięciokrotne zwiększenie czułości (przy β = 0,4), ograniczy czas trwania impulsu do wartości τ = 12 μs przy częstotliwości impulsowania f = 700 Hz.

Znaczne zwiększenie amplitudy impulsów, a tym samym czułości przy zachowaniu dużej dokładności przetwarzania możliwe jest przy znacznym zmniejszeniu częstotliwości impulsowania [6] . Wymaga to jednak przejścia do zasilania impulsowego o $\beta > 1$ (chłodzenie tensometru po impulsie praktycznie do temperatury otoczenia).

W literaturze [4, 7] zakres zasilania impulsowego $\beta > 1$ analizowany jest również w oparciu o model cieplny tensometru, jak na rys. 2. Wyniki analizy tak uproszczonego modelu cieplnego istotnie różnią się od danych doświadczalnych, uzyskanych przy zasilaniu impulsowym o $\beta > 1$.

2. METODA RÓŻNICOWA ANALIZY POLA TEMPERATUR W STANIE CIEPLNYM NIEUSTALONYM

Zjawisko przewodzenia ciepła w stanie cieplnym nieustalonym w ciele niejednorodnym, zawierającym wewnętrzne źródła ciepła, opisuje równanie różniczkowe cząstkowe Fouriera [9]

$$c_p \varrho \frac{d\vartheta}{dt} - \dot{q}_v = \lambda_x \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} , \tag{5}$$

gdzie:

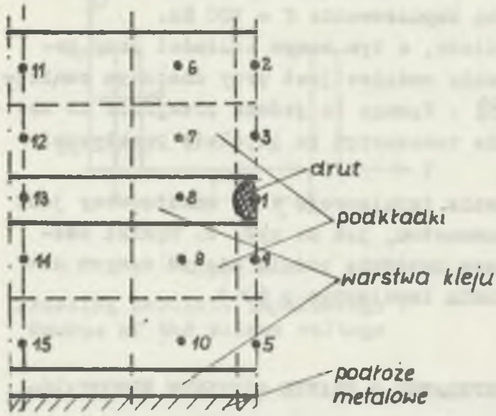
c_p – średnie ciepło właściwe ciała,

$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ – wypadkowe przewodności cieplne właściwe w kierunkach osi współrzędnych x, y, z,

$\dot{q}_v$ – ilość ciepła wydzielająca się w jednostce czasu i jednostce objętości,

ϱ – średnia gęstość właściwa ciała.

Tensometr stanowi jednak dość skomplikowany układ cieplny ze względu na kształt i występowanie kilku warstw przewodzących o różnych właściwościach. Dlatego najskuteczniejszym uproszczonym rozwiązaniem równania (5) jest zastąpienie stałych rozłożonych uproszczonym układem stałych skupionych. W tym celu należy przeprowadzić dyskretyzację pola cieplnego, a więc przejście z ośrodka ciągłego, opisanego równaniami różniczkowymi przewodnictwa cieplnego, na siatkę przestrzenną opisaną równaniami różnicowymi [9] . Ponieważ tensometr jest obiektem, w którym pole temperatur w kierunku drutów tensometru praktycznie jest jednorodne, wystarczy więc rozważać zagadnienie cieplne dwuwymiarowe.



Rys. 3
Podział różnicowy wycinka tensometru LP 21 - 10/600
Differential division of the sector strain gauge LP 21 - 10/600

Rys. 3 przedstawia schemat różnicowego podziału pola temperatur wycinka tensometru LP 21-10/600 (służącego jako model do obliczeń numerycznych). Ze względu na symetrię pola temperaturowego względem osi drucików, wystarczy rozważyć połowę pola elementu grzejnego drutu i tylko dla jednego drucika.

Dokładność przetwarzania przetwornika zależy od temperatury drutów tensometru. Mniej istotny jest rozkład pola temperatur w podkładkach tensometru. Z tego względu dokonano różnicowego podziału wycinka pola tensometru na 15 elementów, zagęszczając liczbę elementów w otoczeniu drutu.

Przy danym podziale tworzone są równania różnicowe (metoda Waniczewa [10]) na zasadzie bilansu przepływu energii dla poszczególnych elementów różnicowych.

Równanie różnicowe temperatury ϑ w chwili $\tau + 1$ dla każdego węzła jest następujące

$$\vartheta_{i,\tau+1} = p_{ii}\,\vartheta_{i,\tau} + \sum_j p_{ij}\,\vartheta_{j,\tau} + p_{iF}\,\vartheta_{Fi,\tau} + b_{i,\tau}\,, \tag{6}$$

gdzie współczynniki równania różnicowego są następujące:

$$p_{ii} = 1 - \frac{\Delta\tau}{C_{ci}}\left[\frac{1}{R_{iF}} + \sum_j \frac{1}{R_{ij}}\right], \quad p_{ij} = \frac{\Delta\tau}{C_{ci}R_{ij}}\,,$$

$$p_{iF} = \frac{\Delta\tau}{C_{ci}R_{iF}}\,, \quad b_{i,\tau} = \frac{\Delta\tau}{\varrho_i c_{pi}}\left[\dot{q}_{vi,\tau} + \frac{F_{\alpha i}}{V_i}\dot{q}_{Fi,\tau}\right],$$

gdzie:

$F_{\alpha i}$ - pole zewnętrznej powierzchni i-tego elementu różnicowego,

V_i - objętość i-tego elementu różnicowego,

$\dot{q}_{Fi,\tau}$ - średnia gęstość objętościowa ciepła dopływającego z zewnętrznej powierzchni ciała do węzła i w chwili τ,

$\dot{q}_{vi,\tau}$ - średnia gęstość objętościowa wewnętrznych źródeł ciepła w węźle i w chwili τ.

Równania (6) są liniowe dla każdego z węzłów i zawierają tylko jedną niewiadomą $\vartheta_{i,\tau+1}$. Liczba równań odpowiada liczbie węzłów i wymaga zastosowania maszyny cyfrowej, gdy liczba węzłów jest duża.

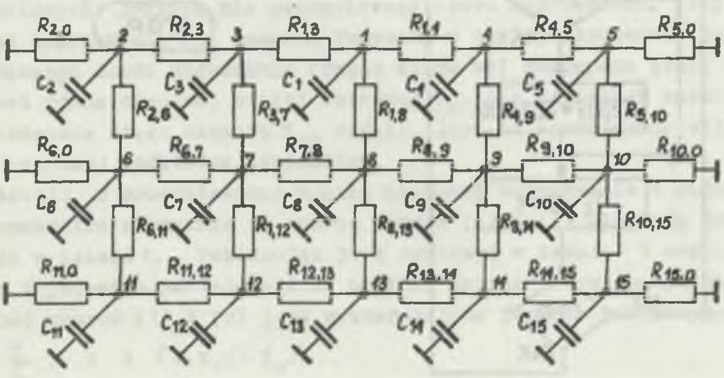
Rozwiązanie różnicowe zagadnienia nieustalonego przewodnictwa ciepła powinno spełniać warunki zbieżności i stabilności [1].

Obliczenia numeryczne stanów cieplnie nieustalonych przeprowadzono dla tensometru typu LP 21-10/600 firmy Hottinger [3] o rezystancji ok. 600Ω. Stałe materiałowe zaczerpnięto z pracy [5]. Jest to tensometr używany w krajowych czujnikach nacisku typu CN klasy 0,1.

Rozpatrywany tensometr naklejony jest na podłożu metalowym dobrze przewodzącym ciepło.

Zagadnienie sprowadza się do badania przyrostu temperatury poszczególnych punktów tensometru względem podłoża metalowego i otoczenia o stałej temperaturze (dla prostoty obliczeń przyjętej równą zero).

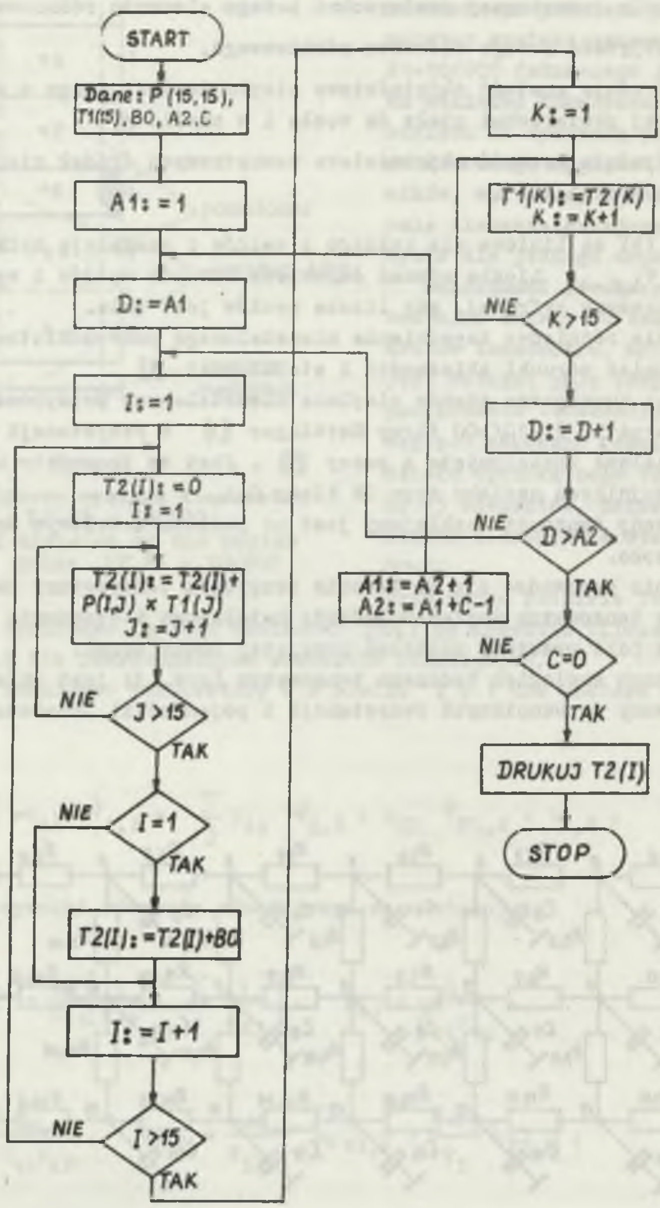
Elektrycznym analogiem badanego tensometru (rys. 3) jest układ elektryczny (zbudowany ze skupionych rezystancji i pojemności) przedstawiony na rys. 4.



Rys. 4

Schemat zastępczy wycinka pola tensometru

Substitutional scheme of the sector-field strain gauge



Rys. 5

Schemat blokowy obliczeń numerycznych
Block scheme of the numerical calculations

Schemat działań, według którego przeprowadzone zostały obliczenia numeryczne, pokazano na rys. 5.

Weryfikację dokładności wzorów (1) i (2) dla różnych wartości β przeprowadzono, badając numerycznie proces cyklicznie nagrzewanego i chłodzonego tensometru. Równocześnie przeprowadzono obliczenia wykorzystując wzory (1) i (2). Cieplna stała czasowa tensometru określona została ze wzoru

$$T_c = R_c C_c \approx 3{,}6 \text{ ms}, \tag{7}$$

gdzie:

C_c - pojemność cieplna drutów tensometru określona z danych materiałowych,

R_c - zastępcza rezystancja cieplna od drutów tensometru do podłoża metalowego.

Wyniki obliczeń przedstawione są w tablicach 1 i 2.

3. INTERPRETACJA WYNIKÓW OBLICZEŃ

Przy kroku obliczeń maszynowych $\Delta\tau = 50\ \mu s$ analiza cyklicznego nagrzewania i chłodzenia tensometru jest bardzo czasochłonna. Z tego powodu ograniczono się do 35 cykli nagrzewania i chłodzenia dla pozycji 1 i 2 oraz 7 cykli dla pozycji 3 (tabl. 1). Można przyjąć, że następne cykle nagrzewania i chłodzenia drutów tensometru są procesem ustalonym.

Z analizy wyników podanych w tabeli 1 dla ustalonego stanu nagrzewania i chłodzenia tensometru widać, że zastępcza cieplna stała czasowa nagrzewania T_{z1} jest równa cieplnej stałej czasowej T_c (wyznaczonej z danych materiałowych) jedynie dla początkowego czasu nagrzewania. Przy większych czasach nagrzewania T_{z1} rośnie. Podobnie w cyklu chłodzenia, jedynie dla początkowego czasu chłodzenia (rzędu kilku ms) zastępcza stała czasowa T_{z2} jest równa cieplnej stałej czasowej T_c. Dla dłuższego czasu chłodzenia zastępcza stała czasowa T_{z2} rośnie. Jest to spowodowane wpływem pojemności cieplnej podkładek tensometru.

W tabeli 2 przedstawiono wyniki obliczeń nagrzewania i chłodzenia drutów tensometru otrzymane za pomocą wzorów (1) i (2) dla tych samych warunków jak w tabeli 1. Porównując je z wynikami w tabeli 1 można stwierdzić, że dla tensometru naklejonego na podłożu dobrze przewodzącym ciepło, dokładność wzorów (1) i (2) jest wystarczająca jedynie dla przypadku

$\beta = \frac{T}{T_c} < 1$ i $\tau = t_1 \ll T_c$.

Tabela 1

Wyniki obliczeń numerycznych cyklicznego nagrzewania i chłodzenia drutów tensometru

Lp	Nr cyklu	Nagrzewanie				Chłodzenie			
		U_m	t_1	$\vartheta_1(t_1)$	T_{z1}	t_2	$\vartheta_1(t_2)$	T_{z2}	ϑ_{ust}
		V	ms	K	ms	ms	K	ms	K
1	1	100	0,05	2,31	3,57	3,5	0,30	1,71	166
	2	100	0,05	2,60	3,57	3,5	0,44	1,96	166
	19	100	0,05	3,44	3,56	3,5	1,16	3,22	166
	20	100	0,05	3,46	3,56	3,5	1,18	3,26	166
	34	100	0,05	3,70	3,55	3,5	1,40	3,62	166
	35	100	0,05	3,70	3,55	3,5	1,41	3,64	166
2	1	120	0,1	6,50	3,62	10	0,29	3,20	239
	2	120	0,1	6,79	3,62	10	0,46	3,71	239
	15	120	0,1	7,68	3,61	10	1,20	5,38	239
	16	120	0,1	7,70	3,61	10	1,22	5,42	239
	34	120	0,1	7,84	3,61	10	1,35	5,67	239
	35	120	0,1	7,84	3,61	10	1,35	5,67	239
3	1	50	2	13,24	5,20	200	0,04	34,47	41,5
	2	50	2	13,28	5,20	200	0,04	34,45	41,5
	7	50	2	13,28	5,20	200	0,04	34,45	41,5

Tabela 2

Wyniki obliczeń nagrzewania i chłodzenia drutów tensometru z wykorzystaniem wzorów (1) i (2)

Lp	Nagrzewanie				Chłodzenie		
	U_m	t_1	T_{c1}	$\vartheta_1(t_1)$	t_2	$\vartheta_1(t_2)$	β
	V	ms	ms	K	ms	K	-
1	100	0,05	3,6	3,68	3,5	1,41	0,99
2	120	0,1	3,6	6,98	10	0,446	2,81
3	50	2	3,6	17,69	200	2,3 E-23	56,1

Wykazano więc, że w przypadku $\beta>1$ zjawiska termokinetyczne zachodzące w tensometrze rezystancyjnym należy analizować za pomocą innego modelu. W procesie nagrzewania i chłodzenia tensometru w tych warunkach istnieje potrzeba rozróżnienia dwóch cieplnych stałych czasowych, co będzie tematem następnego artykułu.

LITERATURA

[1] Douglas J.: On the relation between stability and convergence in the numerical solution of linear parabolic and hyperbolic differential equations. J. Soc. Ind. Appl. Math., 4/56.

[2] Gruzdiew S.W., Proszin E.M.: Impulsnaja tenzomietria. Izd. "Energia", Moskwa 1976.

[3] Hottinger Baldwin Messtechnik GMBH. Dehnungsmesstreifen DMS und Zubehor.

[4] Ilinskaja Ł.S., Podmarkov A.N.: Połuprawodnikowyje tenzodatcziki. Izd. Energia, Moskwa 1980.

[5] Kohlraush F.: Fizyka laboratoryjna t.I. PWN, Warszawa 1959.

[6] Raczyński Zb.: Tensometria impulsowa o granicznie małym wypełnieniu okresu impulsów. Rozprawa doktorska Politechniki Śląskiej, Gliwice 1983.

[7] Skotnikov A.H., Siereznov A.N.: Wybor parametrow impulsnego pitanija w mostowych tenzometriczeskich schemach. Izm. Techn., 6/1970.

[8] Stein P.K.: Pulsing strain gage-circuits. Inst. and Control Syst., Febr. 1965.

[9] Szargut J.: Metody numeryczne w obliczeniach cieplnych pieców przemysłowych. Wyd. Śląsk, Katowice 1977.

[10] Waniczew A.P.: Pribliżonnyj metod rieszenia zadacz tiepłoprowadnosti. Izw. AN SSSR, 12/46.

Recenzent: doc. dr inż. Zbigniew Kędryna

Wpłynęło do redakcji dn. 15 stycznia 1985 r.

ANALYSIS OF THERMOKINETIC PHENOMENA OF PULSING STRAIN GAUGE

S u m m a r y

The paper presents a differential method of analising of the temperature field in the state of a thermally unstable pulsing strain gauge.

In this method a thermal model of the strain gauge is mapped as an elektrical analog of the two dimensional network of concentrated resistances and capacitances. The results of numerical calculations of the cyclically heated and cooled strain gauge are obtained. It is calculated with various impulse voltage periods to the thermal time-constant ratios of the strain gauge. It has made it possible to verify the accuracy of these formulas presented in literature which describe processes of the heating and cooling of the strain gauges wires, supplied by pulsive low frequency voltage. The low frequency of the pulsive voltage permits to increase significantly the amplitude of impulses which involves an increase of sensitivity keeping a high accuracy of converting. The obtained numerical results confirmed the expediency of applying an accurate analysis to the solution of thermal questions of a pulsing strain gauge, when the pulse period is considerably greater than the thermal time-constant of the strain gauge.

АНАЛИЗ ЯВЛЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ТЕНЗОРЕЗИСТОРА ПИТАЕМОГО ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ИМПУЛЬСАМИ НАПРЯЖЕНИЯ

Р е з ю м е

В статье представлен дифференцальный метод анализа теплопроводности в состоянии неопределённой тепловой тензорезистора с импульсным питанием. В этом методе тепловая модель тензорезистора моделируется электрическим аналогом двухразмерной сети сосредоточенных резисторов и ёмкостей. Представлены результаты машинных вычислений циклически нагреваемого и охлаждаемого тензорезистора для различных значений соотношения периода импульсного напряжения к тепловой постоянной времени тензорезистора. Это послужило к проверке точности образцов формул приведенных в литературе, описывающих процесс нагрева и охлаждения проволоки тензорезистора питаемого импульсами напряжения с низкой частотой импульсирования. Низкая частота напряжения питающих импульсов позваляет значительно увеличить амплитуду импульсов а вместе с тем и чувствительность при сохранении большой точности преобразования. Полученные результаты машинных вычислений подтвердили целесообразность применения точного анализа к решению задач теплопроводности тензорезистора питаемого импульсным напряжением с периодом импульсов питания на много большим нежели тепловая постоянная времени тензорезистора.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1985

Seria: ELEKTRYKA z. 98 Nr kol. 859

Zbigniew RACZYŃSKI

Instytut Elektryfikacji
i Automatyzacji Górnictwa
Politechniki Śląskiej

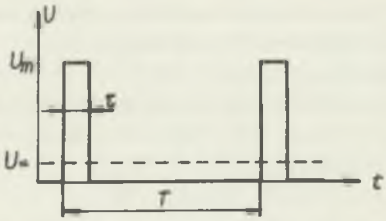
ANALIZA ZJAWISK TERMOKINETYCZNYCH ZACHODZĄCYCH W TENSOMETRZE ZASILANYM NAPIĘCIEM IMPULSOWYM

Streszczenie. W artykule przedstawiono metodę różnicową analizy pola temperatur w stanie cieplnie nieustalonym tensometru zasilanego napięciem impulsowym. W metodzie tej model cieplny tensometru odwzorowano w postaci analogu elektrycznego dwuwymiarowej siatki skupionych rezystancji i pojemności cieplnych. Przedstawiono wyniki obliczeń numerycznych cyklicznie nagrzewanego i chłodzonego tensometru dla różnych wartości stosunku okresu napięcia impulsowego do cieplnej stałej czasowej tensometru. Posłużyło to do weryfikacji dokładności wzorów przedstawionych w literaturze, a opisujących proces nagrzewania i chłodzenia drutów tensometru zasilanego napięciem impulsowym o małej częstotliwości impulsowania. Niska częstotliwość impulsowego napięcia zasilającego pozwala znacznie zwiększyć amplitudę impulsów, a tym samym czułość, przy zachowaniu dużej dokładności przetwarzania. Uzyskane wyniki obliczeń numerycznych potwierdziły celowość stosowania dokładniejszej analizy do rozwiązywania zagadnień cieplnych tensometru zasilanego napięciem impulsowym o okresie impulsowania wielokrotnie większym, niż cieplna stała czasowa tensometru.

1. WPROWADZENIE

Znaczny wzrost czułości przetwornika tensometrycznego można uzyskać stosując zasilanie impulsowe. Wykorzystuje się tu możliwość zwiększenia mocy chwilowej impulsów prądowych zasilających mostek tensometryczny tak, żeby jednak średnia moc za okres impulsowania nie przekroczyła mocy dopuszczalnej. Przy impulsowym zasilaniu amplituda impulsów może być wielokrotnie większa, niż przy zasilaniu ciągłym (rys. 1) i w takim samym stosunku wzrośnie czułość napięciowa (chwilowe) przetwornika tensometrycznego.

Wiele publikacji [2, 4, 8] poświęconych jest zagadnieniu termokinetycznych stanów nieustalonych w tensometrze zasilanym impulsowo. Uproszczona analiza cieplnych procesów dynamicznych zachodzących w tensometrze nagrzewanym impulsem prądowym prowadzi do prostego analogu elektrycznego w postaci obwodu RC (rys. 2), dla którego wzory na przyrosty temperatur drutów tensometru są następujące [2]



Rys. 1

Przebieg napięcia impulsowego
Course of the pulses voltage

$$\Delta\vartheta_{max} = \vartheta_m \frac{1 - \exp(-\beta\gamma)}{1 - \exp(-\beta)} \quad (1)$$

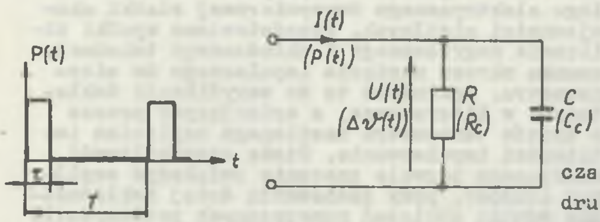
$$\Delta\vartheta_{min} = \Delta\vartheta_{max} \exp\left[-\beta(1-\gamma)\right], \quad (2)$$

gdzie:

$\beta = \frac{T}{T_c}$ – stosunek okresu impulsu do cieplnej stałej czasowej tensometru,

$\gamma = \frac{\tau}{T}$ – współczynnik wypełnienia impulsu,

ϑ_m – ustalona temperatura drutów tensometru przy działaniu stałej mocy P_m.



Rys. 2

Dwójnik RC
Two-terminal network RC

Zakładając jednakową dopuszczalną temperaturę nagrzewania drutów tensometru przy zasilaniu napięciem stałym i impulsowym, otrzymuje się wzór (3) określający krotność dopuszczalnej amplitudy napięcia impulsowego w stosunku do dopuszczalnego napięcia stałego

$$N \overset{def}{=} \frac{U_{mdop}}{U_=} = \sqrt{\frac{1 - \exp(-\beta)}{1 - \exp(-\beta\gamma)}}. \quad (3)$$

Warto zauważyć, że przy $T \ll T_c$ (tzn. $\beta \ll 1$), krotność napięcia wynikająca z wzoru (3) wynosi

$$N = \sqrt{\frac{T}{\tau}}. \quad (4)$$

Z analizy wzoru (3) wynika, że w zakresie zasilania impulsowego o $\beta < 1$ zwiększenie czułości wymaga znacznego skrócenia czasu τ trwania impulsu, a więc do warunków, w których pogarsza się dokładność przetwarzania ze względu na elektryczne zjawiska nieustalone. Na przykład dla tensometru typu LP 21-10/600 f-my Hottinger naklejonego na podłożu dobrze przewodzącym ciepło cieplna stała czasowa T_c wynosi ok. 3,6 ms [6] . Dziesięciokrotne zwiększenie czułości (przy β = 0,4), ograniczy czas trwania impulsu do wartości τ = 12 μs przy częstotliwości impulsowania f = 700 Hz.

Znaczne zwiększenie amplitudy impulsów, a tym samym czułości przy zachowaniu dużej dokładności przetwarzania możliwe jest przy znacznym zmniejszeniu częstotliwości impulsowania [6] . Wymaga to jednak przejścia do zasilania impulsowego o $\beta > 1$ (chłodzenie tensometru po impulsie praktycznie do temperatury otoczenia).

W literaturze [4, 7] zakres zasilania impulsowego $\beta > 1$ analizowany jest również w oparciu o model cieplny tensometru, jak na rys. 2. Wyniki analizy tak uproszczonego modelu cieplnego istotnie różnią się od danych doświadczalnych, uzyskanych przy zasilaniu impulsowym o $\beta > 1$.

2. METODA RÓŻNICOWA ANALIZY POLA TEMPERATUR W STANIE CIEPLNYM NIEUSTALONYM

Zjawisko przewodzenia ciepła w stanie cieplnym nieustalonym w ciele niejednorodnym, zawierającym wewnętrzne źródła ciepła, opisuje równanie różniczkowe cząstkowe Fouriera [9]

$$c_p \varrho \frac{d\vartheta}{dt} - \dot{q}_v = \lambda_x \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}, \tag{5}$$

gdzie:

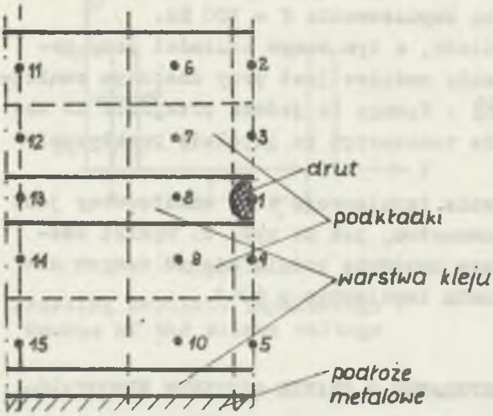
c_p – średnie ciepło właściwe ciała,

$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ – wypadkowe przewodności cieplne właściwe w kierunkach osi współrzędnych x, y, z,

$\dot{q}_v$ – ilość ciepła wydzielająca się w jednostce czasu i jednostce objętości,

ϱ – średnia gęstość właściwa ciała.

Tensometr stanowi jednak dość skomplikowany układ cieplny ze względu na kształt i występowanie kilku warstw przewodzących o różnych właściwościach. Dlatego najskuteczniejszym uproszczonym rozwiązaniem równania (5) jest zastąpienie stałych rozłożonych uproszczonym układem stałych skupionych. W tym celu należy przeprowadzić dyskretyzację pola cieplnego, a więc przejście z ośrodka ciągłego, opisanego równaniami różniczkowymi przewodnictwa cieplnego, na siatkę przestrzenną opisaną równaniami różnicowymi [9] . Ponieważ tensometr jest obiektem, w którym pole temperatur w kierunku drutów tensometru praktycznie jest jednorodne, wystarczy więc rozważać zagadnienie cieplne dwuwymiarowe.



Rys. 3
Podział różnicowy wycinka tensometru LP 21 - 10/600
Differential division of the sector strain gauge LP 21 - 10/600

Rys. 3 przedstawia schemat różnicowego podziału pola temperatur wycinka tensometru LP 21-10/600 (służącego jako model do obliczeń numerycznych). Ze względu na symetrię pola temperaturowego względem osi drucików, wystarczy rozważyć połowę pola elementu grzejnego drutu i tylko dla jednego drucika.

Dokładność przetwarzania przetwornika zależy od temperatury drutów tensometru. Mniej istotny jest rozkład pola temperatur w podkładkach tensometru. Z tego względu dokonano różnicowego podziału wycinka pola tensometru na 15 elementów, zagęszczając liczbę elementów w otoczeniu drutu.

Przy danym podziale tworzone są równania różnicowe (metoda Waniczewa [10]) na zasadzie bilansu przepływu energii dla poszczególnych elementów różnicowych.

Równanie różnicowe temperatury ϑ w chwili $\tau + 1$ dla każdego węzła jest następujące

$$\vartheta_{i,\tau+1} = p_{ii}\,\vartheta_{i,\tau} + \sum_{j} p_{ij}\,\vartheta_{j,\tau} + p_{iP}\,\vartheta_{Pi,\tau} + b_{i,\tau}\,, \tag{6}$$

gdzie współczynniki równania różnicowego są następujące:

$$p_{ii} = 1 - \frac{\Delta\tau}{C_{ci}}\left[\frac{1}{R_{iP}} + \sum_{j}\frac{1}{R_{ij}}\right], \quad p_{ij} = \frac{\Delta\tau}{C_{ci}R_{ij}},$$

$$p_{iP} = \frac{\Delta\tau}{C_{ci}R_{iP}}, \quad b_{i,\tau} = \frac{\Delta\tau}{\varrho_i c_{pi}}\left[\dot{q}_{vi,\tau} + \frac{P_{\alpha i}}{V_i}\dot{q}_{Pi,\tau}\right],$$

gdzie:

$F_{\alpha i}$ - pole zewnętrznej powierzchni i-tego elementu różnicowego,

V_i - objętość i-tego elementu różnicowego,

$\dot{q}_{Fi,\tau}$ - średnia gęstość objętościowa ciepła dopływającego z zewnętrznej powierzchni ciała do węzła i w chwili τ,

$\dot{q}_{vi,\tau}$ - średnia gęstość objętościowa wewnętrznych źródeł ciepła w węźle i w chwili τ.

Równania (6) są liniowe dla każdego z węzłów i zawierają tylko jedną niewiadomą $\vartheta_{i,\tau+1}$. Liczba równań odpowiada liczbie węzłów i wymaga zastosowania maszyny cyfrowej, gdy liczba węzłów jest duża.

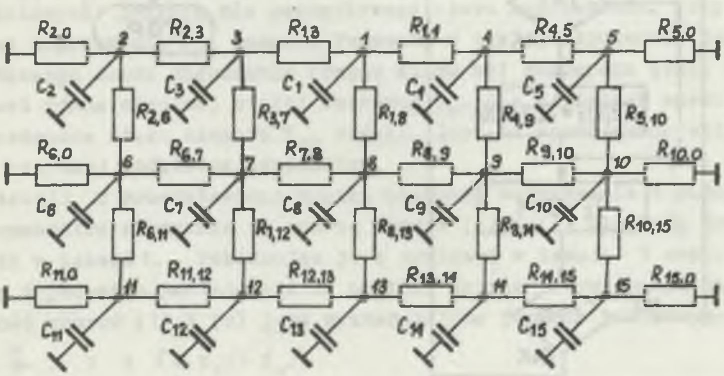
Rozwiązanie różnicowe zagadnienia nieustalonego przewodnictwa ciepła powinno spełniać warunki zbieżności i stabilności [1].

Obliczenia numeryczne stanów cieplnie nieustalonych przeprowadzono dla tensometru typu LP 21-10/600 firmy Hottinger [3] o rezystancji ok. 600Ω. Stałe materiałowe zaczerpnięto z pracy [5]. Jest to tensometr używany w krajowych czujnikach nacisku typu CN klasy 0,1.

Rozpatrywany tensometr naklejony jest na podłożu metalowym dobrze przewodzącym ciepło.

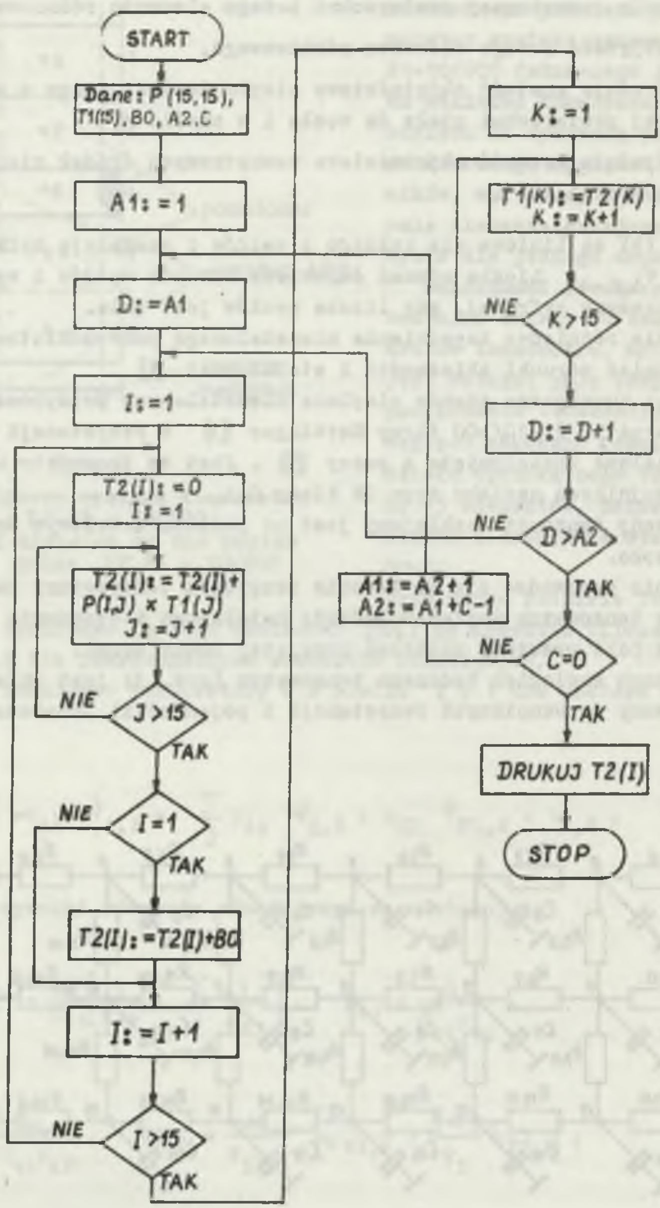
Zagadnienie sprowadza się do badania przyrostu temperatury poszczególnych punktów tensometru względem podłoża metalowego i otoczenia o stałej temperaturze (dla prostoty obliczeń przyjętej równą zero).

Elektrycznym analogiem badanego tensometru (rys. 3) jest układ elektryczny (zbudowany ze skupionych rezystancji i pojemności) przedstawiony na rys. 4.



Rys. 4

Schemat zastępczy wycinka pola tensometru
Substitutional scheme of the sector-field strain gauge



Rys. 5

Schemat blokowy obliczeń numerycznych

Block scheme of the numerical calculations

Schemat działań, według którego przeprowadzone zostały obliczenia numeryczne, pokazano na rys. 5.

Weryfikację dokładności wzorów (1) i (2) dla różnych wartości β przeprowadzono, badając numerycznie proces cyklicznie nagrzewanego i chłodzonego tensometru. Równocześnie przeprowadzono obliczenia wykorzystując wzory (1) i (2). Cieplna stała czasowa tensometru określona została ze wzoru

$$T_c = R_c C_c \approx 3{,}6 \text{ ms}, \tag{7}$$

gdzie:

C_c - pojemność cieplna drutów tensometru określona z danych materiałowych,

R_c - zastępcza rezystancja cieplna od drutów tensometru do podłoża metalowego.

Wyniki obliczeń przedstawione są w tablicach 1 i 2.

3. INTERPRETACJA WYNIKÓW OBLICZEŃ

Przy kroku obliczeń maszynowych $\Delta\tau = 50\ \mu s$ analiza cyklicznego nagrzewania i chłodzenia tensometru jest bardzo czasochłonna. Z tego powodu ograniczono się do 35 cykli nagrzewania i chłodzenia dla pozycji 1 i 2 oraz 7 cykli dla pozycji 3 (tabl. 1). Można przyjąć, że następne cykle nagrzewania i chłodzenia drutów tensometru są procesem ustalonym.

Z analizy wyników podanych w tabeli 1 dla ustalonego stanu nagrzewania i chłodzenia tensometru widać, że zastępcza cieplna stała czasowa nagrzewania T_{z1} jest równa cieplnej stałej czasowej T_c (wyznaczonej z danych materiałowych) jedynie dla początkowego czasu nagrzewania. Przy większych czasach nagrzewania T_{z1} rośnie. Podobnie w cyklu chłodzenia, jedynie dla początkowego czasu chłodzenia (rzędu kilku ms) zastępcza stała czasowa T_{z2} jest równa cieplnej stałej czasowej T_c. Dla dłuższego czasu chłodzenia zastępcza stała czasowa T_{z2} rośnie. Jest to spowodowane wpływem pojemności cieplnej podkładek tensometru.

W tabeli 2 przedstawiono wyniki obliczeń nagrzewania i chłodzenia drutów tensometru otrzymane za pomocą wzorów (1) i (2) dla tych samych warunków jak w tabeli 1. Porównując je z wynikami w tabeli 1 można stwierdzić, że dla tensometru naklejonego na podłożu dobrze przewodzącym ciepło, dokładność wzorów (1) i (2) jest wystarczająca jedynie dla przypadku

$\beta = \frac{T}{T_c} < 1$ i $\tau = t_1 \ll T_c$.

Tabela 1

Wyniki obliczeń numerycznych cyklicznego nagrzewania i chłodzenia drutów tensometru

Lp	Nr cyklu	Nagrzewanie				Chłodzenie			
		U_m	t_1	$\vartheta_1(t_1)$	T_{z1}	t_2	$\vartheta_1(t_2)$	T_{z2}	ϑ_{ust}
		V	ms	K	ms	ms	K	ms	K
	1	100	0,05	2,31	3,57	3,5	0,30	1,71	166
	2	100	0,05	2,60	3,57	3,5	0,44	1,96	166
	19	100	0,05	3,44	3,56	3,5	1,16	3,22	166
1	20	100	0,05	3,46	3,56	3,5	1,18	3,26	166
	34	100	0,05	3,70	3,55	3,5	1,40	3,62	166
	35	100	0,05	3,70	3,55	3,5	1,41	3,64	166
	1	120	0,1	6,50	3,62	10	0,29	3,20	239
	2	120	0,1	6,79	3,62	10	0,46	3,71	239
2	15	120	0,1	7,68	3,61	10	1,20	5,38	239
	16	120	0,1	7,70	3,61	10	1,22	5,42	239
	34	120	0,1	7,84	3,61	10	1,35	5,67	239
	35	120	0,1	7,84	3,61	10	1,35	5,67	239
	1	50	2	13,24	5,20	200	0,04	34,47	41,5
3	2	50	2	13,28	5,20	200	0,04	34,45	41,5
	7	50	2	13,28	5,20	200	0,04	34,45	41,5

Tabela 2

Wyniki obliczeń nagrzewania i chłodzenia drutów tensometru z wykorzystaniem wzorów (1) i (2)

Lp	Nagrzewanie				Chłodzenie		
	U_m	t_1	T_{c1}	$\vartheta_1(t_1)$	t_2	$\vartheta_1(t_2)$	β
	V	ms	ms	K	ms	K	-
1	100	0,05	3,6	3,68	3,5	1,41	0,99
2	120	0,1	3,6	6,98	10	0,446	2,81
3	50	2	3,6	17,69	200	2,3 E-23	56,1

Wykazano więc, że w przypadku $\beta>1$ zjawiska termokinetyczne zachodzące w tensometrze rezystancyjnym należy analizować za pomocą innego modelu. W procesie nagrzewania i chłodzenia tensometru w tych warunkach istnieje potrzeba rozróżnienia dwóch cieplnych stałych czasowych, co będzie tematem następnego artykułu.

LITERATURA

[1] Douglas J.: On the relation between stability and convergence in the numerical solution of linear parabolic and hyperbolic differential equations. J. Soc. Ind. Appl. Math., 4/56.

[2] Gruzdiew S.W., Proszin E.M.: Impulsnaja tenzomietria. Izd. "Energia", Moskwa 1976.

[3] Hottinger Baldwin Messtechnik GMBH. Dehnungsmesstreifen DMS und Zubehor.

[4] Ilinskaja Ł.S., Podmarkov A.N.: Połuprawodnikowyje tenzodatcziki. Izd. Energia, Moskwa 1980.

[5] Kohlrausch F.: Fizyka laboratoryjna t.I. PWN, Warszawa 1959.

[6] Raczyński Zb.: Tensometria impulsowa o graniczaie małym wypełnieniu okresu impulsów. Rozprawa doktorska Politechniki Śląskiej, Gliwice 1983.

[7] Skotnikov A.H., Siereznov A.N.: Wybor parametrow impulsnego pitanija w mostowych tenzometriczeskich schemach. Izm. Techn., 6/1970.

[8] Stein P.K.: Pulsing strain gage-circuits. Inst. and Control Syst., Febr. 1965.

[9] Szargut J.: Metody numeryczne w obliczeniach cieplnych pieców przemysłowych. Wyd. Śląsk, Katowice 1977.

[10] Waniczew A.P.: Prybliżonnyj metod rieszenia zadacz tiepłoprowadnosti. Izw. AN SSSR, 12/46.

Recenzent: doc. dr inż. Zbigniew Kędryna

Wpłynęło do redakcji dn. 15 stycznia 1985 r.

ANALYSIS OF THERMOKINETIC PHENOMENA OF PULSING STRAIN GAUGE

S u m m a r y

The paper presents a differential method of analising of the temperature field in the state of a thermally unstable pulsing strain gauge.

In this method a thermal model of the strain gauge is mapped as an elektrical analog of the two dimensional network of concentrated resistances and capacitances. The results of numerical calculations of the cyclically heated and cooled strain gauge are obtained. It is calculated with various impulse voltage periods to the thermal time-constant ratios of the strain gauge. It has made it possible to verify the accuracy of these formulas presented in literature which describe processes of the heating and cooling of the strain gauges wires, supplied by pulsive low frequency voltage. The low frequency of the pulsive voltage permits to increase significantly the amplitude of impulses which involves an increase of sensitivity keeping a high accuracy of converting. The obtained numerical results confirmed the expediency of applying an accurate analysis to the solution of thermal questions of a pulsing strain gauge, when the pulse period is considerably greater than the thermal time-constant of the strain gauge.

АНАЛИЗ ЯВЛЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ТЕНЗОРЕЗИСТОРА ПИТАЕМОГО ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ИМПУЛЬСАМИ НАПРЯЖЕНИЯ

Р е з ю м е

В статье представлен дифференцальный метод анализа теплопроводности в состоянии неопределённой тепловой тензорезистора с импульсным питанием. В этом методе тепловая модель тензорезистора моделируется электрическим аналогом двухразмерной сети сосредоточенных резисторов и ёмкостей. Представлены результаты машинных вычислений циклически нагреваемого и охлаждаемого тензорезистора для различных значений соотношения периода импульсного напряжения к тепловой постоянной времени тензорезистора. Это послужило к проверке точности образцов формул приведенных в литературе, описывающих процесс нагрева и охлаждения проволоки тензорезистора питаемого импульсами напряжения с низкой частотой импульсирования. Низкая частота напряжения питающих импульсов позваляет значительно увеличить амплитуду импульсов а вместе с тем и чувствительность при сохранении большой точности преобразования. Полученные результаты машинных вычислений подтвердили целесообразность применения точного анализа к решению задач теплопроводности тензорезистора питаемого импульсным напряжением с периодом импульсов питания на много больших нежели тепловая постоянная времени тензорезистора.